

绝对收敛的比较

设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛，并且 $a_k < b_k, \forall k \geq 1$. 请判断: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛是 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 绝对收敛的必要条件吗？是充分条件吗？证明你的结论.

控制收敛定理

1 (Tannery). 设有一族级数 $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)}, n \geq 1$, s.t.

(i) 每个级数 S_n 都收敛，收敛的值就记作 S_n .

(ii) $\forall k \geq 1$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k$ 存在.

(iii) 存在一个收敛的正项级数 $T = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, s.t.

$$\left| a_k^{(n)} \right| \leq A_k, \quad \forall k, n.$$

证明：极限级数 $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，并且满足 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

2. 求极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k^n.$$

3. 利用三角恒等式

$$\frac{1}{\sin^2(\pi x)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi(1-x)}{2})} \right), \quad \forall x \in (0, 1)$$

证明：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

进而证明 Euler 的著名结果：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

二进比值判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数. 令

$$L := \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right\}.$$

$$l := \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right\}.$$

1. 证明以下结论：若 $L < \frac{1}{2}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $l > \frac{1}{2}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2. 请举例说明：当 $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ 时，**2** 中的判别法失效.

3. 请用**1**的结论考察超几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性，其中

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)},$$

常数 $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

4. 请用**1**的结论证明讲义中的 Rabbe 判别法.

5. 设对充分大的 n , 有

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{b_{2n}}{b_n}, \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{2n+1}}{b_n}.$$

证明以下结论：当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

Van der Corput 差分定理

设复数列 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ 有界，并且有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_{n+d} \overline{u_n} = 0, \quad \forall d \in \mathbb{N}_+.$$

1. 证明： $\forall D \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n - \frac{1}{ND} \sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D u_{n+d} \right) = 0.$$

2. 证明：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n = 0.$$

提示. 考虑 $\left| \sum_{d=1}^D u_{n+d} \right|^2$. P.S. 这可以看作所谓“双线性估计”（正交性）的青春版.

Euler calculated without effort, just as men breathe, as eagles sustain themselves in the air.

— F. Arago