

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

4 отчёт по методам вычислений
Поиск всех собственных значений.

Выполнил:
студент 4 курса Калистый Ф.Н.

Санкт-Петербург 2023

1 Постановка задачи

Дана матрица A . Необходимо найти её собственные значения. Если A — эрмитова матрица, то это можно сделать методом вращений Якоби.

2 Метод вращений Якоби

Преобразованием подобия называется преобразование матрицы A :

$$B = FAF^{-1}$$

Так как преобразование подобия не меняет спектра матрицы, тогда можно A свести к диагональному виду при помощи унитарной матрицы F :

$$B = F^T AF$$

Не существует конечной цепочки преобразований подобия, приводящей произвольную матрицу к диагональной или верхней треугольной форме. Поэтому будем приводить её за конечное число шагов к "достаточно" диагональной. Метод заключается в построении последовательности матриц A_k так, чтобы последовательно обнулять элементы матрицы и максимально приблизиться к диагональной.

Итерационная формула имеет следующий вид:

$$A_{k+1} = (V_{ij}(\phi_k)A_k)V_{ij}(\phi_k)$$

,где $V_{ij}(\phi_k)$ - матрица поворота, а ϕ :

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(2\phi) = \frac{-2A_{ij}}{A_{jj} - A_{ii}}, A_{ii} \neq A_{jj}; \\ \phi = \frac{\pi}{4}, A_{ii} = A_{jj} \end{cases}$$

Можно по разному выбирать элемент который будем обнулять. Первый примененный мной вариант это выбор максимального элемента, i, j - это координаты максимального числа в матрице. Второй вариант - это циклический. В этом методе просто выбирается некоторый порядок элементов, и поочередно они обнуляются.

3 Расчет

Буду искать собственные числа матрицы Гильберта. Метод Якоби реализован с помощью двух разных стратегий выбора обнуляемого элемента. Также буду считать количество итераций потраченных на достижение точности $\varepsilon = 1e^{-12}$.

4 Тесты

4.1 Тест 1

матрица Гильберта 8×8 .

Методу Якоби с выбором максимального элемента потребовалось 96 итерация, а с циклическим выбором 140 итераций. Значения собственных чисел практически совпадают.

4.2 Тест 2

матрица Гильберта 20×20 .

Методу Якоби с выбором максимального элемента потребовалось 576 итерация, а с циклическим выбором 960 итераций. Значения для маленьких собственных чисел начали сильно отличаться.

5 Вывод

Методом вращений Якоби можно получить собственные числа достаточно близкие к точным. Но при нахождении небольших собственных чисел могут появляться ошибки. Метод с выбором максимума работает за меньшее количество итераций чем циклический метод.