Pattern Recognition HW #1

20151415 김성수

Ⅰ.이론 및 Code 구현 방법

① Maximum likelihood estimation

Gaussian density model : $p(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}(x-\mu)^t\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]$

주어진 Sample들의 분포가 각 feature 마다 dimension Gaussian density model을 따른다고 가정할 때, maximum likelihood estimation(이하 MLE)을 통해 model의 parameter인 mean과 variance을 구하고자 한다. 이는 liklihood function 의 값을 maximize하는 parameter를 찾음으로써 구할 수 있으며, 과정은 다음과 같다.

Likelihood of mean,variance with respect to the set of samples

parameter $\theta = (\theta_1, \theta_2)^t$ $\theta_1 = \text{mean}$, $\theta_2 = \text{variance}$ 라 할때,

$p(D|\theta) = \prod_{k=1}^{n} p(x_k|\theta)$ 을 최대화하는 θ를 찾아야 한다. 이 때 단조증가함수인 log를 취하여 곱을 합으로 표현하면, (log-likelihood function)

$$l(\theta) \equiv \ln(p(D|\theta))$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \ln p(x_k|\theta), \quad \hat{\theta} = \arg\max\, l(\theta) \text{ 라 하면 } \theta = \hat{\theta} \text{ 일때}$$

$$\nabla_\theta l(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \nabla_\theta \ln p(x_k|\theta) = 0 \text{ 이다.}$$

Gaussian density model 에 대한 log likelihood function은

$$\ln p(x_k|\theta) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi\theta_2 - \frac{1}{2\theta_2}(x_k-\theta_1)^2 \text{ 이고}$$

$$\nabla_\theta l = \nabla_\theta \ln p(x_k|\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_2}(x-\theta_1) \\ -\frac{1}{2\theta_2} + \frac{(x_k-\theta_1)^2}{2\theta_2^2} \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_2}(x_k-\theta_1) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2\theta_2} + \frac{(x_k-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right) = 0 \text{ 이 되게 하는}$$

θ_1, θ_2 값이 곧 maximum likelihood mean 과 variance 가 된다.

따라서

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \;(=\hat{\mu}), \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\hat{\mu})(x_k-\hat{\mu})^t \;(=\hat{\Sigma}) \text{ 이다.}$$

위에서 볼 수 있듯이, sample들의 mean과 variance가 곧 MLE를 통해 추정한 Gaussian 분포의 mean과 variance임을 알 수 있다. 이러한 parameter estimation이 올바른지 확인하기 위해 log-likelihood function이 최대 값을 가지게 하는 θ_1,θ_2 값을 찾고 sample들의

mean, variance와 비교해 보았다. 위 수식전개에선 미분을 사용하여 log-liklihood function의 1차 미분식의 값을 0으로 만들어 주는 θ_1, θ_2를 찾았지만 code로 미분을 구현할 수 없으므로(∵연속적인 parameter 변화를 구현할 수 없으므로) grid search를 통해 최적의 θ_1, θ_2를 찾았다.

② Code 구현

Code상으로 구현한 과정을 나열하면 다음과 같다.

1) Gaussian density model

```
def Gaussian_density_probability(mean, variance, data):

    sigma = sqrt(variance)
    temp = data-mean
    temp = temp/sigma
    Gaussian_constant = 1 / sqrt(2 * pi)
    probability = (Gaussian_constant/sigma)*exp(-(1/2)*(np.power(temp,2)))

    return probability
```

```
def multi_dimension_Gaussian_density_probability(mean,cov_matrix,data,dimension):

    det = np.linalg.det(cov_matrix)
    if det <0 :
        probability = np.zeros((data.shape[1],data.shape[1]))
    elif det >0:
        cov_inverse = np.linalg.inv(cov_matrix)
        temp = data- mean
        constant = 1/((sqrt(2*pi)**dimension)*sqrt(det))
        probability =constant*exp((-1/2)*np.dot(np.dot(temp.T,cov_inverse),temp))

    return probability
```

1차 Gaussian model과 multi-dimension gaussian model을 구현한 코드이다. 이를 따로 구현한 이유는, multi-dimension gaussian model의 covariance matrix에서 발생 가능한 예외사항을 따로 처리하기 위함이다.(뒤에서 자세히 논한다.)

