

기계학습원론 HW9

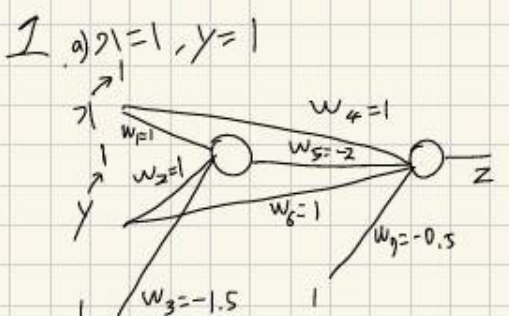
2021312738 소프트웨어학과 김서환

1. What are the outputs if $x = 1$ and $y = 1$, and $x = 1$ and $y = 0$, respectively? The hard limit function is used in each neuron.

$w_1 = w_2 = w_4 = w_6 = 1$, $w_3 = -1.5$, $w_5 = -2$, $w_7 = -0.5$

Calculate the outputs of the given data samples.

1. a) $x=1, y=1$



첫 번째 퍼셉트론에서 $S = w_1x + w_2y + w_3x = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1.5) \times 1 = 0.5$ 가 되고,
 Hard Limit 함수 (inputs $\Rightarrow \begin{matrix} S \geq 0 \rightarrow 1 \\ S < 0 \rightarrow 0 \end{matrix}$)을 $f(S)$ 라고 두면 S 는 앞서 계산한 것처럼
 $S = 0.5$ 이므로 $f(S) = f(0.5) = 1$ 이 되고 $x, f(0.5), y$ 를 input으로 두 번째
 퍼셉트론에서 $f(w_4x + w_5f(0.5) + w_6y + w_7x) = f(1 \times 1 + (-2) \times 1 + 1 \times 1 + (-0.5) \times 1)$ 을 계산하면,
 $\Rightarrow f(-0.5)$, $z = f(-0.5) = 0$ 이다. $\therefore Z = 0$

b) $x=1, y=0$

같은 Neural Network로 똑같은 과정을 계산해보면 다음과 같다. 첫 번째 퍼셉트론에서
 $S = w_1x + w_2y + w_3x = 1 \times 1 + 1 \times 0 + (-1.5) \times 1 = -0.5$ 이므로 Hard Limit 함수에 의해 $f(S) = f(-0.5)$
 $f(-0.5) = 0$ 이 되고, $x, f(-0.5), y$ 를 input으로 두 번째 퍼셉트론에서
 $f(w_4x + w_5f(-0.5) + w_6y + w_7x)$ 을 계산하면, $\Rightarrow 1 \times 1 + (-2) \times 0 + 1 \times 0 + (-0.5) \times 1 = 0.5$ 이므로
 $z = f(0.5) = 1$ 이다. $\therefore Z = 1$

따라서, $x = 1, y = 1$ 인 경우 $z(\text{output}) = 0$ 이 되고, $x = 1, y = 0$ 인 경우 $z(\text{output}) = 1$ 이 된다.

2. Set w_1, w_2, w_3, w_4 so that the output is 1 only if more than half of inputs are 1s, where f is the hard limit function. Bias '1' is not an input.

2. Input을 특징값으로 지정하지 않으면 Output 값이 Input 값에 따라 고정된 w_4 와 상관없이 1이 될 수도 0이 될 수도 있기 때문에 Input 값을 0, 1 둘 중 1개의 값을 가진다고 가정하고 풀겠습니다.

Input의 절반이상이 1인 경우는 4가지로 나뉘볼 수 있다.

1) $x_1=0, x_2=1, x_3=1$ (3개 중 2개가 1인 경우)

2) $x_1=1, x_2=0, x_3=1$ (3개 중 2개가 1인 경우)

3) $x_1=1, x_2=1, x_3=0$ (3개 중 2개가 1인 경우)

4) $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ (3개 모두 1인 경우)

⇒ 1) $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4 = w_2 + w_3 + w_4 \geq 0$ 이어야만 $f(x)=1$ 이어서 output이 1이 된다.

2) $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4 = w_1 + w_3 + w_4 \geq 0$ 이어야만 $f(x)=1$ 이어서 output이 1이 된다.

3) $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4 = w_1 + w_2 + w_4 \geq 0$ 이어야만 $f(x)=1$ 이어서 output이 1이 된다.

4) $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 0$ 이어야만 $f(x)=1$ 이어서 output이 1이 된다.

또한 나머지 4개의 경우 : 3개 모두 0인 경우, 1개만 1인 경우에

$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4$ 의 값이 음수 (< 0)가 되어야 한다.

