

黎曼几何 (陈群老师) 作业及解答

21 级弘毅班杨森宇 2021300002086

作业一

1. 对 $n = 1$ 时证明球极投影给出 S^1 上的局部坐标覆盖 \mathcal{A}_2 是光滑图册, 从而是 S^1 上的微分结构, 并证明它与 S^1 上的微分结构 \mathcal{A}_1 是 C^∞ 相容的.

证明. 用 $\theta \in [0, 2\pi)$ 对 S^1 参数化. 以 $(0, 1)$ 为极点时令 $(0, 1)$ 处 $\theta = 0$ 且顺时针方向, 则得到局部坐标卡 U_1, φ_1 :

$$U_1 = S^1 \setminus \{(0, 1)\},$$

$$\varphi : \theta \mapsto \cot(\theta/2).$$

同理, 以 $(0, -1)$ 为极点, 令 $(0, -1)$ 处 $\alpha = 0$ 且逆时针, 也有局部坐标卡 $\{U_2, \varphi_2\}$:

$$U_2 = S^1 \setminus \{(0, -1)\},$$

$$\varphi_2 : \alpha \mapsto \cot(\alpha/2).$$

注意到 $U_1 \cup U_2 = S^1, U_1 \cap U_2 = \{x \in S^1 : \theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)\}$, 并且

$$\theta = \pi - \alpha, \theta \in (0, \pi),$$

$$= 3\pi - \alpha, \theta \in (\pi, 2\pi)$$

计算不难得到在 $U_1 \cap U_2$ 上

$$\varphi \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{1}{x}.$$

光滑. 综上, 球极投影诱导出 S^1 上的局部坐标覆盖 $\mathcal{A}_2 := \{U_1, U_2\}$ 是光滑图册. 而 S^1 原本的光滑图册 $\mathcal{A}_1 := \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ 中:

$$A_1 = \{e^{i\xi} : \xi \in (0, \pi)\}, \varphi_{A_1} : (x, y) \mapsto x;$$

$$A_2 = \{e^{i\xi} : \xi \in (\pi, 2\pi)\}, \varphi_{A_2} : (x, y) \mapsto x;$$

$$B_1 = \{e^{i\xi} : \xi \in (-\pi/2, \pi/2)\}, \varphi_{B_1} : (x, y) \mapsto y;$$

$$B_2 = \{e^{i\xi} : \xi \in (\pi/2, 3\pi/2)\}, \varphi_{B_2} : (x, y) \mapsto y.$$

计算可得

$$\varphi_1 \circ \varphi_{A_1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$$

及其逆均光滑, 同理 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 之间其他的坐标变换均为光滑映射, 所以两个光滑图册诱导的微分结构 C^∞ 相容. \square

2. 若 M, N 分别为 m, n 维微分流形, 证明它们的拓扑积是 $m+n$ 维微分流形.

证明. 设 M, N 分别有光滑图册 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}, \{V_\beta, \psi_\beta\}$. 则 $M \times N$ 有坐标覆盖 $\{U_\alpha \times V_\beta, \eta_{\alpha\beta}\}$, 其中

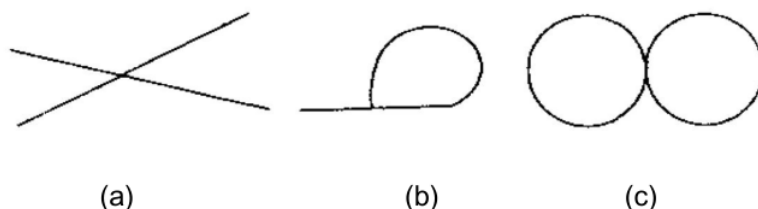
$$\eta_{\alpha\beta} := U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y)).$$

计算

$$\eta_{\alpha_2\beta_2} \circ \eta_{\alpha_1\beta_1}^{-1} = (\varphi_{\alpha_2} \circ \varphi_{\alpha_1}^{-1}, \psi_{\beta_2} \circ \psi_{\beta_1}^{-1})$$

根据 M, N 上的每个坐标变换光滑, 可知对 $\forall \alpha, \beta, \eta_{\alpha_2\beta_2} \circ \eta_{\alpha_1\beta_1}^{-1}$ 也光滑. 因此 $M \times N$ 被赋予了一个微分结构, 是微分流形. □

3. 下图中的图形是不是微分流形? 为什么?



证明. 都不是. 在每个图形中, 分支点的邻域去掉分支点后至少产生三个连通分支. 假设该邻域同胚于 \mathbb{R}^1 , 那么邻域去掉分支点后至多只有两个连通分支, 矛盾! 所以每个图形都不是拓扑流形, 进而不是微分流形. □

4. 设 \mathbb{R}^1 上的映射 $\psi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, u \mapsto u^5$, 由光滑图册 $\{(\mathbb{R}^1, \psi)\}$ 定义的标准微分结构记为 $\tilde{\mathcal{A}}$. 记 \mathbb{R}^1 上由光滑图册 $\{(\mathbb{R}^1, id)\}$ 定义的标准微分结构记为 \mathcal{A} . 证明: 微分流形 $(\mathbb{R}^1, \mathcal{A})$ 与 $(\mathbb{R}^1, \tilde{\mathcal{A}})$ 微分同胚.

证明. 构造连续映射 $f: (\mathbb{R}^1, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \tilde{\mathcal{A}}), x \mapsto x^{1/5}$. 计算得到

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ id^{-1} &= id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ id \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} &= id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

所以 f^{-1} 存在且 f, f^{-1} 均光滑, 所以 $(\mathbb{R}^1, \mathcal{A})$ 与 $(\mathbb{R}^1, \tilde{\mathcal{A}})$ 微分同胚. □

作业二

1. 设 M, N 都是微分流形, 并且 M 连通. 又 $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射, 证明: 在每个 $p \in M$ 都有 $f_{*p} = 0$ 当且仅当 f 是常值映射.

证明. (\Rightarrow) 用反证法. 假设 $\exists p_0, p_1 \in M, f(p_0) \neq f(p_1)$, 由连通性存在道路 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(i) = p_i, i = 0, 1$. 记 $p_t := \gamma(t), t \in [0, 1]$. 由

$$f_{*p_t}(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(t)$$

和微分中值定理可知存在 $\xi \in (0, 1), f_{*p_\xi}(\gamma'(\xi)) = 0$, 这导致了矛盾. 因此 f 是常值映射. (\Leftarrow) 显然. \square

2. 证明单位圆周 S^1 是欧式平面 \mathbb{R}^2 的正则子流形.

证明. 取 S^1 在北极 $(0, 1)$ 的球极投影映射 $\psi : S^1 \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^1$. 取充分小的 $\epsilon > 0$, 记环形域 $H : 1 - \epsilon < |(x, y)| < 1 + \epsilon$, 开线段 L 连接 $(0, 1 - \epsilon)$ 与 $(0, 1 + \epsilon)$. 对 $\forall p \in S^1 \setminus \{0\}$, $H \setminus L$ 是 p 的一个开邻域, 据此构造浸入

$$f : H \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\psi(\frac{(x, y)}{|(x, y)|}) - \psi(p), |(x, y)| - 1).$$

$f(p) = (0, 0)$ 且 $f((H \setminus L) \cap S^1) = (\mathbb{R}, 0)$. 显然 f 在 $H \setminus L$ 上光滑. 对于另一个由南极点 $(0, -1)$ 球极投影诱导的坐标卡和光滑浸入同理. 所以 S^1 是 \mathbb{R}^2 的正则子流形.

注. 可以不直接构造. 因为 S^1 到 \mathbb{R}^2 存在单浸入, 而 S^1 紧致, 所以单浸入是嵌入, 进而 S^1 是正则子流形. \square

3. 设 M, N, L 都是微分流形, $f : M \rightarrow N$ 和 $g : N \rightarrow L$ 都是嵌入映射, 证明 $g \circ f : M \rightarrow L$ 是嵌入映射.

证明. $g \circ f$ 是嵌入映射当且仅当对任意 $p \in M$, $(g \circ f)_{*p}$ 是单射并且 $g \circ f$ 光滑可逆. 而 g, f 均为嵌入, 对它们运用上述等价关系, 通过光滑性、可逆性在复合下不变以及 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ 就完成了证明. \square

4. 设 M, N 都是微分流形, 其中 M 紧致, N 连通, 并且 $\dim M = \dim N$. 若 $f : M \rightarrow N$ 是浸入, 证明 f 是满射.

证明. f 是浸入, 对每个 $p \in M$, 存在 p 的开邻域 U_p , $f|_{U_p}$ 是嵌入, U_p 与 $f(U_p)$, \bar{U}_p 与 $f(\bar{U}_p)$ 微分同胚. 由紧性, 存在有限个 $U_i (i = 1, \dots, k)$ 覆盖 M . $\dim M = \dim N$, 所以 $f(M) = \cup_{i=1}^k f(U_i)$ 是 N 中的开集. 同理 $f(M) = \cup_{i=1}^k f(\bar{U}_i)$ 是 N 中的闭集. 由连通性, $f(M) = N$. \square

作业三

1. 证明: 紧致微分流形上的任一单位分解必定只含有有限个光滑函数.

证明. 设 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 构成 M 上的单位分解, 由局部有限性, 对 $\forall p \in M$, 存在邻域 V_p s.t. 仅有有限个 U_α 与 V_p 相交. $\{V_p\}_{p \in M}$ 构成 M 的开覆盖, 由紧性可选出有限开覆盖 V_1, \dots, V_n , 且每个 V_i 都只与有限个 U_α 相交, 而 $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$, 所以只有有限个 φ_α 在 M 上非零, 即紧微分流形上的单位分解只有有限个光滑函数. \square

2. 设 U, V 都是微分流形 M 的开子集 s.t. $M = U \cup V$. 证明: 存在光滑函数 $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $\text{Supp}(f) \subset U, \text{Supp}(g) \subset V$, 并且 $f + g = 1$.