2) Log-likelihood function

```
def log_likelihood_function(probability):
    log_probability = log(probability)
    log_probability_sum = np.sum(log_probability,axis=0)
    return log_probability_sum
```

Log likelihood function 으로, Gaussian density model에서 계산한 probability에 log를 취한 후 값을 summation하여 반환 한다.

3) Mean, variance value for grid search

```
mean_resolution_1 = 100
mean_resolution_2 = 100
mean_resolution_3 = 100
var_resolution_1 = 10
var_resolution_2 = 10
var_resolution_3 = 10

mean_value1 = np.linspace(-1,1,num=mean_resolution_1,endpoint=False)
mean_value2 = np.linspace(-0.61,-0.6,num=mean_resolution_2,endpoint=False)
mean_value3 = np.linspace(-1,-0.9,num=mean_resolution_3,endpoint=False)

var_value1 = np.linspace(4, 4.5, num=var_resolution_1, endpoint=False)
var_value2 = np.linspace(4, 4.5, num=var_resolution_2, endpoint=False)
var_value3 = np.linspace(0.3, 1, num=var_resolution_3, endpoint=False)
```

Grid search를 할 때 필요한 mean, variance를 생성하기 위해 numpy의 linspace 함수를 사용하였다. 이를 통해 mean과 variance가 특정 범위 내에서 일정한 간격으로 생성될 수 있도록 하였으며, 이를 vector화 하여 Gaussian model에 대입하였다. 대입할 mean, variance의 시작, 끝 범위와 resolution을 정할 수 있으므로 이론 값 근처에서 결과 값을 도출 하였다.

전체 code에서 이런 식으로 grid search에 사용된 변수는 최대 6개 이며, 그 이유는 Gaussian density 모델의 dimension이 높아 질수록 covariance matrix를 구성하는 원소들의 개수가 많아지기 때문이다. 예를 들어 3차 gaussian density 모델의 covariance matrix는 3x3 으로 총 9개의 원소를 가지는데, 대칭행렬이므로 6개의 변수를 통해 지정할 수 있다.

4) 최대값 산출 방법

```
def maximum_likelihood_mean_2d(mean_value_1,mean_value_2,cov_mat,data):

    mean_value = Mean_matrix_2d(mean_value_1,mean_value_2)
    result_buffer = np.zeros((mean_value.shape[0]))
    for index,mean in enumerate(mean_value):
        probability = multi_dimension_Gaussian_density_probability(mean.reshape((2,1)),cov_mat,data,2)
        prob_diag = np.diag(probability)
        result_buffer[index] = log_likelihood_function(prob_diag)

    MLE_mean = mean_value[np.argmax(result_buffer)]

    return MLE_mean
```

위 그림은 MLE mean을 산출하는 함수이다. 먼저, 3)에서 대입할 mean 값들의 범위와 resolution을 정한 후 이들을 Gaussian model에 대입하여 log likelihood 값을 계산 한다. 이 후, 계산된 값들 중 최대 값을 가지는 mean 값을 반환 한다. 예를 들어,2 dimension gaussian model에 대해 추정해야 하는 mean 값은 2개 이므로, 각 mean에 대해 10개의 grid를 생성하였다면 총 100쌍의 mean vector에 대해 log likelihood를 계산 한다. 이 값들은 result_buffer라는 array에 저장된 후, 저장된 값들 중 최대 값을 갖는 mean vector를 찾아 MLE mean으로 추정 한다. Variance와 covariance matrix 또한 같은 방식으로 MLE 값을 추정 한다. (단, dimension이 높아져 연산 결과를 한 array에 저장하기 힘든 경우 divde and conquer 방식으로 분할 연산을 하였다.)