그렇다면 5) ~ 8)으로 해당 경우를 나타내기 위해 보면,

⇒ 5) x_1 만 1인 경우 → $w_1 + w_4 < 0$

6) x_2 만 1인 경우 → $w_2 + w_4 < 0$

7) x_3 만 1인 경우 → $w_3 + w_4 < 0$

8) 모두 0인 경우 → $w_4 < 0$

이 8개의 부등식을 연립하여 w 값의 범위를 나타내면,

$$2) w_1 + w_3 + w_4 \geq 0, \quad 7) w_3 + w_4 < 0$$

$$\rightarrow w_1 > 0$$

$$1) w_2 + w_3 + w_4 \geq 0, \quad 7) w_3 + w_4 < 0$$

$$\rightarrow w_2 > 0$$

$$1) w_2 + w_3 + w_4 \geq 0, \quad 6) w_2 + w_4 < 0$$

$$\rightarrow w_3 > 0$$

w_1, w_2, w_3 을 모두 1이라고 해보자.

$$w_1 = 1, w_3 = 1 \rightarrow 2) w_1 + w_3 + w_4 \geq 0 \rightarrow w_4 \geq -2$$

$$\rightarrow 7) w_3 + w_4 < 0 \rightarrow w_4 < -1 \Rightarrow -2 \leq w_4 < -1$$

다른조건을 모두 w_4 에 적용해오 $-2 \leq w_4 < -1$ 의 범위가 된다.

그래서 $w_4 = -1.5$ 라고 가정하면 1) ~ 8)의 부등식을 모두 만족시킨다.

따라서 $w_1 = 1, w_2 = 1, w_3 = 1, w_4 = -1.5$ 로 설정하면

Input의 절반이상이 1인 경우 output이 항상 1이 된다

$$\therefore w_1 = 1, w_2 = 1, w_3 = 1, w_4 = -1.5$$

따라서, $w_1 = 1, w_2 = 1, w_3 = 1, w_4 = -1.5$ 로 설정하면 Inputs의 절반 이상이 1인 경우에만 Output이 항상 1이 된다.

3. Calculate the outputs of the given data samples
계산의 편의성을 위해 파이썬 프로그래밍을 통해 계산했다.

```
import math

data = [(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)]

def HardLimit(s):
    if s >= 0:
        return 1
    else:
        return 0

def Sigmoid(s):
    y = 1/(1+math.exp(-s))
    return y

def ReLU(s):
    if s >= 0:
        return s
    else:
        return 0

biasinput = 1
w1 = 1.5
w2 = 0.5
w3 = -1.5
w4 = 0.5
w5 = 1.5
w6 = -0.5
w7 = -1
w8 = 1
w9 = -0.5

for (x1, x2) in data:
    s1 = w1 * x1 + w2 * x2 + w3 * biasinput
    s2 = w4 * x1 + w5 * x2 + w6 * biasinput
    y1 = HardLimit(s1)
    y2 = HardLimit(s2)
    s3 = w7 * y1 + w8 * y2 + w9 * biasinput
    y = HardLimit(s3)
    print(f"If all activation functions are Hard Limit function, Output({x1}, {x2}) is {y}")
print()

for (x1, x2) in data:
    s1 = w1 * x1 + w2 * x2 + w3 * biasinput
    s2 = w4 * x1 + w5 * x2 + w6 * biasinput
    y1 = Sigmoid(s1)
    y2 = Sigmoid(s2)
    s3 = w7 * y1 + w8 * y2 + w9 * biasinput
    y = Sigmoid(s3)
    print(f"If all activation functions are Sigmoid function, Output({x1}, {x2}) is {round(y, 3)}")
print()

for (x1, x2) in data:
    s1 = w1 * x1 + w2 * x2 + w3 * biasinput
    s2 = w4 * x1 + w5 * x2 + w6 * biasinput
    y1 = ReLU(s1)
    y2 = ReLU(s2)
    s3 = w7 * y1 + w8 * y2 + w9 * biasinput
    y = ReLU(s3)
    print(f"If all activation functions are ReLU, Output({x1}, {x2}) is {y}")
```


주어진 data sample에 대해 Output을 계산하는 프로그램의 실행 결과는 다음과 같다. (Sigmoid Function은 소수점 3자리까지 표현)

```
If all activation functions are Hard Limit function, Output(0, 0) is 0
If all activation functions are Hard Limit function, Output(0, 1) is 1
If all activation functions are Hard Limit function, Output(1, 0) is 0
If all activation functions are Hard Limit function, Output(1, 1) is 0

If all activation functions are Sigmoid function, Output(0, 0) is 0.424
If all activation functions are Sigmoid function, Output(0, 1) is 0.491
If all activation functions are Sigmoid function, Output(1, 0) is 0.378
If all activation functions are Sigmoid function, Output(1, 1) is 0.424

If all activation functions are ReLU, Output(0, 0) is 0
If all activation functions are ReLU, Output(0, 1) is 0.5
If all activation functions are ReLU, Output(1, 0) is 0
If all activation functions are ReLU, Output(1, 1) is 0.5
```