

1. 선형 칼만 필터 기초

足立 修一

게이오의숙대학 이공학부

본記事는 日本「計測自動制御學會」가 發行하는 「計測と制御誌와의 著作權協定에 依據하여 提供받은 資料입니다.

교육뿐 아니라 산업계에서도 칼만 필터와 같은 대표적인 상태추정 이론의 응용 사례가 증가했다. 칼만 필터의 유용성이 산업계에서도 널리 인식되었기 때문일 것이다.

대상이 되는 시계열이나 시스템의 동적 모델, 관측 데이터 모두를 활용한 칼만 필터를 이용함으로써 관측 데이터에 포함되는 잡음을 제거할 뿐 아니라 실제로 측정할 수 없는 물리량(상태량)을 추정할 수 있게 된다. 이것은 하드웨어 센서를 추가하지 않고도 별도의 양을 측정할 수 있으므로 소프트 센서라고 불리기도 한다.

한편, 센서 여러 개의 특징을 잘 이용함으로써 어떤 양을 추정하는 센서 퓨전 문제에서도 칼만 필터는 중요한 역할을 한다. 이와 같이 센서가 부족한 경우든 과잉인 경우든 칼만 필터를 활용할 수 있다.

여기서는 선형성과 정규성(가우시안)이 있다는 가정 하에 기본적인 이산시간 칼만 필터에 초점을 맞춰 칼만 필터 초보자도 그 구조를 이해할 수 있도록 평이하게 해설하고자 한다.

시계열의 필터링 문제

1. 필터링 문제 설명

주목하는 시계열(신호) $s(k)$ 에 잡음 $w(k)$ 가 중첩된 데이터 $y(k)$ 가 관측되는 것으로 한다. 즉,

$$y(k) = s(k) + w(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

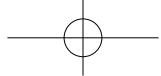
로 한다. 여기서는 이산시간 신호를 다루기로 하고, 신호는 미리 적절한 샘플링 주기에서 이산화된 것으로 한다. 또, 스카라 값을 취하는 시계열을 대상으로 하지만, 벡터값 시계열로 논의를 확장하기는 쉽다.

이 관측 데이터 $\{y(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ 에서 신호 $s(k)$ 의 추정치 $\hat{s}(k)$ 를 부여하는 필터를 설계하는 것이 여기서 생각하는 필터링 문제이다. 그 모습을 그림 1에 나타냈다. 이 그림에서도 알 수 있듯이 이 필터링 문제는 매우 간단하다. 그러나 신호와 잡음은 모두 정규성이라는 가정을 부과한다. 이 가정은 초보자의 벽을 높이게 되는데, 필터링 문제를 확률 과정의 틀에서 생각하기로 한다.

그림 1의 문제가 주어지면, 확률 과정의 지식을 갖고 있지 않아도 필터로 저역 통과 필터(lowpass filter : LPF)를 설계하면 될 것이라고 일정 수준 이상의 기술자는 생각할 것이다. 왜냐하면 일반적으로 신호 성분은 저주파수 대역에서 힘을 가지며, 잡음 성분이 백색성이라면 모든 주파수 대역에 걸쳐 동등한 파워를 가지므로 신호 성분의 힘이 지배적인, 즉 SN비가 좋은 대역을 통과하도록 LPF를 설계하면 신호를 복원할 수 있기 때문이다.

2. LPF의 일례

디지털 필터에 대한 입력을 $u(k)$, 출력을 $y(k)$ 으로 한 단순한 LPF를 소개한다. 여기서 이 디지털 필터의 입력 신호 $u(k)$ 와 출력 신호 $y(k)$ 사이에 다음과 같은 관계가 성립하는 것으로 하자.



$$y(k) = \frac{u(k) + u(k-1)}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

즉, 이 필터는 입력 신호에 대해서 항수 2의 이동 평균(moving average)을 계산하는 것이다. 이와 같이 디지털 필터의 기초는 수열 또는 점화식이다. 이 필터의 주파수 특성을 계산하기 위해 여기에서는 사인파 입력,

$$u(k) = \sin k\omega T \quad (3)$$

에 대한 정상 응답을 계산한다. 단, ω 는 사인파의 주파수, T 는 샘플링 주기이다. 이때의 출력은 삼각함수 공식을 사용함으로써,

$$\begin{aligned} y(k) &= 0.5 \sin k\omega T + 0.5 \sin(k-1)\omega T \\ &= \cos \frac{\omega T}{2} \sin \left(k\omega T - \frac{\omega T}{2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

이 된다. 식 (4)는 선형 시스템에 어떤 주파수 ω 의 사인파를 인가하면 정상 상태에서는 출력은 동일한 주파수의 정현파가 되고, 진폭이 $\cos \omega T / 2$ 배가 되며, 위상은 $\omega T / 2$ 만큼 늦어진다는 ‘주파수 응답의 원리’를 의미한다. 이 원리는 시간 영역에서의 ‘중합의 이론’과 나란히 주파수 영역에서 선형성을 규정하는 가장 중요한 원리이다.

