26. Сходимость по вероятности

Последовательность случайных величин $\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots$, сходится по вероятности к случайной величине ξ_0 , если $\forall\, \varepsilon > 0$ выполняется:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi_0| > \varepsilon\} = 0.$$

27. Сходимость по распределению (слабая)

Последовательность случайных величин $\xi_n,\ n = 1, 2, \ldots$, сходится к случайной величине ξ_0:

1. слабо, если для любой ограниченной непрерывной функции h

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[h(\xi_n)] = \mathbb{E}[h(\xi_0)];$$

2. по распределению, если сходятся соответствующие функции распределения

$$\lim_{n \to \infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\xi_0}(x)$$

в каждой точке непрерывности функции $F_{\xi_0}(x)$.

28. Центральная предельная теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с математическим ожиданием $\mu = \mathbb{E}[\xi_i]$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}[\xi_i]}$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mu) \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, dy$$

29. Закон больших чисел

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с математическим ожиданием $\mu = \mathbb{E}[\xi_i]$. Тогда (по вероятности):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu, \implies \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i - \mu \right| > \varepsilon \right\} = 0, \ \forall \varepsilon > 0$$

30. Теорема Слуцкого

Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится слабо к случайной величине ξ_0, последовательность случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$ сходится слабо к константе C. Тогда:

1.

$$\xi_n + \eta_n \rightsquigarrow \xi_0 + C$$

2.

$$\xi_n \times \eta_n \rightsquigarrow C\,\xi_0$$

3.

$$\frac{\xi_n}{\eta_n} \rightsquigarrow \frac{\xi_0}{C}$$

4.

$$\frac{\eta_n}{\xi_n} \rightsquigarrow \frac{C}{\xi_0}$$