조합론 (COMBINATORICS)

순열과 조합

순열 (Permutation)

$$P(n,r) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

조합 (Combination)

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

중복순열 (Permutation with Repetition)

$$\Pi(n,r) = n^r$$

중복조합 (Combination with Repetition)

$$H(n,r) = C(n-1+r,r)$$

중복 조합

중복을 허용하는 조합

- *n* 명에서 중복을 허락하여 *k*명을 뽑는 방법은

  H(*n, k*) 표시하며 **H(*n, k*) = C(n+k-1, k)** 이 된다 **(왜?)**

- 세 개의 문자 **A, B, C**에서 중복을 허락하여 **4**개를 뽑는 경우의 수는 **H(3, 4) = C(6, 4) = C(6, 2) = 6*5/2 =15** 가 된다

- 모든 경우를 열거하면 다음과 같다**.**

(A, A, A, A), (A, A, A, B), (A, A, A, C), (A, A, B, B), (A, A, B, C)

(A, A, C, C), (A, B, B, B), (A, B, B, C), (A, B, C, C), (A, C, C, C)

(B, B, B, B), (B, B, B, C), (B, B, C, C), (B, C, C, C), (C, C, C, C)

중복 조합

중복을 허용하는 조합

- 중복조합에서 다음이 성립한다.

$$_{n}H_{0} + {}_{n}H_{1} + {}_{n}H_{2} + \cdots + {}_{n}H_{r} = {}_{n+1}H_{r}$$

- *n* 명에서 중복을 허락하여 *k*명을 뽑는 방법이

  $H(n, k) = C(n+k-1, k)$ 이 되는 이유

n개의 집합에서 중복을 허용하여 k개를 뽑는 조합의 경우의 수를 집합 n과 k를 n-1개의 칸막이 속에 k개를 집어 넣는 것으로 하여 n-1+k개의 집합에서 k개를 뽑는 조합으로 해결

이항계수 (Binomial Coefficients)

- 이항계수는 $(x+y)^n$ 를 전개하였을 때 각 항들의 계수 이다.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{----- (1)}$$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$

$(a+b)^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3$

$(a+b)^4 = a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + a^0b^4$

$(a+b)^5 = a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + a^0b$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

이항계수의 성질

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n}x^ny^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} \quad \text{-------------------------------------} \ (1)$$

- $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

  (1)번 식에 x=y=1을 대입

이항계수의 성질

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n}x^ny^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} \quad \text{-- (1)}$$

- ✔ $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$

  식 (1)의 양변을 미분하고 x=y=1을 대입

$$\frac{d}{dx}(x+y)^n = \frac{d}{dx}\left(\binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n}x^ny^0\right)$$

$$n \times (x+y)^{n-1} = \binom{n}{1}x^0y^{n-1} + \cdots + (n-1) \times \binom{n}{n-1}x^{n-2}y^1 + n \times \binom{n}{n}x^{n-1}y^0$$

$$n \times 2^{n-1} = 1 \times \binom{n}{1} + 2 \times \binom{n}{2} + \cdots + (n-1) \times \binom{n}{n-1} + n \times \binom{n}{n}$$

이항계수의 성질

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n}x^ny^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} \quad \text{------------------------------------} \quad (1)$$

✔ $\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}=\binom{m+n}{k}$

$(x+y)^m(x+y)^n = (x+y)^{m+n}$ 식을 (1)를 이용하여 전개

$$(x+y)^m(x+y)^n$$
$$= \left(\binom{m}{0}x^0y^m + \binom{m}{1}x^1y^{m-1} + \cdots + \binom{m}{m}x^my^0\right)\left(\ldots + \binom{n}{k-2}x^{k-2}y^{n-k+2} + \binom{n}{k-1}x^{k-1}y^{n-k+1} + \binom{n}{k}x^ky^{n-k} + \cdots\right)$$
$$= \cdots + \binom{m}{0}\binom{n}{k}x^ky^{m+n-k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1}x^ky^{m+n-k} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}x^ky^{m+n-k} + \cdots$$
$$= \cdots + \left(\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}\right)x^ky^{m+n-k} + \cdots$$

$$(x+y)^{m+n} = \binom{m+n}{0}x^0y^{m+n} + \binom{m+n}{1}x^1y^{m+n-1} + \cdots + \binom{m+n}{k}x^ky^{m+n-k} + \cdots$$

이항계수의 성질

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n}x^ny^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} \quad \text{------------------------------------} \quad (1)$$