여기까지는 이산시간 k 를 변수로 하여 시간 영역에서 살펴보았다. 진폭의 배율과 위상의 변화를 주파수의 함수로 본 것이 주파수 특성이며, 이것은 그림 2와 같다. 진폭 특성을 나타낸 그림에서 이동 평균은 저역 통과 특성을 갖고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 식 (2)와 같은 단순한 차분방정식으로 LPF를 실현할 수 있는 것이 디지털 필터의 이점이다.

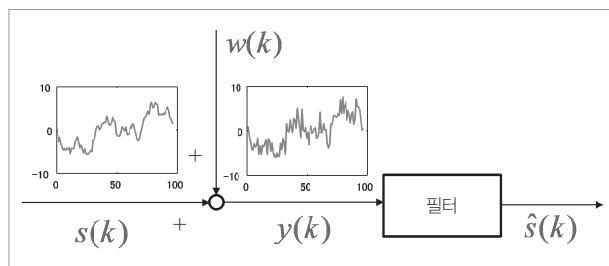


그림 1 시계열 필터링

또한, 이동 평균을 취하는 항수를 바꿈으로써 LPF의 통과 대역을 제어할 수도 있으며, 현재 시간까지의 모든 데이터를 사용한 일반적인 평균의 경우에는 직류 성분만 통과하는 필터가 된다. 그러나 위상 특성을 나타낸 그림에서 주파수가 높아짐에 따라 위상은 선형에 뒤쳐진다는 문제점을 가진다.

3. LPF의 문제점

잡음을 제거하는 LPF로서 가령 앞에서 설명한 이동 평균 필터를 이용할 수 있지만, LPF를 이용할 때 일반적으로 다음과 같은 문제점이 존재한다.

- (1) 필터의 설계에는 시행착오가 필요하다. 즉, 다양한 종류의 LPF 중에서 어느 것을 선택하는지, 또 그 필터의 차수, 밴드폭 등을 어떻게 설정하면 될 것인가?
- (2) 필터에 의한 위상 지연이 불가피하다. 특히, 필터의 차수를 높이면 고역의 위상 지연이 증가한다.

여기서 소개한 칼만 필터도 앞에서 소개한 LPF와 동일하지만, 이론에 기초한 계통적인 방법으로 디지털 필터를 구성할 수 있다.

칼만 필터의 특징

1. 시계열 모델링

관측 데이터에서 잡음을 제거하고자 하므로 잡은 계열에

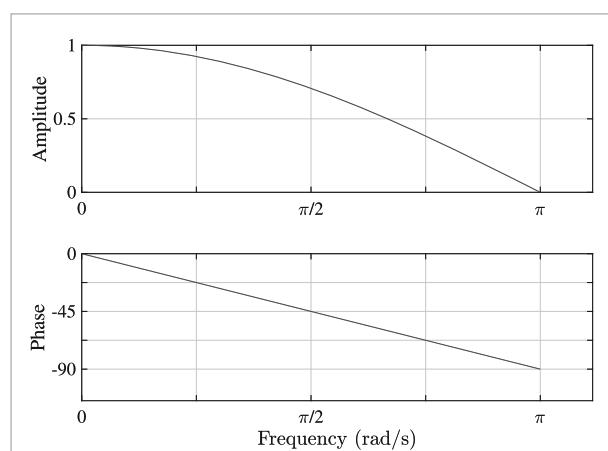
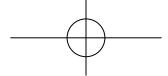


그림 2 이동평균 필터의 주파수 특성(위: 진폭 특성, 아래: 위상 특성)



Technology Focus

LPF를 작용시키는 것은 자연스러운 발상이다. 이에 대해 대상인 신호 $s(k)$ 의 생성 과정을 어떤 시스템의 출력으로서 모델링하려고 위너(Wiener) 연구팀은 생각했다.

그림 1의 신호 $s(k)$ 의 파형을 보면, 어떤 규칙성이 배후에 포함되어 있다. 바꿔 말하면 현재까지 관측된 데이터를 이용하면 다음 시각의 신호값을 예측할 가능성이 있다. 는 것을 알게 된다. 만약 이 신호가 전혀 상관이 없는 백색 잡음이라면 우리는 어쩔 수가 없다. 왜냐하면, 백색 잡음에서는 그 시각까지 관측된 파형의 값 모두를 알아도 다음 시각에 어떤 값을 취할 것인지 전혀 예측할 수 없기 때문이다.

그래서 신호가 가진 규칙성을, 백색 잡음을 선형 다이내미컬 시스템을 통해 얻은 확률과정으로 모델링하자는 것이 제안되었다. 그 모습을 나타낸 것이 그림 3이다. 신호의 필터링 문제를 시스템을 이용해 고려한 것이 돌파구였다. 이 시스템을 상태공간으로 표현하고, 그것에 기초해 설계되는 것이 칼만 필터이다.

