— Verslag P&O CW 2019–2020 Taak 5 —

Department Computerwetenschappen – KU Leuven 4 november 2019

Team 12	
Frédéric Blondeel	26h
Martijn Debeuf	h
Toon Sauvillers	h
Dirk Vanbeveren	h
Bert Van den Bosch	h
Seppe Van Steenbergen	1h

Inhoudsopgave

1 Introductie

Wanneer schermen herkent en geïdentificeerd zijn, moeten ze ook nog aan elkaar gelinkt worden. Hiervoor zal eerst elk scherm zijn eigen positie toegewezen krijgen. Daarna kan aan de hand van deze positie zijn buren bepaald worden. Dit kan dan gebruikt worden om bijvoorbeeld een slang van scherm naar scherm te laten bewegen. Delaunay triangulatie is hiervoor een goede manier om de juiste buren te vinden. Dit verslag behandeld de keuzes die gemaakt zijn alsook een uitleg bij het gebruikte algoritme en zijn tijdscomplexiteit. De mogelijke beperkingen worden met deze kennis geduid.

2 Delaunay triangulatie

Om verschillende punten mooi te verbinden, kan er gebruik worden gemaakt van een Delaunay triangulatie. Deze triangulatie wordt toegepast op de middenpunten van de schermen. Wanneer deze triangulatie op de schermen wordt geprojecteerd, zullen de liggingen van de schermen mooi worden weergegeven. Bij een Delaunay triangulatie worden alle punten zo verbonden dat ze verscheidene driehoeken vormen. De zijden van de driehoeken mogen niet overlappen en de kleinste hoek in de triangulatie moet gemaximaliseerd worden. [1]

De triangulatie kan op vele manieren worden berekend, in dit verslag zijn er twee soorten algoritmen onderzocht. Het S-hull algoritme en het Boyler-Watson algoritme.

2.1 S-hull

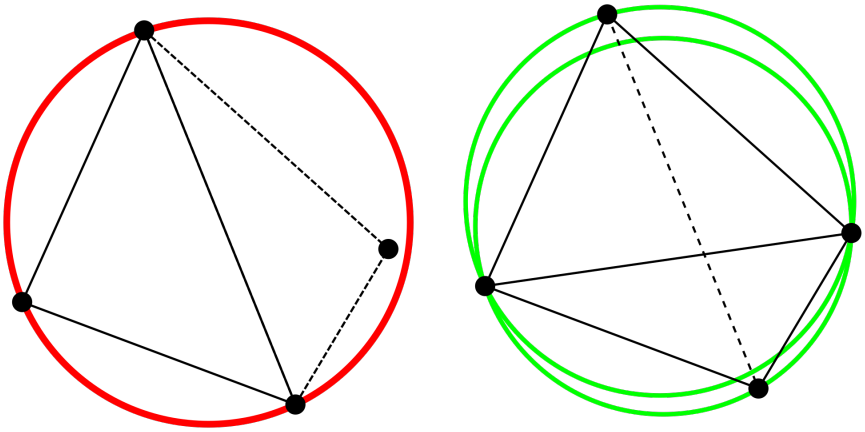
Het eerste algoritme is het S-hull algoritme. Het is een $O(nlog(n))$ algoritme, gebruikmakend van een radiaal propagerende sweep hull. S-hull start met twee punten, één daarvan is willekeurig geselecteerd. Het tweede punt is het dichtsbijzijnde. Vervolgens zal er een derde worden gezocht dat samen met de twee voorgaande een zo klein mogelijke cirkel maakt. Het middenpunt van deze cirkel wordt gebruikt om alle punten te sorteren t.o.v. de afstand met het gevonden middenpunt. Deze gesorteerde punten zullen één voor één toegevoegd worden aan de triangulatie.

Nadat ze sequentieel zijn toegevoegd, is er een niet overlappende triangulatie bekomen. Om een Delaunay triangulatie te bekomen moet er echter ook gekeken worden naar de hoeken. Elke driehoek zal nu worden afgegaan en er wordt gekeken of er geen andere driehoek kan gevormd worden met de buurdriehoeken zodat de minimale hoek gemaximaliseerd wordt, zie figuur 1. [2]

Dit algoritme is echter niet gebruikt. Ook al is het algoritme $O(nlog(n))$ het vereist een zeer goede data management om deze snelheid te behalen. [3] Er is daarom gekozen voor een simpeler algoritme, namelijk het Boyler-Watson algoritme.

2.2 Bowyer-Watson

Het Bowyer-Watson algoritme is wel geïmplementeerd. Het heeft een tijdscomplexiteit van $O(n^2)$, dit is aanzienlijk trager dan het S-hull algoritme. [4] Het vereist echter een minder complex data management en is daarom ook makkelijker te implementeren. De tijdscomplexiteit is ook relatief te zien, er zijn namelijk maar maximaal detecteerbare 120 schermen. Meer kunnen er door het identificatiemechanisme niet worden gevonden. Gezien het laag aantal punten, moet het algoritme niet nodeloos complex worden en kan er gekeken worden naar 'tragere' algoritmen, zoals het Bowyer-Watson algoritme.



(a) De twee buurdriehoeken blijken niet ideaal te zijn.

(b) De twee buurdriehoeken maximaliseren met een andere verbinding de kleinste hoek.

