WHU 22-23 春季学期

黎曼几何 (陈群老师) 作业及解答

数院 21 级杨森宇 (warning：大量伪证和笔误)

作业一

1. 对 $n=1$ 时证明球极投影给出 S^1 上的局部坐标覆盖 $\mathcal{A}_2$ 是光滑图册，从而是 S^1 上的微分结构，并证明它与 S^1 它与 S^1 上的微分结构 $\mathcal{A}_1$ 是 C^∞ 相容的.

证明. 用 $\theta \in [0, 2\pi)$ 对 S^1 参数化. 以 $(0,1)$ 为极点时令 $(0,1)$ 处 $\theta = 0$ 且顺时针方向，则得到局部坐标卡 U_1, φ_1：

$$\begin{aligned}U_1 &= S^1 \setminus \{(0,1)\},\\ \varphi &: \theta \mapsto \cot(\theta/2).\end{aligned}$$

同理，以 $(0,-1)$ 为极点，令 $(0,-1)$ 处 $\alpha = 0$ 且逆时针，也有局部坐标卡 $\{U_2, \varphi_2\}$:

$$\begin{aligned}U_2 &= S^1 \setminus \{(0,-1)\},\\ \varphi_2 &: \alpha \mapsto \cot(\alpha/2).\end{aligned}$$

注意到 $U_1 \cup U_2 = S^1, U_1 \cap U_2 = \{x \in S^1 : \theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)\}$，并且

$$\begin{aligned}\theta =& \pi - \alpha, \theta \in (0,\pi),\\ =& 3\pi - \alpha, \theta \in (\pi, 2\pi)\end{aligned}$$

计算不难得到在 $U_1 \cap U_2$ 上

$$\varphi \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{1}{x}.$$

光滑. 综上，球极投影诱导出 S^1 上的局部坐标覆盖 $\mathcal{A}_2 := \{U_1, U_2\}$ 是光滑图册. 而 S^1 原本的光滑图册 $\mathcal{A}_1 := \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ 中：

$$\begin{aligned}A_1 =& \{e^{i\xi} : \xi \in (0,\pi)\}, \varphi_{A_1} : (x,y) \mapsto x;\\ A_2 =& \{e^{i\xi} : \xi \in (\pi, 2\pi)\}, \varphi_{A_2} : (x,y) \mapsto x;\\ B_1 =& \{e^{i\xi} : \xi \in (-\pi/2, \pi/2)\}, \varphi_{B_1} : (x,y) \mapsto y;\\ B_2 =& \{e^{i\xi} : \xi \in (\pi/2, 3\pi/2)\}, \varphi_{B_2} : (x,y) \mapsto y.\end{aligned}$$

计算可得

$$\varphi_1 \circ \varphi_{A_1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$$

及其逆均光滑，同理 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 之间其他的坐标变换均为光滑映射，所以两个光滑图册诱导的微分结构 C^∞ 相容. □

2. 若 M, N 分别为 m, n 维微分流形，证明它们的拓扑积是 $m+n$ 维微分流形.

证明. 设 M, N 分别有光滑图册 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}, \{V_\beta, \psi_\beta\}$. 则 $M \times N$ 有坐标覆盖 $\{U_\alpha \times V_\beta, \eta_{\alpha\beta}\}$, 其中

$$\eta_{\alpha\beta} := U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y)).$$

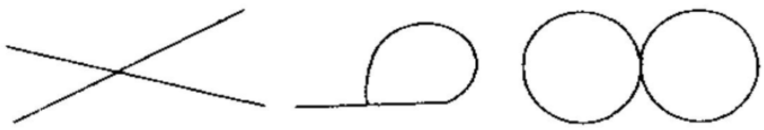
计算

$$\eta_{\alpha_2\beta_2} \circ \eta_{\alpha_1\beta_1}^{-1} = (\varphi_{\alpha_2} \circ \varphi_{\alpha_1}, \psi_{\beta_2} \circ \psi_{\beta_1})$$

根据 M, N 上的每个坐标变换光滑, 可知对 $\forall \alpha, \beta$, $\eta_{\alpha_2\beta_2} \circ \eta_{\alpha_1\beta_1}^{-1} 0$ 也光滑. 因此 $M \times N$ 被赋予了一个微分结构，是微分流形.

□

3. 下图中的图形是不是微分流形？为什么？



(a) (b) (c)

证明. 都不是. 在每个图形中，分支点的邻域去掉分支点后至少产生三个连通分支. 假设该领域同胚于 $\mathbb{R}^1$，那么邻域去掉分支点后至多只有两个连通分支，矛盾！所以每个图形都不是拓扑流形，进而不是微分流形. □

4. 设 $\mathbb{R}^1$ 上的映射 $\psi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, u \mapsto u^5$，由光滑图册 $\{(\mathbb{R}^1, \psi)\}$ 定义的微分结构记为 $\widetilde{\mathcal{A}}$. 记 $\mathbb{R}^1$ 上由光滑图册 $\{(\mathbb{R}^1, id)\}$ 定义的标准微分结构记为 $\mathcal{A}$. 证明：微分流形 $(\mathbb{R}^1, \mathcal{A})$ 与 $(\mathbb{R}^1, \widetilde{\mathcal{A}})$ 微分同胚.

证明. 构造连续映射 $f : (\mathbb{R}^1, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^1, \widetilde{\mathcal{A}}), x \mapsto x^{1/5}$. 计算得到

$$\psi \circ f \circ \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\mathrm{id} \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

所以 f^{-1} 存在且 f, f^{-1} 均光滑，所以 $(\mathbb{R}^1, \mathcal{A})$ 与 $(\mathbb{R}^1, \widetilde{\mathcal{A}})$ 微分同胚. □

作业二

1. 设 M, N 都是微分流形, 并且 M 连通. 又 $f : M \to N$ 是光滑映射, 证明: 在每个 $p \in M$ 都有 $f_{*p} = 0$ 当且仅当 f 是常值映射.

证明. ($\Rightarrow$) 用反证法. 假设 $\exists p_0, p_1 \in M, f(p_0) \neq f(p_1)$，由连通性存在道路 $\gamma : [0,1] \to M, \gamma(i) = p_i, i = 0, 1$. 记 $p_t := \gamma(t), t \in [0,1]$. 由

$$f_{*p_t}(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(t)$$

和微分中值定理可知存在 $\xi \in (0,1), f_{*p_\xi}(\gamma'(\xi)) = 0$, 这导致了矛盾. 因此 f 是常值映射.
($\Leftarrow$) 显然. □

2. 证明单位圆周 S^1 是欧式平面 $\mathbb{R}^2$ 的正则子流形.

证明. 取 S^1 在北极 $(0,1)$ 的球极投影映射 $\psi : S^1 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}^1$. 取充分小的 $\epsilon > 0$，记环形域 $H : 1 - \epsilon < |(x,y)| < 1 + \epsilon$, 开线段 L 连接 $(0, 1-\epsilon)$ 与 $(0, 1+\epsilon)$. 对 $\forall p \in S^1 \setminus \{0\}$, $H \setminus L$ 是 p 的一个开邻域，据此构造浸入

$$f : H \setminus L \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (\psi(\frac{(x,y)}{|(x,y)|}) - \psi(p), |(x,y)| - 1).$$

$f(p) = (0,0)$ 且 $f((H \setminus L) \cap S^1) = (\mathbb{R}, 0)$. 显然 f 在 $H \setminus L$ 上光滑. 对于另一个由南极点 $(0,-1)$ 球极投影诱导的坐标卡和光滑浸入同理. 所以 S^1 是 $\mathbb{R}^2$ 的正则子流形.
注. 可以不直接构造. 因为 S^1 到 $\mathbb{R}^2$ 存在单浸入，而 S^1 紧致，所以单浸入是嵌入，进而 S^1 是正则子流形. □

3. 设 M, N, L 都是微分流形，$f : M \to N$ 和 $g : N \to L$ 都是嵌入映射，证明 $g \circ f : M \to L$ 是嵌入映射.

证明. $g \circ f$ 是嵌入映射当且仅当对任意 $p \in M$, $(g \circ f)_{*p}$ 是单射并且 $g \circ f$ 光滑可逆. 而 g, f 均为嵌入，对它们运用上述等价关系，通过光滑性、可逆性在复合下不变以及 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ 就完成了证明. □

4. 设 M, N 都是微分流形，其中 M 紧致，N 连通，并且 $\dim M = \dim N$. 若 $f : M \to N$ 是浸入，证明 f 是满射.

证明. f 是浸入，对每个 $p \in M$，存在 p 的开邻域 U_p，$f\mid_{U_p}$ 是嵌入，U_p 与 $f(U_p)$，$\bar{U}_p$ 与 $f(\bar{U}_p)$ 微分同胚. 由紧性，存在有限个 $U_i (i = 1, ..., k)$ 覆盖 M. $\dim M = \dim N$，所以 $f(M) = \cup_{i=1}^k f(U_i)$ 是 N 中的开集. 同理 $f(M) = \cup_{i=1}^k f(\bar{U}_i)$ 是 N 中的闭集. 由连通性，$f(M) = N$. □

作业三

1. 证明：紧致微分流形上的任一单位分解必定只含有有限个光滑函数.

证明. 设 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 构成 M 上的单位分解，由局部有限性，对 $\forall p \in M$，存在邻域 V_p s.t. 仅有有限个 U_α 与 V_p 相交. $\{V_p\}_{p \in M}$ 构成 M 的开覆盖，由紧性可选出有限开覆盖 $V_1, ..., V_n$，且每个 V_i 都只与有限个 U_α 相交，而 $\mathrm{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$，所以只有有限个 φ_α 在 M 上非零，即紧微分流形上的单位分解只有有限个光滑函数. □

2. 设 U, V 都是微分流形 M 的开子集 s.t. $M = U \cup V$. 证明：存在光滑函数 $f, g: M \to \mathbb{R}$ s.t. $\mathrm{Supp}(f) \subset U, \mathrm{Supp}(g) \subset V$，并且 $f + g = 1$.