证明. 设单位分解 $\{\varphi_\alpha\}$ 从属于 $\{U, V\}$. 令

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\text{Supp}(\varphi_\alpha) \subset U} \varphi_\alpha, \\ v &= \sum_{\text{Supp}(\varphi_\alpha) \subset V} \varphi_\alpha, \\ w &= \sum_{\text{Supp}(\varphi_\alpha) \subset U \cap V} \varphi_\alpha. \end{aligned}$$

那么由从属性可知

$$1 = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha = u + v - w$$

那么令 $f = u, g = v - w$ 即完成了证明. \square

3. 证明: (1) 对任一多重线性映射 $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow Z$, 存在唯一的线性映射 $g : V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_r \rightarrow Z$ s.t. $f = g \circ h$, 其中 $h : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_r, h(v_1, \dots, v_r) = v_1 \otimes \dots \otimes v_r$ 表示张量积运算.

证明. (1) 定义映射

$$g : V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_r \rightarrow Z, g(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) := f(v_1, \dots, v_r).$$

由 f 与张量积的线性性可知 g 是线性映射, 且 $f = g \circ h$.

下面证明唯一性. 设存在线性映射 $g_1, g_2 : V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_r \rightarrow Z$ s.t. $f = g_1 \circ h = g_2 \circ h$. 设 V_i 的基向量为 $\{e_{j(i)}^{(i)}\}, i = 1, 2, \dots, r, 1 \leq j^{(i)} \leq \dim V_i$, 那么

$$\{h(e_{j(1)}^{(1)}, e_{j(2)}^{(2)}, \dots, e_{j(r)}^{(r)})\}_{j^{(i)}}$$

是 $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ 的基向量, 线性映射 g_1, g_2 在每个基向量的作用都相同, 因此 $g_1 = g_2$;

(2) 由 (1) 的证明可知 h 诱导了同构 $V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_r$, 于是它们的对偶空间也同构. \square

4. 设 $\sigma \in S(r), x = v_1 \otimes \dots \otimes v_r$, 证明: $\sigma(x) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)}$.

证明. 按定义, 对任一 $(u^{*1}, \dots, u^{*r}) \in V^{*1} \times \dots \times V^{*r}$,

$$\begin{aligned} \sigma(x)(u^{*1}, \dots, u^{*r}) &= x(u^{*\sigma(1)}, \dots, u^{*\sigma(r)}) \\ &= v_1(u^{*\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot v_r(u^{*\sigma(r)}) \\ &= v_{\sigma^{-1}(1)}(u^{*1}) \cdot \dots \cdot v_{\sigma^{-1}(r)}(u^{*r}) \\ &= v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)}(u^{*1}, \dots, u^{*r}) \end{aligned}$$

因此 $\sigma(x) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)}$. \square

作业四

1. 证明：对称张量在对称化算子的作用下不变，反对称张量在反对称化算子的作用下不变。

证明. 设 x 是一个对称张量，则

$$S_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} \sigma(x) = \frac{|S_r|}{r!} \cdot x = x;$$

设 y 是一个反对称张量，则

$$A_r(y) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} x = x.$$

因此命题成立. □

2. 设 $v_1, \dots, v_r \in V$ 线性相关，证明：对于任意 $\alpha \in \Lambda^k(V)$ 都有 $\alpha(v_1, \dots, v_r) = 0$.

证明. 不妨设所有 v_i 非 0. 首先，如果存在 $i \neq j, v_i = v_j$ ，则

$$\alpha(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\alpha(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = 0$$

由线性相关性，存在不全为 0 的系数 c_i (WLOG 令 $c_1 \neq 0$), $c_1 v_1 + \dots + c_r v_r = 0$ ，于是

$$v_1 = \sum_{i>1} \frac{c_i}{c_1} v_i$$

代入 $\alpha(v_1, \dots, v_r)$ 并利用前面的结论立得 $\alpha(v_1, \dots, v_r) = 0$ □

3. 设 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 和 $\{w_1, \dots, w_k\}$ 都是 V 中的线性无关向量组，证明：它们张成相同的 k 维子空间的充要条件是 $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \alpha w_1 \wedge \dots \wedge w_k$ ，其中 $\alpha \neq 0$.

证明. 先证明一个引理.

引理. 设 $v_1, \dots, v_k \in V$ ，则 v_1, \dots, v_k 线性相关当且仅当 $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$.

引理的证明. $k=1$ 时显然. 设 $k \geq 2$. 必要性在第 2 题已证明；下证充分性. 设 v_1, \dots, v_k 线性无关，将它扩张为 V 的一组基，那么 $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ 是向量空间 $\Lambda(V)$ 中的基向量，所以 $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$. 引理证毕.

回到原题. 对于充分性，取任意 $v_i, w_j, 1 \leq i, j \leq k$,

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge w_j &= \alpha w_1 \wedge \dots \wedge w_k \wedge w_j = 0 \\ w_1 \wedge \dots \wedge w_k \wedge v_i &= \frac{1}{\alpha} v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge v_i = 0 \end{aligned}$$

根据引理和 i, j 的任意性即得到充分性. 对于必要性，由条件用 $\{w_j\}$ 的线性组合表示 $\{v_i\}$ 并代入 $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ ，消去零项后即得到所证等式. 根据引理，等式两边均非零，所以 $\alpha \neq 0$. □

4. (1) 设 $\xi \in T^r(V), \eta \in T^s(V)$, 求 $\xi \otimes \eta$ 与 $\eta \otimes \xi$ 的关系式.
 (2) 设 $\xi \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V)$, 证明 $\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi$.

证明. (1) 对任意 $v_1 \in (V^*)^r, v_2 \in (V^*)^s$,

$$\begin{aligned} & (\xi \otimes \eta)(v_1, v_2) \\ &= \xi(v_1) \eta(v_2) \\ &= (\eta \otimes \xi)(v_2, v_1) \end{aligned}$$

所以 $\eta \otimes \xi = (\xi \otimes \eta) \circ \sigma$, 其中 $\sigma \in S(r+s)$ s.t.

$$\begin{aligned} \sigma : i &\mapsto i+s, 1 \leq i \leq r; \\ i &\mapsto i-r, r+1 \leq i \leq r+s \end{aligned}$$

(2) 考虑 (1) 中的 $\sigma(r, s)$ 替换成 k, l , $(-1)^\sigma = (-1)^{kl}$. 则对任意 $u_1, \dots, u_l, \dots, u_{k+l} \in V^*$,

$$\begin{aligned} & (\eta \wedge \xi)(u_1, \dots, u_l, \dots, u_{k+l}) \\ &= \frac{1}{l!k!} \sum_{\tau \in S(k+l)} (-1)^\tau \eta(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(l)}) \cdot \xi(u_{\tau(l+1)}, \dots, u_{\tau(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\tau \in S(k+l)} (-1)^\tau \eta(u_{\tau \circ \sigma(1)}, \dots, u_{\tau \circ \sigma(l)}) \cdot \xi(u_{\tau \circ \sigma(l+1)}, \dots, u_{\tau \circ \sigma(k+l)}) \\ &= \frac{(-1)^\sigma}{k!l!} \sum_{\tau \in S(k+l)} \xi(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(k)}) \cdot \eta(u_{\tau(k+1)}, \dots, u_{\tau(k+l)}) \\ &= (-1)^{kl} (\xi \wedge \eta)(u_1, \dots, u_l, \dots, u_{k+l}). \end{aligned}$$

因此等式得证. □

作业五

1. 设 $\pi : E \rightarrow M$ 是一个秩为 q 的向量丛, $U \subset M$ 为非空开集. 令

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} \pi^{-1}(p),$$

如果用 $\tilde{\pi}$ 表示 π 在 $\pi^{-1}(U)$ 上的限制, 证明

$$\pi^{-1}(U) = (\pi^{-1}(U), U, \tilde{\pi})$$

是开子流形 U 上的一个秩为 q 的向量丛.

证明. (1) M 的光滑图册 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是 U 的坐标覆盖, φ_α 的微分同胚性以及 $\tilde{\pi} \circ \varphi_\alpha(p, y) = p$ 都直接由 M 与 E 继承给 U 与 $\pi^{-1}(U)$;

(2) 对每个 $p \in U \subset M$, 根据 E 的性质同样得到 $\varphi_{\alpha p}$ 是 $\mathbb{R}^q \rightarrow \pi^{-1}(p)$ 的同胚映射. 对于覆盖 U 的坐标卡 U_α, U_β , 纤维型以及坐标变换公式也同样被继承;

(3) 坐标变换映射 $g_{\alpha\beta}$ 的光滑性也通过 E 是向量丛在 $\pi^{-1}(U)$ 上自然成立.

综上, $(\pi^{-1}(U), U, \tilde{\pi})$ 是 U 上秩为 q 的向量丛. □

2. 设 M, N 是光滑流形, $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 令

$$f^*TN = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_{f(p)}N.$$

证明: f^*TN 是 M 上秩为 $n = \dim N$ 的向量丛.

证明. 设 N 有光滑图册 $\{(V_\beta, \chi_\beta)\}$ 并诱导了 M 的坐标覆盖 $f^{-1}(V_\beta)$, $\dim N = n$. 已知切丛 (TN, N, π)

是 N 上秩为 n 的向量丛. 命 $\tilde{\pi}: f^*TN \rightarrow M, (p, y) \mapsto p$.

