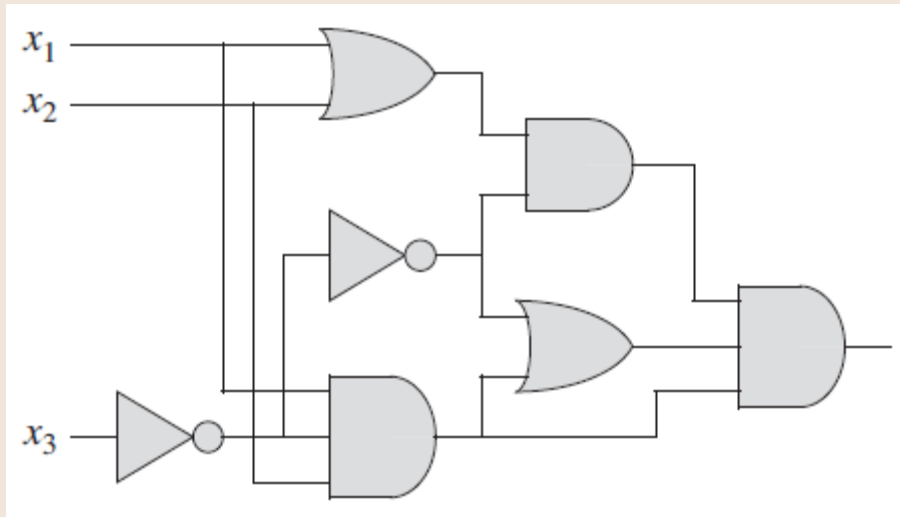




# 2-SAT 문제



Circuit-Satisfiability Problem

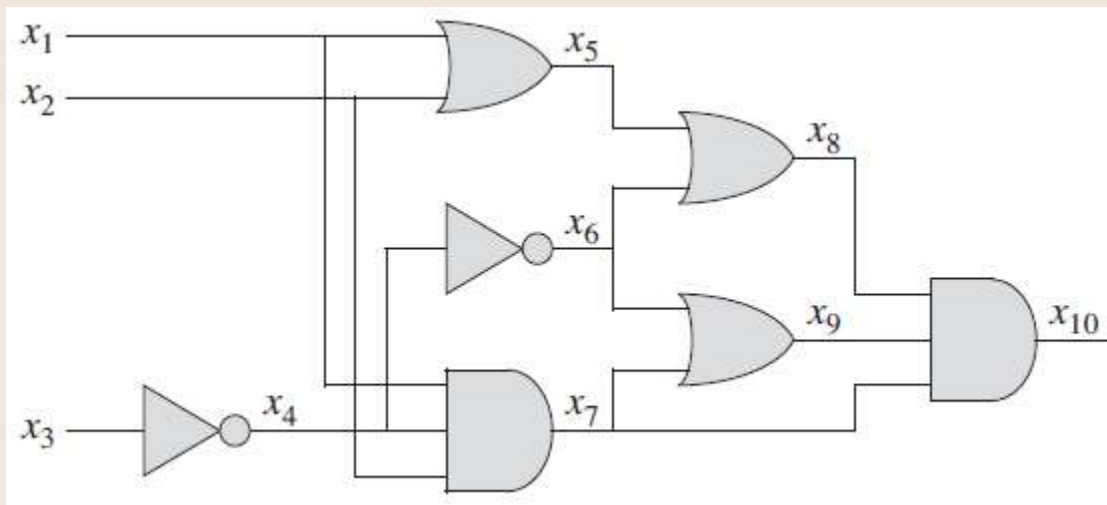




# 2-SAT 문제



## Circuit-Satisfiability Problem



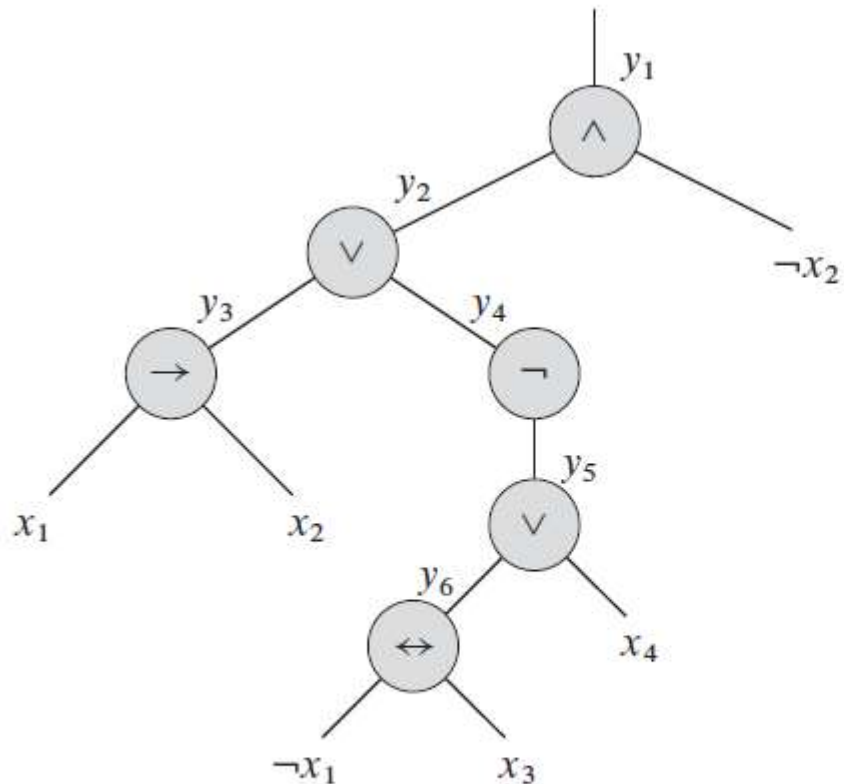
$$\begin{aligned}\phi = & x_{10} \wedge (x_4 \leftrightarrow \neg x_3) \\ & \wedge (x_5 \leftrightarrow (x_1 \vee x_2)) \\ & \wedge (x_6 \leftrightarrow \neg x_4) \\ & \wedge (x_7 \leftrightarrow (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4)) \\ & \wedge (x_8 \leftrightarrow (x_5 \vee x_6)) \\ & \wedge (x_9 \leftrightarrow (x_6 \vee x_7)) \\ & \wedge (x_{10} \leftrightarrow (x_7 \wedge x_8 \wedge x_9)) .\end{aligned}$$



# 2-SAT 문제



## Circuit-Satisfiability Problem



$$\begin{aligned}
 \phi' = & y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)) \\
 & \wedge (y_2 \leftrightarrow (y_3 \vee y_4)) \\
 & \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \\
 & \wedge (y_4 \leftrightarrow \neg y_5) \\
 & \wedge (y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4)) \\
 & \wedge (y_6 \leftrightarrow (\neg x_1 \leftrightarrow x_3))
 \end{aligned}$$

