

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет

3 отчёт по методам вычислений  
Решение СЛАУ. Итерационные методы.

Выполнил:

студент 4 курса Калистый Ф.Н.

Санкт-Петербург 2023

## 1 Постановка задачи

Необходимо решить СЛАУ  $Ax = b$  двумя итерационными методами.

## 2 Метод простой итерации

Итерационная формула имеет следующий вид:

$$X_{k+1} = BX_k + \beta$$

, где:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{12}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$X_0$  возьму равным  $\beta$ .

Для того чтобы метод итераций сходил, достаточно чтобы норма матрицы  $B$  была меньше 1.

## 3 Метод Зейделя

Если представить матрицу  $B$  в виде  $B = B_L + B_R$ , где  $B_L$  - нижняя треугольная,  $B_R$  - верхняя треугольная, то можно представить итерационную формулу:

$$X_{k+1} = (E - B_L)^{-1} B_R X_k + (E - B_L)^{-1} \beta$$

## 4 Тесты

### 4.1 Тест 1

Матрица  $A$  и вектор  $b$  имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4.0 & -1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 4.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 4.0 & 0.0 & -1.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 4.0 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & -1.0 & 4.0 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Для достижения точности  $1e-10$ , потребовалось для метода простой итерации 38 итераций, а для метода Зейделя 22.

## 4.2 Тест 2

Рассмотрим симметричную разреженную матрицу размерностью  $50 \times 50$ , у которой на диагоналях случайные числа от 0.8 до 0.9, и ещё около 100 чисел от 0.1 до 0.3 занимают случайные места в матрице. Вектор  $b$  это единичный вектор.

Для достижения точности  $1e-10$ , для случайной матрицы лежащей в файле test.txt потребовалось для метода простой итерации 123 итераций, а для метода Зейделя 34.

## 5 Вывод

Из тестов можно сделать вывод, что у метода Зейделя скорость сходимости больше, чем у метода простой итерации.