2. 칼만 필터의 특징

앞에서 LPF를 이용하는 데 있어서의 문제점을 2개 제시했다. 여기에 대처할 수 있는 필터 중 하나가 칼만 필터이다. 즉, 칼만 필터는 다음과 같은 이점을 가진다.

- (1) 그림 1에서 보여준 필터의 상태변수와 잡음 등의 정규성, 상태방정식의 선형성이라는 가정 하에서는 추정 오차의 제곱합을 최소화한다는 의미에서 최적의 필터는 칼만 필터임을 이론적으로 제시했다.
- (2) 칼만 필터를 이용해도 위상 지연은 피할 수 없지만, 칼만 필터에는 뒤에서 설명하듯이 예측 단계가 포함되어 있으므로 위상 지연을 최소한으로 억제할 수 있다.

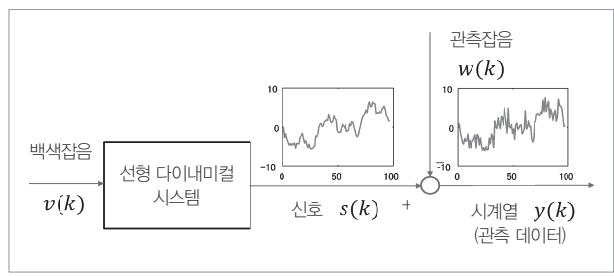


그림 3 시계열 모델링

이외에도 다양한 이점이 있지만, 대표적인 것은 다음과 같다.

- (3) 칼만 필터는 순차 처리(recursive processing)이므로 현 시각까지의 모든 데이터를 메모리에 기억해둘 필요는 없다.
- (4) 칼만 필터는 시계열의 물리적인 성질을 상태공간으로 표현한 모델과 시계열의 관측 데이터를 이용한다. 즉, 물리적인 측면과 데이터 양면을 모두 가진 '물리 정보'의 입장을 취하는 방법이다.

3. 순차 처리

순차 처리에 대해 예를 들어 설명한다. k 개의 측정값 $y(1), y(2), \dots, y(k)$ 의 평균값 $\hat{m}(k)$ 를 추정하는 문제를 생각한다. 이 경우,

$$\hat{m}(k) = \frac{y(1) + y(2) + \dots + y(k)}{k}$$

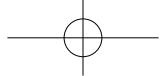
로 하면 되며, 이것은 일괄 처리라고 불린다. 일괄 처리의 문제점은 새로운 데이터 $y(k+1)$ 가 측정되었을 때, 다시 같은 계산을 해야 한다는 것이다. 그래서 $k=1$ 부터 차례로 생각하면,

$$\begin{aligned} k=1 \text{ のとき } \hat{m}(1) &= y(1) \\ k=2 \text{ 일 때 } \hat{m}(2) &= \frac{y(1) + y(2)}{2} \\ \text{일 때 } &= 0.5\hat{m}(1) + 0.5y(2) \end{aligned}$$

이므로, 일반항은 다음과 같다.

$$\hat{m}(k) = \frac{k-1}{k}\hat{m}(k-1) + \frac{1}{k}y(k) \quad (5)$$

이것을 순차 처리라고 한다. 이와 같이 순차 처리에는 1시간 전 추정치 $\hat{m}(k-1)$ 만 기억하면, 그때까지의 모든 데이터를 기억할 필요가 없다. 여기서 $\hat{m}(k-1)$ 은 사전 추정치(*a priori estimate*)라고 부른다. 한편, $\hat{m}(k)$ 는 사후 추정치(*a posteriori estimate*)라고 부른다. 사전, 사후란 각각 '최신 데이터'를 이용하기 전(before)과 후(after)를 뜻한다.



식 (5)의 우변의 계수 합이 1이므로 이 식은 사전 추정치 $\hat{m}(k-1)$ 과 최신 데이터 $y(k)$ 의 내분점을 계산함을 알 수 있다. 또한, 이 식을 변형하면

$$\hat{m}(k) = \hat{m}(k-1) + \frac{1}{k}(y(k) - \hat{m}(k-1)) \quad (6)$$

이 된다. 여기서 우변 둘째 항의 괄호 안은 예측오차 혹은 이노베이션으로 불린다. 또, $1/k$ 은 추정 계인이다. 사후 추정치는 사전 추정치와 수정항의 합이라는 이 식의 표현은 바로 칼만 필터 그 자체이다.