(1) 对每个 (V_β, χ_β) , 都存在一个 TN 的局部平凡化: $\psi_\beta: V_\beta \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(V_\beta)$. 于是构造 $\tilde{\psi}_\beta$:

$$f^{-1}(V_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(f^{-1}(V_\beta)), (p, v) \mapsto (p, \pi_2 \circ \psi_\beta^{-1} \circ \eta(v))$$

其中 $\eta: v \mapsto (f(p), v)$, π_2 是取 $\pi^{-1}(V_\beta)$ 的切向量分量. 如此 $\tilde{\psi}_\beta$ 是一个微分同胚, 且 $\tilde{\pi} \circ \tilde{\psi}_\beta(p, v) = p, \forall p \in f^{-1}(V_\beta)$; (2) 对每个 $p \in f^{-1}(V_\beta)$, $\psi_{\beta p}: \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(f(p))$ 是同胚, 那么根据 (1) 中的构造,

$$\tilde{\psi}_\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(p)$$

也是同胚. 当 $V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} \neq \emptyset$ 时, 考虑 TN 上的转换函数 $g_{21}(f(p)) \in GL(\mathbb{R}^n)$

$$\tilde{\psi}_{\beta_2}^{-1} \circ \tilde{\psi}_{\beta_1}(p, v) = (p, g_{21}(f(p))(v))$$

如此诱导了 f^*TN 上的 $GL(\mathbb{R}^n)$ 转换函数 \tilde{g}_{21} ;

(3) 已知 $\{g_{\beta'\beta}\} V_{\beta'} \cap V_\beta \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ 都是光滑映射, 那么根据 (2) 中的构造 $\tilde{g}_{\beta'\beta}$ 也是光滑映射.

综上, f^*TN 是 M 上秩为 $\dim N$ 的向量丛. □

3. 设 X, Y, Z 是流形 M 上的光滑向量场, $f, g \in C^\infty(M)$, 证明:

- (1) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (2) $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$;
- (3) $[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X, Y]$;
- (4) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

证明. (1) $[Y, X] = YX - XY = -[X, Y]$.

(2) $[X + Y, Z] = (X + Y)Z - Z(X + Y) = (XZ - ZX) + (YZ - ZY) = [X, Z] + [Y, Z]$.

(3) $[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) = f(Xg)Y + fg(XY) - g(Yf)X - gf(YX) = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X, Y]$.

(4) 计算得

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= [X, YZ - ZY] = X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X \\ &= (XYZ - YZX) + (ZYX - XZY) \end{aligned}$$

上式关于 X, Y, Z 作轮换求和后右边项全部抵消为零, 即得所证恒等式. □

4. 设 $\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$ 是 \mathbb{R}^3 上的外微分形式, 且 $d\omega = 0$. 令 $\alpha = (ydz - zdy) \int_0^1 tA(tx, ty, tz)dt + (zdx - xdz) \int_0^1 tB(tx, ty, tz)dt + (xdy - ydx) \int_0^1 tC(tx, ty, tz)dt$.

证明: $d\alpha = \omega$.

证明. 首先

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(A, B, C) = \partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = 0$$

现在计算

$$\begin{aligned} & d((ydz - zdy) \int_0^1 tA(tx, ty, tz) dt) \\ &= y \int_0^1 t^2 \partial_x A(tx, ty, tz) dt \cdot dx \wedge dz - z \int_0^1 t^2 \partial_x A(tx, ty, tz) dt \cdot dx \wedge dy \\ &+ (2 \int_0^1 tA(tx, ty, tz) dt + y \int_0^1 t^2 \partial_y A(tx, ty, tz) dt + z \int_0^1 t^2 \partial_z A(tx, ty, tz) dt) \cdot dy \wedge dz \end{aligned}$$

另外两项也有相同形式. 三者相加得到

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{cyc} \left(\int_0^1 2tC + xt^2 \partial_x C + yt^2 \partial_y C - zt^2 (\partial_x A + \partial_y B) dt \right) \cdot dx \wedge dy \\ &= \sum_{cyc} \left(\int_0^1 2tC + t^2 (x \partial_x C + y \partial_y C + z \partial_z C) dt \right) \cdot dx \wedge dy \\ &= \sum_{cyc} \left(\int_0^1 2tC dt + \int_0^1 t^2 \frac{d}{dt} C(tx, ty, tz) dt \right) \cdot dx \wedge dy \\ &= \sum_{cyc} t^2 C(tx, ty, tz) \Big|_{t=0}^1 dx \wedge dy \\ &= \omega \end{aligned}$$

因此命题成立. □

作业六

1. 设 ω 是流形 M 上的 2 次外微分形式, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, 计算 $d\omega(X, Y, Z)$.

证明. 由线性性, 只需对单项式 $\omega = f \cdot du \wedge dv, f \in C^\infty$ 验证即可. 计算

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= \begin{vmatrix} \langle X, df \rangle & \langle X, du \rangle & \langle X, dv \rangle \\ \langle Y, df \rangle & \langle Y, du \rangle & \langle Y, dv \rangle \\ \langle Z, df \rangle & \langle Z, du \rangle & \langle Z, dv \rangle \end{vmatrix} \\ &= \sum_{cyc: X, Y, Z} Xf(YuZv - YvZu) \end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned} \langle (X, Y), \omega \rangle &= f(XuYv - XvYu) \\ X \langle (Y, Z), \omega \rangle &= Xf(YuZv - YvZu) + f(XYuZv + XZvYu - XYvZu - XZuYv) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{cyc: X, Y, Z} X \langle (Y, Z), \omega \rangle - f(XY u Z v + XZ v Y u - XY v Z u - XZ u Y v) \\ &= \sum_{cyc: X, Y, Z} X \langle (Y, Z), \omega \rangle + \langle (X, [Y, Z]), \omega \rangle \end{aligned}$$

以上即为 $d\omega$ 表达式. □

2. 证明：如果流形 M 上存在容许坐标覆盖，使得对其中任意两个相交的坐标邻域，局部坐标变换的 Jacobi 行列式为正则，则 M 可定向.

证明. 取相容的单位分解 $\{U_\alpha, f_\alpha\}$, 令

$$\omega = \sum_{\alpha} f_{\alpha} dx_{\alpha}^1 \wedge \dots \wedge dx_{\alpha}^m$$

根据单位分解的局部有限性以及 $0 \leq f_{\alpha} \leq 1, \sum_{\alpha} f_{\alpha} \equiv 1$, ω 处处有定义, 处处非零并且光滑. 由坐标变换的 Jacobi 行列式均为正, ω 处处非零这一事实不依赖于坐标的选择: 在 $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ 上

$$dx_{\alpha}^1 \wedge \dots \wedge dx_{\alpha}^m = \det\left(\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}\right) dx_{\beta}^1 \wedge \dots \wedge dx_{\beta}^m$$

其中 $\det(\frac{\partial x}{\partial y}) > 0$, 而 f_{α}, f_{β} 非负, 所以 ω 在不同坐标卡之间保持定向, 进而给出了 M 的一个定向. □

3. 设 $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, m 是正整数. 考虑 U 上的 $n-1$ 次外微分形式

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

其中 $f_i(x) = x^i / \|x\|^m$, $\|\cdot\|$ 是欧式范数.

- (1) 求 $d\omega$;
- (2) 确定 m 的值使得 ω 是闭形式;
- (3) 在 ω 是闭形式的情形下, 证明 ω 不是恰当形式.

证明. (1) 直接计算

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\|x\|^2 - m(x^i)^2}{\|x\|^{m+2}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \frac{n-m}{\|x\|^m} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

(2) ω 是闭形式当且仅当 $m = n$.

(3) 按条件, $m = n$. 假设存在 $\beta \in \Lambda^{n-2}, \omega = d\beta$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上成立, 那么在单位球面 S^{n-1}

上由 Stokes 公式

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{\partial S^{n-1}} \beta = 0, \quad \partial S^{n-1} = \emptyset$$

但由 Stokes 公式直接计算:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_{S^{n-1}} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{B^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= n \operatorname{vol}(B^n) \neq 0 \end{aligned}$$

以上矛盾说明 ω 不是恰当形式. □

4. 证明: (1) 若 α, β 都是闭形式, 则 $\alpha \wedge \beta$ 也是闭形式.

(2) 若 α 是闭形式, β 是恰当形式, 则 $\alpha \wedge \beta$ 是恰当形式.

证明. (1) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta = 0$, 其中 α 是 r 次外微分形式. 因此 $\alpha \wedge \beta$ 是闭形式.

(2) 设外微分形式 ω 满足 $\beta = d\omega$, 则 $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge d\omega = (-1)^r (d(\alpha \wedge \omega) - d\alpha \wedge \omega) = d((-1)^r \alpha \wedge \omega)$, 其中 α 是 r 次外微分形式. 因此 $\alpha \wedge \beta$ 是恰当形式. □

作业七

1. 设 $D^{(i)}$ 是向量丛 (E_i, π_i, M) 上的联络, $i = 1, 2$. 试分别求出诱导联络 $D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ 和 $D^{(1)} \otimes D^{(2)}$ 的联络系数和联络形式.