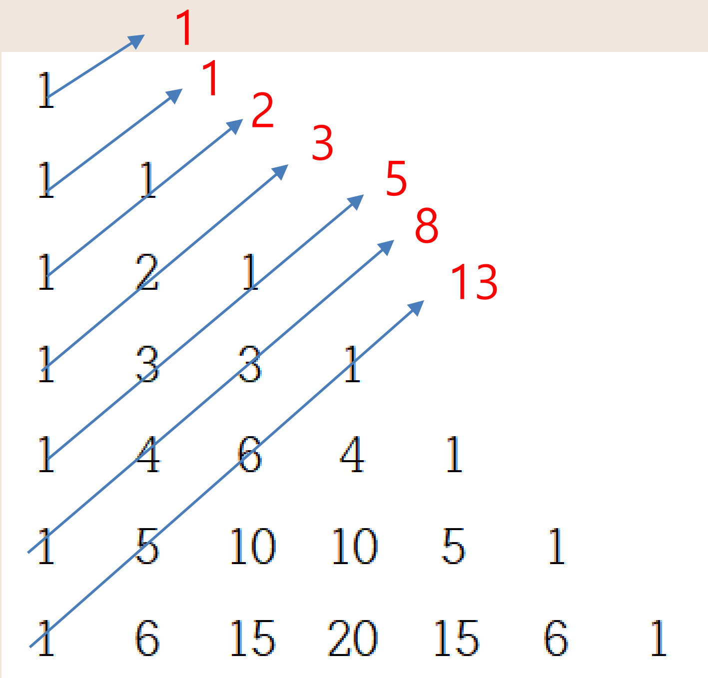
✔ $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$

아래 식(바로 직전 slide에서 본 식)에서 k=m=n 으로 둠

$\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}=\binom{m+n}{k}$

이항계수의 성질

- ✔ $\sum_{k=0}^{n} C(n-k,k)$=F(n+1) F(n+1)은 피보나치 수를 나타낸다



n=0: C(0,0) = 1 ➔ F(1)

n=1: C(1,0) + C(0,1) = 1 ➔ F(2)

n=2: C(2,0) + C(1,1) + C(0,2) = 2 ➔ F(3)

n=3: C(3,0)+C(2,1)+C(1,2)+C(0,3) = 3 ➔ F(4)

n=4: C(4,0)+C(3,1)+C(2,2)+C(1,3)+C(0,4) = 5 ➔ F(5)

이항계수의 성질

- $\sum_{j=k}^{n} C(j,k) = C(n+1, k+1)$ (n에 대한 귀납법으로 증명 가능)

예: n=3, k=1

j 값은 1부터 3까지 변함

C(1,1)+C(2,1)+C(3,1) = C(4,2)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

이항계수의 성질

- $\sum_{j=k}^{n} C(j,k)$=C(n+1, k+1)   (n에 대한 귀납법으로 증명 가능)

예: n=5, k=2

j 값은 2부터 5까지 변함

C(2,2)+C(3,2)+C(4,2)+C(5,2) = C(6,3)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

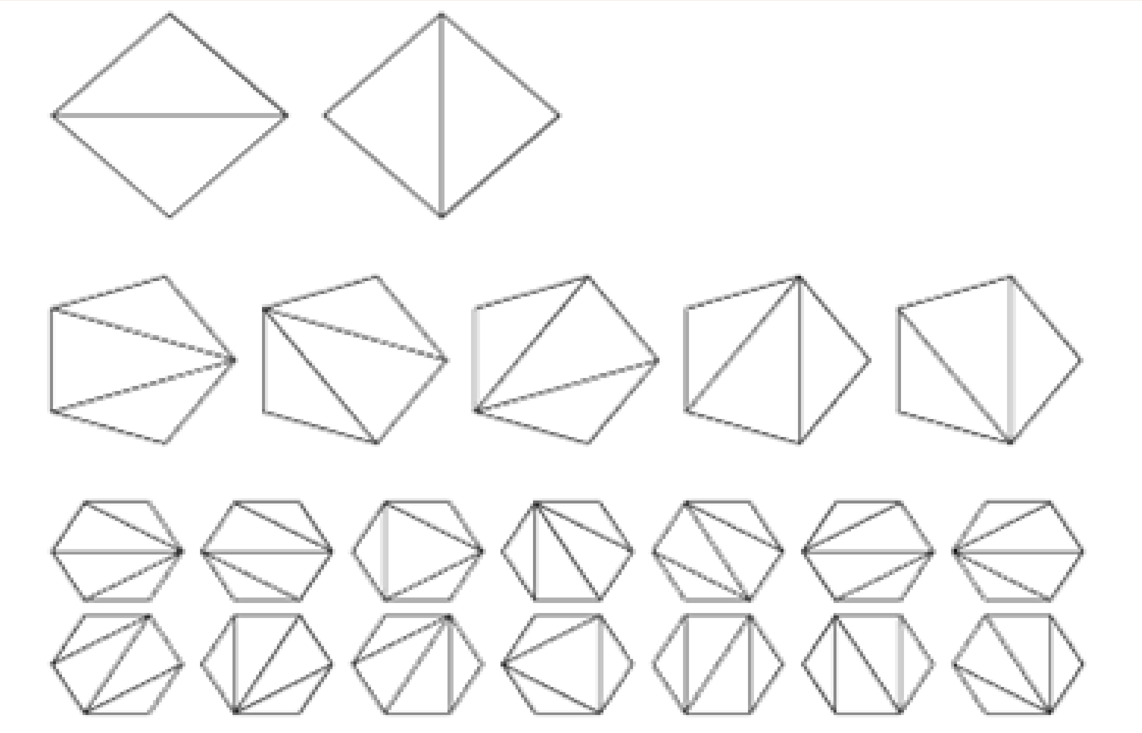
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

