Week 7, 2025/10/25

Jacobi 三重积，Ramanujan 同余式

在以下内容，我们约定实数 $q \in [0,1)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 q-**乘积**

$$(x;q)_n := \prod_{j=0}^{n-1}(1-xq^j), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

在 q 给定时，q-乘积简写为 $(x)_n$；特别地，$(q)_n = \prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$. 为方便计算，我们还约定 $(x)_0 := 1$.

第一部分

这一部分列举了 q-二项式系数的初等性质.

1. 定义 q-**二项式系数**

$$\binom{n}{k}_q := \frac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}}, \quad n,k \in \mathbb{N},\ k \le n.$$

证明：

$$\lim_{q\to 1^-}\binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}.$$

2. 证明以下等式：

$$\binom{n}{k}_q = q^k\binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q$$

进而说明 $\binom{n}{k}_q$ 是关于 q 的多项式（称为 Gaussian 多项式）.

3 (Polya)**.** 设 n 次多项式 $f(x) := (-x)_n$. 证明 q-**二项式定理**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q q^{k(k-1)/2}x^k.$$

提示. 尝试构造 f 满足的函数方程，并比较两边的多项式系数.

4. 作为特例，请展开 $(1)_n$.

第二部分

这一部分研究 q-**级数**，并证明两条 ***Euler* 恒等式**. 从现在起，设 $x \in (-1,1)$.

5. 定义 $(x)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-xq^j)$. 请说明 $(x)_\infty$ 对任意 $x \in (-1,1)$ 都收敛. 并

对给定的 $k,\ell\in\mathbb{N}$ 和 $A>B\in\mathbb{N}_+$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}_q=\frac{1}{(q)_k},\quad \lim_{n\to\infty}\binom{An+k}{Bn+k}_q=\frac{1}{(q)_\infty}.$$

6 (Euler)**.** 证明:

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+xq^k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k(k-1)/2}}{(q)_k}x^k=:S_1(x).$$

7. 定义级数

$$S_2(x):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(q)_k}x^k.$$

证明: $\forall x\in(-1,1)$, $S_2(x)$ 收敛.

8 (Euler)**.** 证明: $S_1(x)S_2(x)\equiv 1$. 进而推出恒等式

$$S_2(x)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+xq^k},\quad \forall x\in(-1,1).$$

第三部分

这一部分的目标是利用此前的结果得到 *Jacobi* 三重积.

9. 证明:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k^2}}{(q^2)_k}x^k.$$

10. 证明:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})(1-q^{2k})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})q^{k^2}x^k.$$

11. 证明: $\forall k\in\mathbb{Z}$,

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})=\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell\frac{q^{\ell^2+2k\ell+\ell}}{(q^2)_\ell}.$$

12. 证明 **Jacobi 三重积**恒等式: 对任意 $x\in(-1,1)$,

$$\begin{aligned}&(-xq;q^2)_\infty(-x^{-1}q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty\\ =&\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{2j})(1+q^{2j-1}x)(1+q^{2j-1}x^{-1})\\ =&\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{j^2}x^j.\end{aligned}$$

13. 用 Jacobi 三重积证明 **Euler 五边形数定理**:

$$E(q) := (q;q)_\infty = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}.$$

第四部分 (选做)

这一部分的目标是分拆数的 ***Ramanujan* 同余式**. 正整数 n 的**分拆数** $p(n)$ 是将 n 分拆为一列单调不减的正整数之和的表示数量. 例如 $p(4) = 5$:

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

我们还约定 $p(0) = 1$.

14. 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^j)} = E(q)^{-1}.$$

于是你可以用 Euler 五边形数定理写出一些 $p(n)$ 的递推公式.
提示. 先考虑有限部分 $(q;q)_k$, $k \in \mathbb{N}$.

15 (Jacobi)**.** 证明: $\forall x \in (-1, 1)$,

$$(x - x^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)(1-x^2q^k)(1-x^{-2}q^k) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(x^{2k+1} - x^{-(2k+1)}\right) q^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

进而推出恒等式

$$J(q) := E(q)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

16 (Ramanujan)**.** 证明: $p(5n+4) \equiv 0 \mod 5$.
提示. 考虑 $E(q)^{-1} = E(q)J(q)/E(q)^5$. 你可能需要初等数论的一个简单结果: $(n^2+n)/2 \equiv 3 \mod 5 \Rightarrow 2n+1 \equiv 0 \mod 5$.

Mathematics exists solely for the honour of the human mind.
– C. Jacobi
(The results)must be true, because, if they were not true, no one would have the imagination to invent them.
– G. H. Hardy 评价 S. Ramanujan 邮寄给他的公式.