证明. 取 E_i 的局部标架场为 $\{s_\alpha^{(i)}\}, i = 1, 2$. 记

$$\begin{aligned} D^{(i)} s_\alpha^{(i)} &= \Gamma_{\alpha k}^{(i)\beta} du^k \otimes s_\beta^{(i)} \\ \omega_\alpha^{(i)\beta} &= \Gamma_{\alpha k}^{(i)\beta} du^k \end{aligned}$$

那么对于 $E_1 \oplus E_2$ 的局部标架场 $\{s_\alpha^{(1)} \oplus s_\gamma^{(2)}\}$,

$$\begin{aligned} (D^{(1)} \oplus D^{(2)})(s_\alpha^{(1)} \oplus s_\gamma^{(2)}) \\ &= D^{(1)} s_\alpha^{(1)} \oplus D^{(2)} s_\gamma^{(2)} \\ &= \Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta} \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau} du^k \otimes s_\beta^{(1)} \otimes s_\tau^{(2)} \end{aligned}$$

因此 $D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ 的联络形式

$$\omega_{\alpha \oplus \gamma}^{\beta \oplus \tau} = \Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta} \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau} du^k;$$

对于 $E_1 \otimes E_2$ 的标架场 $\{s_\alpha^{(1)} \otimes s_\gamma^{(2)}\}$,

$$\begin{aligned} (D^{(1)} \otimes D^{(2)})(s_\alpha^{(1)} \otimes s_\gamma^{(2)}) \\ &= D^{(1)} s_\alpha^{(1)} \otimes s_\gamma^{(2)} + s_\alpha^{(1)} \otimes D^{(2)} s_\gamma^{(2)} \\ &= \Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta} du^k \otimes s_\beta^{(1)} \otimes s_\gamma^{(2)} + \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau} du^k \otimes s_\alpha^{(1)} \otimes s_\tau^{(2)} \\ &= (\Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta} \delta_\gamma^\tau + \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau} \delta_\alpha^\beta) du^k \otimes s_\beta^{(1)} \otimes s_\tau^{(2)} \end{aligned}$$

因此 $D^{(1)} \otimes D^{(2)}$ 的联络形式

$$\omega_{\alpha \otimes \gamma}^{\beta \otimes \tau} = (\Gamma_{\alpha k}^{(1)\beta} \delta_{\gamma}^{\tau} + \Gamma_{\gamma k}^{(2)\tau} \delta_{\alpha}^{\beta}) du^k$$

因此命题成立. \square

2. 设 E 是流形 M 上的向量丛, D 是 E 上的联络, C 是 M 上的光滑曲线, 证明: 沿着 C 的平行移动建立了 E 在曲线 C 的各点的纤维之间的同构.

证明. 设曲线 C 有局部坐标表示 $C: u^i = u^i(t)$. 取 $C(t)$ 处的纤维 E_t 的局部标架场 $\{s_{\alpha}^{(t)}\}$, 设 C 的切向量场

$$X = \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

则平行移动诱导了映射 $\tau_t: E_0 \rightarrow E_t$,

$$\tau_t(v_0) = v_t \in E_t$$

其中 v_t 是 v_0 平行移动至 E_t 的向量. 设沿 C 的平行截面 $s = \lambda^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, 则关于平行移动方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X, Ds \rangle = \frac{d\lambda^i}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i X^k \lambda^j, \forall i \\ s(0) &= v_0 \end{aligned}$$

在局部解存在且唯一. 以上方程是一阶齐次线性常微分方程组, 所以 Cauchy 问题有全局唯一解, 且解只能处处为零或处处不为零, 所以 $\tau_t(v_0) = s(t)$ 在整个 C 上有定义, 是线性映射且 $\ker \tau_t = \{0\}$. 综上述, 对 $\forall t$, τ_t 是 E_0 到 E_t 的线性同构, 再由 C 起点的任意性可知平行移动诱导了各纤维之间的线性同构. \square

3. 设 M 是光滑流形, D 是 M 上的仿射联络, T 是 D 的挠率张量. 证明:

(1) $T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y], \forall X, Y \in \Gamma(TM)$;

(2) D 称为无挠仿射联络, 如果 D 的挠率张量恒为零. 证明 D 是无挠当且仅当它在任一局部坐标系 $(U, (u^i))$ 下的联络系数 Γ_{jk}^i 关于下指标 j, k 是对称的.

证明. (1) 记局部坐标 $\{u^i\}$ 下 $s_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$, 设截面 $X = X^i s_i, Y = Y^j s_j$, 则

$$\begin{aligned} DY &= dY^j \otimes s_j + Y^j \Gamma_{ji}^l du^i \otimes s_l \\ D_X Y &= \langle X, DY \rangle = X(Y^j) s_j + X^i Y^j \Gamma_{ji}^l s_l \\ D_Y X &= \langle Y, DX \rangle = Y(X^j) s_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^l s_l \end{aligned}$$

所以

$$D_X Y - D_Y X = (XY^j - YX^j) s_j + X^i Y^j (\Gamma_{ji}^l - \Gamma_{ij}^l) s_l = [X, Y] + T(X, Y)$$

(2) $T \equiv 0$ 当且仅当对任意截面 X, Y , $T(X, Y) = X^i Y^j (\Gamma_{ji}^l - \Gamma_{ij}^l) s_l$ 恒为零, 当且仅当对 $\forall i, j, l$, Γ_{ij}^l 关于下指标对称. \square

4. 设 M 是光滑流形, D 是 M 上的仿射联络, t 是 $(2,2)$ 型张量场, 试在局部坐标系 $(U, (u^i))$ 下计算 t 的绝对微分 Dt .

证明. 设 $(2,2)$ 型张量 t 在局部坐标 $\{u^i\}$ 下有坐标表示 (记 $\frac{\partial}{\partial u^i} = s_i$)

$$t = t_{kl}^{ij} du^k \otimes du^l \otimes s_i \otimes s_j$$

按联络的定义计算

$$\begin{aligned} Dt &= dt_{kl}^{ij} \otimes du^k \otimes du^l \otimes s_i \otimes s_j + t_{kl}^{ij} \otimes D(du^k) \otimes du^l \otimes s_i \otimes s_j \\ &\quad + t_{kl}^{ij} \otimes du^k \otimes D(du^l) \otimes s_i \otimes s_j + t_{kl}^{ij} \otimes du^k \otimes du^l \otimes D(s_i) \otimes s_j \\ &\quad + t_{kl}^{ij} \otimes du^k \otimes du^l \otimes s_i \otimes D(s_j) \end{aligned}$$

而根据定义

$$\begin{aligned} D(du^p) &= -\Gamma_{kq}^p du^q \otimes du^k = -\omega_k^p \otimes du^k \\ D(s_p) &= \Gamma_{pq}^i du^q \otimes s_i = \omega_p^i \otimes s_i \end{aligned}$$

代入可得

$$\begin{aligned} Dt &= (dt_{kl}^{ij} - t_{pl}^{ij} \omega_k^p - t_{kp}^{ij} \omega_l^p + t_{kl}^{pj} \omega_p^i + t_{kl}^{ip} \omega_p^j) du^k \otimes du^l \otimes s_i \otimes s_j \\ &= t_{kl,h}^{ij} du^h \otimes du^k \otimes du^l \otimes s_i \otimes s_j \\ t_{kl,h}^{ij} &= \frac{\partial t_{kl}^{ij}}{\partial u^h} - t_{pl}^{ij} \Gamma_{kh}^p - t_{kp}^{ij} \Gamma_{lh}^p + t_{kl}^{pj} \Gamma_{ph}^i + t_{kl}^{ip} \Gamma_{ph}^j \end{aligned}$$

以上即为 t 的绝对微分的表达式. □

作业八

1. 写出关于 (r,s) 型张量的 Ricci 恒等式, 并在 $r = s = 1$ 的情形下证明之.

证明. 设 $t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_r}}$, 则有 **Ricci 恒等式**:

$$t_{j_1 \dots j_s, pq}^{i_1 \dots i_r} - t_{j_1 \dots j_s, qp}^{i_1 \dots i_r} = -t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_m} \widehat{l_{m+1} \dots i_r} R_{lpq}^{i_m} + t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \widehat{j_1 \dots j_m} l_{j_{m+1} \dots j_s} R_{j_m pq}^l + t_{j_1 \dots j_s, k}^{i_1 \dots i_r} T_{pq}^k$$

下面在 $r = s = 1$ 的情形下证明之. 计算

$$\begin{aligned} t_{j,p}^i &= \frac{\partial t_j^i}{\partial u^p} + t_j^l \Gamma_{lp}^i - t_l^i \Gamma_{jp}^l \\ t_{j,pq}^i &= \frac{\partial^2 t_j^i}{\partial u^p \partial u^q} + \frac{\partial t_j^l}{\partial u^q} \Gamma_{lp}^i + t_j^l \frac{\partial \Gamma_{lp}^i}{\partial u^q} - \frac{\partial t_l^i}{\partial u^q} \Gamma_{jp}^l - t_l^i \frac{\partial \Gamma_{jp}^l}{\partial u^q} \\ &\quad + \Gamma_{hq}^i \left(\frac{\partial t_j^h}{\partial u^p} + t_j^l \Gamma_{lp}^h - t_l^h \Gamma_{jp}^l \right) \\ &\quad - \Gamma_{jq}^h \left(\frac{\partial t_h^i}{\partial u^p} + t_h^l \Gamma_{lp}^i - t_l^i \Gamma_{hp}^l \right) \\ &\quad - \Gamma_{pq}^h \left(\frac{\partial t_j^i}{\partial u^h} + t_j^l \Gamma_{lh}^i - t_l^i \Gamma_{jh}^l \right) \end{aligned}$$

同理可计算 $t_{j,qp}^i$, 进而有

$$\begin{aligned} t_{j,pq}^i - t_{j,qp}^i &= t_j^l \left(\frac{\partial \Gamma_{lp}^i}{\partial u^q} - \frac{\partial \Gamma_{lq}^i}{\partial u^p} + \Gamma_{hq}^i \Gamma_{lp}^h - \Gamma_{hp}^i \Gamma_{lq}^h \right) \\ &\quad + t_l^i \left(\frac{\partial \Gamma_{jq}^l}{\partial u^p} - \frac{\partial \Gamma_{jp}^l}{\partial u^q} + \Gamma_{hp}^l \Gamma_{jq}^h - \Gamma_{hq}^l \Gamma_{jp}^h \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial t_j^i}{\partial u^h} - t_l^i \Gamma_{jh}^l + t_j^l \Gamma_{lh}^i \right) (\Gamma_{qp}^h - \Gamma_{pq}^h) \\ &= -t_j^l R_{lpq}^i + t_l^i R_{j pq}^l + t_{j,h}^i T_{pq}^h \end{aligned}$$

