

变限积分求导的口诀记忆法及应用^①

王旭坡

(广东理工学院基础课教学研究部 广东肇庆 526100)

摘要: 变限积分的计算结果为函数形式, 对其求导就体现了重要的意义, 同时变限积分的引入, 为后续定积分的求解起到了铺垫作用, 然而许多教材并没有着重讲解变限积分问题. 本文在研究三类变限积分求导过程的基础上, 总结出相应的记忆口诀, 通过形象生动地语言描述, 使初学者能够快速理解并掌握变限积分的求导, 同时举例说明了口诀的可行性与便捷性.

关键词: 变限积分 求导 口诀记忆法

中图分类号: O13

文献标识码: A

文章编号: 1672-3791(2018)04(c)-0151-02

变限积分, 又叫变限积分函数, 是一种特殊形式的定积分, 主要分为三种形式, 即变上限积分 $(\int_a^{\Phi(x)} f(t)dt)$ 、变下限积分 $(\int_{\Psi(x)}^b f(t)dt)$ 以及上下限同时变化的积分 $(\int_{\Psi(x)}^{\Phi(x)} f(t)dt)$ 。由于变限积分的计算结果为函数形式, 对其求导就体现了重要的意义. 同时变限积分作为定积分求解的引入环节, 是大学阶段高等数学课程中比较重要的知识模块, 也是硕士研究生入学考试的重要考点之一^[1], 然而许多教材中并没有着重讲解变限积分的性质以及求导思路. 对于初学者而言, 就很难接受教材中讲解的简略求导过程.

在课堂教学过程中, 枯燥的理论讲解很容易让学生在学时产生抵触心理, 进而影响到课程教学进度和课堂教学效果. 对于数学课程而言, 更是被很多学生冠以“枯燥无味的课程”的称谓. 如何才能改善高等数学课程教学的效果, 进而创造出良好的课堂教学氛围. 为此, 许多教学研究者都积极参与到了改善教学方法及教学手段的设计行列中. 如张波^[2]等在研究常用教学方法和教学手段的基础上, 对各种教学原则进行了综合比较, 从而给出了高等数学课程教学过程中最优教学法选择的依据和策略. 同时强调在高等数学课程教学过程中, 应将初等数学与高等数学建立连接, 着重数学思想及数学方法的培养和应用, 在教学过程中灵活运用多媒体, 根据问题情境创造数学建模氛围, 从而激发学生学习高等数学的兴趣; 王晓峰^[3]等针对应用型本科院校, 在分析高等数学课堂教学过程中所面临的一些问题的基础上, 提出了高等数学课程“走班制”分层教学法的教学理念, 提倡对学生数学水平、教材选用、教学内容及方法和考核方式等方面进行分层次教学的手段, 以期做到改善高等数学的课堂教学效果, 使学生逐渐养成“我要学数学”的心态, 从而营造良好的课堂教学氛围.

如何才能使初学者更容易理解并掌握变限积分的求导问题, 笔者在归纳课堂教学经验及解题技巧的基础上, 针对三种类型变限积分的求导过程总结出了相应的记忆口诀, 通过形象生动地语言描述, 将复杂难懂的理论知识转化为口诀形式, 极大地提高了学生的学习兴趣.

1 记忆口诀及应用

1.1 记忆口诀一: “上代上导”

此口诀主要应用于变上限积分的求导过程. 其记忆诀窍为: “上代”即将积分上限代入被积函数的自变量中, “上导”即对积分上限进行求导, 接着相乘即可得出求导结果.

例1, 设变上限积分函数 $y = \int_1^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

分析: 该题目为变上限积分求导类型. 由于该题的原函数并不容易求解, 需要用到三角换元法等定积分的知识才能进行, 故若直接运用牛顿-莱布尼茨公式进行求解原函数就显得十分复杂, 而运用口诀一可以简化求导, 分析如下:

“上代”: 将积分上限代入被积函数的自变量中, 即为: $\sqrt{1+(x^3)^2}$;

“上导”: 对积分上限进行求导, 即: $3x^2$

解: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 = 3x^2 \sqrt{1+x^6}$

例2, 求由参数方程 $\begin{cases} x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha \\ y = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha} \cos \alpha d\alpha \end{cases}$, 所确定函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

方法一: 由于本题中的 x 与 y 积分过程相对容易求解, 对于初学者而言, 首先想到的解题方法一般为, 根据牛

①基金项目: 广东理工学院质量工程项目(项目编号: JXTD2017001); 应用型本科院校《高等数学》教学探究 (项目编号: JXGG2016023).

作者简介: 王旭坡(1989—), 男, 河南洛阳人, 硕士, 教师, 主要从事高等数学教学、数学建模创新能力培养等研究.