카탈란 수(Catalan Number)

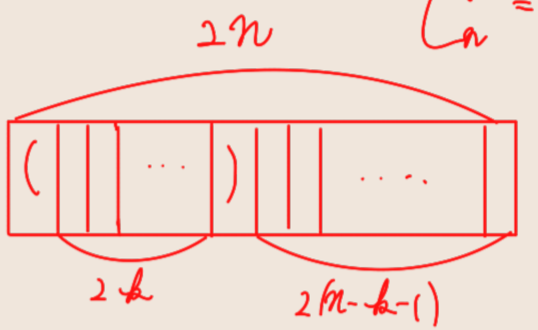
- 오일러가 "$(n+2)$-각형을 n개의 삼각형으로 나눌 수 있는 경우의 수"를 세는 문제를 제안하면서 처음 나타났다. 벨기에의 수학자 카탈란의 이름을 따서 정해졌다.



카탈란 수(Catalan Number)

- n 쌍의 괄호를 사용한 올바른 괄호식의 개수: C_n $C_0 = 1$
  - n = 1 : ( ) → $C_1 = 1$
  - n = 2 : ( )( ), (( )) → $C_2 = 2$
  - n = 3 : ( )( )( ), (( ))( ), ( )(( )), ((( ))), (( ) ( )) → $C_3 = 5$

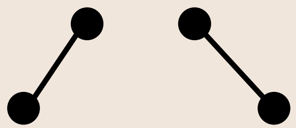
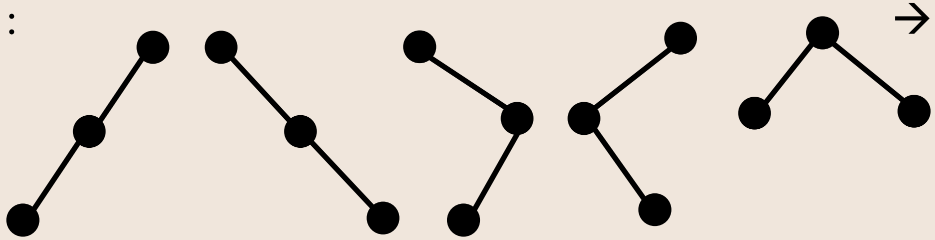
$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$$



k쌍의 괄호로 만들 수 있는 올바른 괄호 수: C_k

$C_k \times C_{n-k-1}$

카탈란 수(Catalan Number)

- **n 개의 노드를 가지는 서로 다른 이진트리의 개수:** C_n
  - n = 1 :  → $C_1 = 1$
  - n = 2 :  → $C_2 = 2$
  - n = 3 :  → $C_3 = 5$

카탈란 수(Catalan Number)

- **길이가 2n인 Dyck word의 개수: C_n**
- **Dyck word**
  - Dyck word는 n개의 X와 n개의 Y로 이루어진 문자열 중 처음부터 X와 Y의 개수를 세었을 때 항상 X가 Y보다 많거나 같은 것을 가리킨다. 예를 들면, 아래의 예제는 길이가 6인 모든 Dyck word들을 나열한 것이다.
  - 길이가 2(i.e., n=1)인 Dyck word : XY
  - 길이가 4(i.e., n=2)인 Dyck word : XXYY, XYXY
  - 길이가 6(i.e., n=3)인 Dyck word :

    XXXYYY XYXXYY XYXYXY XXYYXY XXYXYY.

  - Dyck word와 올바른 괄호쌍은 같은 문제이다.

