투빅스 15기 정규세션 6주차

Neural Network Basic Assignment 1

이름: 이성범

1. Sigmoid Function을 z에 대해 미분하세요.

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

1번 문제

1번 문제를 풀기전에 필수적으로 알아야 할 공식이 있다.
바로 몫의 미분법 공식이다.

* 몫의 미분법 공식

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$= \frac{\text{분자 미분} \cdot \text{분모} - \text{분자} \cdot \text{분모 미분}}{\text{분모 제곱}}$$

* 몫의 미분법 공식을 가지고 시그모이드 함수를 미분

$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

상수이므로 미분시 0

$$\frac{d}{dz}\sigma(z) = \frac{\frac{d(1)}{dz} \cdot (1+e^{-z}) - 1 \cdot \frac{d(1+e^{-z})}{dz}}{(1+e^{-z})^2}$$

$$\frac{d(1)}{dz} + \frac{de^{-z}}{dz} = 0 + -e^{-z}$$

$$= -e^{-z}$$

$$= \frac{0 - (-e^{-z})}{(1+e^{-z})^2}$$

$$= \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2}$$

$$= \frac{1+e^{-z}-1}{(1+e^{-z})^2}$$

$$= \frac{1+e^{-z}}{(1+e^{-z})^2} - \frac{1}{(1+e^{-z})^2}$$

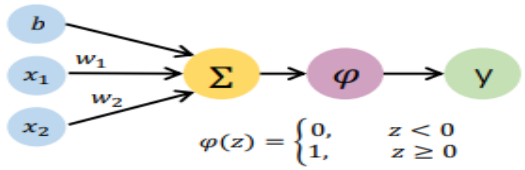
$$= \frac{1}{1+e^{-z}} - \frac{1}{(1+e^{-z})^2}$$

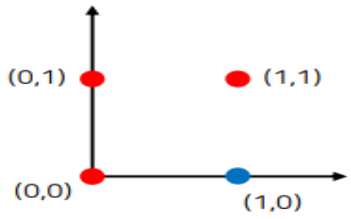
$$= \left(\frac{1}{1+e^{-z}}\right)\left(1 - \frac{1}{1+e^{-z}}\right)$$

$$= \sigma(z) \cdot (1 - \sigma(z))$$

미분된 식을 보기좋게 정리하기위해서 분자에 1을 더하고 빼줬다.

2. 다음과 같은 구조의 Perceptron과 ●(=1), ●(=0)을 평면좌표상에 나타낸 그림이 있습니다.





2-1. ●, ● 를 분류하는 임의의 b, w를 선정하고 분류해보세요.

2-1 번 문제

$b=1$, $w_0=1$, $w_1=-1.5$, $w_2=1$

$\varphi(w_0 b + w_1 x_1 + w_2 x_2) = y$ $\quad \varphi(z) = \begin{cases} 0 & z<0 \\ 1 & z \geq 0 \end{cases}$

x_1	x_2	z	$\hat{y}$	y
0	0	$1\cdot1+(-1.5\cdot0)+(1\cdot0)=1$	1	1
0	1	$1\cdot1+(-1.5\cdot0)+(1\cdot1)=2$	1	1
1	0	$1\cdot1+(-1.5\cdot1)+(1\cdot0)=-0.5$	0	0
1	1	$1\cdot1+(-1.5\cdot1)+(1\cdot1)=0.5$	1	1

분류가 제대로 된 것을 알 수 있음

2-2. Perceptron 학습 규칙에 따라 임의의 학습률을 정하고 b, w를 1회 업데이트 해주세요.

