Week 2，2025/09/20

根式的逼近算法

给定实数 $\alpha > 0$ 和 $x_1 > \sqrt{\alpha}$. 我们定义序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right), \quad n \geq 1.$$

1. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\alpha}$.

2. 定义误差 $e_n := a_n - \sqrt{\alpha}$. 证明：

$$|e_{n+1}| < 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{e_1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^n} .$$

一个递归数列的极限（from 于品讲义）

给定正整数 $k \geq 2$ 和实数 $a_0 > 0$. 我们定义序列 $\{a_n\}$:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{1/k}}.$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$ 存在. 并计算极限的值.

Cesàro 求和（from 于品讲义）

给定一列实数 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ ，我们定义它的算术平均值序列

$$\sigma_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad n \geq 1.$$

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = a$.

2. 设序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n\text{是奇数;} \\ 0, & n\text{是偶数.} \end{cases}$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$.

3. 构造 $\{a_n\}$ 满足：
(i) $a_n > 0$, $n \geq 1$.
(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

4 (小 o 型 Tauber 定理)**.** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$. 证明：如果

$$\lim_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n)=0,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sigma$.

5. 证明恒等式：

$$a_n-\sigma_n=\frac{m}{n-m}(\sigma_n-\sigma_m)+\frac{1}{n-m}\sum_{k=m+1}^{n}(a_n-a_k), \quad \forall\, 1<m<n.$$

6 (Hardy, 大 O 型 Tauber 定理)**.** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$. 证明：如果序列 $\{n(a_{n+1}-a_n)\}_{n\geq 1}$ 有界，则依然有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sigma$.

7. 设 $a_n=(-1)^n n$. 证明：σ_n 不收敛.

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.
– G. H. Hardy