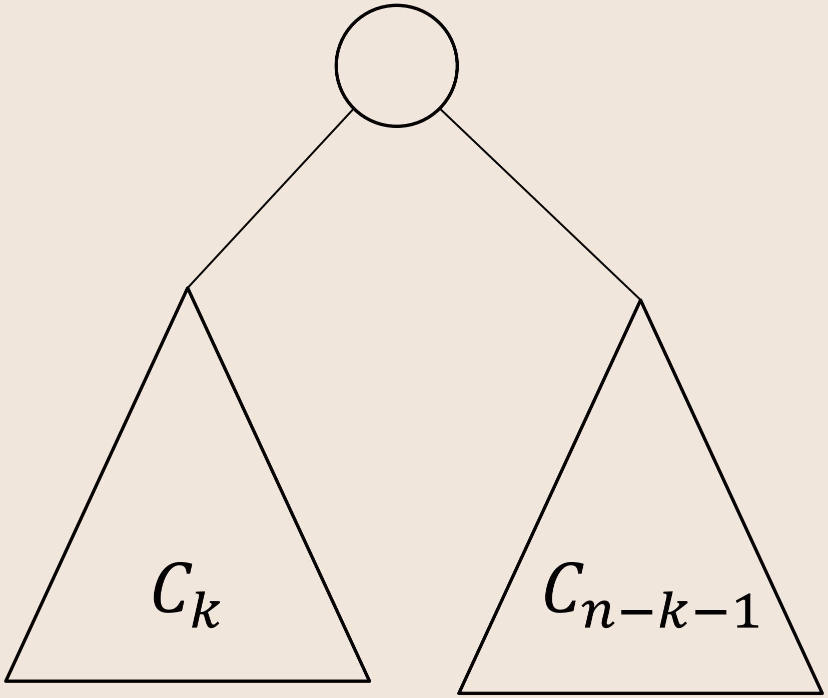
    ((())), ()(()), ()()(), (())() , (()())

카탈란 수(Catalan Number)

- 카탈란 수는 다음 점화식을 만족한다.

- n 개의 노드를 가지는 서로 다른 이진트리의 개수: C_n

C_0=1 and C_n= $\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$ for n≥1.



카탈란 수(Catalan Number)

- 카탈란 수는 다음 점화식을 만족한다.

- n 쌍의 괄호를 사용한 올바른 괄호식의 개수: C_n

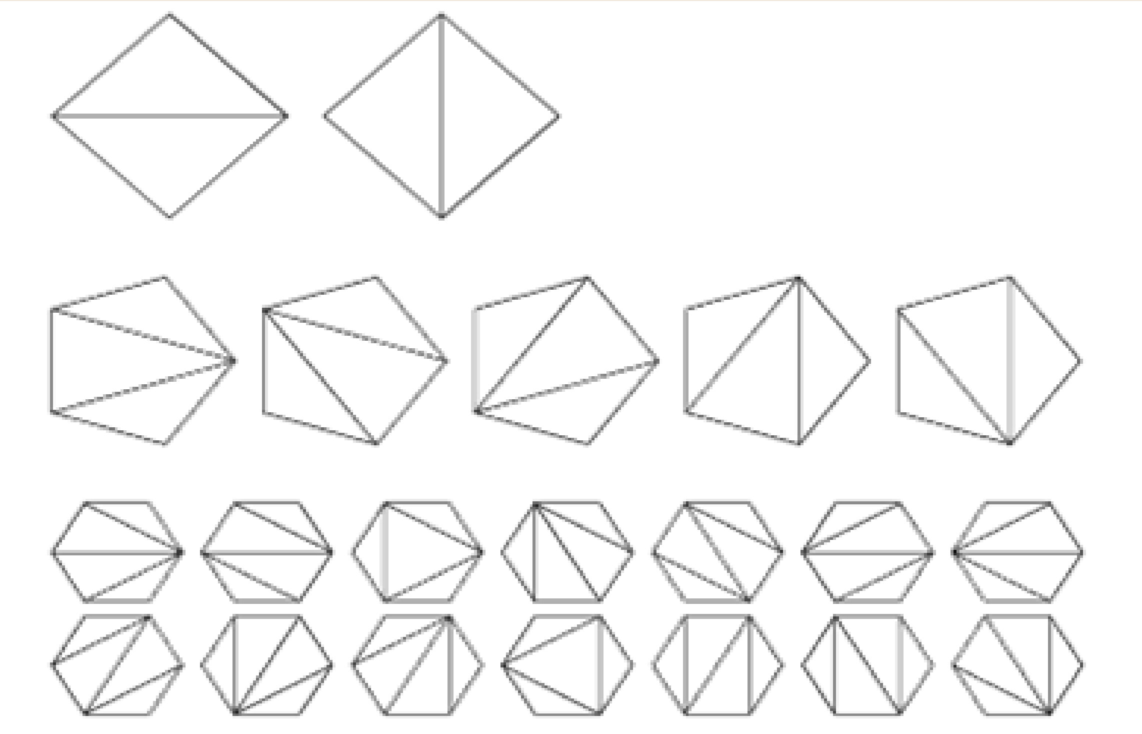
  (C_k) C_{n-k-1}

C_0=1 and C_n= $\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$ for n≥1.

카탈란 수(Catalan Number)

- 카탈란 수는 다음 점화식을 만족한다.

