

Вторая задача очень простая — одна формула из учебника. Даже нет алгоритмики. Сдавать будем сразу два задания.

Теория — стр. 28-36; 86-88; 88-91; 92-96

## Задание r3z1

**Построение точечной оценки.**

Есть выборка. Знаем семейство распределения.

$$X^{(n)} = (x_1, \dots, x_n), X_i \sim F(\theta)$$

$\theta$  — неизвестный параметр, число и вектор

Хотим построить  $\hat{\theta}(X^{(n)})$ . Оценка должна попадать в интервал.

Два метода: максимальное правдоподобие и моментов. ММП не всегда работает.

### 1. Метод максимального правдоподобия.

Рассмотрим функцию плотности. Она будет

совместная. 
$$f_{x^{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

Формально, для дискретного распределения функции плотности не существует. Но есть соглашение:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{P}(X = x); \\ f_{x^n}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \end{aligned}$$

Программировать почти не надо. На листочке нужно принести расписывание и вывода формулы для точечной оценки. Решаем в общем виде. Потом общую формулу вносим в программу и загружаем в неё наши данные, получаем значение оценки. Нужно различать оценку (функция) и значение оценки.

Дана ф.плот или распределения, доп параметры, метод оценки.

$f_{x^{(n)}}(x_1, \dots, x_n \mid \theta) = L(\theta)$  — функция правдоподобия

Оценкой максимального правдоподобия называется:  $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta \mid X^{(n)}, X^{(n)})$  —

фиксированная.

Алгоритм:

1. Записать функцию правдоподобия. Всё отталкивается от неё. Будут нюансы, на консультации нужно будет поспрашивать! Иначе — каверзные вопросы. Функцию правдоподобия все способны найти.

*Тут я вышел на 5 минут*

Если  $\theta$  — дискретна, то:

1.  $L'(\theta)$
2.  $L'(\theta) = 0 \implies \theta_0$  — крит.точка
3. II.  $L'(\theta_0 - \varepsilon) > 0, L'(\theta_0 + \varepsilon) < 0$   
III.  $L''(\theta_0) < 0$

Часто вместо функции правдоподобия используется логарифмическая функция  $\alpha(\theta) = \ln L(\theta)$ . Нужно для использования формулы логарифма произведения.

## 2. Метод моментов.

Если для  $g(x)$  существует  $\mathbb{E} g(x) = a(\theta)$ , то из ЗБЧ

следует: выборочные моменты сходятся к теоретическим  $\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} a(\theta) \right)$ .

Например:

$$\theta = (\theta_1, \theta_2)$$

II.  $X$  — абс. непрер.

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \int_{\chi} x f(x | \theta) dx \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \int_{\chi} x^2 f(x | \theta) dx \end{cases}$$

III.  $X$  — дискр.

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{x_i \in \chi} x_k \times p_k \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{x_i \in \chi} x_k^2 \times p_k \end{cases}$$

В зависимости от моментов, которые мы выбрали, ответы будут разные.

MLE — метод максимального правдоподобия.

МОМЕ — метод момента.

## Задание r3z2

## Интервальное оценивание

Построить оценивающее множество.  $A(X^{(n)})$  — доверительное множество для параметра  $\theta$ .

$$\mathbb{P}(\theta \in A(X^{(n)})) \geq p^* (= 1 - \alpha);$$

$p^*$  — коэф. доверия;

$Q = (1 - \alpha) \times 100\%$  — надёжность доверительного интервала.

Три вида доверительных интервалов:

II. Двусторонний:  $\mathbb{P}(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) \geq 1 - \alpha; (\underline{\theta}, \bar{\theta})$

III. Правосторонний:  $\mathbb{P}(\underline{\theta} < \bar{\theta}); (\underline{\theta}, +\infty)$  (нижняя доверительная граница)

IIII. Левосторонний:  $\mathbb{P}(\theta < \bar{\theta}) \geq 1 - \alpha; (-\infty, \bar{\theta})$  (верхняя доверительная граница)

Для двустороннего вычисляем верхнюю и нижнюю доверительную границу для коэф. надёжности  $1 - \frac{\alpha}{2}$

Может спросить: строили дов. интервал для мат ожидания норм. распределения. Нужна верхняя дов. граница. Откуда эта формула берётся?! По методу опорной функции недостаточно. Основную мысль нужно рассказать.