Ⅱ. 구현 결과

① (문제 (a)) w_1의 각 feature x_1,x_2,x_3 에 대해 μ,σ^2 추정

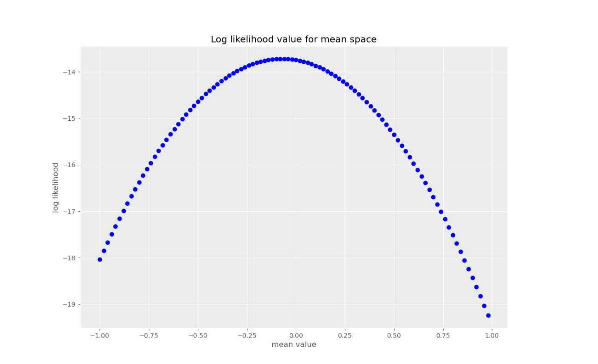
```
mean_resolution_1 = 100
mean_value1 = np.linspace(-1,1,num=mean_resolution_1,endpoint=False)

var_resolution_1=50
var_resolution_2=50
var_resolution_3=50

var_value1 = np.linspace(0.8, 1.2, num=var_resolution_1, endpoint=False)
var_value2 = np.linspace(4, 4.5, num=var_resolution_2, endpoint=False)
var_value3 = np.linspace(4.5, 4.7, num=var_resolution_3, endpoint=False)
var_value = np.vstack((var_value1,var_value2,var_value3))

for index in range(data.shape[0]):
    MLE_mean =maximum_likelihood_mean(mean_value1,1,index)
    MLE_variance = maximum_likelihood_variance(MLE_mean,var_value[index],index)
    print("Feauter index : ",index+1)
    print("Mean : ",MLE_mean)
    print("Variance : ", MLE_variance)
```

MLE mean 값은 variance를 1로 고정한 후, mean값을 -1부터 1까지의 값을 100개로 나누어 대입하여 얻은 값 중 최대 값을 산출하여 구하였다. 마찬가지로, MLE variance의 값은 앞서 구한 MLE mean 값과 함께 각 feature마다 특정 범위 내에서 50개로 나눈 값을 대입한 후 최대 값을 산출하여 구하였다. 실제 data set의 mean, variance 값과 resolution에 따른 추정 값 변화는 다음과 같다.

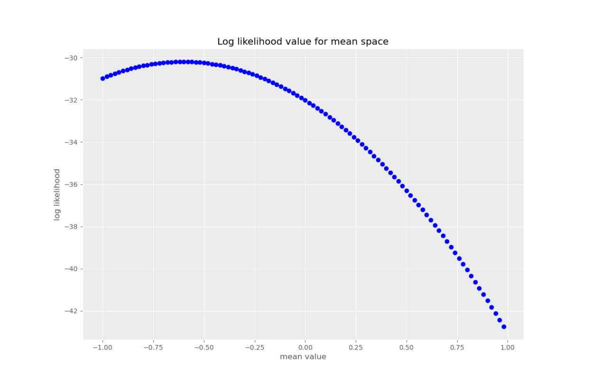
Resolution (Mean =100, Var =50)	Resolution (Mean =500, Var =500)
Problem (a) Feature index : 1 Mean : -0.07999999999999996 Variance : 0.904 Feature index : 2 Mean : -0.6 Variance : 4.2 Feature index : 3 Mean : -0.92 Variance : 4.5440000000000005	Problem (a) Feature index : 1 Mean : -0.07199999999999995 Variance : 0.9064 Feature index : 2 Mean : -0.604 Variance : 4.201 Feature index : 3 Mean : -0.912 Variance : 4.542

	x1	x2	x3
Sample mean	**-0.0709**	**-0.6047**	**-0.9110**
MLE mean(resolution:100)	-0.0799	-0.6	-0.92
MLE mean(resolution:500)	-0.07199	-0.604	-0.912
Sample variance	**0.9062**	**4.2007**	**4.5419**
MLE var(resolution:50)	0.904	4.2	4.5440
MLE var(resolution:500)	0.9064	4.201	4.542