시계열의 상태공간 모델

시계열 $y(k)$ 의 상태공간 모델은 **그림 4**와 같다. 우선, 이 산시간 상태방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}v(k) \quad (7)$$

단, $\mathbf{x}(k)$ 는 시각 k 의 상태이며, n 차원 벡터이다. 상태란 시계열의 미래 행동을 예측하는 데 필요한 최소의 데이터라고 할 수도 있다. 식 (7)의 \mathbf{A} 는 시스템 행렬이라고 불리며, 그 크기는 $n \times n$ 이며, 그 모든 고유값은 단위 앤 내에 존재하는 것으로 가정한다. 또한, \mathbf{b} 는 n 차원 벡터이다. 여기서는 \mathbf{A} , \mathbf{b} 를 시불변, 즉 시계열은 정상 과정으로 했지만, $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{b}(k)$ 로 하면 시변, 즉 시계열이 비정상 과정 때도 적용할 수 있다. 식 (7)의 $v(k)$ 는 시스템 잡음이라 불리는 정규성 백색잡음이며, 평균치는 0이며, 유한한 분산 σ_v^2 를 갖는 것으로 한다. 그림 4에서 알 수 있듯이 $v(k)$ 는 시스템을 구동하기 위한 입력이므로 구동원 잡음이라고 볼 수도 있다.

식 (7)의 상태방정식은 여러 이점을 갖지만, 칼만 필터로 이용할 경우에는 특히 이 식이 미래를 예측하는 형식으로 되어 있다는 점이 중요하다. 이것은 식 (7)의 양변의 기대값(평균값)을 취하면, $v(k)$ 의 평균값이 0이므로,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (8)$$

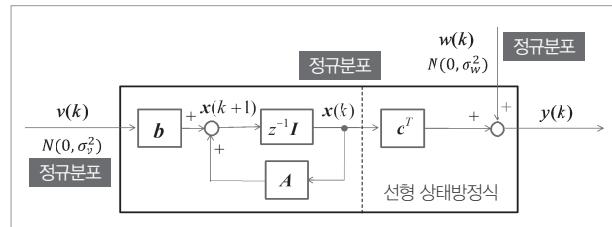


그림 4 시계열의 상태공간 표현

를 얻을 수 있다. 이로써 어떤 시각 k 의 상태 $\mathbf{x}(k)$ 를 이미 알고 있으면, 평균적으로는 다음의 시각 $k+1$ 의 상태 값은 식 (8)에 의해 주어지는 것을 의미한다. 이 성질은 칼만 필터 예측 단계에서 이용된다.

다음으로 출력 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + w(k) \quad (9)$$

단, \mathbf{c} 는 관측계수 벡터(n 차원)이다. 이것은 물리량을 관측 배출량으로 변환한 계수 벡터이다. 또, $w(k)$ 는 관측잡음이라 불리는 정규성 백색잡음으로, 평균치는 0이고, 유한한 분산 σ_w^2 를 갖는 것으로 한다. 일반적으로 시스템 잡음 $v(k)$ 와 독립이라고 가정한다. 식 (7), (9)가 시계열의 상태공간 표현이다.

선형 칼만 필터

1. 칼만 필터의 설계 절차

여기서는 다음의 문제를 생각한다.

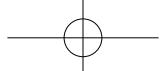
〈칼만 필터링 문제〉

시계열 데이터 $\{y(i), i = 1, 2, \dots, k\}$ 에 기초해 상태 $\mathbf{x}(k)$ 의 평균 제곱 오차의 최소값을 부여하는 추정값, 즉 최소 평균 제곱 오차 추정값(Minimum Mean Square Error : MMSE)을 찾을 것.

칼만 필터의 설계 절차는 다음과 같다.

〈칼만 필터의 설계 절차〉

Step 1 시계열 모델 : 대상 시계열을 정규성 백색잡음에 의해 구동된 선형 시스템의 출력으로 간주하고, 그 선형 시스



Technology Focus

템의 상태공간 모델을 구축한다.

Step 2 칼만 필터에 의한 상태 추정: Step 1에서 얻은 상태 공간 모델의 상태 $x(k)$ 를 시계열 데이터 $y(k)$ 에서 추정한다.

칼만 필터를 실제 문제에 적용할 경우, 가장 어려운 부분은 Step 1의 모델링이지만, 여기서는 이 부분은 생략하고, Step 2의 칼만 필터에 의한 상태 추정 알고리즘을 소개한다.

2. 선형 칼만 필터의 포인트

식 (7)에서 상태 $x(k)$ 가 정규분포에 따른다고 가정하면, $Ax(k)$ 에 의해서 선형 변환된 것도 정규분포를 따른다. 또한, $v(k)$ 도 정규분포라고 가정했기 때문에 정규분포의 재생성에 의해 $x(k+1)$ 도 정규분포에 따른다. 이 논의는 상태의 초기값이 정규분포에 따르면 모든 시각에서 상태는 정규분포를 따르다는 것을 의미한다.