证明. 设单位分解 $\{\varphi_\alpha\}$ 从属于 $\{U, V\}$. 令

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\mathrm{Supp}(\varphi_\alpha) \subset U} \varphi_\alpha, \\ v &= \sum_{\mathrm{Supp}(\varphi_\alpha) \subset V} \varphi_\alpha, \\ w &= \sum_{\mathrm{Supp}(\varphi_\alpha) \subset U \cap V} \varphi_\alpha. \end{aligned}$$

那么由从属性可知

$$1 = \sum_\alpha \varphi_\alpha = u + v - w$$

那么令 $f = u, g = v - w$ 即完成了证明. □

3. 证明：(1) 对任一多重线性映射 $f: V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \to Z$，存在唯一的线性映射 $g: V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_r \to Z$ s.t. $f = g \circ h$，其中 $h: V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \to V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_r, h(v_1, ..., v_r) = v_1 \otimes ... \otimes v_r$ 表示张量积运算.

证明. (1) 定义映射

$$g: V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_r \to Z, g(v_1 \otimes ... \otimes v_r) := f(v_1, ..., v_r).$$

由 f 与张量积的线性性可知 g 是线性映射，且 $f = g \circ h$.
下面证明唯一性. 设存在线性映射 $g_1, g_2: V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_r \to Z$ s.t. $f = g_1 \circ h = g_2 \circ h$. 设 V_i 的基向量为 $\{e^{(i)}_{j^{(i)}}\}, i = 1, 2, ..., r, 1 \le j^{(i)} \le \mathrm{dim} V_i$，那么

$$\{h(e^{(1)}_{j^{(1)}}, e^{(2)}_{j^{(2)}}, ..., e^{(r)}_{j^{(r)}})\}_{j^{(i)}}$$

是 $V_1 \otimes ... \otimes V_r$ 的基向量，线性映射 g_1, g_2 在每个基向量的作用都相同，因此 $g_1 = g_2$；
(2) 由 (1) 的证明可知 h 诱导了同构 $V_1 \times ... \times V_r \to V_1 \otimes ... \otimes V_2$，于是它们的对偶空间也同构. □

4. 设 $\sigma \in S(r), x = v_1 \otimes ... \otimes v_r$，证明：$\sigma(x) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(r)}$.

证明. 按定义，对任一 $(u^{*1}, ..., u^{*r}) \in V^{*1} \times ... \times V^{*r}$，

$$\begin{aligned} \sigma(x)(u^{*1}, ..., u^{*r}) &= x(u^{*\sigma(1)}, ..., u^{*\sigma(r)}) \\ &= v_1(u^{*\sigma(1)}) \cdot ... \cdot v_r(u^{*\sigma(r)}) \\ &= v_{sigma^{-1}(1)}(u^{*1}) \cdot ... \cdot v_{\sigma^(-1)(r)}(u^{*r}) \\ &= v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(r)}(u^{*1}, ..., u^{*r}) \end{aligned}$$

因此 $\sigma(x) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(r)}$. □

作业四

1. 证明：对称张量在对称化算子的作用下不变，反对称张量在反对称化算子的作用下不变.

证明. 设 x 是一个对称张量，则

$$S_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S(r)}\sigma(x) = \frac{|S_r|}{r!}\cdot x = x;$$

设 y 是一个反对称张量，则

$$A_r(y) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S(r)}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\sigma(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S(r)} x = x.$$

因此命题成立. □

2. 设 $v_1,...,v_r \in V$ 线性相关，证明：对于任意 $\alpha\in\Lambda^k(V)$ 都有 $\alpha(v_1,...,v_r)=0$.

证明. 不妨设所有 v_i 非 0. 首先，如果存在 $i\neq j, v_i = v_j$, 则

$$\alpha(...,v_i,...,v_j,...) = -\alpha(...,v_i,...,v_j,...) = 0$$

由线性相关性，存在不全为 0 的系数 c_i(WLOG 令 $c_1\neq 0$), $c_1v_1+...+c_rv_r=0$，于是

$$v_1 = \sum_{i>1}\frac{c_i}{c_1}v_i$$

代入 $\alpha(v_1,...,v_r)$ 并利用前面的结论立得 $\alpha(v_1,...,v_r)=0$ □

3. 设 $\{v_1,...,v_k\}$ 和 $\{w_1,...,w_k\}$ 都是 V 中的线性无关向量组，证明：它们张成相同的 k 维子空间的充要条件是 $v_1\wedge...\wedge v_k = \alpha w_1\wedge...\wedge w_k$，其中 $\alpha\neq 0$.

证明. 先证明一个引理.

引理. 设 $v_1,...,v_k\in V$，则 $v_1,...,v_k$ 线性相关当且仅当 $v_1\wedge...\wedge v_k$.
引理的证明. $k=1$ 时显然. 设 $k\geq 2$. 必要性在第 2 题已证明；下证充分性. 设 $v_1,...,v_k$ 线性无关，将它扩张为 V 的一组基，那么 $v_1\wedge...\wedge v_k$ 是向量空间 $\Lambda(V)$ 中的基向量，所以 $v_1\wedge...\wedge v_k\neq 0$. 引理证毕.

回到原题. 对于充分性，取任意 $v_i, w_j, 1\leq i,j\leq k$，

$$v_1\wedge...\wedge v_k\wedge w_j = \alpha w_1\wedge...\wedge w_k\wedge w_j = 0$$
$$w_1\wedge...\wedge w_k\wedge v_i = \frac{1}{\alpha}v_1\wedge...\wedge v_k\wedge v_i = 0$$

根据引理和 i,j 的任意性即得到充分性. 对于必要性，由条件用 $\{w_j\}$ 的线性组合表示 $\{v_i\}$ 并代入 $v_1\wedge...\wedge v_k$，消去零项后即得到所证等式. 根据引理，等式两边均非零，所以 $\alpha\neq 0$. □

4. (1) 设 $\xi \in T^r(V), \eta \in T^s(V)$，求 $\xi \otimes \eta$ 与 $\eta \otimes \xi$ 的关系式.
(2) 设 $xi \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V)$，证明 $\xi \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \xi$.

证明. (1) 对任意 $v_1 \in (V^*)^r, v_2 \in (V^*)^s$，

$$\begin{aligned}&(\xi \otimes \eta)(v_1, v_2)\\=&\xi(v_1)\eta(v_2)\\=&(\eta \otimes \xi)(v_2, v_1)\end{aligned}$$

所以 $\eta \otimes \xi = (\xi \otimes \eta) \circ \sigma$，其中 $\sigma \in S(r+s)$ s.t.

$$\begin{aligned}\sigma :& i \mapsto i+s, 1 \leq i \leq r;\\ & i \mapsto i-r, r+1 \leq i \leq r+s\end{aligned}$$

(2) 考虑 (1) 中的 $\sigma(r, s$ 替换成 $k, l)$，$(-1)^\sigma = (-1)^{kl}$. 则对任意 $u_1, ..., u_l, ..., u_{k+l} \in V^*$，

$$\begin{aligned}&(\eta \wedge \xi)(u_1, ..., u_l, ..., u_{k+l})\\=&\frac{1}{l!k!}\sum_{\tau \in S(k+l)}(-1)^\tau \eta(u_{\tau(1)}, ..., u_{\tau(l)}) \cdot \xi(u_{\tau(l+1)}, ..., u_{\tau(k+l)})\\=&\frac{1}{k!l!}\sum_{\tau \in S(k+l)}(-1)^\tau \eta(u_{\tau\circ\sigma(k+1)}, ..., u_{\tau\circ\sigma(k+l)}) \cdot \xi(u_{\tau\circ\sigma(1)}, ..., u_{\tau\circ\sigma(k)})\\=&\frac{(-1)^\sigma}{k!l!}\sum_{\tau \in S(k+l)}\xi(u_{\tau(1)}, ..., u_{\tau(k)}) \cdot \eta(u_{\tau(k+1)}, ..., u_{\tau(k+l)})\\=&(-1)^{kl}(\xi \wedge \eta)(u_1, ..., u_l, ..., u_{k+l}).\end{aligned}$$

因此等式得证. □

作业五

1. 设 $\pi : E \to M$ 是一个秩为 q 的向量丛，$U \subset M$ 为非空开集. 令

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U}\pi^{-1}(p),$$

如果用 $\widetilde{\pi}$ 表示 π 在 $\pi^{-1}(U)$ 上的限制，证明

$$\pi^{-1}(U) = (\pi^{-1}(U), U, \widetilde{\pi})$$

是开子流形 U 上的一个秩为 q 的向量丛.

证明. (1) M 的光滑图册 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是 U 的坐标覆盖，φ_α 的微分同胚性以及 $\widetilde{\pi} \circ \varphi_\alpha(p, y) = p$ 都直接由 M 与 E 继承给 U 与 $\pi^{-1}(U)$;
(2) 对每个 $p \in U \subset M$，根据 E 的性质同样得到 $\varphi_{\alpha p}$ 是 $\mathbb{R}^q \to \pi^{-1}(p)$ 的同胚映射. 对于覆盖 U 的坐标卡 U_α, U_β，纤维型以及坐标变换公式也同样被继承;
(3) 坐标变换映射 $g_{\alpha\beta}$ 的光滑性也通过 E 是向量丛在 $\pi^{-1}(U)$ 上自然成立.
综上，$(\pi^{-1}(U), U, \widetilde{\pi})$ 是 U 上秩为 q 的向量丛. □

2. 设 M,N 是光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射. 令

$$f^*TN=\bigcup_{p\in M}\{p\}\times T_{f(p)}N.$$

证明：f^*TN 是 M 上秩为 $n=\dim N$ 的向量丛.