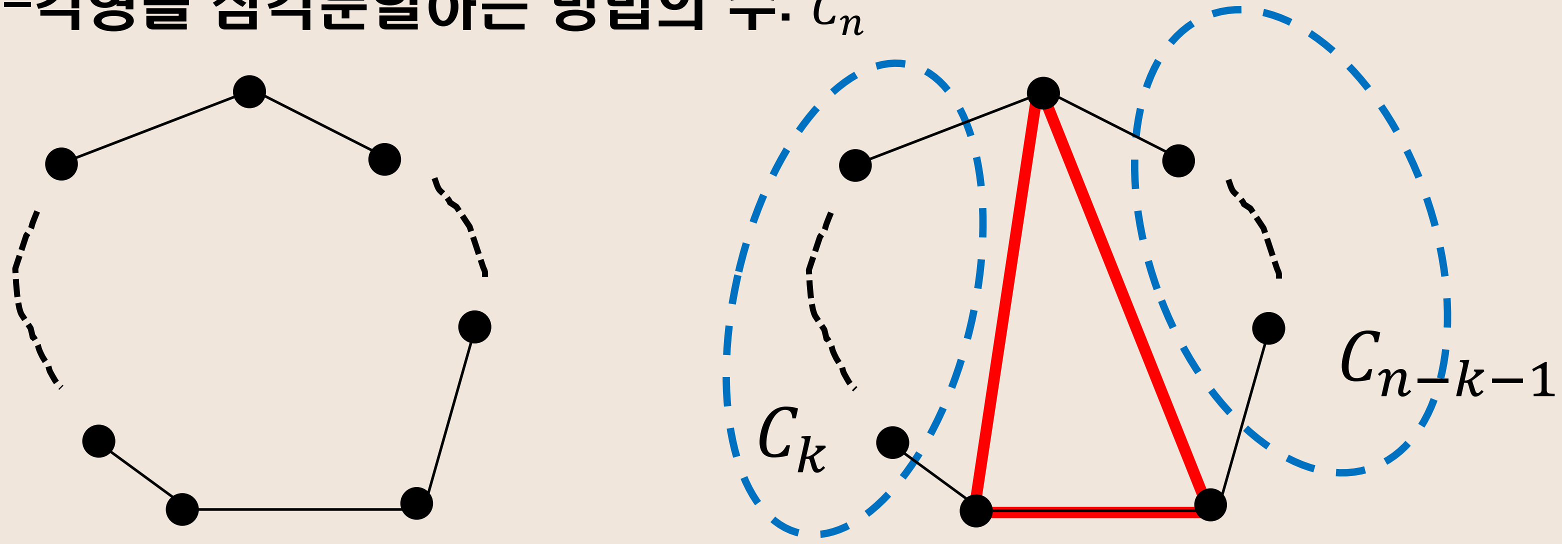
- (n+2)-각형을 삼각분할



카탈란 수(Catalan Number)

- 카탈란 수는 다음 점화식을 만족한다.

- (n+2)-각형을 삼각분할하는 방법의 수: C_n



C_0=1 and C_n= $\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$ for n≥1.

카탈란 수(Catalan Number)

- 0 이상의 n에 대해서 n 번째 카탈란 수는 다음과 같다

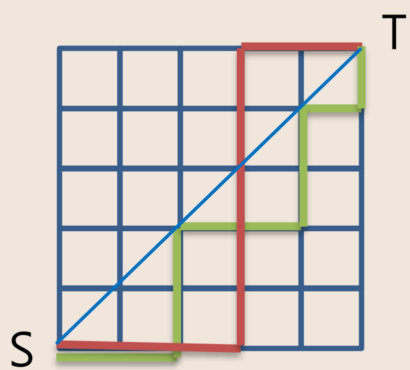
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \boxed{\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}}$$

$\Rightarrow C_0 \sim C_{n-1}$을 몰라도 C_n 계산 가능

- 위 식을 어떻게 구하나?

카탈란 수(Catalan Number)

- n X n 격자에서 S 에서 T 로 가는 최단 경로 가운데 대각선보다 위를 지나가지 않는 경로를 good path라 하고, 그렇지 않은 경로를 bad path라 하자.
- 예: n = 5



Good path: RRUURRUURU

Bad path: RRRUUUUURR

R과 U로 이루어진 단어

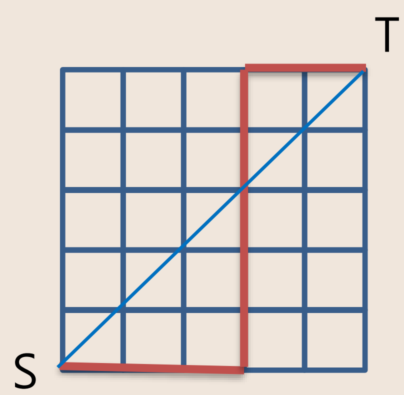
순서대로 R이 U보다 많거나 같음 → Dyck word

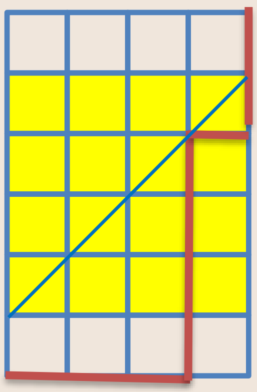
카탈란 수(Catalan Number)

- Good path의 경로를 나타내는 문자열은 Dick word이다.
- Bad path에서 대각선을 넘은 이후, 각 문자를 서로 바꾸자.

