Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Algorithmik WS 15/16

Moritz Eissenhauer

Hasso-Plattner-Institut
Potsdam
14. November 2015

Lösung zu Übungsblatt XX

Lösung zu Aufgabe 2

a)

$I(\sigma) = \{(1,3),(1,7),(3,7),(4,5),(4,7),(4,8),(5,7),(5,8),(6,7),(6,8)\}$

b)

$\sigma = n, n-1, n-2, ..., 1$ hat $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Fehlstände

c)

ZZ. $I(\sigma) \neq \emptyset \Rightarrow \exists 1 \leq i < n : (i, i+1) \in I(\sigma)$

Beweis. Durch widerspruch:
WA: $I(\sigma) \neq \emptyset \wedge \neg\exists 1 \leq i < n : (i, i+1) \in I(\sigma)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall 1 \leq i < n : (i, i+1) \notin I(\sigma)\\
&\Rightarrow \forall 1 \leq i < n : \sigma(i) \leq \sigma(i+1)\\
&\Rightarrow \forall 1 \leq i < j < n : \sigma(i) \leq \sigma(j)\\
&\Rightarrow \sigma = \{1, 2, ..., n\}\\
&\Rightarrow I(\sigma) = \emptyset\\
&\quad \hookrightarrow \text{Widerspruch zu WA}
\end{aligned} \tag{1}$$

Da WA zum Widerspruch führ muss *ZZ* gelten. □

d)

ZZ. Insertsort mit $A = [\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)]$ hat laufzeit $\mathcal{O}(n + |I(\sigma)|)$

Beweis. Beweis Induktiv:
IA: $I(\sigma) = \emptyset \Rightarrow$ Es gibt keine Fehlstände. Das heißt A ist schon sortiert und die Laufzeit von Insertsort ist $T = c_1 n + c_2 \in \mathcal{O}(n)$
IV: *ZZ* gelte für ein beliebiges $K = I(\sigma)$.
IS: Sei $K' = K \cup \{(k,l)\}$ mit $1 \leq k < l \leq n$.
Falls $(k,l) \in K$ ist $K' = K$ und die Laufzeit verändert sich nicht.
Falls $(k,l) \notin K$ verändert sich die Iterationszahl des for-Loops nicht. Die des while-Loops veränders sich auch nicht für $i < l$, da alle Vergleiche gleih ausfallen wie bei K. ...... □