

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

7 отчёт по методам вычислений

Проекционные методы для краевой задачи ОДУ  
второго порядка

Выполнил:

студент 4 курса Калистый Ф.Н.

Санкт-Петербург 2023

# 1 Постановка задачи

Проекционные методы широко применяются для решения краевых задач. Одним из их преимуществ является нахождение значений функций не просто в определенных точках области, а сразу непрерывно на всей области.

Общий вид решаемой задачи

$$Lu = f(x)$$

Заданы краевые условия:

$$\alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = \alpha(t), \alpha_1\alpha_2 \geq 0, |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$$

$$\beta_1(t)u(1, t) + \beta_2(t)\frac{\partial u(1, t)}{\partial t} = \beta(t), \beta_1\beta_2 \geq 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

Суть проекционных методов заключается в выборе определенной линейно-независимой координатной системы функций:  $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ . По данным функциям строится приближенное решение:

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \omega_i(x)$$

Коэффициенты разложения  $c_i$  являются решением следующей системы:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j = f_i, i = 1, \dots, n$$

Компоненты  $a_{ij}$  матрицы  $A$  и  $f_i$  задаются конкретным используемым проекционным методом

# 2 Метод Ритца

Рассмотренное уравнение:

$$Ly = (-p(x)y')' + r(x)y = f(x)$$

Основная идея заключается в переходе от решения краевой задачи к решению вариационной задачи приближенными методами.

Координатные функции  $\omega_i(x)$  берем из энергетического пространства  $H_L$ .

Коэффициенты разложения находим из соотношения

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = f_i, i = 1, \dots, n$$

где  $a_{ij} = [\omega_i, \omega_j]$ ,  $f_i = (f, \omega_i)$  - скалярное произведение в  $L_2$ .  
 $[\omega_i, \omega_j] = (L\omega_i, \omega_j)$

### 3 Метод коллокаций

Суть метода - невязка  $L(u) - f(x)$  должна обращаться в ноль в некотором наборе точек промежутка  $[a, b]$ . Также накладывается требование на координатные функции - они должны удовлетворять заданным краевым условиям.

После выбора узлов коллокаций система принимает вид

$$\sum_{j=1}^n L(\omega_j)|_{x=t_i} c_j = f_i, i = 1, \dots, n$$

В качестве узлов коллокации можем взять узлы многочлена Чебышева первого рода.

### 4 Расчет

Будем рассматривать максимальные отклонения от точного решения на некоторой сетке. Исследуем поведение решений при разных значениях  $n$ . Количество точек на графике 1000.

### 5 Тесты

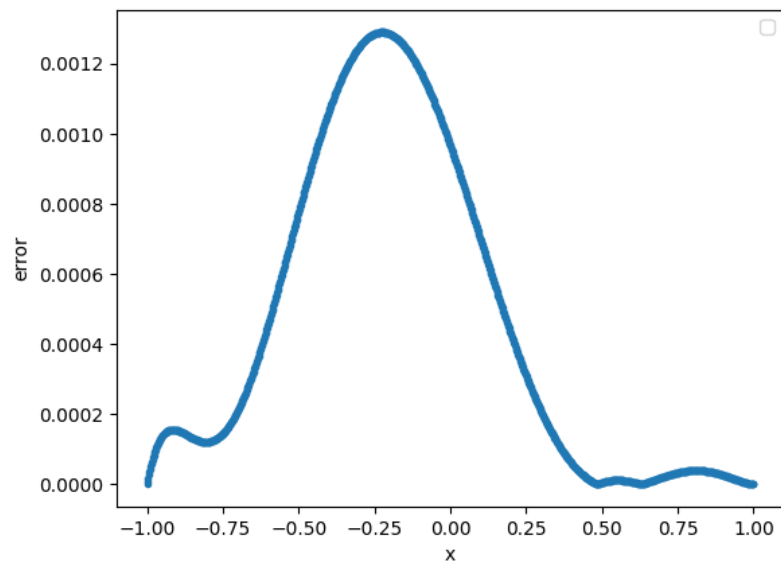
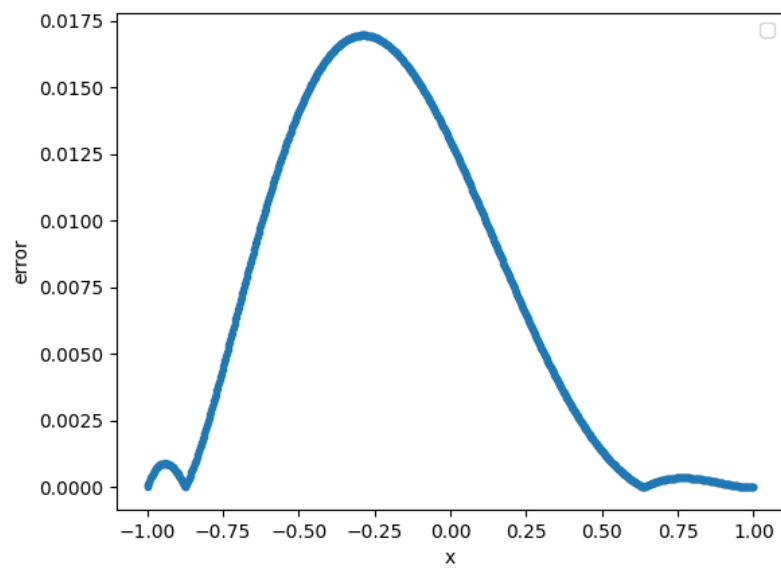
#### 5.1 Тест 1.