证明. 设 N 有光滑图册 $\{(V_\beta,\chi_\beta)\}$ 并诱导了 M 的坐标覆盖 $f^{-1}(V_\beta)$, $\dim N=n$. 已知切丛 (TN,N,π)
是 N 上秩为 n 的向量丛. 命 $\widetilde{\pi}:f^*TN\to M,(p,y)\mapsto p$.
(1) 对每个 (V_β,χ_β)，都存在一个 TN 的局部平凡化：$\psi_\beta:V_\beta\times\mathbb{R}^n\to\pi^{-1}(V_\beta)$. 于是构造 $\widetilde{\psi_\beta}$:

$$f^{-1}(V_\beta)\times\mathbb{R}^n\to\widetilde{\pi}^{-1}(f^{-1}(V_\beta)),(p,v)\mapsto(p,\pi_2\circ\psi_\beta^{-1}\circ\eta(v))$$

其中 $\eta:v\mapsto(f(p),v)$，π_2 是取 $\pi^{-1}(V_\beta)$ 的切向量分量. 如此 $\widetilde{\psi_\beta}$ 是一个微分同胚，且 $\widetilde{\pi}\circ\widetilde{\psi_\beta}(p,v)=p,\forall p\in f^{-1}(V_\beta)$; (2) 对每个 $p\in f^{-1}(V_\beta)$, $\psi_{\beta p}\ \mathbb{R}^n\to\pi^{-1}(f(p))$ 是同胚，那么根据 (1) 中的构造,

$$\widetilde{\psi_\beta}:\mathbb{R}^n\to\widetilde{\pi}^{-1}(p)$$

也是同胚. 当 $V_{\beta_1}\cap V_{\beta_2}\neq\emptyset$ 时，考虑 TN 上的转换函数 $g_{21}(f(p))\in GL(\mathbb{R}^n)$

$$\widetilde{\psi_{\beta_2}}^{-1}\circ\widetilde{\psi_{\beta_1}}(p,v)=(p,g_{21}(f(p))(v))$$

如此诱导了 f^*TN 上的 $GL(\mathbb{R}^n)$ 转换函数 $\widetilde{g_{21}}$;
(3) 已知 $\{g_{\beta'\beta}\}\ V_{\beta'}\cap V_\beta\to GL(\mathbb{R}^n)$ 都是光滑映射，那么根据 (2) 中的构造 $\widetilde{g_{\beta'\beta}}$ 也是光滑映射.
综上，f^*TN 是 M 上秩为 $\dim N$ 的向量丛. □

3. 设 X,Y,Z 是流形 M 上的光滑向量场，$f,g\in C^\infty(M)$, 证明：
(1) $[X,Y]=-[Y,X]$;
(2) $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$;
(3) $[fX,gY]=f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]$;
(4) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]$.

证明. (1) $[Y,X]=YX-XY=-[X,Y]$.
(2) $[X+Y,Z]=(X+Y)Z-Z(X+Y)=(XZ-ZX)+(YZ-ZY)=[X,Z]=[Y,Z]$.
(3) $[fX,gY]=fX(gY)-gY(fX)=f(Xg)Y+fg(XY)-g(Yf)X-gf(YX)=f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]$.
(4) 计算得

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]]=[X,YZ-ZY]=&X(YZ-ZY)-(YZ-ZY)X\\=&(XYZ-YZX)+(ZYX-XZY)\end{aligned}$$

上式关于 X,Y,Z 作轮换求和后右边项全部抵消为零，即得所证恒等式. □

4. 设 $\omega=Ady\wedge dz+Bdz\wedge dx+Cdx\wedge dy$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的外微分形式，且 $d\omega=0$. 令 $\alpha=(ydz-zdy)\int_0^1tA(tx,ty,tz)dt+(zdx-xdz)\int_0^1tB(tx,ty,tz)dt+(xdy-ydx)\int_0^1tC(tx,ty,tz)dt$.

证明：$d\alpha=\omega$.

证明. 首先

$$d\omega=0\Leftrightarrow div(A,B,C)=\partial_x A+\partial_y B+\partial_z C=0$$

现在计算

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}((ydz-zdy)\int_0^1 tA(tx,ty,tz)\,dt)\\
=&y\int_0^1 t^2\partial_x A(tx,ty,tz)\,dt\cdot dx\wedge dz-z\int_0^1 t^2\partial_x A(tx,ty,tz)\,dt\cdot dx\wedge dy\\
&+(2\int_0^1 tA(tx,ty,tz)\,dt+y\int_0^1 t^2\partial_y A(tx,ty,tz)\,dt+z\int_0^1 t^2\partial_z A(tx,ty,tz)\,dt)\cdot dy\wedge dz
\end{aligned}$$

另外两项也有相同形式. 三者相加得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha=&\sum_{cyc}(\int_0^1 2tC+xt^2\partial_x C+yt^2\partial_y C-zt^2(\partial_x A+\partial_y B)\,dt)\cdot dx\wedge dy\\
=&\sum_{cyc}(\int_0^1 2tC+t^2(x\partial_x C+y\partial_y C+z\partial_z C\,dt))\cdot dx\wedge dy\\
=&\sum_{cyc}(\int_0^1 2tC\,dt+\int_0^1 t^2\frac{d}{dt}C(tx,ty,tz)\,dt)\cdot dx\wedge dy\\
=&\sum_{cyc} t^2C(tx,ty,tz)\mid_{t=0}^1 dx\wedge dy\\
=&\omega
\end{aligned}$$

因此命题成立. □

作业六

1. 设 ω 是流形 M 上的 2 次外微分形式，$X,Y,Z\in\Gamma(TM)$，计算 $\mathrm{d}\omega(X,Y,Z)$.

证明. 由线性性，只需对单项式 $\omega=f\cdot du\wedge dv, f\in C^\infty$ 验证即可. 计算

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y,Z)=&\begin{vmatrix}\langle X,df\rangle & \langle X,du\rangle & \langle X,dv\rangle\\ \langle Y,df\rangle & \langle Y,du\rangle & \langle Y,dv\rangle\\ \langle Z,df\rangle & \langle Z,du\rangle & \langle Z,dv\rangle\end{vmatrix}\\
=&\sum_{cyc:X,Y,Z} Xf(YuZv-YvZu)
\end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned}
\langle (X,Y),\omega\rangle=&f(XuYv-XvYu)\\
X\langle (Y,Z),\omega\rangle=&Xf(YuZv-YvZu)+f(XYuZv+XZvYu-XYvZu-XZuYv)
\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{cyc:X,Y,Z} X\langle (Y,Z),\omega\rangle - f(XYuZv + XZvYu - XYvZu - XZuYv) \\
&= \sum_{cyc:X,Y,Z} X\langle (Y,Z),\omega\rangle + \langle (X,[Y,Z]),\omega\rangle
\end{aligned}
$$

以上即为 $d\omega$ 表达式. □

2. 证明：如果流形 M 上存在容许坐标覆盖，使得对其中任意两个相交的坐标邻域，局部坐标变换的 Jacobi 行列式为正，则 M 可定向.

证明. 取相容的单位分解 $\{U_\alpha, f_\alpha\}$，令

$$
\omega = \sum_\alpha f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge ... \wedge dx_\alpha^m
$$

根据单位分解的局部有限性以及 $0 \le f_\alpha \le 1, \sum_\alpha f_\alpha \equiv 1$，$\omega$ 处处有定义，处处非零并且光滑. 由坐标变换的 Jacobi 行列式均为正，ω 处处非零这一事实不依赖于坐标的选择：在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 上

$$
dx_\alpha^1 \wedge ... \wedge dx_\alpha^m = \det(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}) dx_\beta^1 \wedge ... \wedge dx_\beta^2
$$

其中 $\det(\frac{\partial x}{\partial y}) > 0$，而 f_α, f_β 非负，所以 ω 在不同坐标卡之间保持定向，进而给出了 M 的一个定向. □

3. 设 $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，$m$ 是正整数. 考虑 U 上的 $n-1$ 次外微分形式

$$
\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} f_i \, dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^n
$$

其中 $f_i(x) = x^i / \|x\|^m$，$\|\cdot\|$ 是欧式范数.

(1) 求 $\mathrm{d}\omega$；

(2) 确定 m 的值使得 ω 是闭形式；

(3) 在 ω 是闭形式的情形下，证明 ω 不是恰当形式.

证明. (1) 直接计算

$$
\begin{aligned}
d\omega =& \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^n \\
=& \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^n \\
=& \sum_{i=1}^n \frac{\|x\|^2 - m(x^i)^2}{\|x\|^{m+2}} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
=& \frac{n-m}{\|x\|^m} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n
\end{aligned}
$$

(2) ω 是闭形式当且仅当 $m = n$.

(3) 按条件，$m = n$. 假设存在 $\beta \in \Lambda^{n-2}, \omega = d\beta$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上成立，那么在单位球面 S^{n-1}

上由 Stokes 公式

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{\partial S^{n-1}} \beta = 0,\ \partial S^{n-1} = \emptyset$$

但由 Stokes 公式直接计算:

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \omega =& \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \int_{S^{n-1}} x^i\, dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^n \\ =& \sum_{i=1}^{n} \int_{B^n} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\ =& n \operatorname{vol}(B^n) \neq 0\end{aligned}$$

以上矛盾说明 ω 不是恰当形式. □

4. 证明: (1) 若 α, β 都是闭形式, 则 $\alpha \wedge \beta$ 也是闭形式.

(2) 若 α 是闭形式, β 是恰当形式, 则 $\alpha \wedge \beta$ 是恰当形式.

证明. (1) $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \mathrm{d}\beta = 0$, 其中 α 是 r 次外微分形式. 因此 $\alpha \wedge \beta$ 是闭形式.
(2) 设外微分形式 ω 满足 $\beta = \mathrm{d}\omega$, 则 $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \mathrm{d}\omega = (-1)^r(\mathrm{d}(\alpha \wedge \omega) - \mathrm{d}\alpha \wedge \omega) = \mathrm{d}((-1)^r \alpha \wedge \omega)$, 其中 α 是 r 次外微分形式. 因此 $\alpha \wedge \beta$ 是恰当形式. □

作业七

1. 设 $D^{(i)}$ 是向量丛 (E_i, π_i, M) 上的联络, $i = 1, 2$. 试分别求出诱导联络 $D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ 和 $D^{(1)} \otimes D^{(2)}$ 的联络系数和联络形式.