Figuur 1: Het maximaliseren van de kleinste hoek [1]

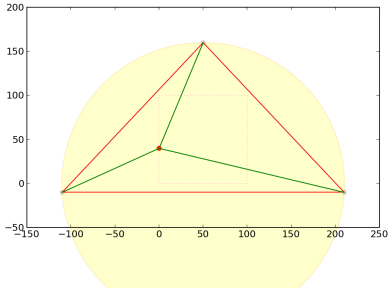
Bowyer-Watson gaat er van uit dat punten enkel worden toegevoegd in een al bestaande Delaunay triangulatie. Als eerste worden er twee superdriehoeken gezocht. Deze driehoeken zullen alle te trianguleren punten bevatten. De implementaties waarop het algoritme is gebaseerd [4] [5] stelden beiden een 'superdriehoek' voor, zie figuur 2a Echter is het simpeler om een omkaderende vierhoek te vormen en deze te splitsen in twee driehoeken. Vervolgens worden alle punten één voor één toegevoegd.

Voor elk punt worden de driehoeken gezocht waarvan het punt in de omschreven cirkel zit. Wanneer twee driehoeken eenzelfde zijde delen, wordt deze verwijderd. Alle punten van de omschreven veelhoek van de twee driehoeken worden nu verbonden met het toegevoegde punt, zie figuur 2b. Met deze werkwijze zal er op elk moment een Delaunay triangulatie zijn en moeten de driehoeken achteraf niet meer overlopen worden. Dit maakt het data management minder complex.

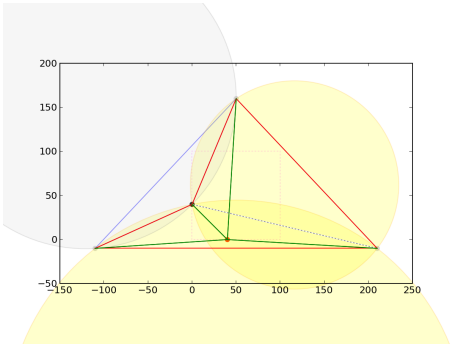
Als alle punten zijn toegevoegd, worden de driehoeken die één of meer hoeken van de omkaderende vierhoek bevatten verwijderd, zie figuur 2c. Aangezien deze driehoeken aan de buitenkant liggen is dit toegestaan. Er zal een Delaunay triangulatie overblijven van alle onderzochte punten.

3 Testen

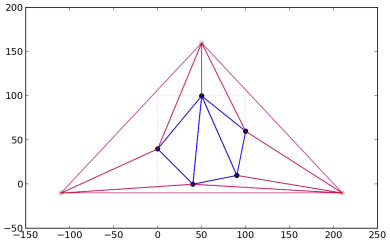
Voor de correctheid van het Bowyer-Watson algoritme zijn bepaalde subalgorimen heel belangrijk. Zo is er een subalgoritme om te controleren dat een punt wel degelijk in een cirkel ligt. Deze wordt getest met een paar cases waar het punt in de cirkel, op de cirkel en uit de cirkel ligt. Voor het subalgoritme waar er twee driehoeken gevormd worden die alle punten omvatten wordt er gekeken dat alle punten in één van de twee ligt. Hierbij wordt meetkunde gebruikt. Een punt ligt in een driehoek wanneer het aan dezelfde kant ligt van alle zijden van de driehoek, met alle zijden in éénzelfde richting doorlopen. Dit wordt gecontroleerd met behulp van het kruisproduct tussen de vector van de zijde en de vector van het punt. [6]



(a) De rode superdriehoek waarin alle punten zullen worden toegevoegd.



(b) Een nieuw punt wordt toegevoegd. In geel de omschreven cirkels. De gestippelde zijde wordt verwijderd, de groenen toegevoegd.



(c) In rood alle driehoeken verbonden met de superdriehoek, deze worden uiteindelijk verwijderd.

Figuur 2: Het Bowyer-Watson algoritme [4]

Figuur 3: Van colineaire punten kan geen triangulatie gevonden worden.

Figuur 4: Van bijna colineaire punten kan geen triangulatie gevonden worden door afrondingsfouten bij berekeningen.

4 Valkuilen

In theorie kan er van elke opstelling waarbij de punten niet allemaal colineair zijn een triangulatie worden gevonden, zie figuur 3. Echter door afronding bij de berekeningen zal er bij bijna colineaire punten geen juiste delaunay triangulatie gevonden worden, zie figuur 4.

5 Besluit

De Delaunay triangulatie kan gebruikt worden om buurschermen te detecteren. Het zorgt voor een niet-overlappende triangulatie die de kleinste hoek maximaliseert. Enkel wanneer alle punten colineair zijn of er te weinig punten zijn, zal er geen enkele triangulatie gevonden worden. Met behulp van meetkunde kan er gecontroleerd worden of de juiste aan te passen driehoeken gekozen worden. Een supervierkant vervangt de superdriehoek zoals gebruikt in de bronnen.

Referenties

[1] Delaunay triangulation. https://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation.

[2] David Sinclair. S-hull: a fast sweep-hull routine for delaunay triangulation. s-hull.org, 2010.

[3] Erik Thune Lund. Implementing high-performance delaunay triangulation in java. mathesis, Department of Informatics, University of Oslo, 2014.

[4] Bowyer-watson algorithm. https://en.wikipedia.org/wiki/Bowyer%E2%80%93Watson_algorithm.

[5] S.W. Sloan and G.T. Houlsby. An implementation of watson's algorithm for computing 2-dimensional delaunay triangulations. Technical report, Department of Civil Engineering, University of Newcastle and Department of Engineering Science, University of Oxford, 1984.

[6] Dirk Roose. *Toepassingen van meetkunde in de informatica*. Scientica Cursusdienst, 2007.