Week 8, 2025/11/01

Gronwall 引理的特例

设 $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 可微，并存在非负有界函数 $\alpha(x)$, s.t.

$$f(0)=0,\quad |f'(x)|\leq \alpha(x)|f(x)|.$$

证明：$f(x)\equiv 0$.

注. 课上展示了用所谓的"bootstrap" 方法/ "连续性论证" 看待这类问题及其推广.

插值估计

1. 设 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 二阶可微，并且

$$M_k\coloneqq\sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|<\infty,\quad \forall k=0,1,2.$$

证明：

$$M_1^2\leq 4M_0M_2.$$

注. 可以将常数 4 改进为 2.

2. 设 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 任意阶可微. $\forall k\in\mathbb{N}$, 同样地定义 M_k. 设 $\forall k\in\mathbb{N}$ 都有 $M_k<\infty$, 证明: $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在只与 n 有关的常数 $C_n>0$, s.t.

$$M_j\leq C_nM_0^{1-\frac{j}{n}}M_n^{\frac{j}{n}},\quad \forall\ 0\leq j\leq n.$$

注. 类似的关系称为 "对数凸性".

3. 设 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 任意阶可微，并且 $\forall k\geq 0$ 都存在常数 $C_k>0$, s.t.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|x|^k|f(x)|+|f^{(k)}(x)|\right)\leq C_k.$$

证明：$\forall k,\ell\geq 0$ 都存在常数 $C_{k,\ell}>0$, s.t.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|f^{(\ell)}(x)|\leq C_{k,\ell}.$$

Strum-Liouville 理论（from 于品讲义）

在这个问题中，我们仿照 $\sin x$ 和 $\cos x$ 来研究一类二阶微分方程解的零点分布，其反映了解的振荡行为. 我们承认如下的唯一性定理成立：

定理. 设 $a(t) \in C^1(\mathbb{R})$，$t_0 \in \mathbb{R}$. 如果 $x(t) \in C^2(\mathbb{R})$，满足方程

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0.$$

并且初始值 $x(t_0) = x'(t_0) = 0$，那么 $x(t) \equiv 0$.

对任意的函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$t \geqslant 0$，我们用 $\mathrm{Z}_t(f)$ 表示 f 在区间 $[0,t]$ 上的零点的个数，即

$$Z_t(f) = \left|\{x \in [0,t] \mid f(x) = 0\}\right|.$$

第一部分

在此部分中，函数 $a(t), b(t) \in C^1(\mathbb{R})$ 并且对任意的 $t \in \mathbb{R}$，都有 $a(t) \leqslant b(t)$. 设 $x(t), y(t) \in C^2(\mathbb{R})$，满足如下两个方程

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0,$$
$$y''(t) + b(t)y(t) = 0.$$

我们还设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都**不恒为** 0.

1. 设 t_1 是 x 的一个零点（即 $x(t_1) = 0$），如果存在 $t > t_1$，使得 $x(t) = 0$. 证明：一定存在 $t_2 > t_1$，使得 $x(t_2) = 0$ 并且 x 在 (t_1, t_2) 上无零点. 我们将这样的两个零点 t_1 和 t_2 称作是 x 的两个相邻的零点.

2. 设 $t_2 > t_1$ 是 x 的两个相邻的零点. 证明：y 在 $(t_1, t_2]$ 上有零点.
提示. 考察函数 $h(t) = x'(t)y(t) - x(t)y'(t)$.

3. 证明：对任意的 $t \geqslant 0$，我们都有 $Z_t(y) \geqslant Z_t(x) - 1$.

4. 设 $t_2 > t_1$ 使得 $x(t_1) = 0$，$x'(t_2) = 0$. 证明（任选其一）：

- 如果 $y(t_1) = 0$，那么存在 $t_3 \in (t_1, t_2]$，使得 $y'(t_3) = 0$.
- 如果 $y'(t_2) = 0$，那么存在 $t_4 \in [t_1, t_2)$，使得 $y(t_4) = 0$.

第二部分

在此部分中，$p(t) \in C^1(\mathbb{R})$ 是正函数，即对任意的 $t \in \mathbb{R}$，都有 $p(t) > 0$. $x(t), y(t) \in C^2(\mathbb{R})$ 都不恒为 0 并且满足

$$x''(t) + p(t)x(t) = 0,$$
$$y''(t) + p(t)y(t) = 0.$$

5. 证明：对任意的 $t \geqslant 0$，我们都有 $\left|Z_t(x) - Z_t(y)\right| \leqslant 1$.

6. 证明下面的两个命题（任选其一）：

- 如果 t_1 和 t_2 是 x 的两个相邻的零点，那么存在唯一的 $t_3 \in (t_1, t_2)$，使得 $x'(t_3) = 0$.
- 如果 t_1' 和 t_2' 是 x' 的两个相邻的零点，那么存在唯一的 $t_3' \in (t_1, t_2)$，使得 $x(t_3') = 0$.

7. 证明下面的两个命题（任选其一）：

- t_0 是 $|x(t)|$ 的局部最大值当且仅当 $x'(t_0) = 0$.
- t_0' 是 $|x'(t)|$ 的局部最大值当且仅当 $x(t_0') = 0$.

第三部分

在此部分中，我们设 $p(t) \in C^1(\mathbb{R})$ 是递减的函数并且 $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) > 0$. 我们记

$$p(\infty) \coloneqq \lim_{t\to+\infty} p(t).$$

$x(t) \in C^2(\mathbb{R})$ 不恒为 0 并且满足

$$x''(t) + p(t)x(t) = 0.$$

8. 证明：$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{Z_t(x)}{t}$ 存在，并计算这个极限.

9. 设 $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ 是 $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上所有的零点，$0 \leqslant t_1' < t_2' < t_3' < \cdots$ 是 $x'(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上所有的零点. 证明：数列 $\left\{|x'(t_k)|\right\}_{k\geqslant 1}$ 是递减的而数列 $\left\{|x(t_k')|\right\}_{k\geqslant 1}$ 是递增的，并且

$$\lim_{k\to\infty} |x'(t_k)| = \sqrt{p(\infty)} \lim_{k\to\infty} |x(t_k')|.$$

提示. 考察函数 $E(t) = p(t)x(t)^2 + x'(t)^2$ 和 $F(t) = x(t)^2 + \dfrac{1}{p(t)}x'(t)^2$.

10. 设 $0 \leqslant \widetilde{t}_1 < \widetilde{t}_2 < \widetilde{t}_3 < \cdots$ 是 $x(t)x'(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上所有的零点. 证明：数列 $\left\{\widetilde{t}_{k+1} - \widetilde{t}_k\right\}_{k\geqslant 1}$ 是递增的并计算它的极限.

A mathematician is one to whom that is as obvious as that twice two makes four is to you. Liouville was a mathematician.
– Lord Kelvin