证明. 取 E_i 的局部标架场为 $\{s_\alpha^{(i)}\}, i = 1, 2$. 记

$$\begin{aligned}D^{(i)} s_\alpha^{(i)} &= \Gamma_{\alpha k}^{(i)\beta}\, du^k \otimes s_\beta^{(i)} \\ \omega_\alpha^{(i)\beta} &= \Gamma_{\alpha k}^{(i)\beta}\, du^k\end{aligned}$$

那么对于 $E_1 \oplus E_2$ 的局部标架场 $\{s_\alpha^{(1)} \oplus s_\gamma^{(2)}\}$,

$$\begin{aligned}&(D^{(1)} \oplus D^{(2)})(s_\alpha^{(1)} \oplus s_\gamma^{(2)}) \\ =& D^{(1)} s_\alpha^{(1)} \oplus D^{(2)} s_\gamma^{(2)} \\ =& \Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta} \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau}\, du^k \otimes s_\beta^{(1)} \otimes s_\tau^{(2)}\end{aligned}$$

因此 $D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ 的联络形式

$$\omega_{\alpha\oplus\gamma}^{\beta\oplus\tau} = \Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta} \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau}\, du^k;$$

对于 $E_1 \otimes E_2$ 的标架场 $\{s_\alpha^{(1)} \otimes s_\gamma^{(2)}\}$,

$$\begin{aligned}&(D^{(1)} \otimes D^{(2)})(s_\alpha^{(1)} \otimes s_\gamma^{(2)}) \\ =& D^{(1)} s_\alpha^{(1)} \otimes s_\gamma^{(2)} + s_\alpha^{(1)} \otimes D^{(2)} s_\gamma^{(2)} \\ =& \Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta}\, du^k \otimes s_\beta^{(1)} \otimes s_\gamma^{(2)} + \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau}\, du^k \otimes s_\alpha^{(1)} \otimes s_\tau^{(2)} \\ =& (\Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta} \delta_\gamma^\tau + \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau} \delta_\alpha^\beta)\, du^k \otimes s_\beta^{(1)} \otimes s_\tau^{(2)}\end{aligned}$$

因此 $D^{(1)} \otimes D^{(2)}$ 的联络形式

$$\omega_{\alpha\otimes\gamma}^{\beta\otimes\tau} = (\Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta}\delta_\gamma^\tau + \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau}\delta_\alpha^\beta)\, du^k$$

因此命题成立. □

2. 设 E 是流形 M 上的向量丛，D 是 E 上的联络，C 是 M 上的光滑曲线，证明：沿着 C 的平行移动建立了 E 在曲线 C 的各点的纤维之间的同构.

证明. 设曲线 C 有局部坐标表示 $C: u^i = u^i(t)$. 取 $C(t)$ 处的纤维 E_t 的局部标架场 $\{s_\alpha^{(t)}\}$，设 C 的切向量场

$$X = \frac{du^i}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i} = X^i\frac{\partial}{\partial u^i}$$

则平行移动诱导了映射 $\tau_t : E_0 \to E_t$，

$$\tau_t(v_0) = v_t \in E_t$$

其中 v_t 是 v_0 平行移动至 E_t 的向量. 设沿 C 的平行截面 $s = \lambda^i\frac{\partial}{\partial u^i}$，则关于平行移动方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} &0 = \langle X, Ds\rangle = \frac{d\lambda^i}{dt} + \sum_{j,k}\Gamma_{jk}^i X^k\lambda^j, \forall i \\ &s(0) = v_0 \end{aligned}$$

在局部解存在且唯一. 以上方程是一阶齐次线性常微分方程组，所以 Cauchy 问题有全局唯一解，且解只能处处为零或处处不为零，所以 $\tau_t(v_0) = s(t)$ 在整个 C 上有定义，是线性映射且 $\ker\tau_t = \{0\}$. 综上述，对 $\forall t$，τ_t 是 E_0 到 E_t 的线性同构，再由 C 起点的任意性可知平行移动诱导了各纤维之间的线性同构. □

3. 设 M 是光滑流形，D 是 M 上的仿射联络，T 是 D 的挠率张量. 证明：

(1) $T(X,Y) = D_XY - D_YX - [X,Y], \forall X, Y \in \Gamma(TM)$；

(2) D 称为无挠仿射联络，如果 D 的挠率张量恒为零. 证明 D 是无挠当且仅当它在任一局部坐标系 $(U,(u^i))$ 下的联络系数 Γ_{jk}^i 关于下指标 j,k 是对称的.

证明. (1) 记局部坐标 $\{u^i\}$ 下 $s_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$，设截面 $X = X^is_i, Y = Y^is_i$，则

$$\begin{aligned} DY &= dY^j \otimes s_j + Y^j\Gamma_{ji}^l\, du^i \otimes s_l \\ D_XY &= \langle X, DY\rangle = X(Y^j)s_j + X^iY^j\Gamma_{ji}^l s_l \\ D_YX &= \langle Y, DX\rangle = Y(X^j)s_j + X^iY^j\Gamma_{ij}^l s_l \end{aligned}$$

所以

$$D_XY - D_YX = (XY^j - YX^j)s_j + X^iY^j(\Gamma_{ji}^l - \Gamma_{ij}^l)s_l = [X,Y] + T(X,Y)$$

(2) $T \equiv 0$ 当且仅当对任意截面 X, Y，$T(X,Y) = X^iY^j(\Gamma_{ji}^l - \Gamma_{ij}^l)$ 恒为零，当且仅当对 $\forall i,j,l$，Γ_{ij}^l 关于下指标对称. □

4. 设 M 是光滑流形, D 是 M 上的仿射联络, t 是 $(2,2)$ 型张量场, 试在局部坐标系 $(U,(u^i))$ 下计算 t 的绝对微分 Dt.

证明. 设 (2,2) 型张量 t 在局部坐标 $\{u^i\}$ 下有坐标表示 (记 $\frac{\partial}{\partial u^i}=s_i$)

$$t=t^{ij}_{kl}du^k\otimes du^l\otimes s_i\otimes s_j$$

按联络的定义计算

$$\begin{aligned}Dt=&dt^{ij}_{kl}\otimes du^k\otimes du^l\otimes s_i\otimes s_j+t^{ij}_{kl}\otimes D(du^k)\otimes du^l\otimes s_i\otimes s_j\\&+t^{ij}_{kl}\otimes du^k\otimes D(du^l)\otimes s_i\otimes s_j+t^{ij}_{kl}\otimes du^k\otimes du^l\otimes D(s_i)\otimes s_j\\&+t^{ij}_{kl}\otimes du^k\otimes du^l\otimes s_i\otimes D(s_j)\end{aligned}$$

而根据定义

$$\begin{aligned}&D(du^p)=-\Gamma^p_{kq}\,du^q\otimes du^k=-\omega^p_k\otimes du^k\\&D(s_p)=\Gamma^i_{pq}\,du^q\otimes s_i=\omega^i_p\otimes s_i\end{aligned}$$

代入可得

$$\begin{aligned}Dt=&(dt^{ij}_{kl}-t^{ij}_{pl}\omega^p_k-t^{ij}_{kp}\omega^p_l+t^{pj}_{kl}\omega^i_p+t^{ip}_{kl}\omega^j_p)\,du^k\otimes du^l\otimes s_i\otimes s_j\\=&t^{ij}_{kl,h}\,du^h\otimes du^k\otimes du^l\otimes s_i\otimes s_j\\t^{ij}_{kl,h}=&\frac{\partial t^{ij}_{kl}}{\partial u^h}-t^{ij}_{pl}\Gamma^p_{kh}-t^{ij}_{kp}\Gamma^p_{lh}+t^{pj}_{kl}\Gamma^i_{ph}+t^{ip}_{kl}\Gamma^j_{ph}\end{aligned}$$

以上即为 t 的绝对微分的表达式. □

作业八

1. 写出关于 (r,s) 型张量的 Ricci 恒等式，并在 $r=s=1$ 的情形下证明之.

证明. 设 $t=t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}du^{j_1}\otimes\dots\otimes du^{j_s}\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}$，则有 **Ricci 恒等式**:

$$t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s,pq}-t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s,qp}=-t^{i_1\dots\widehat{i_m}li_{m+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s}R^{i_m}_{lpq}+t^{i_1\dots i_r}_{j\dots\widehat{j_m}lj_{m+1}\dots j_s}R^l_{j_mpq}+t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s,k}T^k_{pq}$$

下面在 $r=s=1$ 的情形下证明之. 计算

$$\begin{aligned}t^i_{j,p}=&\frac{\partial t^i_j}{\partial u^p}+t^l_j\Gamma^i_{lp}-t^i_l\Gamma^l_{jp}\\t^i_{j,pq}=&\frac{\partial^2t^i_j}{\partial u^p\partial u^q}+\frac{\partial t^l_j}{\partial u^q}\Gamma^i_{lp}+t^l_j\frac{\partial\Gamma^i_{lp}}{\partial u^q}-\frac{\partial t^i_l}{\partial u^q}\Gamma^l_{jp}-t^i_l\frac{\partial\Gamma^l_{jp}}{\partial u^q}\\&+\Gamma^i_{hq}(\frac{\partial t^h_j}{\partial u^p}+t^l_j\Gamma^h_{lp}-t^h_l\Gamma^l_{jp})\\&-\Gamma^h_{jq}(\frac{\partial t^i_h}{\partial u^p}+t^l_h\Gamma^i_{lp}-t^i_l\Gamma^l_{hp})\\&-\Gamma^h_{pq}(\frac{\partial t^i_j}{\partial u^h}+t^l_j\Gamma^i_{lh}-t^i_l\Gamma^l_{jh})\end{aligned}$$

同理可计算 $t^i_{j,qp}$，进而有

$$\begin{aligned}t^i_{j,pq}-t^i_{j,qp}=&t^l_j(\frac{\partial\Gamma^i_{lp}}{\partial u^q}-\frac{\partial\Gamma^i_{lq}}{\partial u^p}+\Gamma^i_{hq}\Gamma^h_{lp}-\Gamma^i_{hp}\Gamma^h_{lq})\\&+t^i_l(\frac{\partial\Gamma^l_{jq}}{\partial u^p}-\frac{\partial\Gamma^l_{jp}}{\partial u^q}+\Gamma^l_{hp}\Gamma^h_{jq}-\Gamma^l_{hq}\Gamma^h_{jp})\\&+(\frac{\partial t^i_j}{\partial u^h}-t^i_l\Gamma^l_{jh}+t^l_j\Gamma^i_{lh})(\Gamma^h_{qp}-\Gamma^h_{pq})\\=&-t^l_jR^i_{lpq}+t^i_lR^l_{jpq}+t^i_{j,h}T^h_{pq}\end{aligned}$$

Ricci 恒等式得证. □

2. 设 (M^m,D) 是仿射联络空间，$p\in M$，U 为 p 的开邻域，$X_1,...,X_m$ 为 TU 上的光滑标架场，$\omega^1,...,\omega^m$ 是对偶 1-形式，设 $\omega^i_j=\Gamma^i_{jk}\omega^k$. 证明:

$$d\omega^i_l=\omega^p_l\wedge\omega^i_p+\frac{1}{2}R^i_{ljk}\omega^j\wedge\omega^k.$$