  RRRUUUUURR → RRRUUUUURUU

  바뀐 문자열은 6 X 4의 격자 상에서 이동하는 한 경로에 대응된다.



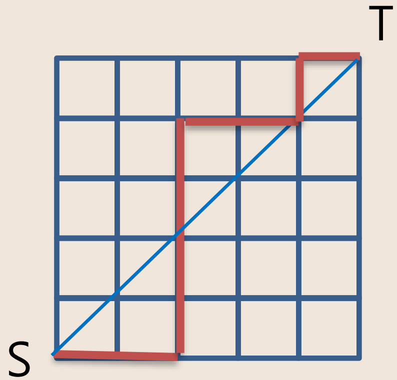


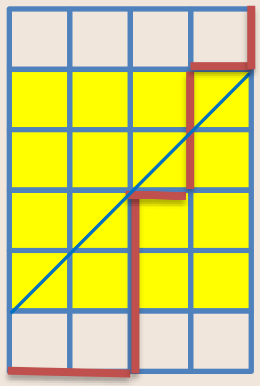
카탈란 수(Catalan Number)

- 또 다른 bad path의 예

  RRUUUURRUR → RRUUURUURU

- 유사하게, 모든 bad path는 6 X 4 격자상의 한 경로에 대응시킬 수 있다.
- n X n격자 상에서 bad path는 (n+1) X (n-1) 격자 상의 한 경로와 1-1 대응관계이다.

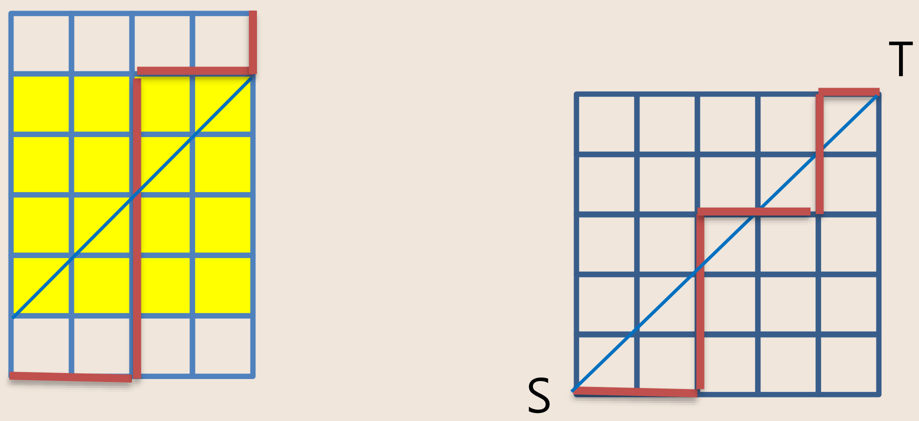




카탈란 수(Catalan Number)

반대 방향으로의 매핑의 예

RRUUUUURRU → RRUUURRUUR



카탈란 수(Catalan Number)

- n X n 상에서 good path에 대응하는 문자열은 Dick word이고, 이의 개수는 C_n 이다.
- Bad path에 대응하는 문자열은 (n+1) X (n-1) 격자상의 경로를 나타내는 문자열에 대응되고, 이의 개수는 $\mathrm{C}(2\mathrm{n}, \mathrm{n}-1)$
- n X n 상에서 모든 경로의 수는 $\mathrm{C}(2\mathrm{n}, \mathrm{n})$
- n X n 상에서 bad path의 경로 수는 $\mathrm{C}(2\mathrm{n}, \mathrm{n}-1)$
- 따라서, good path의 경로 수 C_n = (총 경로 수) – (bad 경로 수)

$$C_n = C(2n, n) - C(2n, n-1) = \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)(2n)! - n(2n)!}{n(n-1)!(n+1)n!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

(nXn)에서의 Bad path의 경로 수 → (n+1)X(n-1)의 모든 경로 수

완전순열(Complete Permutation)

교란순열(Derangement) 라고도 부름

- 순열의 모든 요소를 바꾼 순열(제자리에 원소가 있지 않는 순열)
- 원소의 개수가 3인 경우

  1 2 3

  2 3 1

  3 1 2

- 원소의 개수가 4인 경우

  1 2 3 4

  2 1 4 3
  3 4 1
  4 1 3

  3 1 4 2
  4 1 2
  2 1

  4 1 2 3
  3 1 2
  2 1

- 완전수열은 !n으로 표시하며, !3=2, !4=9 가 된다.