Ricci 恒等式得证. \square

2. 设 (M^m, D) 是仿射联络空间, $p \in M$, U 为 p 的开邻域, X_1, \dots, X_m 为 TU 上的光滑标架场, $\omega^1, \dots, \omega^m$ 是对偶 1-形式, 设 $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \omega^k$. 证明:

$$d\omega_l^i = \omega_l^p \wedge \omega_p^i + \frac{1}{2} R_{ljk}^i \omega^j \wedge \omega^k.$$

证明. 对于标架场的任意两个基向量场 X_α, X_β ,

$$\begin{aligned} d\omega_l^i(X_\alpha, X_\beta) &= X_\alpha \langle X_\beta, \omega_l^i \rangle - X_\beta \langle X_\alpha, \omega_l^i \rangle - \langle [X_\alpha, X_\beta], \omega_l^i \rangle \\ &= X_\alpha (\Gamma_{lk}^i \langle \omega^k, X_\beta \rangle) - X_\beta (\Gamma_{lk}^i \langle \omega^k, X_\alpha \rangle) - \Gamma_{lk}^i \langle [X_\alpha, X_\beta], \omega^k \rangle \\ &= X_\alpha (\Gamma_{l\beta}^i) - X_\beta (\Gamma_{l\alpha}^i) - \Gamma_{lk}^i c_{\alpha\beta}^k \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} &\omega_l^p \wedge \omega_p^i(X_\alpha, X_\beta) + \frac{1}{2} R_{ljk}^i (\omega^j \wedge \omega^k)(X_\alpha, X_\beta) \\ &= \Gamma_{l\alpha}^p \Gamma_{p\beta}^i - \Gamma_{l\beta}^p \Gamma_{p\alpha}^i + \frac{1}{2} (R_{l\alpha\beta}^i - R_{l\beta\alpha}^i) \\ &= \Gamma_{l\alpha}^p \Gamma_{p\beta}^i - \Gamma_{l\beta}^p \Gamma_{p\alpha}^i + R_{l\alpha\beta}^i \\ &= X_\alpha (\Gamma_{l\beta}^i) - X_\beta (\Gamma_{l\alpha}^i) - \Gamma_{lp}^i c_{\alpha\beta}^p \end{aligned}$$

由 X_α, X_β 任意性可知 $d\omega_l^i = \omega_l^p \wedge \omega_p^i + \frac{1}{2} R_{ljk}^i \omega^j \wedge \omega^k$. \square

3. 证明等式:

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_i^l \wedge \omega_{jl}.$$

证明. 根据定义, $\omega_{ij} = \omega_i^k g_{kj}$, $d\omega_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}$. 计算

$$\begin{aligned} &d\omega_{ij} + \omega_i^l \wedge \omega_{jl} \\ &= d\omega_i^k g_{kj} - \omega_i^k \wedge dg_{kj} + \omega_i^l \wedge (\omega_j^k g_{kl}) \\ &= d\omega_i^k g_{kj} - \omega_i^k \wedge (\omega_k^p g_{pj} + \omega_j^p g_{kp}) + \omega_i^l \wedge (\omega_j^k g_{kl}) \\ &= d\omega_i^k g_{kj} - \omega_i^l \wedge \omega_l^k g_{kj} \\ &= \Omega_{ij}^k g_{kj} = \Omega_{ij} \end{aligned}$$

因此命题成立. \square

4. 设 (M, G) 是黎曼流形, 证明其曲率张量满足:

$$R_{ijkl} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial u^l} + \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jhl} - \Gamma_{il}^h \Gamma_{jhk}$$

证明. 计算

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial u^l} + \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jhl} - \Gamma_{il}^h \Gamma_{jhk} \\ &= \frac{\partial \Gamma_{il}^p g_{pj}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^p g_{pj}}{\partial u^l} + \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jl}^p g_{ph} - \Gamma_{il}^h \Gamma_{jk}^p g_{ph} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^p}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u^l} \right) g_{pj} + \Gamma_{il}^p \frac{\partial g_{pj}}{\partial u^k} - \Gamma_{ik}^p \frac{\partial g_{pj}}{\partial u^l} + (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{il}^h \Gamma_{jk}^p) g_{hp} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^p}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u^l} \right) g_{pj} + (\Gamma_{pj}^k + \Gamma_{jpk}) \Gamma_{il}^p - (\Gamma_{pj}^l + \Gamma_{jpl}) \Gamma_{ik}^p \\ & \quad + (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{il}^h \Gamma_{jk}^p) g_{ph} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^p}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u^l} \right) g_{pj} + (\Gamma_{pk}^h \Gamma_{il}^p - \Gamma_{pl}^h \Gamma_{ik}^p) g_{hj} \\ & \quad + (\Gamma_{il}^h \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jl}^p) g_{hp} + (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{il}^h \Gamma_{jk}^p) g_{ph} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^h}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^l} + \Gamma_{pk}^h \Gamma_{il}^p - \Gamma_{pl}^h \Gamma_{ik}^p \right) g_{hj} \\ &= R_{ikl}^h g_{hj} = R_{ijkl} \end{aligned}$$

因此命题成立. □

5. 设 D 是黎曼流形 M 上的黎曼联络, 记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为黎曼度量. 证明: 对于 M 上任意光滑切向量场 X, Y, Z 成立

$$2 \langle D_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle.$$

证明. 先建立两个引理:

引理 1. 设联络 D 容许度量 G , 则对任意光滑切向量场 X, Y, Z ,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

引理 2. 设联络 D 无挠, 则对任意光滑向量场 X, Y ,

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

首先用以上引理证明原命题. 计算

$$\begin{aligned} & X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &= \langle D_X Y + D_Y X, Z \rangle + \langle Y, D_X Z - D_Z X \rangle + \langle X, D_Y Z - D_Z Y \rangle \\ &= \langle 2D_X Y, Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle \end{aligned}$$

所以

$$2\langle D_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle$$

下面证明两个引理. 设局部坐标 $\{u^i\}$ 下 $X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, Y, Z 也采用同类记号. 计算

$$D_X Y = X^i \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, D(Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}) \right\rangle = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} + X^i Y^j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

$$\begin{aligned} \langle Z, D_X Y \rangle &= g_{ij} du^i \otimes du^j (D_X Y, Z) \\ &= g_{ij} du^i \otimes du^j (X^h \frac{\partial Y^l}{\partial u^h} \frac{\partial}{\partial u^l} + X^h Y^l \Gamma_{lh}^k \frac{\partial}{\partial u^k}, Z^p \frac{\partial}{\partial u^p}) \\ &= g_{ij} (X^h \frac{\partial Y^i}{\partial u^h} + X^h Y^l \Gamma_{lh}^i) \cdot Z^j \\ &= g_{ij} X^h Z^j \frac{\partial Y^i}{\partial u^h} + X^h Y^l Z^j \Gamma_{ljh} \end{aligned}$$

同理可得

$$\langle Y, D_X Z \rangle = g_{ij} X^h Y^j \frac{\partial Z^i}{\partial u^h} + X^h Z^l Y^j \Gamma_{ljh}$$

而根据黎曼联络的性质, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} = \Gamma_{ijh} + \Gamma_{jih}$, 所以

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= X^h \frac{\partial}{\partial u^h} (g_{ij} Y^l Z^j) \\ &= X^h Y^l Z^j (\Gamma_{ljh} + \Gamma_{jhl}) + X^h Z^j g_{lj} \frac{\partial Y^l}{\partial u^h} + X^h Y^l g_{lj} \frac{\partial Z^j}{\partial u^h} \\ &= \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle \end{aligned}$$

引理 1 得证. 再由联络无挠, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, 计算

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} + X^i Y^j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \\ &\quad - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} - Y^i X^j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} \\ &= [X, Y] \end{aligned}$$

引理 2 得证, 进而完成原命题的证明. □

作业九

1. 设 M 是截面曲率为 c 的常曲率空间, 则 M 的 Ricci 曲率和数量曲率分别是 $(m-1)c$ 和 $m(m-1)c$.

证明. 对于 $p \in M$, 设 $\{e_i\}$ 是 $(T_p M, g)$ 的标准正交基, $X \in T_p M$ 是单位向量, 则

$$\begin{aligned} \text{Ric}_p(X) &= R(e_i, X, e_i, X) \\ &= c(|e_i|^2 |X|^2 - \langle e_i, X \rangle^2) \\ &= c(m - |X|^2) = (m-1)c \end{aligned}$$

以及

$$S(p) = \sum_{i=1}^m \text{Ric}_p(e_i) = m(m-1)c$$

因此命题成立. □

2. 设 M 是黎曼流形, $p \in M$, 证明: M 在点 p 的数量曲率 $S(p)$ 可表示为

$$S(p) = \frac{m}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} \text{Ric}_p(v) dV_{S^{m-1}},$$

其中 ω_{m-1} 是切空间 $T_p M$ 中的单位球面 S^{m-1} 的体积.