证明. 对于标架场的任意两个基向量场 X_α,X_β，

$$\begin{aligned}d\omega^i_l(X_\alpha,X_\beta)=&X_\alpha\left\langle X_\beta,\omega^i_l\right\rangle-X_\beta\left\langle X_\alpha,\omega^i_l\right\rangle-\left\langle[X_\alpha,X_\beta],\omega^i_l\right\rangle\\=&X_\alpha(\Gamma^i_{lk}\left\langle\omega^k,X_\beta\right\rangle)-X_\beta(\Gamma^i_{lk}\left\langle\omega^k,X_\alpha\right\rangle)-\Gamma^i_{lk}\left\langle[X_\alpha,X_\beta],\omega^k\right\rangle\\=&X_\alpha(\Gamma^i_{l\beta})-X_\beta(\Gamma^i_{l\alpha})-\Gamma^i_{lk}c^k_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\omega^p_l\wedge\omega^i_p(X_\alpha,X_\beta)+\frac{1}{2}R_{ljk}(\omega^j\wedge\omega^k)(X_\alpha,X_\beta)\\=&\Gamma^p_{l\alpha}\Gamma^i_{p\beta}-\Gamma^p_{l\beta}\Gamma^i_{p\alpha}+\frac{1}{2}(R^i_{l\alpha\beta}-R^i_{l\beta\alpha})\\=&\Gamma^p_{l\alpha}\Gamma^i_{p\beta}-\Gamma^p_{l\beta}\Gamma^i_{p\alpha}+R^i_{l\alpha\beta}\\=&X_\alpha(\Gamma^i_{l\beta})-X_\beta(\Gamma^i_{l\alpha})-\Gamma^i_{lp}c^p_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

由 X_α,X_β 任意性可知 $d\omega^i_l=\omega^p_l\wedge\omega^i_p+\frac{1}{2}R^i_{ljk}\omega^j\wedge\omega^k$. □

3. 证明等式:

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}+\omega^l_i\wedge\omega_{jl}.$$

证明. 根据定义，$\omega_{ij}=\omega^k_ig_kj,dg_{ij}=\omega^k_ig_{kj}+\omega^k_jg_{ik}$. 计算

$$\begin{aligned}&d\omega_{ij}+\omega^l_i\wedge\omega_{jl}\\=&d\omega^k_ig_{kj}-\omega^k_i\wedge dg_{kj}+\omega^l_i\wedge(\omega^k_jg_{kl})\\=&d\omega^k_ig_{kj}-\omega^k_i\wedge(\omega^p_kg_{pj}+\omega^p_jg_{kp})+\omega^l_i\wedge(\omega^k_jg_{kl})\\=&d\omega^k_ig_{kj}-\omega^l_i\wedge\omega^k_lg_{kj}\\=&\Omega^k_ig_{kj}=\Omega_{ij}\end{aligned}$$

因此命题成立. □

4. 设 (M,G) 是黎曼流形，证明其曲率张量满足：

$$R_{ijkl}=\frac{\partial\Gamma_{ijl}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ijk}}{\partial u^l}+\Gamma^h_{ik}\Gamma_{jhl}-\Gamma^h_{il}\Gamma_{jhk}$$

证明. 计算

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Gamma_{ijl}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ijk}}{\partial u^l}+\Gamma^h_{ik}\Gamma_{jhl}-\Gamma^h_{il}\Gamma_{jhk}\\
=&\frac{\partial\Gamma^p_{il}g_{pj}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^p_{ik}g_{pj}}{\partial u^l}+\Gamma^h_{ik}\Gamma^p_{jl}g_{ph}-\Gamma^h_{il}\Gamma^p_{jk}g_{ph}\\
=&(\frac{\partial\Gamma^p_{il}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^p_{ik}}{\partial u^l})g_{pj}+\Gamma^p_{il}\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^k}-\Gamma^p_{ik}\frac{\partial_{pj}}{\partial u^l}+(\Gamma^h_{ik}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^h_{il}\Gamma^p_{jk})g_{hp}\\
=&(\frac{\partial\Gamma^p_{il}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^p_{ik}}{\partial u^l})g_{pj}+(\Gamma_{pjk}+\Gamma_{jpk})\Gamma^p_{il}-(\Gamma_{pjl}+\Gamma_{jpl})\Gamma^p_{ik}\\
&+(\Gamma^h_{ik}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^h_{il}\Gamma^p_{jk})g_{ph}\\
=&(\frac{\partial\Gamma^p_{il}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^p_{ik}}{\partial u^l})g_{pj}+(\Gamma^h_{pk}\Gamma^p_{il}-\Gamma^h_{pl}\Gamma^p_{ik})g_{hj}\\
&+(\Gamma^h_{il}\Gamma^p_{jk}-\Gamma^h_{ik}\Gamma^p_{jl})g_{hp}+(\Gamma^h_{ik}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^h_{il}\Gamma^p_{jk})g_{ph}\\
=&(\frac{\partial\Gamma^h_{il}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial u^l}+\Gamma^h_{pk}\Gamma^p_{il}-\Gamma^h_{pl}\Gamma^p_{ik})g_{hj}\\
=&R^h_{ikl}g_{hj}=R_{ijkl}
\end{aligned}$$

因此命题成立. □

5. 设 D 是黎曼流形 M 上的黎曼联络，记 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为黎曼度量. 证明：对于 M 上任意光滑切向量场 X,Y,Z 成立

$$2\langle D_XY,Z\rangle=X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle.$$

证明. 先建立两个引理：

引理 1. 设联络 D 容许度量 G，则对任意光滑切向量场 X,Y,Z，

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle D_XY,Z\rangle+\langle Y,D_XZ\rangle$$

引理 2. 设联络 D 无挠，则对任意光滑向量场 X,Y，

$$D_XY-D_YX=[X,Y]$$

首先用以上引理证明原命题. 计算

$$\begin{aligned}
&X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle\\
=&\langle D_XY+D_YX,Z\rangle+\langle Y,D_XZ-D_ZX\rangle+\langle X,D_YZ-D_ZY\rangle\\
=&\langle 2D_XY,Z\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle+\langle[X,Z],Y\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle
\end{aligned}$$

所以

$$2\langle D_XY,Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle$$

下面证明两个引理. 设局部坐标 $\{u^i\}$ 下 $X = X^i\frac{\partial}{\partial u^i}$，$Y, Z$ 也采用同类记号. 计算

$$D_XY = X^i\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, D(Y^j\frac{\partial}{\partial u^j})\right\rangle = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} + X^iY^j\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial u^k}$$

$$\begin{aligned}
\langle Z, D_XY\rangle =& g_{ij}du^i\otimes du^j(D_XY,Z)\\
=& g_{ij}du^i\otimes du^j(X^h\frac{\partial Y^l}{\partial u^h}\frac{\partial}{\partial u^l} + X^hY^l\Gamma^k_{lh}\frac{\partial}{\partial u^k}, Z^p\frac{\partial}{\partial u^p})\\
=& g_{ij}(X^h\frac{\partial Y^i}{\partial u^h} + X^hY^l\Gamma^i_{lh})\cdot Z^j\\
=& g_{ij}X^hZ^j\frac{\partial Y^i}{\partial u^h} + X^hY^lZ^j\Gamma_{ljh}
\end{aligned}$$

同理可得

$$\langle Y, D_XZ\rangle = g_{ij}X^hY^j\frac{\partial Z^i}{\partial u^h} + X^hZ^lY^j\Gamma_{ljh}$$

而根据黎曼联络的性质，$\frac{\partial g_{ij}}{\partial U^h} = \Gamma_{ijh} + \Gamma_{jih}$，所以

$$\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle =& X^h\frac{\partial}{\partial u^h}(g_{lj}Y^lZ^j)\\
=& X^hY^lZ^j(\Gamma_{ljh} + \Gamma_{jlh}) + X^hZ^jg_{lj}\frac{\partial Y^l}{\partial u^h} + X^hY^lg_{lj}\frac{\partial Z^j}{\partial u^h}\\
=& \langle D_XY, Z\rangle + \langle Y, D_XZ\rangle
\end{aligned}$$

引理 1 得证. 再由联络无挠，$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$，计算

$$\begin{aligned}
D_XY - D_YX =& X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} + X^iY^j\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial u^k}\\
&- Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} - Y^iX^j\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial u^k}\\
=& X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j}\\
=& [X,Y]
\end{aligned}$$

引理 2 得证，进而完成原命题的证明. □

作业九

1. 设 M 是截面曲率为 c 的常曲率空间，则 M 的 Ricci 曲率和数量曲率分别是 $(m-1)c$ 和 $m(m-1)c$.

证明. 对于 $p\in M$，设 $\{e_i\}$ 是 (T_pM, g) 的标准正交基，$X\in T_pM$ 是单位向量，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_p(X) =& R(e_i, X, e_i, X)\\
=& c(|e_i|^2|X|^2 - \langle e_i, X\rangle^2)\\
=& c(m - |X|^2) = (m-1)c
\end{aligned}$$

以及

$$S(p)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Ric}_P(e_i)=m(m-1)c$$

因此命题成立. □

2. 设 M 是黎曼流形，$p\in M$，证明：M 在点 p 的数量曲率 $S(p)$ 可表示为

$$S(p)=\frac{m}{\omega_{m-1}}\int_{S^{m-1}}\mathrm{Ric}_p(v)dV_{S^{m-1}},$$

其中 ω_{m-1} 是切空间 T_pM 中的单位球面 S^{m-1} 的体积.