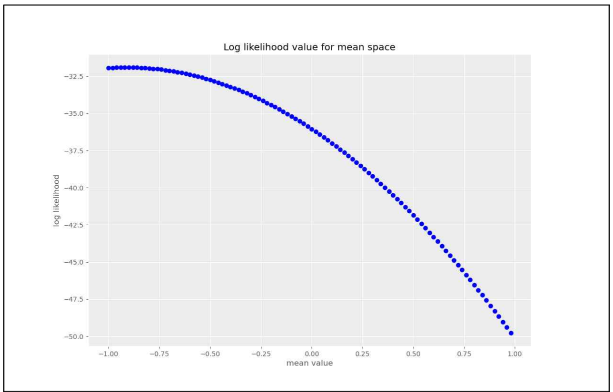
위 표에 나타난 것과 같이, linspace의 resolution이 증가할수록(= grid의 간격이 줄어들수록) 실제 sample mean, variance 값에 근접한 값으로 추정하는 것을 알 수 있었다. linspace를 통해 만들어진 mean 값들(mean space)의 변화에 따른 log likelihood function 값을 plot하면 다음과 같다.



x1 (MLE mean:-0.0709, MLE var:1)



x2 (MLE mean:-0.6047,MLE var:1)



x3 (MLE mean:-0.9110,MLE var: 1)

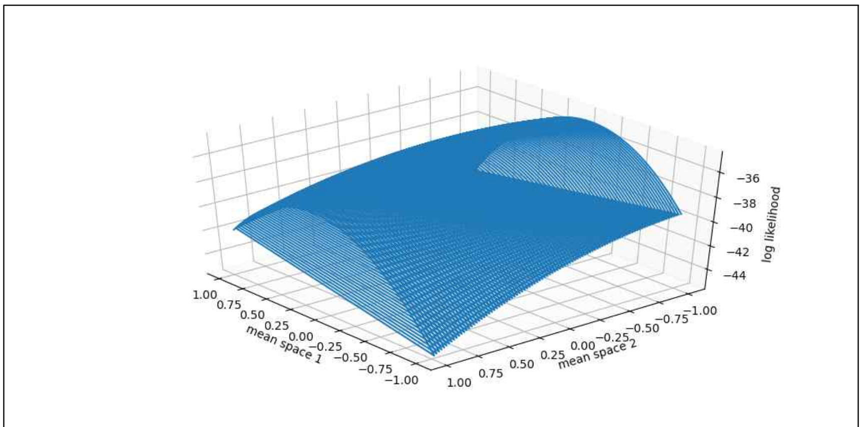
위 plot들로 부터 알 수 있듯이, MLE mean 값에서 log likelihood 값은 최대값을 가진다.

② (문제 (b)) w_1의 각 feature 쌍 $(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_3)$ 에 대해 two dimension mean vector 와 covariance matrix Σ 추정