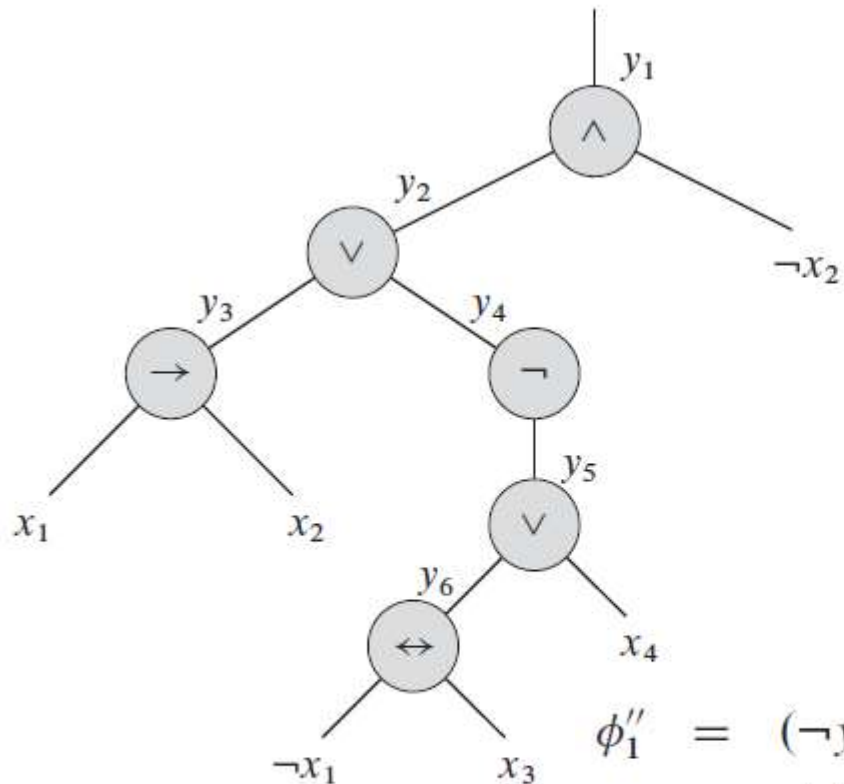
**Figure 34.11** The tree corresponding to the formula  $\phi = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$ .



# 2-SAT 문제



## Circuit-Satisfiability Problem



$$\begin{aligned} \phi' = & y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)) \\ & \wedge (y_2 \leftrightarrow (y_3 \vee y_4)) \\ & \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \\ & \wedge (y_4 \leftrightarrow \neg y_5) \\ & \wedge (y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4)) \\ & \wedge (y_6 \leftrightarrow (\neg x_1 \leftrightarrow x_3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1'' = & (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee x_2), \end{aligned}$$

**Figure 34.11** The tree corresponding to the formula  $\phi = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$ .



## 2-SAT 문제



CNF (Conjunctive Normal Form) :

- ✓ 부린 식이 논리합의 곱으로 (“and of or’s”) 표현된 것
- ✓  $E = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (.. \vee .. \vee .. \vee ..) \wedge \dots$
- ✓ 3-CNF: 모든 괄호 내에 세 개의 논리 변수가 존재하는 CNF
- ✓ 3-CNF 는 NP-Complete 임
- ✓ 2-CNF :
  - ✱ 모든 괄호 내에는 두 개의 논리 변수만 존재하는 CNF
  - ✱  $E = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \dots$



# 2-SAT 문제



## Description

- ✓ 2-CNF 형식으로 주어진 식  $E$  에 사용된 각 변수에 논리 값(T/F)을 잘 할당해서  $E$  를 참으로 만드는 할당 값이 존재하는가?

$$\star E = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$

$$\star E = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$



## Brute-force algorithm:

- ✓ 변수의 개수가  $n$  일 때 :  $O(2^n)$



# 2-SAT 문제



## Example

$$1. (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$

$$2. (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$



## 풀이

✓ 키 아이디어:  $(x \vee y) \equiv \neg x \rightarrow y \equiv \neg y \rightarrow x$

✓ Implication graph 생성

✓ 각 변수에 대해 두 정점

✓ Implication을 엣지로 교체

✓ Implication graph에서 SCC 찾기

x	y	$\neg x$	$x \vee y$	$\neg x \rightarrow y$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F



# 2-SAT 문제

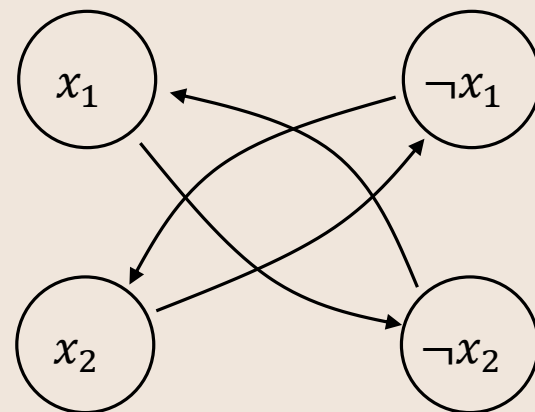


Example

$$1. (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$

$$(x_1 \vee x_2) \equiv \neg x_1 \rightarrow x_2 \equiv \neg x_2 \rightarrow x_1$$