证明. 注意到 $\mathrm{Ric}_p(X)=R(e_i,X,e_i,X)$ 是二阶对称协变张量，所以存在 T_pM 的一组标准正交基 $\{e_i\}$ 将 Ric_p 对角化：对任意单位切向量 $v=x^ie_i$ 有

$$\mathrm{Ric}_p(v)=\lambda^i{x^i}^2,$$

其中 λ^i 是 Ric_p 的特征值. 因此再利用 Stokes 公式计算

$$\begin{aligned}\int_{S^{m-1}}\mathrm{Ric}_p(v)\,dS^{m-1}=&\int_{S^{m-1}}x^i\cdot\lambda^ix^i\,dS^{m-1}\\=&\int_{S^{m-1}}v\cdot(\lambda^ix^i)\,dS^{m-1}\\=&\int_{B^m}\mathrm{div}(\lambda^ix^i)\,dB^m\\=&\mathrm{vol}(B^m)\cdot\lambda^i\\=&\frac{\omega_{m-1}}{m}\cdot\mathrm{Ric}_p(e_i)\\=&\frac{\omega_{m-1}}{m}S(p)\end{aligned}$$

因此命题成立. □

3. 证明：设

$$F(x,v)=(x,\exp_xv),$$

$\mathcal{U}$ 局部坐标为 $(x^1,...,x^m;v^1,...,v^m)$，$U\times U\subset M\times M$ 局部坐标为 $(x_1^1,...,x_1^m;x_2^1,...,x_2^m)$，则

$$\begin{aligned}dF(\frac{\partial}{\partial x^i})\mid_{(x,0)}=\frac{d}{dx^i}(x,\exp_xv)\mid_{(x,0)}=\frac{\partial}{\partial x_1^i}+\frac{\partial}{\partial x_2^i}\\dF(\frac{\partial}{\partial v^i})\mid_{(x,0)}=\frac{d}{dv^i}(x,\exp_xv)\mid_{(x,0)}=(d\mathrm{exp_x})\frac{\partial}{\partial v^i}=\frac{\partial}{\partial x_2^i}\end{aligned}$$

证明. 在坐标 $\{x^i, v^i\}$ 下 dF 的 Jacobi 矩阵 $J_F = (\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\ \frac{\partial F_i}{\partial v^j})_{ij}$，所以

$$\begin{aligned} dF(\frac{\partial}{\partial x^i})\mid_{(x,0)}=&\frac{d}{dx^i}(x, \exp_x v)\mid_{(x,0)}=\frac{dx^j}{dx^i}\frac{\partial}{\partial x_1^j}+\frac{d(\exp_x 0)^j}{dx^i}\frac{\partial}{\partial x_2^j} \\ =&\frac{\partial}{\partial x_1^i}+\frac{dx^j}{dx^i}\frac{\partial}{\partial x_2^j}=\frac{\partial}{\partial x_1^i}+\frac{\partial}{\partial x_2^i} \end{aligned}$$

另一方面，设 $exp_x v$ 诱导的测地线为 $\gamma_v(t)$，计算

$$\begin{aligned} dF(\frac{\partial}{\partial v^i})\mid_{(x,0)}=&\frac{d}{dv^i}(x, \exp_x v)\mid_{(x,0)}=0+\frac{d}{dt}\exp_x(tv^i)\mid_{t=0} \\ =&\frac{d}{dt}\gamma_{tv^i}(1)\mid_{t=0}=\frac{d}{dt}\gamma_{v^i}(t)\mid_{t=0} \\ =&\mathrm{id}(\frac{\partial}{\partial x_2^i})=\frac{\partial}{\partial x_2^i} \end{aligned}$$

因此命题成立. □

4. 在圆柱面

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, -\infty < y < +\infty\}$$

上令 $p = (0, 0, 1)$. 证明：对任意 $q = (x_0, y_0, z_0) \in M$，如果

$$q \neq (0, 0, -1),$$

则存在连接 p, q 的测地线，它不是极短测地线.

证明. 考虑 M 的一个局部坐标卡

$$\phi_1 : U_1 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1, u^2, \sin u^1)$$

则 $p = \phi(\pi/2, 0)$. 通过 $\mathbb{R}^3$ 中的标准度量诱导 U_1 上的度量，计算度量矩阵

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

进而得到黎曼联络系数

$$\Gamma_{ij}^k \equiv 0,\ \forall i, j, k.$$

代入测地线方程可得 U_1 上任意一点出发的测地线都是平直射线：存在常数 A_1, A_2, C_1, C_2，

$$u^1(t) = A_1 + C_1 t,\ u^2(t) = A_2 + C_2(t),$$

特别地，从 p 出发的测地线在 U_1 上的起点是 $(\pi/2, 0)$. 同理可得在另一局部坐标卡

$$\phi_2 : U_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1, u^2, \sin u^1)$$

上任意一点出发的测地线均为平直射线，又每个 U_i 都是凸集，因此 $U_i (i = 1, ..., 4)$ 是其中每个点的测地凸邻域. 同时易知 $\{(U_i, \phi_i)\}$ 构成 M 上的定向光滑图册. 设 $q \neq (0, 0, -1)$，则存在 i s.t. $q \in \phi_i(U_i)$. 分情况讨论：

(1) $y_q \neq 0$. 在相差一个仿射变换的情形下不妨设 $y_q = 2$，那么存在连接 p, q 的极小测地线–在 U_1 上连接 $(\pi/2, 0), \phi^{-1}(q)$ 的直线–$\gamma_0 \subset \phi(U_1)$. 现在令 $A_1 = \pi/2, A_2 = 0$. 因为 $y_q > 0$，所以可以适当选取 $C_1, C_2 > 0$ s.t. 从 p 出发的测地线 $\gamma(t)$ 将依次经过

$$\phi_1(U_1), \phi_2(U_2), \phi_1(U_1), \phi_2(U_2), ...$$

后在 $t = 1$ 时到达 q，且限制在每个 $\phi_i(U_i)$ 上都是其中任意两点之间的极小测地线. 那么 γ 是连接 p, q 的测地线但不是极小的；

(2) $y_q = 0$ 且 $z_q \neq -1$. 易知圆周

$$S = \{(x, y, z) : y = 0, x^2 + z^2 = 1\}$$

是从 p 出发的测地线，那么存在 S 上连接 p, q 的优圆弧 γ'，γ' 是测地线但根据度量的正定性其长度严格大于其对应的劣圆弧，因而不是极小的.

综上述，如果 $q \neq (0, 0, -1)$，则存在连接 p, q 的非极小测地线. □

5. 设 (M, g) 是黎曼流形，$p \in M, \delta > 0$. 令

$$V_p(\delta) = \{q \in M : d(p, q) < \delta\},$$

证明：如果存在点 p 的一个法坐标邻域 U s.t. $V_p(\delta) \subset U$，则

$$V_p(\delta) = \mathscr{B}_p(\delta)$$

是 (M, g) 的一个测地球.

证明. 已知 U 上有法坐标：

$$\phi : D \subset T_pM \to M,\ v \mapsto \exp_p v,$$

其中 $B_0(\delta) \subset D, U \subset \phi(D)$, $|v|$ 为弧长参数. 对每个 $c \in U$，连接 p, c 的极小测地线具有表达式 γ_v，$\exp_p v = c$，显然测地球 $\mathscr{B}_p(\delta) \subset V_p(\delta)$. 对每个 $q \in V_p(\delta)$，所以存在唯一的连接 p, q 且长度小于 δ 的极小测地线 $\gamma \subset M$. 假设存在 $t_0 \in (0, 1)$，$\gamma(t_0) \notin V_p(\delta)$，$V_p(\delta) \subset U$，根据介值定理不妨设 $\gamma(t_0) \in U \setminus V_p(\delta)$，则 $\gamma(t_0) \notin \mathscr{B}_p\delta$，$L(\gamma) \geq \mathrm{d}(p, \gamma(t_0)) \geq \delta$，矛盾! 所以 $\gamma \in V_p(\delta) \subset U$. 设 $\gamma = \gamma_v$，则 $|v| < \delta$，$q = \exp_p v \in \mathscr{B}_p\delta$. 综上，$V_p(\delta) = \mathscr{B}_p(\delta)$. □

作业十

1. 设 M 是黎曼流形，$p \in M$. 在 M 上一条以弧长为参数的测地线 $\gamma : [0, +\infty) \to M$ 称为从 p 点出发的**射线**，如果

$$\gamma(0) = p,$$

并且对于任意的 $t \in (0, \infty)$，$\gamma\ |_{[0,t]}$ 是连接 p 与 $\gamma(t)$ 两点的最短曲线，因而 $\mathrm{d}(p, \gamma(t)) = t$.
证明：如果 M 是完备非紧的，则对于任意的 $p \in M$，在 M 上必存在从 p 点出发的射线.

证明. 若 M 完备，则任意两点都有极小测地线连接. M 非紧，取 $\{x_n\}$，$\mathrm{d}(x_n, p) \to \infty$，用极小测地线 $\gamma_n(t)$ 连接 p, x_n，以弧长为参数，$\gamma_n(0) = p$，故 $\gamma_n(t) = \exp_p(tv_n)$. 设

$\dot{\gamma_n}(0) = v_n, |v_n| = 1$. 由单位球面 S^{n-1} 紧致，有子列 (仍记为 $\{v_n\}$) 收敛于 $v \in S^{n-1}$，作测地线 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$，$t \in [0, \infty)$. $\exp_p$，$\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$ 都是连续映射，所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\gamma(t), \gamma_n(t)) =& \mathrm{d}(\gamma(t), \lim_{n\to\infty} \exp_p tv_n) \\ =& \mathrm{d}(\gamma(t), \gamma(t)) = 0\end{aligned}$$

对每个 $t \in [0, \infty)$ 都成立. 设 $t_n : \gamma(t_n) = x_n$，则必然 $t_n \to \infty$，进而由前面的极限可知 $\mathrm{d}(p, \gamma(t_n)) \to \infty$. 下面证明连接 γ 上任意一点和 p 的极小测地线都是 γ：由 $\gamma_n(t)$ 在 $[0, t_n)$ 上极小，对每个 $t > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，$\forall n > N, t < t_n$，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(p, \gamma(t)) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(p, \gamma_n(t)) \\ &= \lim_{n\to\infty} L(\gamma_n(t)) \\ &= \lim_{n\to\infty} t = t = L(\gamma(t)).\end{aligned}$$

所以 γ 为所求的射线. □

2. 在黎曼流形 M 上的一条光滑曲线 $\gamma : [0, +\infty) \to M$ 称为**发散曲线**，如果对于任意的紧致子集 $K \subset M$，必存在 $t_0 > 0$ s.t. $\gamma(t_0) \notin K$. 发散曲线 γ 的长度定义为

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^s |\gamma'(t)| \, dt$$

证明：M 是完备的当且仅当 M 上的每一条发散曲线都有无限的长度.