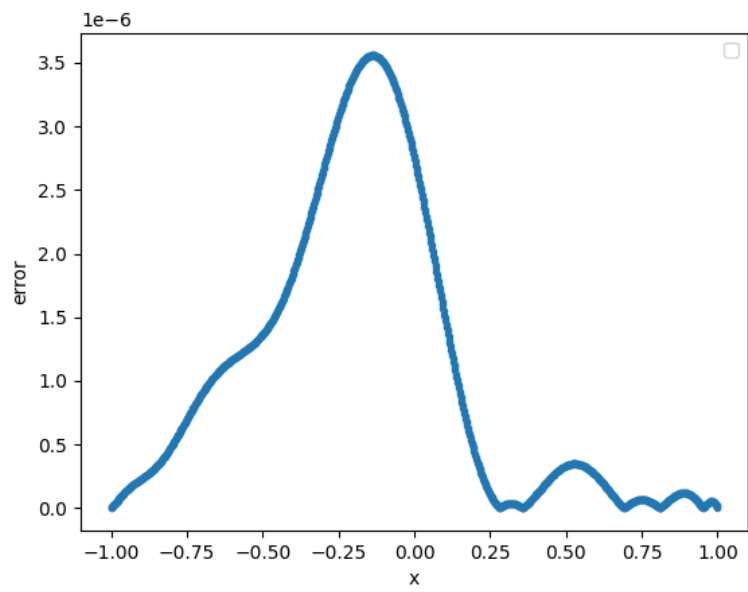
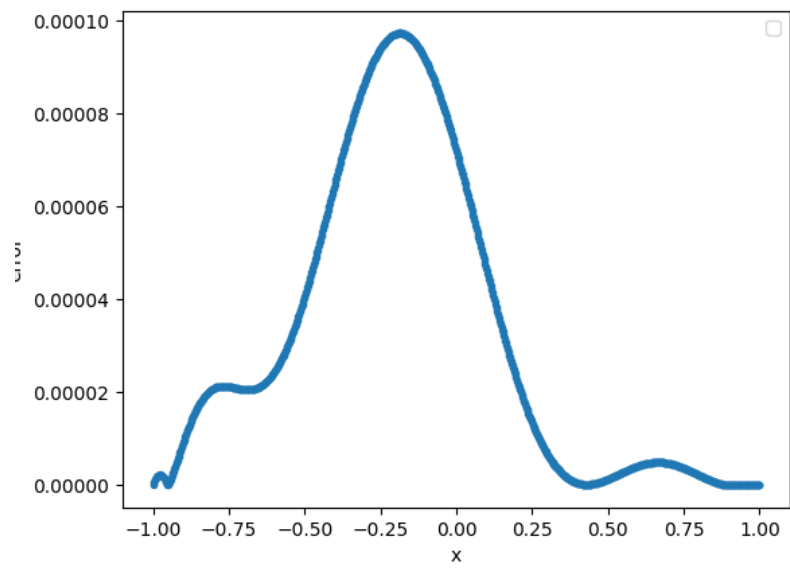
Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-(xu')' + u = \log(2+x) * (x-1) - \frac{(3 * x^2 + 7 * x + 2 * (x+2)^2 * \log(x+2) - 4)}{(x+2)^2}$$

