Week 1, 2025/09/14

Schroeder-Bernstein 定理，不动点

第一部分

下述定理非常重要且为人熟知. *(尽管证明并不容易)*

定理 1 (Schroeder-Bernstein)**.** 设集合 A, B 之间存在单射

$$f : A \to B \ , \ g : B \to A.$$

则 $|A| = |B|$.

1. 请构造一个从 $[0,1)$ 到 $(0,1)$ 的单射和从 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的单射, 进而用定理 1 说明 $|[0,1]| = |[0,1)| = |(0,1)|$.

定理 1 的一个证明思路是用 f 和 g^{-1} "拼贴"出双射 $h : A \to B$.

定理 2 (Banach 分解)**.** 设集合 A, B 之间有映射 (无需单射！)

$$f : A \to B \ , \ g : B \to A.$$

则存在 $X \subset A$ 使得

$$g : B \setminus f(X) \to A \setminus X$$

是满射.

2. 请用定理 2 证明定理 1.

第二部分

这一部分的目标是完成定理 2 的证明.

3. 记 $\mathcal{P}(A)$ 是集合 A 的全体子集构成的集合 (称为**幂集**). 请说明包含关系 $\subseteq$ 是 $\mathcal{P}(A)$ 上的一个偏序关系, 但不是序关系.

4. 证明: 对 $\mathcal{P}(A)$ 的任意一个子集 $\mathcal{K}$, 都存在一个 $S \in \mathcal{P}(A)$ 使得对任意 $K \in \mathcal{K}$, $K \subseteq S$. (S 称为 $\mathcal{K}$ 的一个**上界**)

5 (确界原理)**.** 进一步证明: 对任意 $\mathcal{K}$ 存在最小的上界, 即**上确界**, 记为 $\sup \mathcal{K}$.

注. 对于偏序集, 子集的上确界不一定是子集中的元素.

6* (Knaster-Tarski 不动点定理)**.** 设 $f:\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A)$ 是一个**保序映射**, 即

$$M\subseteq N\Rightarrow f(M)\subseteq f(N)\ .$$

证明: f 有至少一个不动点 $X\in\mathcal{P}(A)$, 即 $f(X)=X$.

7. 证明定理 2.

第三部分

这一部分的目标是给出双射的一种直接构造. 我们称映射 $f\colon\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A)$ 关于 $\subseteq$ 是**序连续**的, 如果对任意 $\mathcal{P}(A)$ 中的单调上升序列 $M_0\subseteq M_1\subseteq\cdots$ 都有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f(M_n)=f(\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n).$$

8. 设 $f\colon\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A)$ 序连续. 证明: $\sup_{n\in\mathbb{N}} f^{(n)}(\emptyset)$ 存在, 并且是 f 的最小不动点.

9. 设单射

$$f\colon\mathbb{N}\to2\mathbb{N},\ n\mapsto4n,$$

和

$$g\colon2\mathbb{N}\to\mathbb{N},2n\mapsto2n.$$

请根据第二部分和第 **8** 题的结论构造一个 f 和 g 对应的 $\mathbb{N}\to2\mathbb{N}$ 双射.

The essence of mathematics lies in its freedom.
– G. Cantor