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2) \equiv x_1 \rightarrow \neg x_2 \equiv x_2 \rightarrow \neg x_1$$



SCC :  $\{x_1, \neg x_2\}, \{\neg x_1, x_2\}$





# 2-SAT 문제

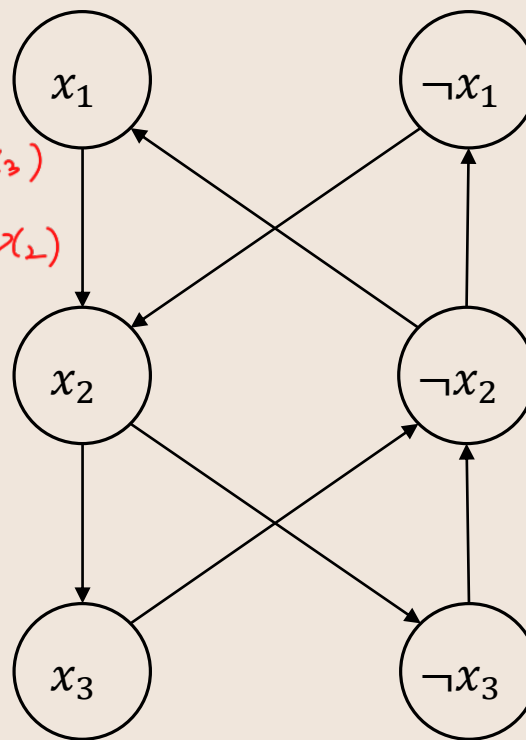


## Example

$$2. (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

$$\begin{aligned} & (\neg x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_2 \rightarrow \neg x_3) \\ \equiv & (\neg x_2 \rightarrow x_1) \wedge (x_2 \rightarrow \neg x_1) \wedge (\neg x_3 \rightarrow \neg x_2) \wedge (x_3 \rightarrow \neg x_2) \end{aligned}$$

$$\text{SCC} : \{x_1, \neg x_1, x_2, \neg x_2, x_3, \neg x_3\}$$





## 2-SAT 문제



Example

$$1. (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$

$$\text{SCC: } \{x_1, \neg x_2\}, \{\neg x_1, x_2\}$$

$$2. (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

$$\text{SCC: } \{x_1, \neg x_1, x_2, \neg x_2, x_3, \neg x_3\}$$



### 2-SAT 이 참이 될 필요충분조건

2-CNF 식 만족된다  $\Leftrightarrow$  임의의 논리 변수  $x_i$  에 대해,  $x_i$  와  $\neg x_i$  가 동일한 SCC에 속하지 않는다.

✓ SCC의 의미는?



$\Rightarrow$  논리적으로 동치가 아님



첫 번째 예는 truth assignment 존재



두 번째 예는 truth assignment 존재하지 않음



# 문제 : 무인 공장 (2019 삼성 contest 본선)

- ✎ 어떤 공장에 자동기계  $n$ 대가 설치
- ✎ 각 자동기계  $M_i (1 \leq i \leq n)$ 는 산업안전법에 의거해 주어진 기간 내에 안전검사를 받아야 함.
- ✎ 각 기계의 안전여부를 검사하는데 필요한 기간은  $d$  일이며, 안전검사를 받는  $d$ 일 동안엔 그 기계를 사용할 수 없다.
- ✎ 대신 동일한 성능을 가진 보조 기계를 이용하여 안전검사 중인 기계의 할 일을 대신하게 할 수 있다.
- ✎ 보조기계를 포함하여 날마다  $n$  대의 기계를 이용할 수 있으면 HiTec 사는 정상적인 제품 생산이 가능하다. 하지만  $n$  대 미만의 기계를 이용해서는 정상적인 제품 생산이 불가능하다.