완전순열(Complete Permutation)

교란순열(Derangement) 라고도 부름

- 동일한 원소로 이루어진 순열 중 서로 다른 A, B가 동일한 위치에 같은 원소가 하나도 없을 경우에 A 순열과 B 순열은 완전순열 관계라 한다

  예: (1, 2, 3) 과 (2, 3, 1), (1, 4, 2, 3)과 (2, 1, 3, 4)
- !n = d(n) 이라면 d(n) = (n-1)[d(n-1)+d(n-2)] (왜?)
- d(n) = n d(n-1) + $(-1)^n$ (왜?)
- !1 = 0, !2 = 1, !3 = 2, !4 = 9, !5 = 44, !6 = 265, !7 = 1854 …

완전순열(Complete Permutation)

완전 순열 점화식 d(n) 구하기

- 시험 후 모두가 다른 사람의 답안지를 채점하는 경우를 생각하면

  1번과 임의의 K번에 대하여

  (1) 1번과 K번이 서로 시험지를 바꾸는 경우 수는 d(n-2)

  따라서 1 아닌 모든 K에 대하여 (n-1)d(n-2)

  (2) 1번은 K번을 받고 K번은 1번이 아닌 것을 받는 경우 수는 d(n-1)

  K는 2에서 N까지 이므로 이 경우 (n-1)d(n-1)

- 따라서 d(n) = (n-1)[d(n-1)+d(n-2)]

- d(n) = n d(n-1) + $(-1)^n$

$$n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)= n!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right) = \left[\frac{n!}{e}\right]$$

1 2 3 4 ⋯ k ⋯ n

완전순열(Complete Permutation)

완전 순열 점화식 d(n) 구하기

- d(n) = (n-1)[d(n-1)+d(n-2)]

  = nd(n-1) – d(n-1) + (n-1)d(n-2)

$f(n) = d(n) - n\,d(n-1)$

- d(n) – nd(n-1) = -[d(n-1) - (n-1)d(n-2)] $\Rightarrow f(n) = -f(n-1)$

  = -[-[d(n-2) – (n-2)d(n-3)]] $= -f(-f(n-2))$

  = -[-[-[d(n-3) – (n-3)d(n-4)]]] $= -f(-f(-f(n-3)))$

  ....

  $\vdots$

  = -[-[-…-[d(2) – 2d(1)]…]] $= -f(-f(-f\cdots -f(2)\cdots)$

  = $(-1)^n$ $= (-1)^n$

- d(n) = n d(n-1) + $(-1)^n$

완전순열(Complete Permutation)

완전 순열 점화식 d(n) 구하기

- d(n) = n d(n-1) + $(-1)^n$

$$\frac{d(n)}{n!} - \frac{nd(n-1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\frac{d(n)}{n!} - \frac{d(n-1)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\frac{d(n-1)}{(n-1)!} - \frac{d(n-2)}{(n-2)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{d(n-2)}{(n-2)!} - \frac{d(n-3)}{(n-3)!} = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$\frac{d(2)}{2!} - \frac{d(1)}{1!} = \frac{1}{2!}$$

$$\boxed{d(n) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots \frac{(-1)^n}{n!}\right)}$$

완전순열(Complete Permutation)

완전 순열 점화식 d(n) 구하기

- $d(n) = n\, d(n-1) + (-1)^n$

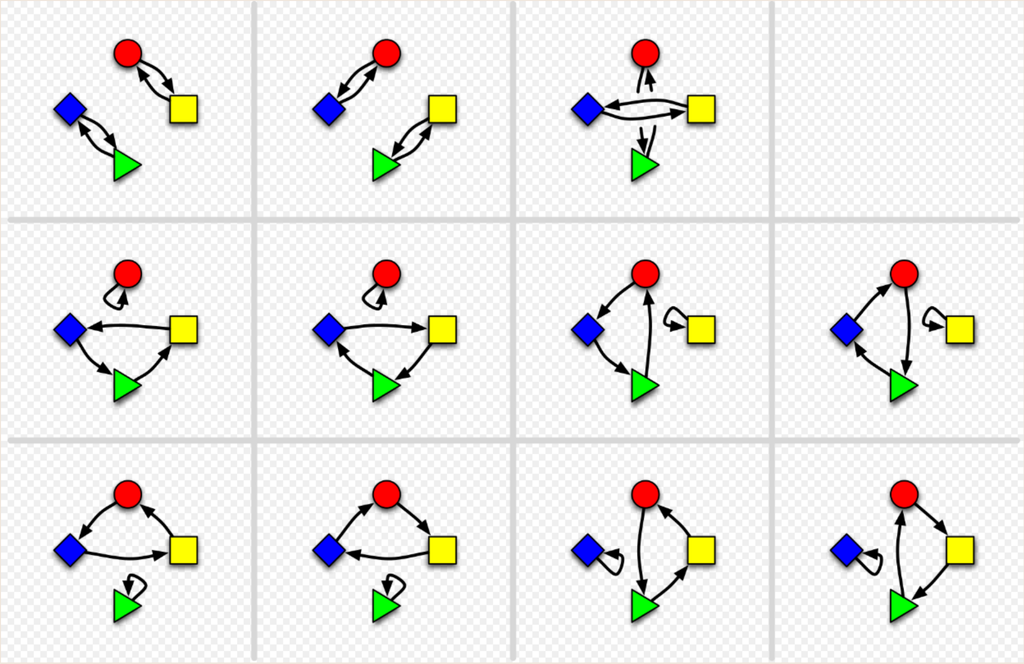
  $n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = \left[\frac{n!}{e}\right]$