证明. ($\Leftarrow$) 假设 M 不完备，则存在测地线

$$\gamma(t) = \exp_p(tv),\ |v| = 1,\ t \in [0, \epsilon)$$

无法再延长. 如果 γ 包含于某个紧集 K 中，令 $t_n \to \epsilon$，则 $\gamma(t_n)$ 在 K 中没有聚点，矛盾！所以曲线

$$\widetilde{\gamma}(t) = \exp_p(\epsilon(1 - e^{-t})v), t \in [0, \infty)$$

是发散曲线，但 $L(\widetilde{\gamma}) = L(\gamma) = \epsilon < \infty$，矛盾！所以 M 完备；

($\Rightarrow$) M 完备，测地线可以无限延伸. 现在任意给定一条发散曲线 $\gamma : t \in [0, \infty)$. 由 Hopf-Rinow 定理，$\exp_p(T_pM) = M$，$\exp_p$ 连续，所以 M 有紧集覆盖

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} K_n,\ K_n = \exp_p(B_{T_pM}(n)).$$

对每个 n 都存在 $t_n : \gamma(t_n) \notin K_n$，则 $L(\gamma) \geq n$. 所以 γ 长度无限. □

3. 设 $\gamma : [0, 1] \to M$ 是黎曼流形 M 上的测地线，试构造沿着 γ 不恒为零的正交 Jacobi 场 U s.t. $U(0) = 0$.

证明. 取 $X \in T_pM$, $\langle v, X\rangle = 0$，作单参数测地线族

$$\gamma_u(t) := \exp_p t(v + uX).$$

下面说明 $\{\gamma_u\}$ 诱导的沿 $\gamma(t)=\gamma_0(t)$ 的 Jacobi 场 $U(t)$ 符合题意. 首先

$$\begin{aligned}U(0)=&\frac{\partial}{\partial u}\gamma(u,t)\mid_{t=0,u=0}\\=&\frac{\partial}{\partial u}(\exp_p t(v+uX))\mid_{t=0,u=0}\\=&0\end{aligned}$$

再计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle U,\dot\gamma\rangle\mid_{u=0}=\langle\nabla_{\dot\gamma}U,\dot\gamma\rangle\mid_{u=0}=&\langle\nabla_U\dot\gamma,\dot\gamma\rangle\mid_{u=0}\\=&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle\mid_{u=0}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\langle\dot\gamma(0),\dot\gamma(0)\rangle\mid_{u=0}\\=&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\langle v+uX,v+uX\rangle\mid_{u=0}\ \ (by\ parallel\ relation)\\=&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(|v|^2+u^2|X|^2)\mid_{u=0}=0\end{aligned}$$

所以 $\langle U,\dot\gamma\rangle\equiv\langle U,\dot\gamma\rangle\mid_{t=0}=0$. □

4. 设 $\gamma:[0,1]\to M$ 是黎曼流形 M 上的测地线，$X,Y\in T_{\gamma(0)}M$，试构造沿着 γ 的 Jacobi 场 U s.t. $U(0)=X$, $\dot U(0)=Y$.

证明. 先作测地线 $\zeta(u):\zeta(0)=\gamma(0),\dot\zeta(0)=X$. 令 $T(u),W(u)$ 是沿 ζ 平行移动的向量场，$T(0)=\dot\gamma(0),W(0)=Y$，作单参数测地线族

$$\gamma_u(t)=\exp_{\zeta(u)}t(T(u)+uW(u)).$$

下面说明 $\{\gamma_u\}$ 诱导的沿 $\gamma(t)=\gamma_0(t)$ 的 Jacobi 场 $U(t)$ 符合题意. 计算

$$\begin{aligned}U(0)=&\frac{\partial}{\partial u}\exp_{\zeta(u)}t(T(u)+uW(u))\mid_{t=0,u=0}\\=&\dot\zeta(u)\mid_{u=0}=X\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\dot U(0)=&\nabla_{\dot\gamma}U\mid_{t=0}=\nabla_{U(0)}\dot\gamma(0)\\=&\nabla_X\dot\gamma(0)=\nabla_{\dot\zeta(0)}(T(u)+uW(u))\mid_{u=0}\\=&\nabla_{\dot\zeta(0)}uW(u)\mid_{u=0}=\left\langle\dot\zeta(0),du\right\rangle\cdot W(u)\mid_{u=0}\\=&W(0)=Y\end{aligned}$$

因此 Jacobi 场 U 符合题意. □

作业十一

1. 设 M 是 $\bar M$ 中的等距嵌入子流形，$\bar\nabla$ 是 $\bar M$ 上的黎曼联络，令

$$\nabla_XY=(\bar\nabla_XY)^T,\ \forall X,Y\in\Gamma(TM).$$

证明：∇ 是 M 上的黎曼联络.

证明. 直接计算：

$$\begin{aligned}\nabla_V(W_1+W_2) =&(\bar{\nabla}_V W_1+W_2)^T\\ =&(\bar{\nabla}_V W_1)^T+(\bar{\nabla}_V W_2)^T\\ =&\nabla_V W_1+\nabla_V W_2\end{aligned}$$

对于 $f,g\in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}\nabla_{fV_1+gV_2}W =&(f\bar{\nabla}_{V_1}W+g\bar{\nabla}_{V_2}W)^T\\ =&(f\bar{\nabla}_{V_1}W)^T+(g\bar{\nabla}_{V_2}W)^T\\ =&f\nabla_{V_1}W+g\nabla_{V_2}W\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_V fW =&(\bar{\nabla}_V fW)^T\\ =&(Vf\cdot W+f\bar{\nabla}_V W)^T\\ =&Vf\cdot W^T+f\nabla_V W\\ =&Vf\cdot W+f\nabla_V W\end{aligned}$$

所以 ∇ 是 M 上的仿射联络. 下面证明 ∇ 还是黎曼联络：先考虑挠率张量

$$\begin{aligned}T(V,W) =&\nabla_V W-\nabla_W V-[V,W]\\ =&(\bar{\nabla}_V W-\bar{\nabla}_W V)^T-[V,W]\\ =&([V,W])^T-[V,W]=0\end{aligned}$$

其次对 $U,V,W\in\Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}U\langle V,W\rangle =&\left\langle\bar{\nabla}_U V,W\right\rangle+\left\langle V,\bar{\nabla}_U W\right\rangle\\ =&\langle\nabla_U V,W\rangle+\langle V,\nabla_U W\rangle\end{aligned}$$

所以 ∇ 是黎曼联络. □

2. 证明：单位圆盘上的分式线性变换 $\phi:B^2\to B^2$ 是关于 Poicaré 度量的等距变换.

证明. 根据复分析中熟知的结论，在复坐标下所有 ϕ 可表示为

$$\phi(z)=c\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},\ |c|\le 1,|\alpha|<1.$$

记 $\phi=u+iv$，u,v 满足 Cauchy-Riemann 方程. Poincaré 度量

$$ds^2=\frac{4}{(1-|z|^2)^2}(dx^2+dy^2)$$

计算得

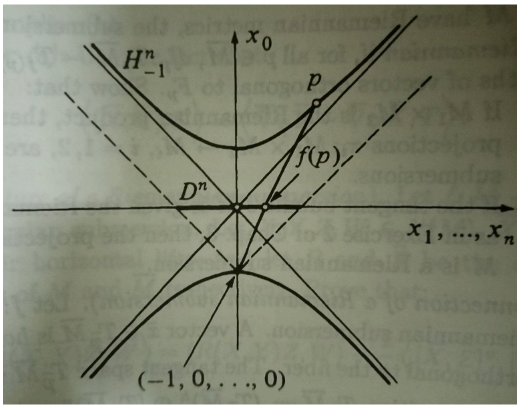
$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=\frac{4}{(1-|z|^2)^2},$$
$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=0.$$

再计算

$$\begin{aligned}\left\langle\phi_*\frac{\partial}{\partial x},\phi_*\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle=&\left\langle\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\\=&(\frac{\partial u}{\partial x})^2\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle+(\frac{\partial v}{\partial x})^2\left\langle\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\\=&\frac{4}{(1-|\phi(z)|^2)^2}|\phi'(z)|^2\\=&\frac{4(1-|\alpha|^2)^2}{(|1-\bar{\alpha}z|^2-|z-\alpha|^2)^2}\\=&\frac{4(1-|\alpha|^2)^2}{(1-|\alpha|^2)^2(1-|z|^2)^2}\\=&\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle\end{aligned}$$

同理可得 $\left\langle\phi_*\frac{\partial}{\partial y},\phi_*\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$，$\left\langle\phi_*\frac{\partial}{\partial x},\phi_*\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$. 所以 ϕ 是关于 Poicaré 度量的等距变换. □

3. 证明：双曲空间的 Minkowski 模型与单位实心球模型是等距的.



证明. 构造如图的球极投影 $f:\mathbb{H}_{-1}^n\to B^n, p\mapsto f(p)$. 设坐标 $p=(x^0,x^1,...,x^n)$，对应 $f(p)=(0,u^1,...,u^n)$. 计算得

$$x^i=\frac{2u^i}{1-\sum_k(u^k)^2},\ i=1,...,n;$$
$$x^0=\frac{2}{1-\sum_k(u^k)^2}-1.$$

所以当 $i=1,...,n$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^i}{\partial u^j}=&\frac{4u^iu^j}{(1-\sum_k(u^k)^2)^2},\ j\neq i;\\ =&\frac{2+4(u^i)^2-2\sum_k(u^k)^2}{(1-\sum_k(u^k)^2)^2},\ j=i.\end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial x^0}{\partial u^j}=\frac{4u^j}{(1-\sum_k(u^k)^2)^2}, j=1,...,n.$$

于是计算

$$\begin{aligned}(dx^0)^2=&\frac{16u^ju^l}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\,du^jdu^l;\\ (dx^i)^2=&\sum_{j,l\neq i}\frac{16(u^i)^2u^ju^l}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\,du^jdu^l\\ &+\sum_{j\neq i}\frac{8u^iu^j(1+2(u^i)^2-\sum_k(u^k)^2)}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\,(du^idu^j+du^jdu^i)\\ &+\frac{4(1+2(u^i)^2-\sum_k(u^k)^2)^2}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\,(du^i)^2\end{aligned}$$

设 $-(dx^0)^2+(dx^1)^2+...+(dx^n)^2=g_{ij}du^idu^j$, 则当 $i\neq j$ 时

$$\begin{aligned}g_{ij}=&-\frac{16u^iu^j}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}+\sum_{l\neq i,j}\frac{16(u^l)^2u^iu^j}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\\ &+\frac{8u^iu^j(1+2(u^i)^2-\sum_k(u^k)^2)}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}+\frac{8u^iu^j(1+2(u^j)^2-\sum_k(u^k)^2)}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\\ =&0.\end{aligned}$$

而 $i=j$ 时

$$\begin{aligned}g_{ii}=&-\frac{16(u^i)^2}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}+\sum_{j\neq i}\frac{16(u^iu^j)^2}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\\ &+\frac{4(1+2(u^i)^2-\sum_k(u^k)^2)^2}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\\ =&\frac{4+4(\sum_k(u^k)^2)^2-8\sum_k(u^k)^2}{(1-\sum_k(u^k)^2)^4}\\ =&\frac{4}{(1-\sum_k(u^k)^2)^2}\end{aligned}$$

所以

$$-(dx^0)^2+(dx^1)^2+...+(dx^n)^2=\frac{4}{(1-\sum_k(u^k)^2)^2}((du^1)^2+...+(du^n)^2),$$

即上半空间 $\mathbb{H}^n_{-1}$ 中的 Minkowski 模型与 $\mathbb{R}^n$ 中单位实心球模型等距同构. □

4. 设 $M, \widetilde{M}$ 是完备黎曼流形，$\phi : \widetilde{M} \to M$ 是局部等距，$x = \phi(\widetilde{x})$. 证明以下交换图：

$$\begin{tikzcd} T_{\widetilde{x}}\widetilde{M} \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, "\exp_{\widetilde{x}}"'] & T_x M \arrow[d, "\exp_x"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "\phi"'] & M \end{tikzcd}$$

在局部意义下成立.