## 문제 : 무인 공장 (2019 삼성 contest 본선)

- 안전검사를 담당하는 정부 부처에서는 각 자동기계  $M_i$ 에 대해, 검사를 받을 수 있는 두 번의 날자,  $e_i^1$ 와  $e_i^2$ 를 제시하여 회사에 통보한다. 즉, 자동기계  $M_i$ 는  $e_i^1$ 일부터  $d$ 일간 검사를 받던지 (즉, 검사기간은  $e_i^1 \sim (e_i^1 + d - 1)$ 일이다.) 아니면  $e_i^2$ 일부터  $d$ 일간 검사를 받아야 한다. 두 검사기간  $e_i^1 \sim (e_i^1 + d - 1)$ 와  $e_i^2 \sim (e_i^2 + d - 1)$ 은 겹치지 않는다. 즉,  $e_i^1 + d \leq e_i^2$  이다.
- 공장에는 보조기계가 한 대 있다. 보조기계를 제외한 모든 기계에 대해, 제시한 검사기간 중에 검사를 받으면서 보조기계를 잘 활용하여 제품을 차질 없이 생산할 수 있는지 여부를 밝히고자 한다.

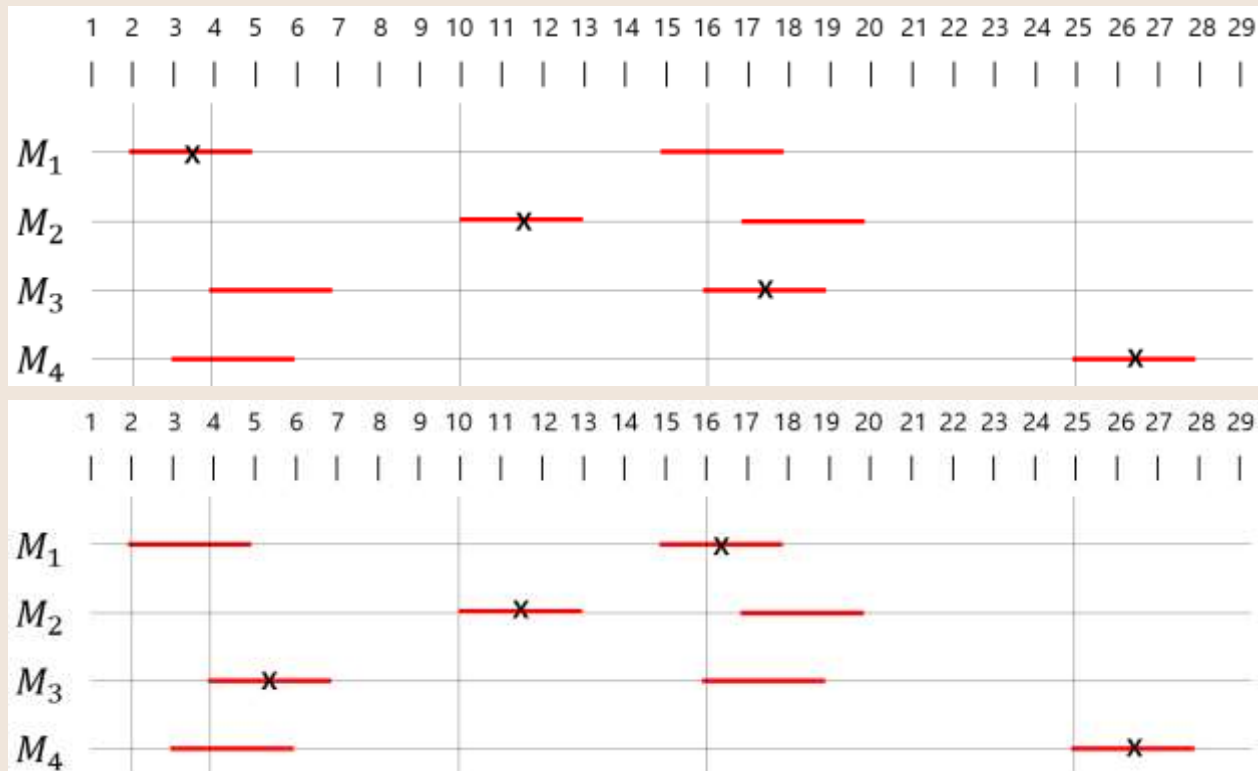


# 문제 : 무인 공장 (2019 삼성 contest 본선)

예:  $n = 4, d = 3$

$(e_1^1, e_1^2) = (2, 15), (e_2^1, e_2^2) = (10, 17), (e_3^1, e_3^2) = (4, 16), (e_4^1, e_4^2) = (3, 25)$

가능한 검사 일정





# 문제 : 무인 공장 (2019 삼성 contest 본선)



무인 공장 문제는 2-SAT 문제로 바꾸어 해결 가능하다.



How to transform ?

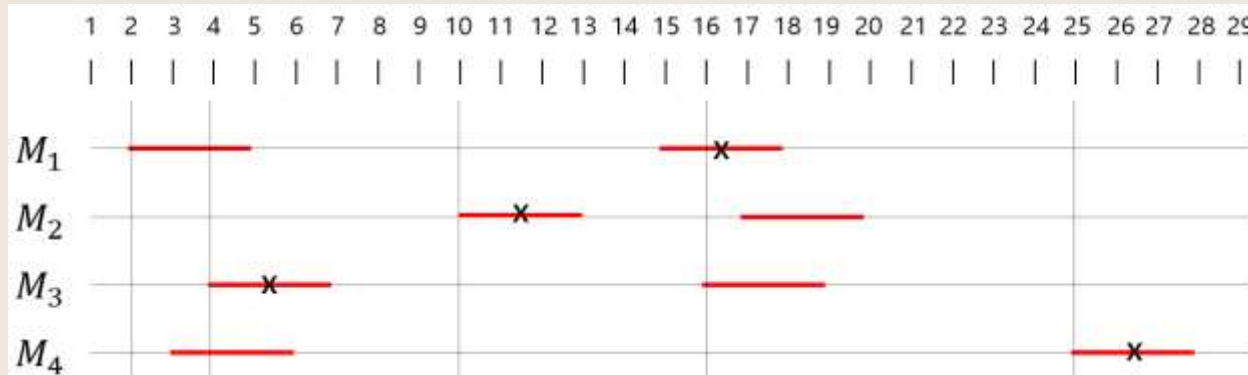
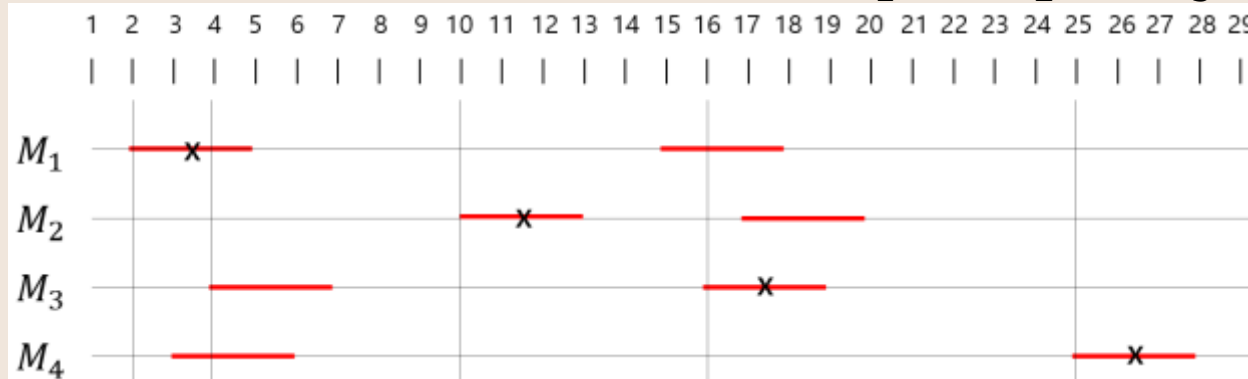