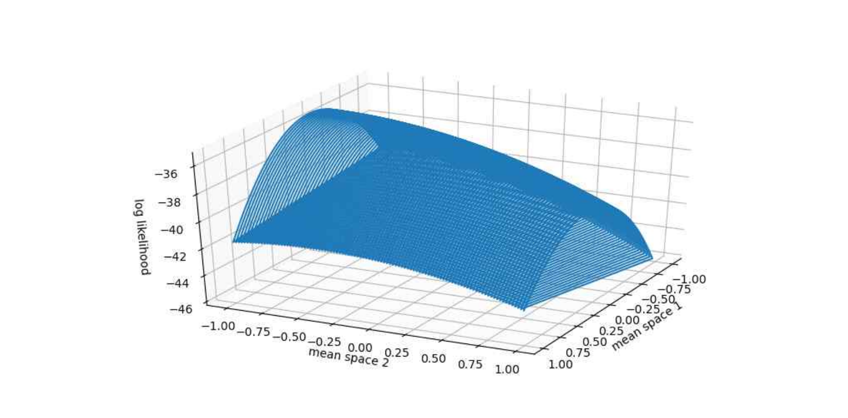
multi- dimension Gaussian model 은 mean vector 와 covariance matrix를 추정해야 하는데, 먼저 식의 covariance matrix를 각 feature data간의 covariance matrix로 고정한 후 mean vector를 추정하였다.

```
Cov_mat1 = Covariance_matrix_2d(data[0],data[1])
Cov_mat2 = Covariance_matrix_2d(data[0],data[2])
Cov_mat3 = Covariance_matrix_2d(data[1],data[2])

MLE_mean1 = maximum_likelihood_mean_2d(mean_value1,mean_value2,Cov_mat1,data[0:2])
MLE_mean2 = maximum_likelihood_mean_2d(mean_value1,mean_value3,Cov_mat2,np.vstack((data[0],data[2])))
MLE_mean3 = maximum_likelihood_mean_2d(mean_value2,mean_value3,Cov_mat3,data[1:])
print("MLE mean for feature 1,2 : ",MLE_mean1)
print("MLE mean for feature 1,3 : ",MLE_mean2)
print("MLE mean for feature 2,3 : ",MLE_mean3)

var_resolution_1 = 30
var_resolution_2 = 30
var_resolution_3 = 30

var_value1 = np.linspace(0.8, 1.2, num=var_resolution_1, endpoint=False)
var_value2 = np.linspace(4, 4.5, num=var_resolution_2, endpoint=False)
var_value3 = np.linspace(0.5, 0.7, num=var_resolution_3, endpoint=False)
MLE_variance1 = maximum_likelihood_var_2d(MLE_mean1,data[0:2])
print("MLE Covariance matrix for feature 1,2 : ")
print(MLE_variance1)
```

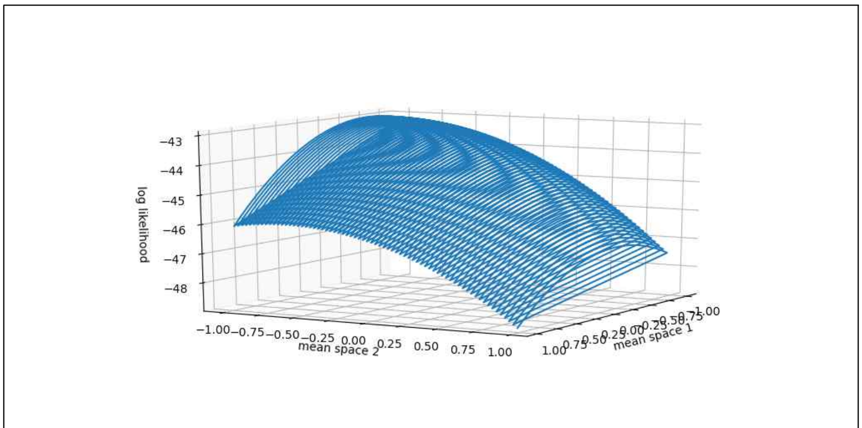
각 data 쌍의 mean space 변화 값에 따른 log likelihood 값을 시각화 하면 다음과 같다.



x1,x2 (MLE mean:-0.072,-0.6054)



x1,x3 (MLE mean:-0.072,-0.911)



x2,x3 (MLE mean:-0.6047,-0.911)

이 후, 앞서 구한 MLE mean vector와 임의로 지정한 covariance matrix를 대입하여 최대값을 산출하는 covariance matrix를 구하였다. Covariance matrix를 임의로 지정한 방법은 다음과 같다.

$$Cov = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(x,y) & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var\,linspace_1 & Var\,linspace_2 \\ Var\,linspace_2 & Var\,linspace_3 \end{bmatrix}$$