또, 상태 추정치를 선형 추정 법칙에 의해 구한다고 가정하면, 상태 추정치도 모든 시각에서 정규분포에 따른다. 이와 같이 선형으로 정규분포를 가정한 가장 기본적인 칼만 필터에서는 모든 것의 확률변수는 정규분포를 따르는 것이다.

정규분포에서는 평균값(1차 모멘트)과 공분산 행렬(2차 모멘트)에 의해 그 확률밀도함수(간단히 말하면, 확률)는 완전히 규정되므로, 이 2개의 양을 순차적으로 시간 갱신하면 된다. 이와 같이 선형 칼만 필터에서는 상태변수가 정규분포를 따르는 확률변수라고 가정하고, 그 평균값(이를 상태 추정치)과 공분산열을 순차적으로 추정한다.

시각 $k-1$ 에서의 상태 추정값 $\hat{x}(k-1)$ 과 공분산 행렬

$P(k-1)$ 을 이미 알고 있으며, 그것들을 다음 시각 k 에 순차적으로 갱신하는 상황을 생각한다. 시간 갱신 모습은 그림 5와 같다. 그림에서 알 수 있듯이 칼만 필터에서는 $\hat{x}(k-1)$ 에서 $\hat{x}(k)$ 로 갱신하는 사이에 $\hat{x}^-(k)$ 를 경유한다. 여기서 $\hat{x}^-(k)$ 는 사전 추정값이라고 불리며, $\hat{x}(k)$ 는 사후 추정값이라고 한다. 공분산 행렬 P 에 대해서도 마찬가지이다. 그림 5에서 시간 갱신은 다음의 두 단계로 구성된다.

Step 1 : 예측 단계

$\hat{x}(k-1)$ 에서 $\hat{x}^-(k)$ 로 갱신한다. 이 단계에서는 시계열 모델을 이용한다.

Step 2 : 필터링 단계

$\hat{x}^-(k)$ 에서 $\hat{x}(k)$ 로 갱신한다. 이 단계에서는 최신 관측값을 이용한다.

이와 같이 칼만 필터에서는 시계열의 물리적 성질을 기술하는 모델과 관측값 데이터를 모두 활용한다. 칼만 필터가 이론적으로 뛰어날 뿐만 아니라 실제 문제에 대해서도 유효한 큰 이유는 이 특징 덕분이다.

[주의] 칼만 필터는 시스템 제어이론 분야에서 탄생했지만, 그 후 여러 분야에서 응용되어 이론적 연구가 더 진행됐다. 그래서 다양한 기호가 사용되고 있어 초보자는 혼란스러운 경우가 많을 수도 있다. 예를 들어 사전 추정값을 $\hat{x}^-(k)$ 로 나타냈지만, 가타야마 교수의 해설에서는 $\hat{x}_{k/k-1}$ 이라고 쓰여 있다. 혹은, $\hat{x}(k|k-1)$ 이라고 쓰기도 한다. 또, 사후 추정값을 $\hat{x}(k)$ 로 나타냈지만, 가타야마 교수의 해설에서는 $\hat{x}_{k/k}$ 라고 써있다. 혹은, $\hat{x}(k|k)$ 라고 쓰는 경우도 있다. 결국엔 쓰는 사람의 취향 문제인데, 저자는 $\hat{x}^-(k)$ 라고 쓰는 것이 조금이라도 공간이 절약되고 기호가 보기 쉽다고 생각해 이 기호를 운영하고 있다.

그림 5에 나타낸 것처럼, 사전 추정값을 경유하는 것은 언뜻 길을 돌아가는 것처럼 생각될지도 모르지만, 상태 추정값의 시간 갱신이 2단계로 되어 있는 이점이 크다. 예를 들어 센서가 고장나거나 계측하고자 하는 것이 그림자에 가려져서 관측값을 얻을 수 없는 경우에는 Step 1의 예측 단계만을 실시하고, Step 2를 건너뛰면 된다. 비선형 칼만

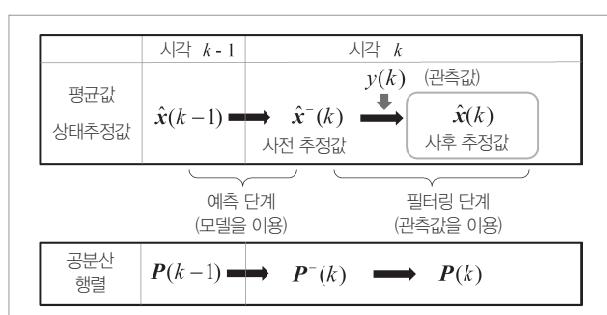
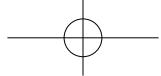


그림 5 칼만 필터의 시간 갱신



필터 등에서 그 시각의 모델 관측 가능성이 낮은 경우에는 거꾸로 Step 1을 빼먹어도 된다.

3. 선형 칼만 필터의 알고리즘

이하에서 선형 칼만 필터의 알고리즘을 부여하기로 한다.