2-2번 문제

$b=1$, $w_0=1$, $w_1=-1.5$, $w_2=1$, $\eta=0.1$

$w_i = w_i + \eta(y-\hat{y})x_i$

$t=1$, $x_1=0$, $x_2=0$, $y=1$ 일 때

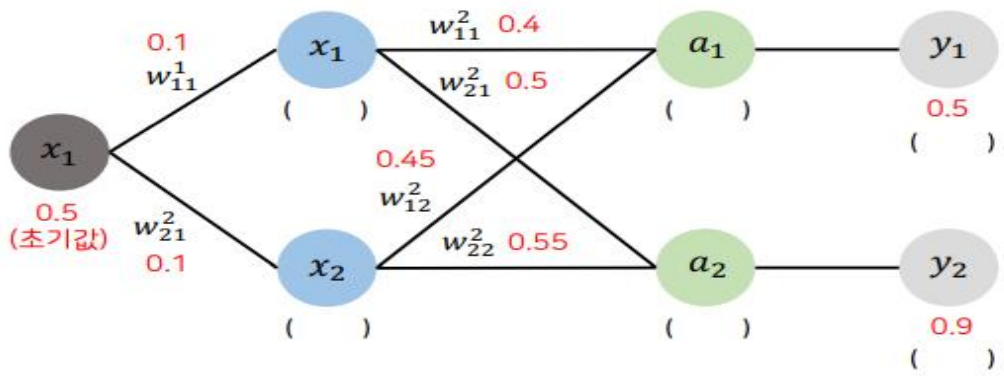
$w_0 \leftarrow 1 + 0.1(1-1)\cdot1 = 1$

$w_1 \leftarrow -1.5 + 0.1(1-1)\cdot0 = -1.5$

$w_2 \leftarrow 1 + 0.1(1-1)\cdot0 = 1$

↳ 분류가 제대로 되었기 때문에 가중치 업데이트는 일어나지 않을 것.
이제 위와 같은 방식으로 (0,1), (1,0), (1,1) 순으로 가중치를 업데이트 해가면 된다.

3. 다음과 같은 구조와 초기값을 가진 Multilayer Perceptron이 있습니다.



3-1. Forward Propagation이 일어날 때, 각 노드는 어떤 값을 갖게 되는지 빈 칸을 채워주세요.
(Sigmoid Function 사용)

```python
# 3-1 번 문제
import numpy as np

# 시그모이드 함수 구현
def sigmoid(x):
    return 1 / (1 + np.exp(-x))

X = 0.5

w_1_11 = 0.1
w_2_21 = 0.1

x1 = sigmoid(X * w_1_11)
x2 = sigmoid(X * w_2_21)

w_2_11 = 0.4
w_2_21 = 0.5
w_2_12 = 0.45
w_2_22 = 0.55

a1 = (x1 * w_2_11) + (x2 * w_2_12)
a2 = (x1 * w_2_21) + (x2 * w_2_22)

y1 = sigmoid(a1)
y2 = sigmoid(a2)

y1_true = 0.5
y2_true = 0.9
```

```python
print(f'x1 : {x1}')
print(f'x2 : {x2}₩n')
print(f'a1 : {a1}')
print(f'a2 : {a2}₩n')
print(f'y1 : {y1}')
print(f'y2 : {y2}')
```

```
x1 : 0.5124973964842103
x2 : 0.5124973964842103

a1 : 0.43562278701157888
a2 : 0.5381222663084209

y1 : 0.6072155356954312
y2 : 0.6313755010102448
```

3-2. output layer에 있는 노드들의 Mean Squared Error을 구해주세요.

```python
# 3-2번 문제
def MSE(y_true, y_pred):
    mse = ( 1/len(y_pred) ) * ( 1/2*np.sum((y_true - y_pred)**2) )
    return mse

y_true = np.array([y1_true, y2_true])
y_pred = np.array([y1, y2])
print(f"MSE : {MSE(y_true, y_pred)}")
```

```
MSE : 0.020913573137988827
```

3-3. 3-2에서 구한 답을 토대로, Back Propagation이 일어날 때 가중치 w_{11}^{1}과 w_{11}^{2}의 조정된 값을 구해주세요. (학습률 $\eta = 0.5$)

```python
# 3-3번 문제

lr = 0.5

dE = -(y1_true - y1)
ds = y1 * (1 - y1)
dz = x1

dw = dE * ds * dz

w_2_11_update = w_2_11 - lr*dw

print(f'업데이트된 w_2_11: {w_2_11_update}')

dE1 = -(y1_true - y1) * y1 * (1 - y1) * w_2_11
dE2 = -(y2_true - y2) * y2 * (1 - y2) * w_2_21

dE = dE1 + dE2
ds = x1 * (1 - x1)
dz = X

dw = dE * ds * dz

w_1_11_update = w_1_11 - lr*dw

print(f'업데이트된 w_1_11: {w_1_11_update}')
```

```
업데이트된 w_2_11: 0.39344735614480647
업데이트된 w_1_11: 0.10131363680057552
```

참고자료

1. https://wikidocs.net/37406