Covariance matrix는 대칭 행렬이므로, 2 x 2 matrix를 결정하기 위해선 3개의 값이 필요하다. linspace로 3개의 grid를 생성한 후, 각 값들을 대입하여 matrix를 생성한다. 예를 들어, 위 그림의 경우 각 linspace 마다 30개의 variance 값을 가지므로 총 27000개의 covariance matrix를 생성 하여 대입한 것이다. (Var_matrix_2d, Var_matrix_3d 라는 함수로 정의하여 구현하였다.) 그러나 이렇게 covariance matrix를 무작위로 생성하여 대입하면 문제가 생기게 되는데 , 바로 matrix의 determinant가 음수가 되는 경우가 발생한다는 것이다. 2차 Covariance matrix의 determinant 는 $|\Sigma| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - cov(x,y)^2$ 이며, 이 값은 음수가 될 수 없다. 증명은 다음과 같다.

$\sigma_x^2\sigma_y^2 - Cov(x,y)^2 \geq 0$ 증명. (2차 Covariance matrix의 determinant)

$$\Leftrightarrow \frac{Cov(x,y)^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \leq 1$$

$$\frac{Cov^2(x,y)}{\sigma_x^2\sigma_y^2} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_k-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_k-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right\}^2$$

Cauchy-Schwarz Inequality : $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ 에 의해

$$\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_k-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right\}^2 \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2$$ 이다.

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k-\mu_x}{\sqrt{n}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k-\mu_y}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2 = 1$$ 이므로

$\frac{Cov^2(x,y)}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \leq 1$ 이 성립한다.

따라서 2차 Covariance matrix의 determinant는 항상 0보다 크거나 같다.

따라서 설정한 grid의 임의의 조합을 통해 만들어진 matrix 중 determinant 값이 음수 인 것은 covariance matrix가 될 수 없으므로 제외 시켜주어야 한다. 이를 위해, Ⅰ-②에서 언급하였던 것과 같이 multi Gaussian density function의 연산에 대해선 covariance matrix의 determinant의 부호를 판단하는 과정이 선행되어야 한다. 각 feature 쌍들의 MLE 결과값은 다음과 같다.

```
Problem (b)
MLE mean for feature 1,2 :  [-0.072  -0.6054]
MLE mean for feature 1,3 :  [-0.072 -0.911]
MLE mean for feature 2,3 :  [-0.6047 -0.911 ]
MLE Covariance matrix for feature 1,2 :
[[0.90666667 0.56666667]
 [0.56666667 4.2       ]]
MLE Covariance matrix for feature 1,3 :
[[0.90666667 0.394     ]
 [0.394      4.54      ]]
MLE Covariance matrix for feature 2,3 :
[[4.2        0.73333333]
 [0.73333333 4.54333333]]
```

문제 (a)에서 구한 MLE mean과 variance의 값들과 유사한 값이 나온 것을 통해, 올바르게 추정된 것을 알 수 있다.

③ (문제 (c)) w_1의 feature 쌍 (x_1, x_2, x_3) 에 대해 three dimension mean vector와 covariance matrix Σ 추정

문제 (b)를 해결한 방식과 같은 방식으로 mean과 covariance matrix를 추정하였다. 다른 점

```python
print("============================================================")
print("Problem (c)")
MLE_mean_3d = maximum_likelihood_mean_3d(mean_value1,mean_value2,mean_value3,data)
print("Mean : ",MLE_mean_3d)
print("Covariance matrix:")
print(maximum_likelihood_var_3d(MLE_mean_3d,data))
print("Sample covariance matrix")
print(Covariance_matrix_3d(data[0],data[1],data[2]))
print("============================================================")
```

```
Problem (c)
Mean :  [-0.08   -0.6048 -0.912 ]
Covariance matrix:
[[0.906  0.568  0.39  ]
 [0.568  4.2008 0.73  ]
 [0.39   0.73   4.54  ]]
Sample covariance matrix
[[0.90617729 0.56778177 0.3940801 ]
 [0.56778177 4.20071481 0.7337023 ]
 [0.3940801  0.7337023  4.541949  ]]
```

이 있다면, 3x3 covariance matrix를 추정하는데 6개의 grid 조합이 필요하므로 resolution이 증가함에 따라 가능한 조합의 수는 6승의 크기로 증가하기 때문에, grid의 range를 기존보다 작게 설정하고 resolution의 크기를 낮추어 추정치의 정확도를 유지하였다. Mean vector 는 문제 (a)와 문제 (b)에서 추정한 값과 비슷하게 추정되었으며, covariance matrix 또한 sample의 covariance matrix와 비교하였을 때 값이 일치함을 알 수 있었다.