证明. 注意到 $\text{Ric}_p(X) = R(e_i, X, e_i, X)$ 是二阶对称协变张量, 所以存在 $T_p M$ 的一组标准正交基 $\{e_i\}$ 将 Ric_p 对角化: 对任意单位切向量 $v = x^i e_i$ 有

$$\text{Ric}_p(v) = \lambda^i x^{i^2},$$

其中 λ^i 是 Ric_p 的特征值. 因此再利用 Stokes 公式计算

$$\begin{aligned} \int_{S^{m-1}} \text{Ric}_p(v) dS^{m-1} &= \int_{S^{m-1}} x^i \cdot \lambda^i x^i dS^{m-1} \\ &= \int_{S^{m-1}} v \cdot (\lambda^i x^i) dS^{m-1} \\ &= \int_{B^m} \text{div}(\lambda^i x^i) dB^m \\ &= \text{vol}(B^m) \cdot \lambda^i \\ &= \frac{\omega_{m-1}}{m} \cdot \text{Ric}_p(e_i) \\ &= \frac{\omega_{m-1}}{m} S(p) \end{aligned}$$

因此命题成立. □

3. 证明: 设

$$F(x, v) = (x, \exp_x v),$$

\mathcal{U} 局部坐标为 $(x^1, \dots, x^m; v^1, \dots, v^m)$, $U \times U \subset M \times M$ 局部坐标为 $(x_1^1, \dots, x_1^m; x_2^1, \dots, x_2^m)$, 则

$$\begin{aligned} dF\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)|_{(x,0)} &= \frac{d}{dx^i}(x, \exp_x v)|_{(x,0)} = \frac{\partial}{\partial x_1^i} + \frac{\partial}{\partial x_2^i} \\ dF\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)|_{(x,0)} &= \frac{d}{dv^i}(x, \exp_x v)|_{(x,0)} = (d\exp_x)\frac{\partial}{\partial v^i} = \frac{\partial}{\partial x_2^i} \end{aligned}$$

证明. 在坐标 $\{x^i, v^i\}$ 下 dF 的 Jacobi 矩阵 $J_F = (\frac{\partial F_i}{\partial x^j} \frac{\partial F_i}{\partial v^j})_{ij}$, 所以

$$\begin{aligned} dF(\frac{\partial}{\partial x^i})|_{(x,0)} &= \frac{d}{dx^i}(x, \exp_x v)|_{(x,0)} = \frac{dx^j}{dx^i} \frac{\partial}{\partial x_1^j} + \frac{d(\exp_x 0)^j}{dx^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1^i} + \frac{dx^j}{dx^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} = \frac{\partial}{\partial x_1^i} + \frac{\partial}{\partial x_2^i} \end{aligned}$$

另一方面, 设 $\exp_x v$ 诱导的测地线为 $\gamma_v(t)$, 计算

$$\begin{aligned} dF(\frac{\partial}{\partial v^i})|_{(x,0)} &= \frac{d}{dv^i}(x, \exp_x v)|_{(x,0)} = 0 + \frac{d}{dt} \exp_x(tv^i)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \gamma_{tv^i}(1)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{v^i}(t)|_{t=0} \\ &= \text{id}(\frac{\partial}{\partial x_2^i}) = \frac{\partial}{\partial x_2^i} \end{aligned}$$

因此命题成立. □

4. 在圆柱面

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, -\infty < y < +\infty\}$$

上令 $p = (0, 0, 1)$. 证明: 对任意 $q = (x_0, y_0, z_0) \in M$, 如果

$$q \neq (0, 0, -1),$$

则存在连接 p, q 的测地线, 它不是极短测地线.

证明. 考虑 M 的一个局部坐标卡

$$\phi_1 : U_1 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1, u^2, \sin u^1)$$

则 $p = \phi(\pi/2, 0)$. 通过 \mathbb{R}^3 中的标准度量诱导 U_1 上的度量, 计算度量矩阵

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

进而得到黎曼联络系数

$$\Gamma_{ij}^k \equiv 0, \forall i, j, k.$$

代入测地线方程可得 U_1 上任意一点出发的测地线都是平直射线: 存在常数 A_1, A_2, C_1, C_2 ,

$$u^1(t) = A_1 + C_1 t, u^2(t) = A_2 + C_2(t),$$

特别地, 从 p 出发的测地线在 U_1 上的起点是 $(\pi/2, 0)$. 同理可得在另一局部坐标卡

$$\phi_2 : U_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1, u^2, \sin u^1)$$

上任意一点出发的测地线均为平直射线, 又每个 U_i 都是凸集, 因此 $U_i (i = 1, \dots, 4)$ 是其中每个点的测地凸邻域. 同时易知 $\{(U_i, \phi_i)\}$ 构成 M 上的定向光滑图册. 设 $q \neq (0, 0, -1)$, 则存在 i s.t. $q \in \phi_i(U_i)$. 分情况讨论:

(1) $y_q \neq 0$. 在相差一个仿射变换的情形下不妨设 $y_q = 2$, 那么存在连接 p, q 的极小测地线在 U_1 上连接 $(\pi/2, 0), \phi^{-1}(q)$ 的直线 $\gamma_0 \subset \phi(U_1)$. 现在令 $A_1 = \pi/2, A_2 = 0$. 因为 $y_q > 0$, 所以可以适当选取 $C_1, C_2 > 0$ s.t. 从 p 出发的测地线 $\gamma(t)$ 将依次经过

$$\phi_1(U_1), \phi_2(U_2), \phi_1(U_1), \phi_2(U_2), \dots$$

后在 $t = 1$ 时到达 q , 且限制在每个 $\phi_i(U_i)$ 上都是其中任意两点之间的极小测地线. 那么 γ 是连接 p, q 的测地线但不是极小的;

(2) $y_q = 0$ 且 $z_q \neq -1$. 易知圆周

$$S = \{(x, y, z) : y = 0, x^2 + z^2 = 1\}$$

是从 p 出发的测地线, 那么存在 S 上连接 p, q 的优圆弧 γ' , γ' 是测地线但根据度量的正定性其长度严格大于其对应的劣圆弧, 因而不是极小的.

综上所述, 如果 $q \neq (0, 0, -1)$, 则存在连接 p, q 的非极小测地线. \square

5. 设 (M, g) 是黎曼流形, $p \in M, \delta > 0$. 令

$$V_p(\delta) = \{q \in M : d(p, q) < \delta\},$$

证明: 如果存在点 p 的一个法坐标邻域 U s.t. $V_p(\delta) \subset U$, 则

$$V_p(\delta) = \mathcal{B}_p(\delta)$$

是 (M, g) 的一个测地球.

证明. 已知 U 上有法坐标:

$$\phi : D \subset T_p M \rightarrow M, v \mapsto \exp_p v,$$

其中 $B_0(\delta) \subset D, U \subset \phi(D), |v|$ 为弧长参数. 对每个 $c \in U$, 连接 p, c 的极小测地线具有表达式 $\gamma_v, \exp_p v = c$, 显然测地球 $\mathcal{B}_p(\delta) \subset V_p(\delta)$. 对每个 $q \in V_p(\delta)$, 所以存在唯一的连接 p, q 且长度小于 δ 的极小测地线 $\gamma \subset M$. 假设存在 $t_0 \in (0, 1), \gamma(t_0) \notin V_p(\delta), V_p(\delta) \subset U$, 根据介值定理不妨设 $\gamma(t_0) \in U \setminus V_p(\delta)$, 则 $\gamma(t_0) \notin \mathcal{B}_p(\delta), L(\gamma) \geq d(p, \gamma(t_0)) \geq \delta$, 矛盾! 所以 $\gamma \in V_p(\delta) \subset U$. 设 $\gamma = \gamma_v$, 则 $|v| < \delta, q = \exp_p v \in \mathcal{B}_p(\delta)$. 综上, $V_p(\delta) = \mathcal{B}_p(\delta)$. \square

作业十

1. 设 M 是黎曼流形, $p \in M$. 在 M 上一条以弧长为参数的测地线 $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ 称为从 p 点出发的射线, 如果

$$\gamma(0) = p,$$

并且对于任意的 $t \in (0, \infty), \gamma|_{[0, t]}$ 是连接 p 与 $\gamma(t)$ 两点的最短曲线, 因而 $d(p, \gamma(t)) = t$. 证明: 如果 M 是完备非紧的, 则对于任意的 $p \in M$, 在 M 上必存在从 p 点出发的射线.

证明. 若 M 完备, 则任意两点都有极小测地线连接. M 非紧, 取 $\{x_n\}, d(x_n, p) \rightarrow \infty$, 用极小测地线 $\gamma_n(t)$ 连接 p, x_n , 以弧长为参数, $\gamma_n(0) = p$, 故 $\gamma_n(t) = \exp_p(tv_n)$. 设

$\dot{\gamma}_n(0) = v_n, |v_n| = 1$. 由单位球面 S^{n-1} 紧致, 有子列 (仍记为 $\{v_n\}$) 收敛于 $v \in S^{n-1}$, 作测地线 $\gamma(t) = \exp_p(tv), t \in [0, \infty)$. $\exp_p, d(\cdot, \cdot)$ 都是连续映射, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma(t), \gamma_n(t)) &= d(\gamma(t), \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_p tv_n) \\ &= d(\gamma(t), \gamma(t)) = 0\end{aligned}$$

对每个 $t \in [0, \infty)$ 都成立. 设 $t_n : \gamma(t_n) = x_n$, 则必然 $t_n \rightarrow \infty$, 进而由前面的极限可知 $d(p, \gamma(t_n)) \rightarrow \infty$. 下面证明连接 γ 上任意一点和 p 的极小测地线都是 γ : 由 $\gamma_n(t)$ 在 $[0, t_n]$ 上极小, 对每个 $t > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}, \forall n > N, t < t_n$,

$$\begin{aligned}d(p, \gamma(t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(p, \gamma_n(t)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n(t)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} t = t = L(\gamma(t)).\end{aligned}$$

所以 γ 为所求的射线. □

2. 在黎曼流形 M 上的一条光滑曲线 $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ 称为**发散曲线**, 如果对于任意的紧致子集 $K \subset M$, 必存在 $t_0 > 0$ s.t. $\gamma(t_0) \notin K$. 发散曲线 γ 的长度定义为

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s |\gamma'(t)| dt$$

证明: M 是完备的当且仅当 M 上的每一条发散曲线都有无限长度.