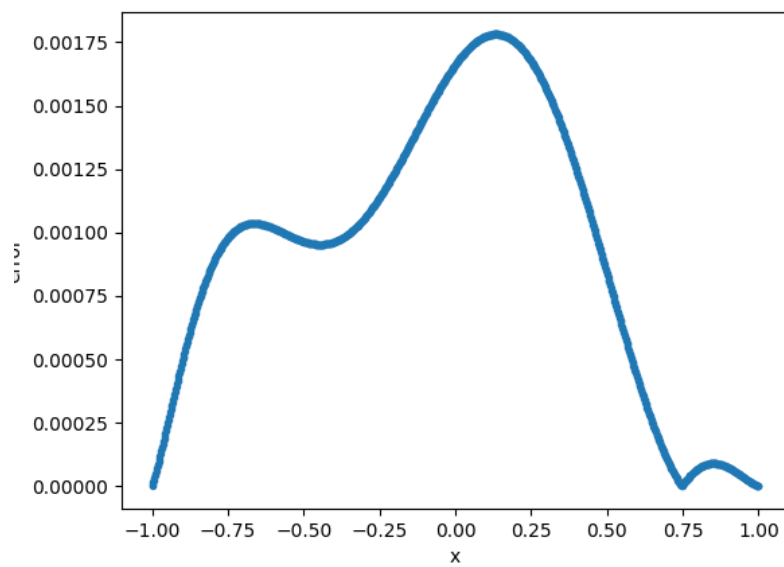
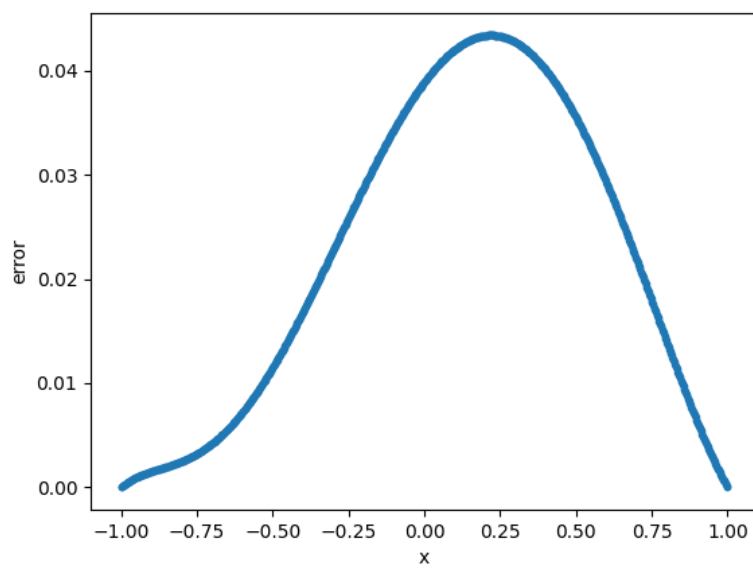
$$u(-1) = 0, u(1) = 0$$

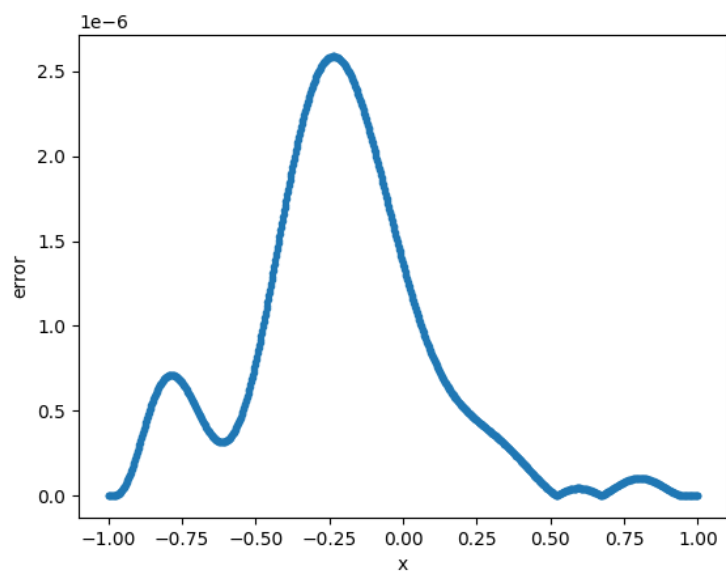
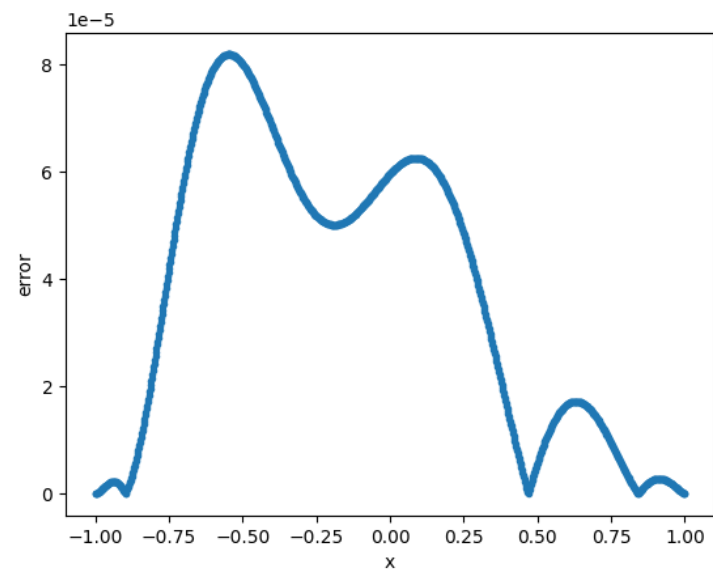
графики для метода Рунге для  $n = 3, 5, 7, 10$





графики для метода Коллокаций для  $n = 3, 5, 7, 10$





## 6 Вывод

По полученным графикам можно понять, что решение, полученное проекционными методами, оказывается достаточно близким к точному решению при увеличении количества координатных функций.