④ (문제 (d)) w_2의 feature x_1, x_2, x_3가 서로 독립이라고 가정하고 (Covariance matrix가 diagonal 하다고 가정) three dimension mean vector와 covariance matrix Σ 추정

Covariance matrix가 diagonal 해야 하므로, mean vector를 추정할 때엔 covariance matrix를 identity matrix로 가정하였다. 이후, MLE mean vector를 이용하여 covariance matrix를 추정할 때엔 문제 (c) 와 같은 방법을 사용하되 아래 코드와 같이 대각성분이 아닌 성분들의 grid 범위를 0으로 설정하여 주었다.

```python
var_value_31 = np.linspace(0., 0., num=var_resolution_1, endpoint=False)  # [1,3]
var_value_32 = np.linspace(0., 0., num=var_resolution_2, endpoint=False)  # [2,3]
var_value_33 = np.linspace(0., 0., num=var_resolution_3, endpoint=False)  # [1,2]
```

```
Problem (d)
Mean :  [-0.12  0.44  0.  ]
Covariance matrix:
[[0.054  0.     0.    ]
 [0.     0.046  0.    ]
 [0.     0.     0.0074]]
Sample Covariance matrix:
[[ 0.05392584 -0.01465126 -0.00517993]
 [-0.01465126  0.04597009  0.00850987]
 [-0.00517993  0.00850987  0.00726551]]
```

위의 추정된 결과로 부터, covariance matrix의 대각 성분은 sample covariance matrix의 대각성분과 일치하는 것을 알 수 있다. 수식을 통해 covariance matrix가 diagonal 할때의 mean likelihood estimation을 전개해 보면 다음과 같다.

$$p(x|\mu, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_d^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1} (x-\mu)\right]$$

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 \ddots & \\ 0 & & \sigma_d^2 \end{bmatrix}$ 일때 $|\Sigma| = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \cdots \cdot \sigma_d^2$ 이다.

($\because$ 대각행렬의 determinant는 0이 아닌 원소들의 곱이므로)

또한 $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_d^2} \end{bmatrix}$ 이므로,

$$p(x|\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \cdots, \sigma_d^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \left(\prod_{i=1}^{d} \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \mu_i)^2\right]$$ 이된다.

log likelihood function $l(\theta)$는

$$l(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \ln p(x|\mu, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_d^2)$$

$$= -\frac{nd}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{d} \log \sigma_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n} (x_i^{(j)} - \mu_i)^2$$ 이므로

각 parameter μ_k 와 σ_k^2 에 대해 이 식을 미분하면,

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n} (x_i^{(j)} - \mu_i) \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_i^2} = -\frac{n}{2\sigma_i^2} + \frac{1}{2\sigma_i^4} \sum_{j=1}^{n} (x_i^{(j)} - \mu_i)^2 \cdots ②$$

① 식이 0 이 되는 $\hat{\mu}_i$의 값은. $\frac{1}{\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{n}(x_i^{(j)} - \hat{\mu}_i) = 0$, $\hat{\mu}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^{(j)}$ 이다.

② 식이 0 이 되는 $\hat{\sigma}_i^2$의 값은 $-\frac{n}{2\sigma_i^2} + \frac{1}{2\sigma_i^4}\sum_{j=1}^{n}(x_i^{(j)} - \hat{\mu}_i)^2 = 0$.

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i^{(j)} - \hat{\mu}_i)^2$$ 이다.

따라서, $\hat{\mu}_i$는 sample mean과 같고, $\hat{\sigma}_i^2$는 sample variance 와 같다.