[초기값] 상태 추정값의 초기값 $\hat{x}(0)$ 은 정규성 확률 벡터로 하고

$$\hat{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{P}(0) = \gamma \mathbf{I}$$

로둔다. 여기서 $\gamma \geq 0$ 은 조정 파라미터이다. 또한, 시스템 잡음 분산 σ_v^2 와 관측잡음 분산 σ_w^2 를 설정한다. 이들도 조정 파라미터이다.

[시간 갱신식] $k = 1, 2, \dots, N$ 에 대해서 식을 계산한다.

Step 1: 예측 단계

$$\text{사전 상태 추정치 } \hat{x}^-(k) = \mathbf{A}\hat{x}(k-1) \quad (10)$$

사전 오차 공분산 행렬

$$\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}^T + \sigma_v^2\mathbf{b}\mathbf{b}^T \quad (11)$$

Step 2: 필터링 단계

$$\text{칼만 게인 } \mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c}}{\mathbf{c}^T\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c} + \sigma_w^2} \quad (12)$$

상태 추정값

$$\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + \mathbf{g}(k)(y(k) - \mathbf{c}^T\hat{x}^-(k)) \quad (13)$$

사후 오차 공분산 행렬

$$\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T)\mathbf{P}^-(k) \quad (14)$$

칼만 필터에 의한 상태 추정의 블록 다이어그램은 **그림 6**과 같다. 포인트는 시계열을 기술하는 선형 시스템의 상태 방정식을 칼만 필터에서 이용함으로써 시계열의 추정값 $\hat{y}(k)$ 를 생성하고, 실제 시계열 $y(k)$ 를 비교해서 그 차인 예측 오차(이노베이션이라 불리기도 한다)에 칼만 게인을 곱

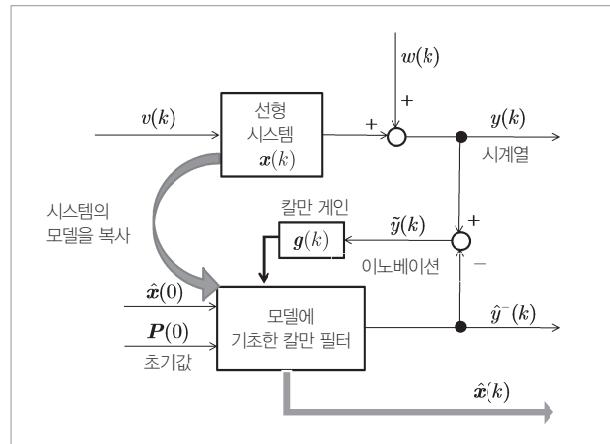


그림 6 시계열 데이터를 칼만 필터에 의해 상태추정한 모습

해서 피드백하는 구성을 하고 있는 것이다.

4. 정상 칼만 필터

식 (11), (14)에서 사전 오차 공분산 행렬 \mathbf{P}^- 에 관한 차분 방정식

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^-(k) &= \mathbf{A} [\mathbf{P}^-(k-1) \\ &\quad - \frac{\mathbf{P}^-(k-1)\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{P}^-(k-1)}{\mathbf{c}^T\mathbf{P}^-(k-1)\mathbf{c} + \sigma_w^2}] \mathbf{A}^T + \sigma_v^2\mathbf{b}\mathbf{b}^T \end{aligned} \quad (15)$$

를 얻을 수 있으며, 이것은 리카치방정식이라 불린다. 정상 상태에서는 사전 오차 공분산 행렬은 일정한 값이 되므로,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^-(k) = \mathbf{P}^-(k-1) \quad (16)$$

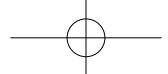
으로 두고 이것을 식 (15)에 대입하면,

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \left[\mathbf{P} - \frac{\mathbf{P}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{P}}{\mathbf{c}^T\mathbf{P}\mathbf{c} + \sigma_w^2} \right] \mathbf{A}^T + \sigma_v^2\mathbf{b}\mathbf{b}^T \quad (17)$$

를 얻었다. 이것은 대수 리카치방정식이라 불린다.

식 (17)의 해를 \mathbf{P}^* 로 하면 정상 카르만 게인은 식 (12)에서 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{P}^*\mathbf{c}}{\mathbf{c}^T\mathbf{P}^*\mathbf{c} + \sigma_w^2} \quad (18)$$



Technology Focus

로 주어진다. 이와 같이 사전에 칼만 게인을 계산해 둘 수 있다.

어떤 때에 대수 리카치방정식의 해가 존재하느냐가 문제이지만, 시계열을 기술하는 상태공간 표현에 있어서 (A, b) 가 제어 가능, (c, A) 가 관측 가능이면, $k \rightarrow \infty$ 일 때 $P^-(k)$ 는 $P^* > 0$ 으로 수렴해 정상 칼만 필터는 점근 안정이 된다고 알려져 있다^(주1).

