book-lm

Seoncheol Park

2023-08-14

Table of contents

Preface

This is a Quarto book.

To learn more about Quarto books visit https://quarto.org/docs/books.

```r
1 + 1
```

```
[1] 2
```

1 Introduction

This is a book created from markdown and executable code.

See Knuth (1984) for additional discussion of literate programming.

```r
1 + 1
```

```
[1] 2
```

2 Asymptotic Theory for Least Squares

2.1 Introduction

Theorem 2.1 (Random sampling assumption (@Hansen2022 Definition 1.2))**.** The variables (Y_i, X_i) are a **random sample** if they are mutually independent and identically distributed (i.i.d.) across $i = 1, \dots, n$.

Theorem 2.2 (Best linear predictor 관련 assumption (@Hansen2022 Assumption 2.1))**.**

1. $E[Y^2] < \infty$
2. $E\|X\|^2 < \infty$
3. $Q_{XX} = E[XX^T]$ is positive definite

이 가정의 처음 두 개는 X, Y가 유한한 평균과 분산, 공분산을 갖음을 의미한다. 세 번째는 Q_{XX}의 column들이 linearly independent하고 역행렬이 존재함을 보장한다.

(Q_{XX}가 positive definite일 때 linearly independence는 찾아볼 것)

위의 random sampling과 finite second moment assumption을 가져간채로 least squares estimation에 대한 assumption을 다시 정리한다. (@Hansen2022 Assumption 7.1)

1. The variables $(Y_i, X_i), i = 1, \dots, n$ are i.i.d.
2. $E[Y^2] < \infty$.
3. $E\|X\|^2 < \infty$.
4. $Q_{XX} = E[XX^T]$ is positive definite.

2.2 Consistency of Least Squares Estimator

이 절의 목표는 $\hat{\beta}$가 β에 consistent함을

1. weak law of large numbers (WLLN)
2. continuous mapping theorem (CMT)

을 이용해 보이는 것이다. (@Hansen2022 7.2)

Derivation을 다음과 같은 요소들로 구성된다.

1. OLS estimatior가 sample moment들의 집합의 연속함수로 표현될 수 있다.
2. WLLN을 이용해 sample moments가 population moments에 converge in probability 함을 보인다.
3. CMT를 이용해 연속함수에서 converges in probability가 보존됨을 보장한다

그렇다면 먼저 OLS estimator를 다음과 같이 sample moments $\hat{Q}_{XX} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T$ 와 $\hat{Q}_{XX} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ 의 함수로 쓸 수 있다.

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T\right)^{-1} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) = \hat{Q}_{XX}^{-1}\hat{Q}_{XY}$$

(Y_i, X_i) 가 mutually i.i.d. 라는 가정은 (Y_i, X_i) 로 구성된, 예를 들면 $X_i X_i^T$ 와 $X_i Y_i$ 가 i.i.d. 임을 의미한다. 이들은 또한 앞선 Assumption 7.1에 의해 finite expectation을 갖는다. 이러한 조건 하에서, $n \to \infty$ 일 때 WLLN은

$$\hat{Q}_{XX} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T \xrightarrow{p} E[XX^T] = Q_{XX}, \quad \hat{Q}_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \xrightarrow{p} E[XY] = Q_{XY}.$$

그 다음 continuous mapping theorem을 써서 $\hat{\beta} \to \beta$ 임을 보일 수 있다는 것이다. $n \to \infty$ 일 때,

$$\hat{\beta} = \hat{Q}_{XX}^{-1}\hat{Q}_{XY} \xrightarrow{p} Q_{XX}^{-1} Q_{XY} = \beta.$$

Stochastic order notation으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{\beta} = \beta + o_p(1).$$

2.3 Asymptotic Normality

Asymptotic normality를 다룰 때에는

1. 먼저 estimator를 sample moment의 함수로 쓰는 것으로부터 시작한다.
2. 그리고 그것들 중 하나가 zero-mean random vector의 sum으로 표현될 수 있고 이는 CLT를 적용 가능케 한다.

우선 $\hat{\beta} - \beta = \hat{Q}_{XX}^{-1}\hat{Q}_{Xe}$라고 두자. 그리고 이를 $\sqrt{n}$에 곱하면 다음 표현을 얻을 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i e_i\Big).$$

즉 normalized and centered estimator $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$는 (1) sample average의 함수 $\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T\Big)^{-1}$과 normalized sample average $\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i e_i\Big)$의 곱으로 쓸 수 있다.

그러면 뒷부분은 $E[Xe] = 0$이고 이것의 $k \times k$ 공분산함수를 다음과 같이 둘 수 있다.

$$\Omega = E[(Xe)(Xe)^T] = E[XX^Te^2].$$

그리고 아래 가정에서처럼 $\Omega < \infty$라는 가정 하에 $X_i e_i$는 i.i.d. mean zero, 유한한 분산을 갖고 CLT에 의해

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i e_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Omega).$$

(@Hansen2022 Assumption 7.2)

1. The variables $(Y_i, X_i), i = 1, \dots, n$ are i.i.d.
2. $E[Y^4] < \infty$.
3. $E\|X\|^4 < \infty$.
4. $Q_{XX} = E[XX^T]$ is positive definite.

$\Omega < \infty$임을 보이려면 jl번째 원소 $E[X_j X_l e^2]$이 유한함을 보이면 될 것이다. Properties of Linear Projection Model (@Hansen2022 Theorem 2.9.6) (If $E|Y|^r < \infty$ and $E|X|^r < \infty$ for $r \geq 2$, then $E|e|^r < \infty$)을 이용해 위의 2, 3번 조건에 의해 $E[e^4] < \infty$임을 보일 수 있다. 그러면 expectation inequality에 의해 Ω의 jl번째 원소는 다음과 같이 bounded된다.

$$|E[X_j X_l e^2]| \leq E|X_j X_l e^2| = E[|X_j||X_l|e^2].$$

Stochastic order notation으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{\beta} = \beta + O_p(n^{-1/2}).$$

3 Asymptotic Theory for Quantile Regression

3.1 Basics

<Check function>

$$\rho_\tau(x) = x(\tau - I\{x < 0\}) = \begin{cases} -x(1-\tau), & x < 0 \\ x\tau, & x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\psi_\tau(x) = \frac{d}{dx}\rho_\tau(x) = \tau - I\{x < 0\}, \quad x \neq 0.$$

4 Summary

In summary, this book has no content whatsoever.

```r
1 + 1
```

```
[1] 2
```

References

Knuth, Donald E. 1984. "Literate Programming." Comput. J. 27 (2): 97–111. https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97.