Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

8 отчёт по методам вычислений

Сеточные методы для задачи теплопроводности.

Выполнил:

студент 4 курса Калистый Ф.Н.

Санкт-Петербург 2023

1 Постановка задачи

В данной работе будет решаться уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)u_{xx} + f(x,t), 0 < x < 1, 0 < t < T, f(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x) = \phi(x), \phi(x) \in C_{[0,1]}$$

и граничным условиям:

$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \alpha_3(t), \alpha_1\alpha_2 \geqslant 0, |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$$

$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \beta_3(t), \beta_1\beta_2 \geqslant 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

2 Явная разностная схема

Апроксимируя уравнение из постановки задачи в узле (x_i, t_{k-1}, получаем:

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = a(x_i, t_{k-1})\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{h^2}, i = 1, \dots, N-1; k = 1, \dots, M$$

Получается что это решение содержит 4 точки, 3 из которых для t_{k-1}.

Апроксимируем граниченые условия с порядком $O(h^2)$:

$$\alpha_1(t_k)u_0^k + \alpha_2(t_k)\frac{-3u_0^k + 4u_1^k - 2u_2^k}{2h} = \alpha_3(t_k)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{-3u_N^k + 4u_{N-1}^k - 2u_{N-2}^k}{2h} = \beta_3(t_k)$$

Условие устойчивости схемы: $\max(a(x,t))\tau \leqslant \frac{h^2}{2}$
h - шаг по x, τ - шаг по t

3 Неявная разностная схема с весами

Возьмём параметр $\sigma = 1$ и выпишем расчётные формулы:

$$a(x_i, t_k)\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} - \frac{1}{\tau}u_i^k = -\frac{1}{\tau} - f(x_i, t_k), i = 1, \ldots, N-1; k = 1, \ldots, M$$

граничение условия:

$$\alpha_1(t_k)u_0^k + \alpha_2(t_k)\frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha_3(t_k)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} = \beta_3(t_k)$$

В итоге можно всё свести к системе:

$$\begin{aligned} -B_0u_0^k + C_0u_1^k &= G_0^k \\ A_iu_{i-1}^k - B_0u_i^k + C_0u_{i+1}^k &= G_i^k \\ A_Nu_{N-1}^k - B_Nu_N^k &= G_N^k \end{aligned}$$

Матрица этой системы трехдиагональная. Для решения этой системы будем пользоваться методом прогонки.

4 Расчет

Промежуток что по времени что по x выбирается от 0 до 1, и буду разбивать их 60 отрезков.

5 Тесты

5.1 Тест 1

уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sin(x)}{70}u_{xx} + cos^2(3t) + 5t^3, 0 < x < 1, 0 < t < 1$$

начальные условия:

$$u(x, 0) = 3 - cos(x)$$

и граничные условия:

$$u(0, t) = 2 - 3t^2$$

$$u(1, t) = 3cos(t) - cos(1)$$

Явная и неявная схемы дали практически одинаковые матрицы u.

5.2 Тест 2

уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sin(x)}{70} u_{xx} + cos^2(3t) + 5t^3, 0 < x < 1, 0 < t < 1$$

начальные условия:

$$u(x, 0) = 3 - cos(x)$$

и граничные условия:

$$u(0, t) = 2e^{-t}$$
$$u(1, t) = 3 - cos(t)sin(t) - cos(1)$$

Явная и неявная схемы дали практически одинаковые матрицы u.