Вторая задача очень простая — одна формула из учебника. Даже нет алгоритмики. Сдавать будем сразу два задания.

Теория — стр. 28-36; 86-88; 88-91; 92-96

Задание r3z1

Построение точечной оценки.

Есть выборка. Знаем семейство распределения.
$X^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$, $X_i \sim F(\theta)$
θ — неизвестный параметр, число и вектор

Хотим построить $\overset{\wedge}{\theta}(X^{(n)})$. Оценка должна попадать в интервал.

Два метода: максимальное правдоподобие и моментов. ММП не всегда работает.

1. **Метод максимального правдоподобия.**
   Рассмотрим функцию плотности. Она будет совместная. $f_{x^{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$

Формально, для дискретного распределния функции плотности не сущетсвует. Но есть соглашение:

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x);$$

$$f_{x^n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Программировать почти не надо. На листочке нужно принести расписывание и вывода формулы для точечной оценки. Решаем в общем виде. Потом общую формулу вносим в программу и загружаем в неё наши данные, получаем значение оценки. Нужно различать оценку (функция) и значение оценки.

Дана ф.плот или распределения, доп параметры, метод оценки.

$f_{x^{(n)}}(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) = L(\theta)$ — функция правдоподобия

Оценкой максимального правдоподобия называется: $\overset{\wedge}{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}\, L(\theta \mid X^{(n)})$, $X^{(n)}$ —

фиксированная.

Алгоритм:

1. Записать функцию правдоподобия. Всё отталкивается от неё. Будут нюансы, на консультации нужно будет поспрашивать! Иначе — каверзные вопросы. Функцию правдоподобия все способны найти.

Тут я вышел на 5 минут

Если θ — дискретна, то:

1. $L'(\theta)$
2. $L'(\theta) = 0 \implies \theta_0$ — крит.точка
3. $\mathbb{I}$. $L'(\theta_0 - \varepsilon) > 0$, $L'(\theta_0 + \varepsilon) < 0$
   $\mathbb{II}$. $L''(\theta_0) < 0$

Часто вместо функции правдоподобия используется логарифмическая функция $\alpha(\theta) = \ln L(\theta)$. Нужно для использования формулы логарифма произведения.

2. **Метод моментов.**
   Если для $g(x)$ существует $\mathbb{E}\, g(x) = a(\theta)$, то из ЗБЧ

следует: выборочные моменты сходятся к теоретическим $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} a(\theta)\right)$.

Например:

$\theta = (\theta_1, \theta_2)$

$\mathbb{I}$. X — абс. непрер.

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \int_{\chi} x\, f(x \mid \theta)\, dx \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \int_{\chi} x^2\, f(x \mid \theta)\, dx \end{cases}$$

$\mathbb{II}$. X — дискр.

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{x_i \in \chi} x_k \times p_k \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{x_i \in \chi} x_k^2 \times p_k \end{cases}$$

В зависимости от моментов, которые мы выбрали, ответы будут разные.

MLE — метод максимального правдоподобия.

MOME — метод момента.

Задание r3z2

Интервальное оценивание

Построить оценивающее множество. $A(X^{(n)})$ — доверительное множество для параметра θ.
$\mathbb{P}\big(\theta \in A(X^{(n)})\big) \geq p^*(= 1 - \alpha)$;
p^* — коэф. доверия;
$Q = (1 - \alpha) \times 100\%$ — надёжность доверительного интервала.

Три вида доверительных интервалов:
$\mathbb{I}$. Двусторонний: $\mathbb{P}(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}) \geq 1 - \alpha$; $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$

$\mathbb{II}$. Правосторонний: $\mathbb{P}(\underline{\theta} < \overline{\theta})$; $(\underline{\theta}, +\infty)$ (нижняя доверительная граница)

$\mathbb{III}$. Левосторонний: $\mathbb{P}(\theta < \overline{\theta}) \geq 1 - \alpha$; $(-\infty, \overline{\theta})$ (верхняя доверительная граница)

Для двустороннего вычисляем верную и нижнюю доверительную границу для коэф. надёжности $1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Может спросить: строили дов. интервал для мат ожидания норм. распределния. Нужна верняя дов. граница. Откуда эта формула берётся?! По методу опорной функции недостаточно. Основную мысль нужно рассказать.