Week 3, 2025/09/27

极限的计算

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left([(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)]^{1/k}-x\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\log x)^{1/x}$.

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^\alpha}$, $\alpha>0$.

Stolz 定理的函数版本

给定一个函数 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. 设 f 在任意子区间 $[a,b]$ 上有界（上界可能与 b 有关）. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$$

在右式存在时成立.

渐进正则性

1. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 连续. 定义数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$: $x_1\in[0,1]$, $x_{n+1}=f(x_n)$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛, iff $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

2. 设 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. 记 $S_n=\sum_{k=1}^n x_k$. 若 $\{S_n\}$ 有界, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Baire 纲定理

我们称 $\mathbb{R}$ 的子集 A 是**开集**, 如果 $\forall x\in A$, 存在非空开区间 I , *s.t.* $x\in I\subseteq A$; 满足这个条件的 x 称为 A 的**内点**. 称 A 是**闭集**, 如果 $\mathbb{R}\setminus A$ 是开集.

1 (Baire)**.** 设 $\{A_n\}_{n\geq1}$ 是一列没有内点的闭集. 证明: $A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ 也没有内点.

2. 设 $f\in C[0,+\infty)$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}f(nx)=0,\quad\forall x>0.$$

证明: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0.$

注. 结论可以看作所谓“一致有界原理”的一个版本.

覆盖引理

第一部分

1 (Besicovitch 覆盖)**.** 设 $\{I_k\}_{k=1}^n$ 为 $\mathbb{R}$ 上的一族有限的开区间. 证明：存在 $\{I_k\}$ 的一个子集 $\{I'_j\}_{j=1}^m$, s.t.
(i) $\bigcup_{k=1}^n I_k = \bigcup_{j=1}^m I'_j$,
(ii) 每个 $x \in \mathbb{R}$ 都至多包含在 2 个 I'_j 中.

2 (Cousin)**.** 给定一个非空闭区间 $[a,b]$ 和一个函数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$. 证明：存在两列实数 $\{t_j\}_{j=0}^k$:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b, \quad k \geq 1,$$

和 $\{t_j^*\}_{j=1}^k$: $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j] \quad 1 \leq j \leq k$, s.t.

$$g(t_j^*) \geq t_j - t_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

注. 课上展示了 Cousin 引理如何推出经典的 Newton-Leibniz 公式及其可能的推广.

第二部分

3 (Vitali 覆盖)**.** 给定区间 $[a,b]$ 和它的一族开区间覆盖 $\mathcal{U}$. 证明：存在绝对常数 $C > 1$, s.t. 存在有限个不交开区间 $U_1, ..., U_k$ in $\mathcal{U}$, s.t.

$$\sum_{j=1}^k |U_j| \geq C^{-1}(b-a).$$

4 (Bourgain)**.** 设函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 单调上升，$f(b) - f(a) = \lambda(b-a)$, $\lambda \geq 0$. 记 $b - a = L$. 证明：对任意 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, 存在 $x_0 \in [a + \delta L, b - \delta L]$ 和常数 $C' = C'_{\delta,\lambda}$, s.t.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C'|x - x_0|, \quad \forall x : \ |x - x_0| \leq \delta L.$$

换言之，f 在 x_0 处 Lipschitz 连续.

注. 课上展示了 Bourgain 的命题如何看作极大函数的弱 $(1,1)$ 型估计.

...a large fraction of my early work could be summarised as "take one of Jean(Bourgain)'s papers, understand the techniques used there, and try to improve upon the final results a bit."

– T. Tao(陶哲轩)