证明. 局部等距将局部上的测地线映为测地线. 设 $\widetilde{x} \in \widetilde{M}, x = \phi(\widetilde{x}) \in M$. 对 $\widetilde{x}$，存在 $\delta > 0$，对 $\forall \widetilde{v} \in B(1) \subset T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$, $\phi(\exp_{\widetilde{x}} t\widetilde{v})$ 是从 x 出发的极小测地线，$t \in [0, \delta)$，初始切向量为 $\phi_*(\widetilde{v})$. 而同样也存在 $\delta' > 0$，$\exp_x \phi_* \widetilde{v}$ 是从 x 出发的极小测地线，$t \in [0, \delta')$，初始切向量也是 $\phi_* \widetilde{v}$. 初值条件相同，所以在 $0 \in T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ 的某个邻域 W, U 上，

$$\phi(\exp_{\widetilde{x}} \widetilde{w}) = \exp_{\phi(\widetilde{x})} \phi_* \widetilde{w},\ w \in W, \widetilde{x} \in U$$

所以上述交换图成立. □

作业十二

1. 利用命题 10.5 证明：在任意黎曼流形 M 上的任一点处都存在测地凸邻域.

证明. 对 $p \in M$，设 $\rho : M \to \mathbb{R}_+$ 为从 p 出发的距离函数. 在 p 的一个邻域 U 上存在法坐标 $\{x^1, ..., x^n\}$，$x^i(p) = 0$. 在法坐标下

$$\rho^2(x) = \sum (x^i)^2$$

对 $v \in T_pM$，从 p 出发沿 v 的测地线 γ 在法坐标下有表示

$$x^i = tv^i,\ \rho^2 = \sum (tv^i)^2.$$
$$\nabla^2\rho^2(v, v) = (\rho \circ \gamma)'' = 2\sum (v^i)^2 > 0$$

所以存在 p 的邻域 $U_0 \subset U$，ρ^2 在 U_0 上是凸函数. 对充分小的 $c > 0$，

$$M_c := \{x \in M : \rho^2(x) < c\}$$

是 U_0 的子集，由命题 10.5，M_c 是全凸集，即为所求的测地凸邻域. □

2. 设 M 是可定向偶数维黎曼流形，并具有恒正的截面曲率. 假设 γ 是 M 中的一条闭测地线 (即 γ 是圆周 S^1 在 M 中的浸入，且在每个点的邻域上满足测地线方程). 证明：在 M 中存在一条闭曲线 β 同伦等价于 γ s.t. $L(\beta) < L(\gamma)$.

证明. WLOG，设 $\gamma : [0, 1] \to M, \gamma(0) = \gamma(1) = p$. 考虑平行移动映射

$$\mathbb{P}^\gamma : T_pM = T_{\gamma(0)} \to T_{\gamma(1)M} = T_pM$$

和沿 γ 平行移动的向量场 $V(t), V(0) \in T_pM$. 由平行性，$\mathbb{P}^\gamma$ 是正交映射并保持定向，$\det(\mathbb{P}^\gamma) = 1$. 而 $\dim M$ 是偶数，$\mathbb{P}^\gamma(\dot\gamma(0)) = \dot\gamma(0)$，所以特征值 1 的特征子空间维数至少为 2，存在 $e \in T_pM$, $e \perp \dot\gamma(0)$，$\mathbb{P}^\gamma(e) = e$. 令 $V(0) = e$，$e, \dot\gamma(0)$ 之间的几何关系被平行移动保持，而 $\dot\gamma(0)$ 在 $\mathbb{P}^\gamma$ 作用下不变，所以 $V(1) = V(0)$，$V(t)$ 是整个 γ 上的光滑向量场. 构造单参数曲线族：

$$\gamma_u(t) = \exp_{\gamma(t)} uV(t),\ u \geq 0,\ \gamma_u(0) = \gamma_u(1).$$

设其横截向量场为 U. 当 $u > 0$ 充分小时，γ_u 与 $\gamma = \gamma_0$ 同伦等价. 对每个 t，$\gamma_u(t)$ 是关于 u 的测地线，所以将以上参数曲线族代入弧长第二变分公式，边界项消失，

$$L''(0) = \int_0^1 \langle R(\dot\gamma, U)\dot\gamma, U\rangle\ dt$$

截面曲率恒正，所以 $L''(0) < 0$，$u = 0$ 不可能是 $L(\gamma_u)$ 的局部最小值点，即存在充分小的 u，$L(\gamma_u) < L(\gamma)$，且两条曲线同伦等价. □

3. 设 M 是一个完备黎曼流形. 假设存在常数 $a > 0, c \geq 0$，对于连接任意两点 $p, q \in M$ 的最短正规测地线 $\gamma(t)$，都有沿 $\gamma(t)$ 定义并满足 $|f(t)| \leq c$ 的光滑函数 f s.t. 下述不等式成立：

$$\mathrm{Ric}(\gamma'(t)) \geq a + \frac{df}{dt},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

证明 M 是紧致的，并给出 M 直径上界的估计. (当 $c = 0$ 时命题即为 Bonnet-Myers 定理)

证明. 取任意两个 $p, q \in M$，设 $\gamma : [0, b] \to M$ 是以弧长为参数，连接 p, q 的极小测地线，只需估计 b 的上界. 令

$$g(t) = \sin\frac{\pi}{b}t,\ g(t) \geq 0, g(0) = g(b) = 0.$$

T_pM 取正交标架 $\{e_1, ..., e_n\}$，$e_1 = \dot\gamma(0)$. 平行移动诱导了沿 γ 的正交平行标架场 $\{e_i(t)\}$. 构造 $n-1$ 个横截向量场

$$X_i(t) = g(t)e_i(t),$$

代入弧长的第二变分公式，边界项消失，得

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 2} L''_{X_i}(0) =& \sum_{i\geq 2}\int_0^b |X_i|^2 + \langle R(\dot\gamma, X_i)\dot\gamma, X_i\rangle\ dt = \sum_{i\geq 2}(g')^2 + g^2\langle R(\dot\gamma, e_i)\dot\gamma, e_i\rangle\ dt \\
=& \int_0^b (n-1)(g')^2 + g^2\mathrm{Ric}(\dot\gamma)\, dt \\
\leq& (n-1)\int_0^b (g')^2 - \frac{1}{n-1}g^2\cdot(a + f')\, dt \\
=& (n-1)\frac{\pi^2}{2b} - \frac{ab}{2} - \int_0^b \sin^2\frac{\pi}{b}t\cdot f'(t)\, dt \\
=& (n-1)\frac{\pi^2}{2b} - \frac{ab}{2} + \frac{\pi}{b}\int_0^b \sin\frac{2\pi}{b}t\cdot f(t)\, dt \\
\leq& (n-1)\frac{\pi^2}{2b} - \frac{ab}{2} + \frac{c\pi}{b}\int_0^b \left|\sin\frac{2\pi}{b}t\right|\ dt \\
=& (n-1)\frac{\pi^2}{2b} - \frac{ab}{2} + 2c
\end{aligned}$$

假设 $b > 2\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{4c^2}{a^2} + \frac{(n-1)\pi^2}{a}}$，则 $\sum_{i\geq 2} L''_{X_i}(0) < 0$，存在 $i \geq 2$，$L''_{X_i}(0) < 0$，与 γ 极小矛盾！所以 b——进而 (由完备性)M 的直径——有上界

$$R_0 = 2\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{4c^2}{a^2} + \frac{(n-1)\pi^2}{a}}.$$

M 是指数映射 $\exp_p$ 作用在 $B(\bar{R}_0) \subset T_pM$ 的像，所以 M 紧致. □

4. 分析 Weinstein 定理的证明方法，写出其证明梗概.

证明. 用反证法. 假设保定向等距 f 没有不动点，在紧集 M 上距离函数

$$\rho(x) = \mathrm{d}(x, f(x))$$

必在某个 $p \in M$ 上取到正的最小值 l. 用极小测地线 γ 连接 $p.f(p)$，则 $f \circ \gamma$ 是连接 $f(p), f^2(p)$ 的测地线. 证明对任意 $p' \in \gamma$，

$$d(p', f(p')) = d(p', f(p)) + d(f(p), f(p'))$$

从而 $\gamma, f \circ \gamma$ 在同一测地线上，所以

$$f_* \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(l).$$

在 T_pM 处取好确定定向的正交标架 $\{e_1, ..., e_n\}$，其中 $e_1 = \dot{\gamma}(0)$. 考虑沿 γ 的平行移动 $\mathbb{P} : T_{f(p)}M \to T_pM$，则 $A = \mathbb{P} \circ f_*$ 是 T_pM 上行列式为 1 的正交变换. 证明 A 关于 1 的特征子空间维数至少是 2，取特征向量 $e \perp \dot{\gamma}(0)$ 并平行移动生成向量场 $e(t)$，作单参数曲线族

$$\gamma_u(t) = \exp_{\gamma(t)} ue(t),$$

代入弧长的第二变分公式，边界项消失，利用正截面曲率条件得到 $L''(0) < 0$，与 $\gamma = \gamma_0$ 极小矛盾！定理得证. □