证明. (\Leftarrow) 假设 M 不完备, 则存在测地线

$$\gamma(t) = \exp_p(tv), |v| = 1, t \in [0, \epsilon)$$

无法再延长. 如果 γ 包含于某个紧集 K 中, 令 $t_n \rightarrow \epsilon$, 则 $\gamma(t_n)$ 在 K 中没有聚点, 矛盾! 所以曲线

$$\tilde{\gamma}(t) = \exp_p(\epsilon(1 - e^{-t})v), t \in [0, \infty)$$

是发散曲线, 但 $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) = \epsilon < \infty$, 矛盾! 所以 M 完备;

(\Rightarrow) M 完备, 测地线可以无限延伸. 现在任意给定一条发散曲线 $\gamma : t \in [0, \infty)$. 由 Hopf-Rinow 定理, $\exp_p(T_p M) = M$, \exp_p 连续, 所以 M 有紧集覆盖

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K_n, K_n = \exp_p(B_{T_p M}(n)).$$

对每个 n 都存在 $t_n : \gamma(t_n) \notin K_n$, 则 $L(\gamma) \geq n$. 所以 γ 长度无限. □

3. 设 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ 是黎曼流形 M 上的测地线, 试构造沿着 γ 不恒为零的正交 Jacobi 场 U s.t. $U(0) = 0$.

证明. 取 $X \in T_p M, \langle v, X \rangle = 0$, 作单参数测地线族

$$\gamma_u(t) := \exp_p t(v + uX).$$

下面说明 $\{\gamma_u\}$ 诱导的沿 $\gamma(t) = \gamma_0(t)$ 的 Jacobi 场 $U(t)$ 符合题意. 首先

$$\begin{aligned} U(0) &= \frac{\partial}{\partial u} \gamma(u, t) \big|_{t=0, u=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (\exp_p t(v + uX)) \big|_{t=0, u=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

再计算

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle U, \dot{\gamma} \rangle \big|_{u=0} &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}} U, \dot{\gamma} \rangle \big|_{u=0} = \langle \nabla_U \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \big|_{u=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \big|_{u=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0) \rangle \big|_{u=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle v + uX, v + uX \rangle \big|_{u=0} \quad (\text{by parallel relation}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (|v|^2 + u^2 |X|^2) \big|_{u=0} = 0 \end{aligned}$$

所以 $\langle U, \dot{\gamma} \rangle \equiv \langle U, \dot{\gamma} \rangle \big|_{t=0} = 0$. □

4. 设 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ 是黎曼流形 M 上的测地线, $X, Y \in T_{\gamma(0)} M$, 试构造沿着 γ 的 Jacobi 场 U s.t. $U(0) = X, \dot{U}(0) = Y$.

证明. 先作测地线 $\zeta(u) : \zeta(0) = \gamma(0), \dot{\zeta}(0) = X$. 令 $T(u), W(u)$ 是沿 ζ 平行移动的向量场, $T(0) = \dot{\gamma}(0), W(0) = Y$, 作单参数测地线族

$$\gamma_u(t) = \exp_{\zeta(u)} t(T(u) + uW(u)).$$

下面说明 $\{\gamma_u\}$ 诱导的沿 $\gamma(t) = \gamma_0(t)$ 的 Jacobi 场 $U(t)$ 符合题意. 计算

$$\begin{aligned} U(0) &= \frac{\partial}{\partial u} \exp_{\zeta(u)} t(T(u) + uW(u)) \big|_{t=0, u=0} \\ &= \dot{\zeta}(0) \big|_{u=0} = X \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \nabla_{\dot{\gamma}} U \big|_{t=0} = \nabla_{U(0)} \dot{\gamma}(0) \\ &= \nabla_X \dot{\gamma}(0) = \nabla_{\dot{\zeta}(0)} (T(u) + uW(u)) \big|_{u=0} \\ &= \nabla_{\dot{\zeta}(0)} uW(u) \big|_{u=0} = \langle \dot{\zeta}(0), du \rangle \cdot W(u) \big|_{u=0} \\ &= W(0) = Y \end{aligned}$$

因此 Jacobi 场 U 符合题意. □

作业十一

1. 设 M 是 \bar{M} 中的等距嵌入子流形, $\bar{\nabla}$ 是 \bar{M} 上的黎曼联络, 令

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

证明： ∇ 是 M 上的黎曼联络。

证明. 直接计算：

$$\begin{aligned}\nabla_V(W_1 + W_2) &= (\bar{\nabla}_V W_1 + W_2)^T \\ &= (\bar{\nabla}_V W_1)^T + (\bar{\nabla}_V W_2)^T \\ &= \nabla_V W_1 + \nabla_V W_2\end{aligned}$$

对于 $f, g \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}\nabla_{fV_1+gV_2}W &= (f\bar{\nabla}_{V_1}W + g\bar{\nabla}_{V_2}W)^T \\ &= (f\bar{\nabla}_{V_1}W)^T + (g\bar{\nabla}_{V_2}W)^T \\ &= f\nabla_{V_1}W + g\nabla_{V_2}W\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_V fW &= (\bar{\nabla}_V fW)^T \\ &= (Vf \cdot W + f\bar{\nabla}_V W)^T \\ &= Vf \cdot W^T + f\nabla_V W \\ &= Vf \cdot W + f\nabla_V W\end{aligned}$$

所以 ∇ 是 M 上的仿射联络. 下面证明 ∇ 还是黎曼联络：先考虑挠率张量

$$\begin{aligned}T(V, W) &= \nabla_V W - \nabla_W V - [V, W] \\ &= (\bar{\nabla}_V W - \bar{\nabla}_W V)^T - [V, W] \\ &= ([V, W])^T - [V, W] = 0\end{aligned}$$

其次对 $U, V, W \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}U \langle V, W \rangle &= \langle \bar{\nabla}_U V, W \rangle + \langle V, \bar{\nabla}_U W \rangle \\ &= \langle \nabla_U V, W \rangle + \langle V, \nabla_U W \rangle\end{aligned}$$

所以 ∇ 是黎曼联络. □

2. 证明：单位圆盘上的分式线性变换 $\phi: B^2 \rightarrow B^2$ 是关于 Poicaré 度量的等距变换。

证明. 根据复分析中熟知的结论，在复坐标下所有 ϕ 可表示为

$$\phi(z) = c \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |c| \leq 1, |\alpha| < 1.$$

记 $\phi = u + iv$, u, v 满足 Cauchy-Riemann 方程. Poincaré 度量

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} (dx^2 + dy^2)$$

计算得

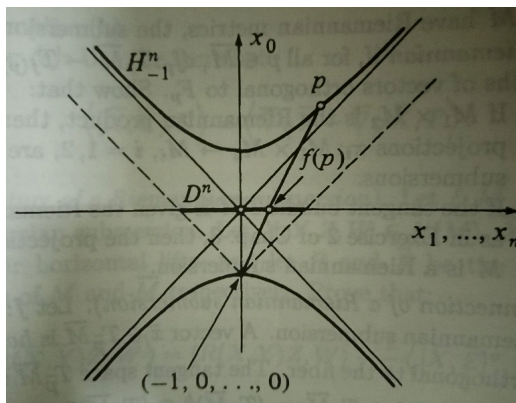
$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle &= 0.\end{aligned}$$

再计算

$$\begin{aligned}\left\langle \phi_* \frac{\partial}{\partial x}, \phi_* \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ &= \frac{4}{(1 - |\phi(z)|^2)^2} |\phi'(z)|^2 \\ &= \frac{4(1 - |\alpha|^2)^2}{(|1 - \bar{\alpha}z|^2 - |z - \alpha|^2)^2} \\ &= \frac{4(1 - |\alpha|^2)^2}{(1 - |\alpha|^2)^2(1 - |z|^2)^2} \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle\end{aligned}$$

同理可得 $\left\langle \phi_* \frac{\partial}{\partial y}, \phi_* \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$, $\left\langle \phi_* \frac{\partial}{\partial x}, \phi_* \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$. 所以 ϕ 是关于 Poicaré 度量的等距变换. \square

3. 证明：双曲空间的 Minkowski 模型与单位实心球模型是等距的.



证明. 构造如图的球极投影 $f: \mathbb{H}_{-1}^n \rightarrow B^n, p \mapsto f(p)$. 设坐标 $p = (x^0, x^1, \dots, x^n)$, 对应 $f(p) = (0, u^1, \dots, u^n)$. 计算得

$$\begin{aligned}x^i &= \frac{2u^i}{1 - \sum_k (u^k)^2}, \quad i = 1, \dots, n; \\ x^0 &= \frac{2}{1 - \sum_k (u^k)^2} - 1.\end{aligned}$$

所以当 $i = 1, \dots, n$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^i}{\partial u^j} &= \frac{4u^i u^j}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^2}, \quad j \neq i; \\ &= \frac{2 + 4(u^i)^2 - 2 \sum_k (u^k)^2}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^2}, \quad j = i.\end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial x^0}{\partial u^j} = \frac{4u^j}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

于是计算

$$\begin{aligned}(dx^0)^2 &= \frac{16u^j u^l}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} du^j du^l; \\ (dx^i)^2 &= \sum_{j,l \neq i} \frac{16(u^i)^2 u^j u^l}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} du^j du^l \\ &\quad + \sum_{j \neq i} \frac{8u^i u^j (1 + 2(u^i)^2 - \sum_k (u^k)^2)}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} (du^i du^j + du^j du^i) \\ &\quad + \frac{4(1 + 2(u^i)^2 - \sum_k (u^k)^2)^2}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} (du^i)^2\end{aligned}$$

设 $-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 = g_{ij} du^i du^j$, 则当 $i \neq j$ 时

$$\begin{aligned}g_{ij} &= -\frac{16u^i u^j}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} + \sum_{l \neq i,j} \frac{16(u^l)^2 u^i u^j}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} \\ &\quad + \frac{8u^i u^j (1 + 2(u^i)^2 - \sum_k (u^k)^2)}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} + \frac{8u^i u^j (1 + 2(u^j)^2 - \sum_k (u^k)^2)}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} \\ &= 0.\end{aligned}$$

而 $i = j$ 时

$$\begin{aligned}g_{ii} &= -\frac{16(u^i)^2}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} + \sum_{j \neq i} \frac{16(u^i u^j)^2}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} \\ &\quad + \frac{4(1 + 2(u^i)^2 - \sum_k (u^k)^2)^2}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} \\ &= \frac{4 + 4(\sum_k (u^k)^2)^2 - 8 \sum_k (u^k)^2}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^4} \\ &= \frac{4}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^2}\end{aligned}$$

所以

$$-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 = \frac{4}{(1 - \sum_k (u^k)^2)^2} ((du^1)^2 + \dots + (du^n)^2),$$

即上半空间 \mathbb{H}_1^n 中的 Minkowski 模型与 \mathbb{R}^n 中单位实心球模型等距同构. \square

4. 设 M, \widetilde{M} 是完备黎曼流形, $\phi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 是局部等距, $x = \phi(\tilde{x})$. 证明以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} T_{\tilde{x}}\widetilde{M} & \xrightarrow{\phi_*} & T_x M \\ \exp_{\tilde{x}} \downarrow & & \downarrow \exp_x \\ \widetilde{M} & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

在局部意义下成立.