수치 예

수치 예로서 백색잡음을 이산 시간 적분해서 얻을 수 있는 이산 시간 위너 과정을 대상으로 하자. 이때 계열을 상태공간으로 표현하자면,

$$x(k+1) = x(k) + v(k) \quad (19)$$

$$y(k) = x(k) + w(k) \quad (20)$$

를 얻을 수 있다. 여기에서 변수는 모두 스카라이다. 또, 시스템 잡음 $v(k)$ 는 평균값이 0, 분산 σ_v^2 의 정규성 백색잡음, 관측잡음 $w(k)$ 는 평균값이 0, 분산 σ_w^2 의 $v(k)$ 는 독립적인 정규성 백색잡음이다. 이 경우, 계수행렬, 벡터도 모두 스칼라가 되어 $A=1$, $b=1$, $c=1$ 이다.

$A=1$ 이므로 칼만 필터의 시간 갱신식에서 $\hat{x}^-(k) = \hat{x}(k-1)$ 이 되는 것에 주의하면 칼만 필터의 시간 갱신식은 다음과 같다.

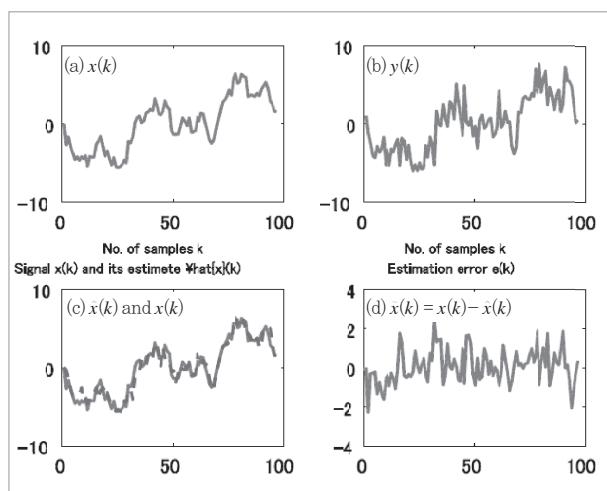


그림 7 아산시간 위너(Wiener) 과정의 수치 예

$$p^-(k) = p(k-1) + \sigma_v^2 \quad (21)$$

$$g(k) = \frac{p^-(k)}{p^-(k) + \sigma_w^2} \quad (22)$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k-1) + g(k)(y(k) - \hat{x}(k-1)) \quad (23)$$

$$p(k) = (1 - g(k))p^-(k) \quad (24)$$

여기에서 변수는 모두 스카라이기 때문에 소문자로 표기했다.

$\sigma_v^2 = 1$, $\sigma_w^2 = 2$, $\hat{x}(0) = 0$, $p(0) = 0$ 으로 했을 때의 수치 시뮬레이션 결과는 그림 7과 같다. 그림에 왼쪽 상단의 (a)이 상태 $x(k)$, 즉 시계열 참값, 오른쪽 상단의 (b)가 관측값 $y(k)$, 왼쪽 하단의 (c)가 상태 추정값 $\hat{x}(k)$ 와 상태 $x(k)$ 를 겹쳐 쓴 것, 그리고 오른쪽 하단의 (d)가 상태 추정 오차의 시간 이력이다. 이 그림으로부터 칼만 필터에 의해서 상태가 잘 추정되고 있음을 알 수 있다.

이 예에서는 식 (17)에서 부여한 리카치방정식은

$$p^2 - p - 2 = 0 \quad (25)$$

이 된다. 이 2차방정식의 근은 $p = 2, -1$ 이 되고, 양의 근을 선택해 $p = 2$ 로 한다. 이것을 식 (18)에 대입해서 칼만 게인을 구하면, $g = 0.5$ 가 나온다.

이 칼만 게인의 정상값을 이용해서 설계된 칼만 필터의 성질을 알아보자. 식 (23)에 칼만 게인의 값을 대입하면,

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k-1) + 0.5(y(k) - \hat{x}(k-1)) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &= 0.5y(k) + 0.5\hat{x}(k-1) = \dots \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} 0.5^{i+1}y(k-i) \end{aligned} \quad (27)$$

이것은 시계열 데이터 $y(k)$ 를 지수 평활하고 있음을 나타내고 있다. 또, 식 (26)을 초기값을 0으로 하여 z 변환하면, $y(k)$ 에서 $\hat{x}(k)$ 까지의 전달함수

$$G(z) = \frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (28)$$

를 얻을 수 있다. 이것은 1차 LPF로이며, 그 주파수 특성

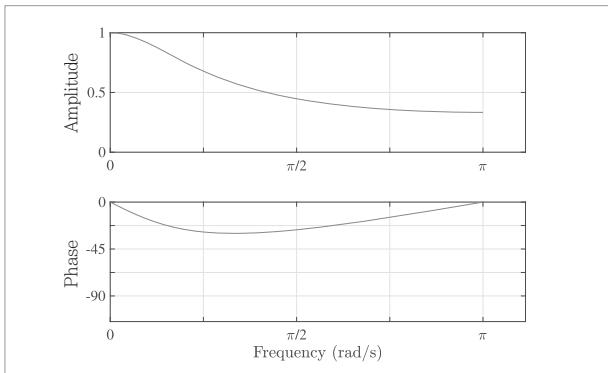
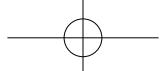