이를 통해, Gaussian model이 각 feature들에 대해 seperable 하게 mean과 variance를 추정하기 때문에 feature 간 covariance 값에 관계 없이 각 feature의 variance (=대각 성분) 추정 값은 같다는 것을 알 수 있다.

⑤ (문제 (e)) 각 w_i의 feature x_1, x_2, x_3에 대해 maximum likelihood mean vector 를 추정한 후, sample mean vector와 비교하기

```
Problem (e)
dataset 1 mean vector:  [-0.0709 -0.6047 -0.911 ]
MLE mean of dataset 1:  [-0.08 -0.6  -0.92]
Difference:  [0.0091 0.0047 0.009 ]
dataset 2 mean vector:  [-0.1126   0.4299   0.00372]
MLE mean of dataset 2:  [-0.12  0.44  0.  ]
Difference:  [0.0074  0.0101  0.00372]
dataset 3 mean vector:  [0.2747 0.3001 0.6786]
MLE mean of dataset 3:  [0.28 0.32 0.68]
Difference:  [0.0053 0.0199 0.0014]
```

위 그림은 sample data의 mean vector와 MLE mean vector, 그 둘의 차이 값을 나열한 것이다. 이를 통해 log likelihood function 값을 최대화 하는 mean 값과 sample mean 값

이 거의 일치함을 알 수 있다. Grid search 방식을 통해 찾았기 때문에 약간의 오차가 존재하지만, grid의 resolution을 높일 수록 오차는 0에 수렴한다.

⑥ (문제 (f)) 각 w_i의 feature x_1,x_2,x_3에 대해 maximum likelihood covariance matrix를 추정한 후, sample covariance matrix와 비교하기

<table>
<tr>
<td>dataset 1 Cov matrix:
[[0.90617729 0.56778177 0.3940801]
 [0.56778177 4.20071481 0.7337023]
 [0.3940801 0.7337023 4.541949]]
MLE Cov matrix of dataset 1:
[[0.906 0.568 0.39]
 [0.568 4.2008 0.73]
 [0.39   0.73   4.54]]
Difference:
[[1.7729e-04 2.1823e-04 4.0801e-03]
 [2.1823e-04 8.5190e-05 3.7023e-03]
 [4.0801e-03 3.7023e-03 1.9490e-03]]</td>
<td>dataset 2 Cov matrix:
[[0.05392584 -0.01465126 -0.00517993]
 [-0.01465126 0.04597009 0.00850987]
 [-0.00517993 0.00850987 0.00726551]]
MLE Cov matrix of dataset 2:
[[0.054 -0.014 -0.0052]
 [-0.014   0.046   0.0084]
 [-0.0052 0.0084 0.0074]]
Difference:
[[7.416000e-05 6.512600e-04 2.007200e-05]
 [6.512600e-04 2.991000e-05 1.098720e-04]
 [2.007200e-05 1.098720e-04 1.344944e-04]</td>
<td>dataset 3 Cov matrix:
[[0.30186081 0.40474153 -0.18042342]
 [0.40474153 0.64496409 -0.20130386]
 [-0.18042342 -0.20130386 1.26214164]]
MLE Cov matrix of dataset 3:
[[0.32 0.42 -0.2]
 [0.42 0.64 -0.23]
 [-0.2 -0.23 1.28]]
Difference:
[[0.01813919 0.01525847 0.01957658]
 [0.01525847 0.00496409 0.02869614]
 [0.01957658 0.02869614 0.01785836]]</td>
</tr>
<tr>
<td>w_1</td>
<td>w_2</td>
<td>w_3</td>
</tr>
</table>

위 표는 sample data의 covariance matrix와 MLE covariance matrix, 그 둘의 차이 값을 나열한 것이다. 이를 통해 log likelihood function 값을 최대화 하는 covariance 값과 sample covariance 값이 거의 일치함을 알 수 있다. 문제 (e) 와 (f)에 대한 증명은 I -①에서 다루었다.