Stirling Numbers – 1st type $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

- There are two different types of Stirling numbers.
- The first type, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, counts the number of permutations on n elements with exactly k cycles.
- Cycles in a permutation
  - ✔ Ex1) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{matrix}$: 1→4→3→1, 2→2, 5→6→5
  - ✔ Ex2) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{matrix}$: 1→2→4→6→5→3→1
  - ✔ Ex3) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{matrix}$: 1→4→1, 2→7→5→6→3→2

Stirling Numbers – 1st type $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

- There are 11 permutations of four elements with exactly two cycles



Stirling Numbers – 1st type $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

- To formulate the recurrence, observe the n^{th} element either forms a singleton cycle or it doesn’t.

- If it does, there are $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ ways to arrange the rest of the elements to form $(k-1)$ cycles.

- If not, the n^{th} element can be inserted in every possible position of every cycle of the $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ ways to make k cycles out of $(n-1)$ elements.

Stirling Numbers – 1st type $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

- Thus, $\boxed{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}}$

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,\ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \cdots, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$

- R[1,1]=1, R[n,0]=0, ⋯ , R[n,1]=(n−1)!

- Ex) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2! + 3\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 + 3(1+2) = 11$

Stirling Numbers – 1st type $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	2	3	1							
4	0	6	11	6	1						
5	0	24	50	35	10	1					
6	0	120	274	225	85	15	1				
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1

Stirling Numbers – 2nd type $\left\{ {n \atop k} \right\}$

- The second type, $\left\{ {n \atop k} \right\}$, counts the number of ways to partition n items into k sets. → **set partition**

- For example, there are seven ways to partition four items into exactly two subsets: (1)(234), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123)(4), (124)(3), and (134)(2).

Stirling Numbers – 2nd type $\left\{ n \atop k \right\}$

- The n^{th} item can be inserted into any of the k subsets of an $(n-1)$ part partition or it forms a singleton set.
- Thus by a similar argument to that of the other Stirling numbers they are defined by the recurrence

- $$\boxed{\left\{ n \atop k \right\} = k\left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}}$$

$\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$ $\left\{ n \atop n+1 \right\} = 0$

$\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$ $\left\{ n \atop n \right\} = 1$

$\left\{ n \atop 2 \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$

- The special case of $\left\{ n \atop k \right\} = 2^{n-1} - 1$, since any proper subset of the elements 2 to *n* can be unioned with {1} to define the set partition. The second part of the partition consists of exactly the elements not in this first part.

Stirling Numbers – 2nd type $\left\{ {n \atop k} \right\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Integer partitions

- An integer partition of n is an unordered set of positive integers which add up to n. For example, there are seven partitions of 5: (5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), and (1,1,1,1,1).

- The easiest way to count them is to define a function $f(n,k)$ giving the number of integers partitions of n with largest part at most k.

Integer partitions

- In any acceptable partition the largest part either does or does not reach with limit, so $\boxed{f(n,k) = f(n-k,k) + f(n,k-1)}$

- The basis cases are
  - $f(n,k) = f(n,n)$ when $k > n$
  - $f(n,1) = 1$
  - $f(0,0) = 1$
  - $f(1,1) = 1$

Fibonacci Number

- F(0) = 0, F(1) = 1, F(n) = F(n−1)+F(n−2)
- F(0)=0, F(1)=1, F(2)=1, F(3)=2, F(4)=3, F(5)=5, F(6)=8, F(7)=13, ⋯
- $$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2^{100}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2^{99}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2^{99}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2^{99}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2^{98}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2^{98}}$$

n=1 이면, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}$

n=2 이면, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n=k 이면, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} f_{k-2} & f_{k-1} \\ f_{k-1} & f_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_{k-2} + f_{k-1} \\ f_k & f_{k-1} + f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix}$$

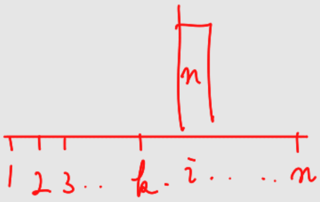
Sol 1)

$B(k,k)=1$

$B(k,1)=(k-1)!$

$B(n,k)$

$$=\sum_{i=k}^{n}\left[{}_{n-1}C_{i-1}\cdot B(i-1,k-1)\cdot (n-i)!\right]$$



Sol 2)

$$D(n,k)=\begin{cases}1 & (k=1)\\ (n-1)! & (k=1)\\ D(n-1,k-1)+(n-1)D(n-1,k)\end{cases}$$