顿-莱布尼茨公式求解出 x 与 y 的表达式,然后再结合参数方程类型求导思路得出导数 $\frac{dy}{dx}$,即解题过程为:

$$\text{因为 } x = -\cos \alpha \left| \frac{t}{\frac{\pi}{2}} = -\cos t, y = \sin \alpha \right| \frac{t}{\frac{\pi}{3}} = \sin t - \sin \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$$

方法二:直接运用口诀一进行求解:

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\cos t \cdot 1}{\text{上代上导}}}{\frac{\sin t \cdot 1}{\text{上代上导}}} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$$

注:对比分析例2中的两种解法,可以看出虽然本题可以直接根据牛顿-莱布尼茨公式进行求解原函数再进行求导得出结果,然而直接运用方法二(即口诀一)进行求导可以很大程度上简化题目的解题过程。

例3,已知 $y=f(x)$ 由隐函数 $\int_1^{y^2} e^{t^3} dt + \int_2^x \ln(t^3+1)dt = 2$ 确定,求 $\frac{dy}{dx}$ 。

分析:该题目为隐函数及变上限积分求导类型,同时观察发现每一项的原函数并不容易求得,即牛顿-莱布尼茨公式就本题而言并不适用。故可结合复合函数求导法则以及口诀一,对方程两侧进行求导,简化解题过程如下。

$$\text{解: } e^{(y^2)^3} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} + \ln(x^3+1) \cdot 1 = 0$$

上代上导 上代上导

$$\text{整理得: } 2ye^{y^6} \frac{dy}{dx} + \ln(x^3+1) = 0$$

$$\text{即: } \frac{dy}{dx} = \frac{-\ln(x^3+1)}{2ye^{y^6}} (\text{其中 } y \neq 0)$$

从以上三道例题可以看出,在变上限积分求导过程中,若原函数并不容易根据牛顿-莱布尼茨公式求解得出,则运用口诀一可以对变上限积分求导过程进行简化处理。

2.2 记忆口诀二:“负下代下导”

由于互换定积分上下限,则积分结果互为相反数,即 $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$,故可以根据口诀一相应得出口诀二。其记忆诀窍为:“下代”即将积分下限代入被积函数中的自变量,“下导”即对积分下限进行求导,接着相乘,最后加上负号即可得出求导结果。

$$\text{例4, 设函数 } y = \int_{x^3}^2 \sqrt{1+t^2} dt, \text{ 求 } y'.$$

分析:该题目为变下限积分求导类型,考虑到不容易求解原函数,运用口诀二分析如下:

“下代”:将积分下限代入被积函数得自变量中,即为: $\sqrt{1+(x^3)^2}$;

“下导”:对积分下限进行求导,即: $3x^2$

$$\text{解: } y' = -\sqrt{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 = -3x^2 \sqrt{1+x^6}$$

负下代下导

$$\text{例5, 求极限 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_x^a f(t)dt.$$

分析:首先判定该极限为 $\frac{0}{0}$ 型未定式类型,并且满足洛

必达法则的适用前提,故可结合洛必达法则进行对分子分母同时求导运算。同时考虑到分子为变下限积分类型,因此运用口诀二对分子分母同时求导即可。

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_x^a f(t)dt + x \cdot [-f(x) \cdot 1]}{1} = -af(a)$$

负下代下导

2.3 记忆口诀三:“上代上导减下代下导”

根据定积分的可加性原理,可以将上下限同时变化的积分写为变上限积分与变下限积分相加的形式,即 $\int_{\Psi(x)}^{\Phi(x)} f(t)dt = \int_{\Psi(x)}^c f(t)dt + \int_c^{\Phi(x)} f(t)dt$,故可以同时根据口诀一以及口诀二推导得出口诀三。其中:“上代上导”解题诀窍与口诀一相同,“减下代下导”解题思路与口诀二相同。

$$\text{例6, 已知函数 } y = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}, \text{ 求 } y'.$$

分析:该题目为上下限同时变化的变限积分求导类型,故可以运用口诀三进行求解。

$$\text{解: } y' = \frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}} \cdot 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}} \cdot 2x$$

上代上导 减 下代下导

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$$

3 结语

本文在介绍变限积分分类的基础上,针对三类变限积分的求导过程,总结出相应的记忆口诀。同时从例题的解题技巧中可以看出,口诀的引入可以很大程度上简化变限积分的求导过程。课堂教学实践表明,在该章节的课堂教学中,通过口诀形式进行授课,能够将复杂难懂的变限积分理论转化为容易理解掌握的口诀,极大地激发起学生对变限积分知识的学习兴趣,变苦闷的数学理论内容为简易的口诀,营造出了良好的课堂教学氛围。

参考文献

- [1] 高淑娥.解析变上限积分函数的导数问题[J].数学学习与研究:教研版,2017(21):7.
- [2] 张波,冷平.《高等数学》教学方法改革与研究[J].淮北师范大学学报:自然科学版,2016,37(1):78-82.
- [3] 王晓峰,程宏,董瑞,等.应用本科院校高等数学走班制分层次教学探究——以河南科技学院为例[J].高师理科学刊,2015,35(12):73-77.