# 문제 : 무인 공장 (2019 삼성 contest 본선)

✎ 입력에 대응하는 식:  $E = (x_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(x_3 \vee x_4)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

✎ 첫째 그림에 대응하는 assignment:  $x_1=F, x_2=F, x_3=T, x_4=T$

✎ 둘째 그림에 대응하는 assignment:  $x_1=T, x_2=F, x_3=F, x_4=T$





## 문제 : TV Show Game (ICPC 2018 지역 본선)

- ✎ 무대엔  $k(>3)$  개의 램프가 초기에 모두 꺼져 있다. (램프는  $1 \sim k$  사이의 수로 구분된다.)
- ✎ 각 램프는 불이 들어오면 red 또는 blue 색 중 하나이다.
- ✎  $N$  명의 프로그램 참가자는 게임 시작 전 무작위로 3개의 램프에 대해 색을 예측한다.
- ✎ 예측한 색 정보를 램프 불이 들어오기 전에 진행자에게 제출한다.
- ✎ 각자가 예측한 3개의 램프에 대해 2개 이상의 색을 맞추면 참가자는 선물을 받는다.
- ✎ 진행자는 램프 색을 조절하여 모든 사람이 상을 받을 수 있도록 할 수 있는가?





# 문제 : TV Show Game (ICPC 2018 지역 본선)



예 :  $k = 7$ ,  $N = 5$  일 때



참가자의 예측이 아래와 같다면



3 R 5 R 6 B



1 B 2 B 3 R



4 R 5 B 6 B



5 R 6 B 7 B



1 R 2 R 4 R



램프 색을 아래와 같이 조절하면 모두 선물을 받게 된다.



1:B, 2:R, 3:R, 4:R, 5:B, 6:B, 7:B



# 문제 : TV Show Game (ICPC 2018 지역 본선)



예 :  $k = 5$ ,  $N = 6$  일 때



참가자의 예측이 아래와 같다면



1 B 3 R 4 B



2 B 3 R 4 R



1 B 2 R 3 R



3 R 4 B 5 B



3 B 4 B 5 B



1 R 2 R 4 R



모든 사람이 선물을 받도록 램프 색을 결정하는 것이 불가능



어떻게 알 수 있나?



# 문제 : TV Show Game (ICPC 2018 지역 본선)



3-SAT 문제로 바꾸어 풀 수 있다.



How ?



어떤 참가자가 선택한 전구 a,b,c 의 색을 각각 R, R, B 로 예측 했다면 그 참가자에 대응하는 부린 식을 다음과 같이 바꿈



(Red : true, Blue: false 에 대응)

$$(x_a \vee x_b)(x_b \vee \overline{x_c})(x_a \vee \overline{x_c})$$



## 문제 : TV Show Game (ICPC 2018 지역 본선)

 예 :  $k = 7, N = 5$  일 때 (Red:True로 Blue를 False로 대응)


 3 R 5 R 6 B

 1 B 2 B 3 R

 4 R 5 B 6 B

 5 R 6 B 7 B

 1 R 2 R 4 R

  $E = (x_3 \vee x_5)(x_5 \vee \overline{x_6})(x_3 \vee \overline{x_6}) \quad (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) (\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_3) \dots$



## 문제 : TV Show Game (ICPC 2018 지역 본선)

- ✎ 2-SAT 결과가 true 이면 전구 색은 어떻게 결정하나?
- ✎ 참가가  $i$  가 선택한 전구  $a, b, c$ 에 대응하는 3개의 논리 변수 가운데 두 개 이상이 동일한 SCC에 속하면 그 값은 반드시 true 이어야 함
- ✎ 즉 그에 대응하는 전구 색이 결정됨
- ✎ 이 아이디어를 바탕으로 다른 전구 색을 그리디 방법으로 결정해 감



# 연습문제: Poker

7장의 카드가 주어졌을 때 5장으로 만들 수 있는 가장 높은 족보를 출력하라.

