

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

6 отчёт по методам вычислений
Решения краевой задачи для ОДУ второго порядка
сеточным методом.

Выполнил:
студент 4 курса Калистый Ф.Н.

Санкт-Петербург 2023

1 Постановка задачи

В данной работе будет решаться задача прогиба струны:

$$u_{xx} + q(x)u_x - r(x)u = f(x), a < x < b$$

Общий вид граничных условий:

$$\alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a) = \alpha_3, |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \alpha_1 \alpha_2 \geq 0$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \beta_3, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \beta_1 \beta_2 \geq 0$$

2 Сеточный метод

Возьмем равномерную сетку:

$$x_n = a + nh, 0 \leq n \leq N$$

Для аппроксимации второй производной в схеме будем брать по три соседних узла: $n-1, n, n+1$. Используя симметричные разностные выражения, получаем схему для внутренних узлов:

$$\frac{1}{h^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \frac{q}{2h}(u_{n+1} - u_{n-1}) - r_n u_n = f_n$$

где $r_n = r(x_n)$, $q_n = q(x_n)$, $f_n = f(x_n)$; u_n - приближенное решение в узлах x_n . Это система из $N-1$ уравнения с $N+1$ неизвестным. Доопределим из граничных условий, для которых:

$$u'_0 \approx (-\frac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \frac{1}{2}u_2)/h,$$

$$u'_N \approx (\frac{3}{2}u_N - 2u_{N-1} + \frac{1}{2}u_{N-2})/h,$$

Взяв сетку и заменив производные разностями, получим система нелинейных алгебраических уравнений. для нахождения решения нужно решить систему:

$$Au = b, b = (\alpha_3, f_1, \dots, f_n, \beta_3)$$

3 Расчет

Буду применять сеточный метод сначала к грубой сетке из 10 интервалов, далее измельчать сетку и уточнять по Рундсону до достижения заданной точности. К сожалению $\varepsilon < 1e^{-3}$ я взять не смог для моих примеров, потому что программа завершала работу.

4 Тесты

4.1 Тест 1

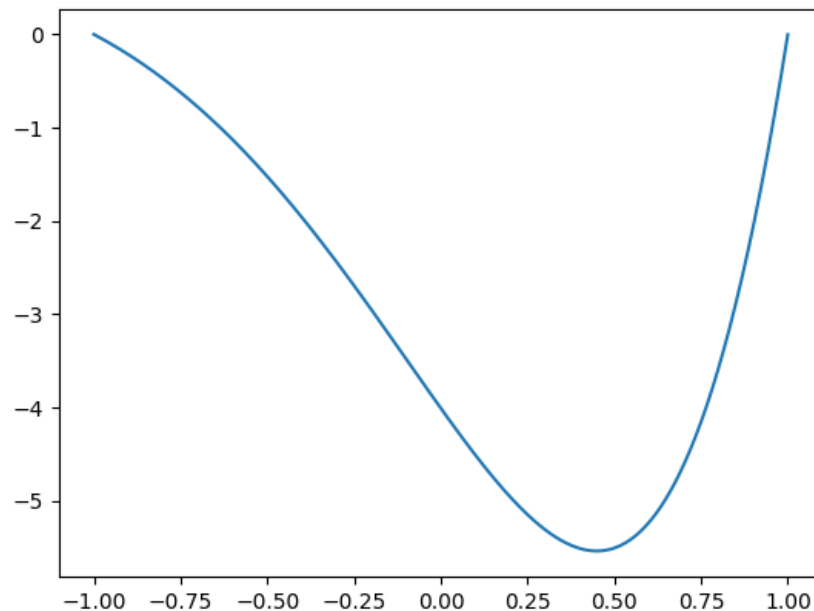
уравнение:

$$-\frac{1}{x-3}u'' + \left(1 + \frac{x}{2}\right)u' + e^{x/2}u = 2 - x$$

краевые условия:

$$u(-1) = u(1) = 0$$

график(9 итераций):



4.2 Тест 2

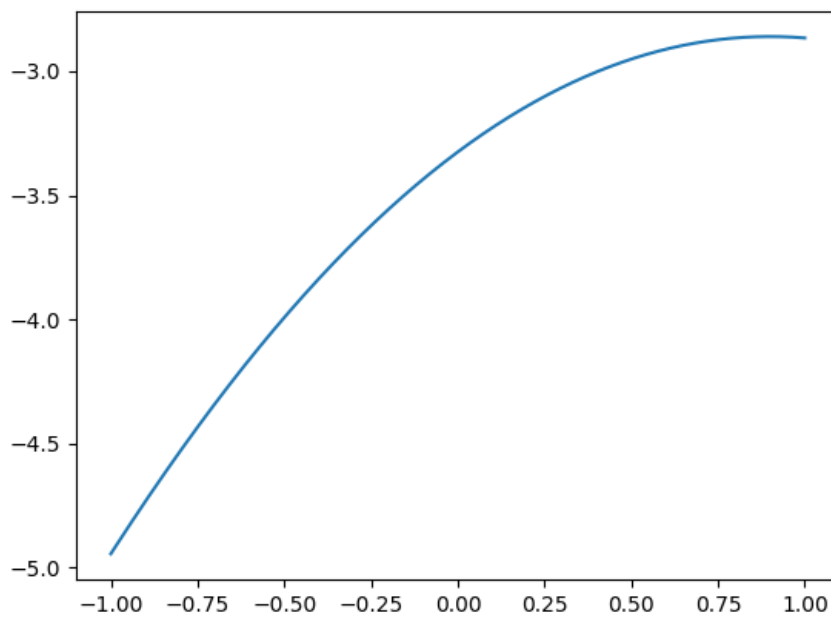
уравнение:

$$u'' - \frac{\cos x}{1+x}u' - (2-x)u = x+1$$

краевые условия:

$$0.2u(0) - u'(0) = -0.8, 0.9u(1) + u'(1) = -0.1$$

график(8 итераций):



5 ВЫВОД

Графики достаточно точно описывают решение за небольшое количество итераций.