그림 8 설계된 칼만 필터의 주파수 특성(위: 진폭 특성, 아래: 위상 특성)

은 그림 8과 같다. 그림의 진폭 특성으로부터 확실히 저역 통과 특성을 가짐을 알 수 있다. 또한, 그림의 위상 특성으로부터 위상 지연이 적다는 것도 분명하다.

설계된 필터 $G(z)$ 가 그림 1에서 ‘필터’로 표기한 부분이며, 칼만 필터 이론을 이용해도 잡음을 제거하는 LPF가 설계되었다. 또한, 이 수치 예에서 필터의 차수는 1이면 되며,

또한 필터의 컷오프 주파수도 자동적으로 칼만 필터가 설계해준 점은 중요하다.

맺음말

여기서는 시계열의 상태공간 표현의 선형성과 상태와 잡음의 정구성이라는 가정 하에 가장 기본적인 선형 칼만 필터에 대해 해설했다.

칼만 필터는 대상이 되는 시계열과 시스템 모델에 기초한 접근으로, 이용하는 모델의 정밀도가 그대로 칼만 필터의 성능에 반영된다. 칼만 필터를 실제 문제에 응용할 때, 가장 중요한 것은 대상의 모델링임을 마지막으로 강조해 두고자 한다.

(주1) 엄밀하게는 (A, b)가 제어 가능이라는 조건은 안정 가능이라고 할 수 있는 조건이고, (c, A)이 관측 가능이라는 조건은 검출 가능 조건이면 된다고 알려져 있다.

FOCUS 연세대 연구팀, NI 솔루션 활용해 ‘실시간 유연이중 기술’ 개발

국내 연구진이 내쇼날인스트루먼트(이하 NI)의 솔루션을 활용해 5G, B5G 통신 시스템에 적용 가능한 ‘실시간 유연이중(Real-Time Flex-Duplex Radio)’ 기술을 개발했다. 연세대학교 김성률 교수, 채찬병 교수 연구팀은 지난 12월 4일부터 8일까지 싱가포르에서 열린 ‘국제전기전자공학회 글로브컴 2017(IEEE GLOBECOM 2017)’의 NI 부스에서 이 기술을 선보였다.

연구팀은 5G, B5G에서 6GHz 이하 스펙트럼이 중요하다는 점을 놓치지 않았다. 6GHz 이하 스펙트럼에서도 기존 전파 상황을 센싱해 사용되지 않는 대역을 파악하고 상황에 따라 전이중, 반이중 등 여러 듀플렉싱 기술을 유연하게 활용하는 주파수 지원 공유 기반 실시간 다중계층 유연이중 기술 개발에 성공한 것.

이 기술의 시연을 위해 연구팀은 센싱된 채널 정보를 멀리 위치한 서버로 전송해 확률지도를 생성했고 이 연산 결과를 다시 전산 시스템에 전송받아 유연이중 기술을 적용했다. 특히 이번 개발과 시연을 위해 채널 센싱에는 NI USRP-RIO를, 실제 송수신에는 NI PXI 기반 FlexRIO와 NI 5791 트

랜시버를 사용했다.

이 실시간 유연이중 기술을 통해 연구팀은 기존 전이중 기술 대비 최대 두 배 빠른 네트워크 레벨 전송율을 달성했다. 즉, 현재 반이중 기반 LTE 시스템에 비해 추가 주파수 할당 없이 4배 속도를 달성한 것이다.

이로써 수조원에 달하는 주파수 경매 비용을 절감할 수 있으며, 5G/B5G에 한 걸음 더 다가갈 수 있게 되었다. 또한 여기에 다중안테나 기술을 접목하면 더 빠른 전송율을 달성할 수 있다.

이번 기술 개발로 한국이 차세대 이동통신 표준화를 주도하고 관련 기술을 앞서 상용화할 수 있는 토대가 마련되었다고 볼 수 있다.

채 교수 연구팀은 아시아 최초로 NI의 리드유저 프로그램에 참여하고 있으며, NI의 솔루션을 사용하여 2014년 실시간 전이중 기술, 2015년 LG전자와 함께 실시간 다중안테나 전이중 기술을 세계 최초로 시연한 바 있다. 또한 2016년에는 광대역 전이중 기술과 렌즈 기반 밀리미터파 기술을 선보였다.