Week 5, 2025/10/07

圆周的保向自同胚

这份习题来自数学大师 *H. Poincaré* 对圆周保向自同胚的分类工作. 我们将证明他的部分结果.

第一部分：映射度

记圆周 $\mathbb{R} \mod 1 =: S^1$. 由于 S^1 的每个点的局部都是 $\mathbb{R}$ 的开区间，因此可以类似地引入完备性、连续性等概念. S^1 中任意长度小于 *1* 的区间都可以赋予 $\mathbb{R}$ 的序结构（按 $\mathbb{R}$ 的方向）. 注意 $0 \in S^1$ 拥有诸如 $[0,\delta) \cup (1-\delta',1)$ 的开邻域; 我们将其也视为区间, 并按序关系记为 $(1-\delta',\delta)$. 这是 S^1 与 $\mathbb{R}$ 的重要区别.

我们有自然的连续映射

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \ \ x \mapsto x \mod 1.$$

(熟悉复数和 *Euler* 公式的同学也可以视为 $\pi : x \mapsto e^{2\pi i x}$) 现在, 设 $f : S^1 \to S^1$ 是一个连续映射.

1.* 证明：存在连续映射 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, s.t. $\pi \circ F = f \circ \pi$. F 称为 f 的一个提升. (F 并不唯一)

2. 对于一个提升 F, 证明：存在 $k \in \mathbb{Z}$, s.t. $F(x+1) = F(x) + k$, 并且与 x 和 F 的选择无关. k 称为 f 的映射度 $\deg f$.

3. 进一步设 f 是连续双射. 证明：f^{-1} 也是连续双射. 此时称 f 是 S^1 的自同胚.

4. 设 f 是自同胚. 证明：$\deg f \in \{\pm 1\}$.

第二部分：旋转数

称自同胚 f 是保向的，如果 $\deg f = 1$. S^1 的全体保向自同胚记为 $H^+(S^1)$. 我们约定上标 (n) 代表迭代 n 次.

5. 设 $f \in H^+(S^1)$. 证明：任意一个提升 F 单调递增，并且 $\varphi(x) := F(x) - x$ 的振幅不大于 1.

6.* 选取一个 $x \in \mathbb{R}$. 定义 $f \in H^+(S^1)$ 的旋转数

$$\rho(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{F^{(n)}(x) - x}{n} \mod 1.$$

证明：$\rho(f)$ 是良定义的，i.e. 极限存在，且与 F 和 x 的选择无关.
提示. 使用此前作业中出现的 Fekete 次可加性引理.

第三部分：有理情形

从现在起，设 $f \in H^+(S^1)$. 称 $\xi \in S^1$ 是 f 的周期点，如果存在正整数 N, *s.t.* $f^{(N)}(\xi) = \xi$. 满足上述条件的最小正整数 T 称为 f 的周期. 以此迭代生成的点集

$$O_T(\xi) = \{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{T-1}\} := \{\xi, f(\xi), \cdots, f^{(T-1)}(\xi)\}$$

称为 f 的一条 T-周期轨道.

7.* 证明：$\rho(f) \in \mathbb{Q}$ iff f 有周期点.

8.* 设 $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$，$p, q$ 互素. 进一步证明：f 所有周期点的周期都是 q.

9. 进一步，设 f 有且仅有一条周期轨道 $O_q(\xi)$, $q > 1$. 则对任意一个非周期的 θ, 存在唯一一对相邻的周期点 ξ, ξ' , i.e. $\theta \in (\xi, \xi')$. 证明：

$$\theta_+ := \lim_{k\to+\infty} f^{(kq)}(\theta), \quad \theta_- := \lim_{k\to+\infty} f^{(-kq)}(\theta)$$

都存在，并且 $\{\theta_-, \theta_+\} = \{\xi, \xi'\}$. 此时称 θ 渐进于 ξ, ξ'.

10.* 在 **8** 的前提下，设 $q > 1$, f 有至少两条周期轨道. 证明：任意两条周期轨道都是交错的，i.e. 不存在区间 $I = [a, b] \subset S^1$, s.t. a, b 是同一周期轨道中相邻的点, 并且之间没有其他轨道的周期点.
提示. 反证法. 存在 $0 < k \le q-1$, s.t. $f^{(k)}(a) = b$.

11. 在 **10** 的前提下，证明：任意非周期的 x 渐进于其相邻的两个周期点，并且这两个周期点属于不同的周期轨道.

第四部分：无理情形

从现在起，考虑 $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ 的情形. 未加说明，均默认 $f \in H^+(S^1)$. 我们引入若干定义：

- 称 $\theta \in S^1$ 非游荡，如果 $\forall \epsilon > 0, \exists n > 0$, *s.t.* $|f^{(n)}(\theta) - \theta| < \epsilon$. 全体非游荡点构成 S^1 的子集 $\Omega(f)$, 称为非游荡集.
- 给定 $\theta \in S^1$, 定义（后）极限集

$$\omega(\theta) := \{\{f^n(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S^1 \text{ 的全体聚点}\}.$$

12.* 给定 $\theta \in S^1$ 和一对自然数 $m < n$. 设 $I \subset S^1$ 是以 $f^{(m)}(\theta)$ 和 $f^{(n)}(\theta)$ 为端

点的区间. 证明:

$$\{f^{(n)}(\xi)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap I \neq \emptyset, \quad \forall \xi \in S^1.$$

提示. 用区间族 $\{I_k := f^{-k(n-m)}(I)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 覆盖 S^1.

13. 证明: $\omega(\theta) = \Omega(f), \forall \theta \in S^1$.

14. 证明: $\Omega(f)$ 是 f 的极小不变闭集, i.e.

- $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$;
- 对任意非空闭集 $H \subset \Omega$, s.t. $f(H) \subset H$, 都有 $\Omega(f) \subset H$.

15. 证明: $\Omega(f)$ 只可能是 S^1 或者是一个既没有内点也没有孤立点的闭集. ($\theta \in \Omega$ 是孤立点, 如果存在一个包含 θ 的开区间 I, s.t. $I \cap \Omega = \{\theta\}$)

提示. 考虑 $\Omega(f)$ 的边界, i.e. 全体不是内点的聚点.

Mathematics is the art of giving the same name to different things.

– H. Poincaré