족보는 낮은 순서에서 높은 순서로 다음과 같다.

(0) **Top** : 가장 낮은 족보

(1) **1 Pair** : 같은 숫자가 한 쌍 존재

(2) **2 Pair** : 각기 같은 숫자가 두 쌍 존재

(3) **Triple** : 세 개의 같은 숫자가 존재

(4) **Straight** : 숫자 5개가 연속 존재

(5) **Flush** : 같은 무늬 5장이 존재

(6) **Full House** : **Triple**과 **Pair**가 함께 존재

(7) **4 Card** : 네 개의 같은 숫자가 존재

(8) **Straight Flush** : 같은 무늬의 연속된 숫자 5개가 존재

(단, **A**는 숫자 **1** 혹은 **14**로 쓰일 수 있음을 유의하라.)

[입력 형식]

입력은 여러 개의 테스트 케이스로 이루어져 있으며 테스트 케이스의 개수가 첫 줄에 주어진다. 각 테스트 케이스는 총 7줄로 구성되어있으며, 각 줄은 **T n** 꼴로 주어진다. **T**는 무늬로 **S, D, C, H**중 하나이고 **n**은 1부터 13까지의 정수이다. **Ace**는 1, **Jack**은 11, **Queen**은 12, **King**은 13을 의미한다. 7장의 카드는 모두 다름이 보장된다.



# 연습문제: Poker

## [출력 형식]

각 테스트 케이스마다 첫 줄에 가장 높은 족보가 무슨 종류인지 문제 설명에 있는 족보 명을 출력한다.

## [입력 예제 1]

1

S 1

S 10

D 11

H 10

C 2

H 2

S 11

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	T	J	K	14	
S	√									√	√		√	3
D											√			1
H		√								√				2
C		√												1
	1	2								2	2		1	

## [출력 예제 1]

2 Pair

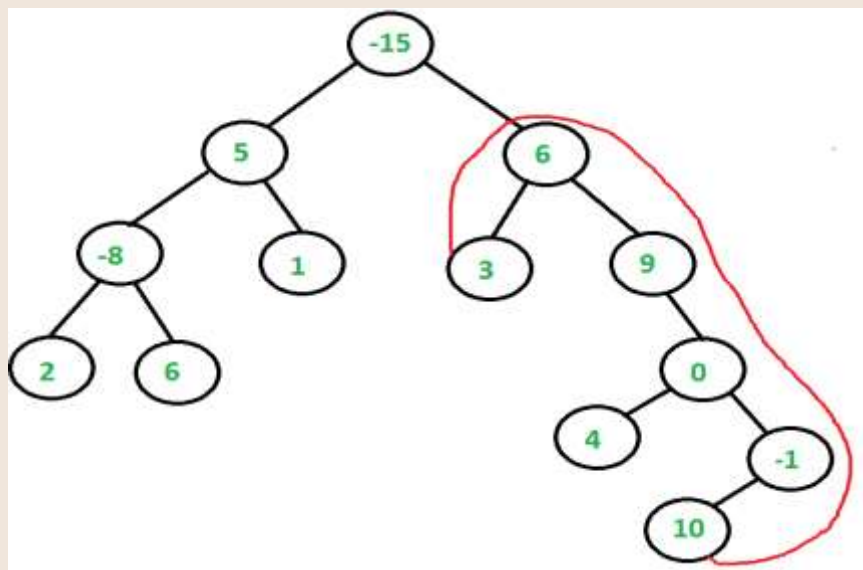
# 연습문제 : Max Path

## 이진 트리의 두 단말 노드간 합의 최대를 구하는 문제

- ✓ 이진 트리의 모든 노드에 정수 값이 주어져 있을 때, 두 단말 노드 간의 경로를 지나는 모든 노드 값의 합의 최대값을 구하는 문제

## 예: 다음 트리에서 최대값은 27이 된다

- ✓ 한번의 Traverse로 최대값을 찾는 것이 가능(어떻게?)





# 연습문제 : Max Path