证明. 局部等距将局部上的测地线映为测地线. 设 $\tilde{x} \in \widetilde{M}, x = \phi(\tilde{x}) \in M$. 对 \tilde{x} , 存在 $\delta > 0$, 对 $\forall \tilde{v} \in B(1) \subset T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$, $\phi(\exp_{\tilde{x}} t\tilde{v})$ 是从 x 出发的极小测地线, $t \in [0, \delta)$, 初始切向量为 $\phi_*(\tilde{v})$. 而同样也存在 $\delta' > 0$, $\exp_x \phi_* \tilde{v}$ 是从 x 出发的极小测地线, $t \in [0, \delta')$, 初始切向量也是 $\phi_* \tilde{v}$. 初值条件相同, 所以在 $0 \in T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$ 和 $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ 的某个邻域 W, U 上,

$$\phi(\exp_{\tilde{x}} \tilde{w}) = \exp_{\phi(\tilde{x})} \phi_* \tilde{w}, \quad w \in W, \tilde{x} \in U$$

所以上述交换图成立. □

作业十二

1. 利用命题 10.5 证明: 在任意黎曼流形 M 上的任一点处都存在测地凸邻域.

证明. 对 $p \in M$, 设 $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为从 p 出发的距离函数. 在 p 的一个邻域 U 上存在法坐标 $\{x^1, \dots, x^n\}$, $x^i(p) = 0$. 在法坐标下

$$\rho^2(x) = \sum (x^i)^2$$

对 $v \in T_p M$, 从 p 出发沿 v 的测地线 γ 在法坐标下有表示

$$\begin{aligned} x^i &= tv^i, \quad \rho^2 = \sum (tv^i)^2. \\ \nabla^2 \rho^2(v, v) &= (\rho \circ \gamma)'' = 2 \sum (v^i)^2 > 0 \end{aligned}$$

所以存在 p 的邻域 $U_0 \subset U$, ρ^2 在 U_0 上是凸函数. 对充分小的 $c > 0$,

$$M_c := \{x \in M : \rho^2(x) < c\}$$

是 U_0 的子集, 由命题 10.5, M_c 是全凸集, 即为所求的测地凸邻域. □

2. 设 M 是可定向偶数维黎曼流形, 并具有恒正的截面曲率. 假设 γ 是 M 中的一条闭测地线 (即 γ 是圆周 S^1 在 M 中的浸入, 且在每个点的邻域上满足测地线方程). 证明: 在 M 中存在一条闭曲线 β 同伦等价于 γ s.t. $L(\beta) < L(\gamma)$.

证明. WLOG, 设 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = \gamma(1) = p$. 考虑平行移动映射

$$\mathbb{P}^\gamma: T_p M = T_{\gamma(0)} \rightarrow T_{\gamma(1)} M = T_p M$$

和沿 γ 平行移动的向量场 $V(t), V(0) \in T_p M$. 由平行性, \mathbb{P}^γ 是正交映射并保持定向, $\det(\mathbb{P}^\gamma) = 1$. 而 $\dim M$ 是偶数, $\mathbb{P}^\gamma(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}(0)$, 所以特征值 1 的特征子空间维数至少为 2, 存在 $e \in T_p M, e \perp \dot{\gamma}(0), \mathbb{P}^\gamma(e) = e$. 令 $V(0) = e, e, \dot{\gamma}(0)$ 之间的几何关系被平行移动保持, 而 $\dot{\gamma}(0)$ 在 \mathbb{P}^γ 作用下不变, 所以 $V(1) = V(0), V(t)$ 是整个 γ 上的光滑向量场. 构造单参数曲线族:

$$\gamma_u(t) = \exp_{\gamma(t)} uV(t), u \geq 0, \gamma_u(0) = \gamma_u(1).$$

设其横截向量场为 U . 当 $u > 0$ 充分小时, γ_u 与 $\gamma = \gamma_0$ 同伦等价. 对每个 $t, \gamma_u(t)$ 是关于 u 的测地线, 所以将以上参数曲线族代入弧长第二变分公式, 边界项消失,

$$L''(0) = \int_0^1 \langle R(\dot{\gamma}, U)\dot{\gamma}, U \rangle dt$$

截面曲率恒正, 所以 $L''(0) < 0, u = 0$ 不可能是 $L(\gamma_u)$ 的局部最小值点, 即存在充分小的 $u, L(\gamma_u) < L(\gamma)$, 且两条曲线同伦等价. \square

3. 设 M 是一个完备黎曼流形. 假设存在常数 $a > 0, c \geq 0$, 对于连接任意两点 $p, q \in M$ 的最短正规测地线 $\gamma(t)$, 都有沿 $\gamma(t)$ 定义并满足 $|f(t)| \leq c$ 的光滑函数 f s.t. 下述不等式成立:

$$\text{Ric}(\gamma'(t)) \geq a + \frac{df}{dt}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

证明 M 是紧致的, 并给出 M 直径上界的估计. (当 $c = 0$ 时命题即为 Bonnet-Myers 定理)

证明. 取任意两个 $p, q \in M$, 设 $\gamma: [0, b] \rightarrow M$ 是以弧长为参数, 连接 p, q 的极小测地线, 只需估计 b 的上界. 令

$$g(t) = \sin \frac{\pi}{b} t, g(t) \geq 0, g(0) = g(b) = 0.$$

$T_p M$ 取正交标架 $\{e_1, \dots, e_n\}, e_1 = \dot{\gamma}(0)$. 平行移动诱导了沿 γ 的正交平行标架场 $\{e_i(t)\}$. 构造 $n-1$ 个横截向量场

$$X_i(t) = g(t)e_i(t),$$

代入弧长的第二变分公式, 边界项消失, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 2} L''_{X_i}(0) &= \sum_{i \geq 2} \int_0^b |X_i|^2 + \langle R(\dot{\gamma}, X_i)\dot{\gamma}, X_i \rangle dt = \sum_{i \geq 2} (g')^2 + g^2 \langle R(\dot{\gamma}, e_i)\dot{\gamma}, e_i \rangle dt \\ &= \int_0^b (n-1)(g')^2 + g^2 \text{Ric}(\dot{\gamma}) dt \\ &\leq (n-1) \int_0^b (g')^2 - \frac{1}{n-1} g^2 \cdot (a + f') dt \\ &= (n-1) \frac{\pi^2}{2b} - \frac{ab}{2} - \int_0^b \sin^2 \frac{\pi}{b} t \cdot f'(t) dt \\ &= (n-1) \frac{\pi^2}{2b} - \frac{ab}{2} + \frac{\pi}{b} \int_0^b \sin \frac{2\pi}{b} t \cdot f(t) dt \\ &\leq (n-1) \frac{\pi^2}{2b} - \frac{ab}{2} + \frac{c\pi}{b} \int_0^b \left| \sin \frac{2\pi}{b} t \right| dt \\ &= (n-1) \frac{\pi^2}{2b} - \frac{ab}{2} + 2c \end{aligned}$$

假设 $b > 2\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{4c^2}{a^2} + \frac{(n-1)\pi^2}{a}}$, 则 $\sum_{i \geq 2} L''_{X_i}(0) < 0$, 存在 $i \geq 2$, $L''_{X_i}(0) < 0$, 与 γ 极小矛盾! 所以 b ——进而 (由完备性) M 的直径——有上界

$$R_0 = 2\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{4c^2}{a^2} + \frac{(n-1)\pi^2}{a}}.$$

M 是指数映射 \exp_p 作用在 $B(\bar{R}_0) \subset T_p M$ 的像, 所以 M 紧致. □

4. 分析 Weinstein 定理的证明方法, 写出其证明梗概.

证明. 用反证法. 假设保定向等距 f 没有不动点, 在紧集 M 上距离函数

$$\rho(x) = d(x, f(x))$$

必在某个 $p \in M$ 上取到正的最小值 l . 用极小测地线 γ 连接 $p, f(p)$, 则 $f \circ \gamma$ 是连接 $f(p), f^2(p)$ 的测地线. 证明对任意 $p' \in \gamma$,

$$d(p', f(p')) = d(p', f(p)) + d(f(p), f(p'))$$

从而 $\gamma, f \circ \gamma$ 在同一测地线上, 所以

$$f_* \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(l).$$

在 $T_p M$ 处取好确定定向的正交标架 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 其中 $e_1 = \dot{\gamma}(0)$. 考虑沿 γ 的平行移动 $\mathbb{P}: T_{f(p)} M \rightarrow T_p M$, 则 $A = \mathbb{P} \circ f_*$ 是 $T_p M$ 上行列式为 1 的正交变换. 证明 A 关于 1 的特征子空间维数至少是 2, 取特征向量 $e \perp \dot{\gamma}(0)$ 并平行移动生成向量场 $e(t)$, 作单参数曲线族

$$\gamma_u(t) = \exp_{\gamma(t)} u e(t),$$

代入弧长的第二变分公式, 边界项消失, 利用正截面曲率条件得到 $L''(0) < 0$, 与 $\gamma = \gamma_0$ 极小矛盾! 定理得证. □