算法设计与分析——背包问题

实验名称：	算法设计与分析——0-1 背包
姓　　名：	熊宇
班　　级：	2018211302
学　　号：	2018210074
学 院(系)：	计算机学院
专　　业：	计算机科学与技术

2020 年　11 月 11 日

一、　问题描述

1. 编写满足下面要求的 0-1 背包算法，（必做）

   0-1 背包问题：物品 i 或者被装入背包，或者不被装入背包，设 x_i 表示物品 i 装入背包的情况，则当 x_i=0 时，表示物品 i 没有被装入背包，x_i=1 时，表示物品 i 被装入背包。根据问题的要求，有如下约束条件和目标函数：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C \\ x_i \in \{0,1\} \quad (1 \le i \le n) \end{cases} \qquad \text{（式1）}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \qquad \text{（式2）}$$

   寻找一个满足约束条件式 1，并使目标函数式 2 达到最大的解向量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

   （1）证明该问题满足最优子结构；
   （2）给出递推式子；
   （3）基于动态规划实现算法；
   （4）分析算法的复杂度。

2. 屋上架屋实现对上述 0-1 背包问题的改进。

   （1）上述算法要求所给物品的重量必须是整数，而实际处理问题时无法避免物品的重量是小数的情况，试编写一个能够处理重量为小数的情况。
   （2）当背包容量 c 很大时，算法需要计算的时间很大，该算法的时间复杂度在 c>2^n 时为 n*c；在算法中，注意到 m(i,j)是阶梯状单调不减函数。请试图改进该算法，提高算法复杂度。

二、 问题分析

1. 初步部分

（1） 证明该问题满足最优子结构

证明：设有 x1，x2，…，xn 共 n 个物品，他们的重量为 w1，w2，…，wn，他们的价值为 v1，v2，…，vn。背包可容纳最大重量为 C。

设（y1,y2,…,yk-1）是 x1~xn 的一个最优解，我们可以推断：

① 如果 yk=1，那么 m[k-1][MaxWeight-wk]+vk>m[k-1][MaxWeight]。

我们假设 m[k-1][MaxWeight-wk]+vk<=m[k-1][MaxWeight]，那么就有 m[k][MaxWeight]= m[k-1][MaxWeight-wk]+vk<=m[k-1][MaxWeight]，就有（y1,y2,…,yk-1）不是最优解，与前提矛盾。

② 如果 yk=0，那么 m[k-1][MaxWeight-wk]+vk<=m[k-1][MaxWeight]。

证明同上。

（2） 给出递推式子

$$m(i,j)=\begin{cases} 0, & i=0\ or\ j=0 \\ m(i-1,j), & 0\le j<wi \\ \max\{m(i-1,j), m(i-1,j-wi)+vi\}, & j\ge wi \end{cases}$$

（3） 基于动态规划实现算法

我们可以采用一个二维数组去解决：m[i][j]，其中 i 代表加入背包的是前 i 件物品，j 表示背包的承重，m[i][j]表示当前状态下能放进背包里面的物品的最大总价值。那么，m[n][m]就是我们的最终结果了。采用动态规划，必须要知道初始状态和状态转移方程。初始状态很容易就能知道，那么状态转移方程如何求呢？对于一件物品，我们有放进或者不放进背包两种选择：

① 假如我们放进背包，m[i][j] = m[i - 1][j - weight[i]] + value[i]，这里的 m[i - 1][j - weight[i]] + value[i]应该这么理解：在没放这件物品之前的状态值加上要放进去这件物品的价值。而对于 m[i - 1][j - weight[i]]这部分，i - 1 很容易理解，关键是 j - weight[i]这里，我们要明白：要把这件物品放进背包，就得在背包里面预留这一部分空间。

② 假如我们不放进背包，m[i][j] = m[i - 1][j]，这个很容易理解。

因此，我们的状态转移方程就是：m[i][j] = max(m[i][j] = m[i - 1][j] , m[i - 1][j - weight[i]] + value[i])

③ 当然，还有一种特殊的情况，就是背包放不下当前这一件物品，这种情况下 m[i][j] = m[i - 1][j]。

（4） 分析算法的复杂度

从 m[i,j]的递归式容易看出，算法需要 O(nC)计算时间。当背包容量 C 很大时，算法需要的计算时间较多。例如，当 C>2^n 时，算法需要Ω(n2^n)计算时间。

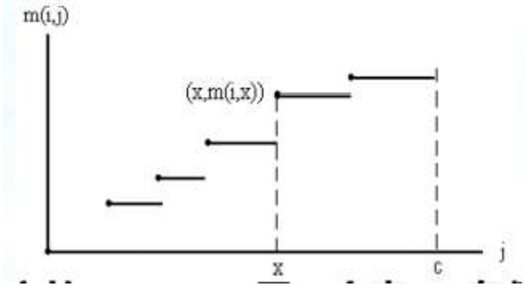
2. 选做部分

（1） 上述算法要求所给物品的重量必须是整数，而实际处理问题时无法避免物品的重量是小数的情况，试编写一个能够处理重量为小数的情况。

将为小数的重量通过整体乘法变成整数，然后回归到最普通的 0-1 背包即可。（以二位小数举例实现）

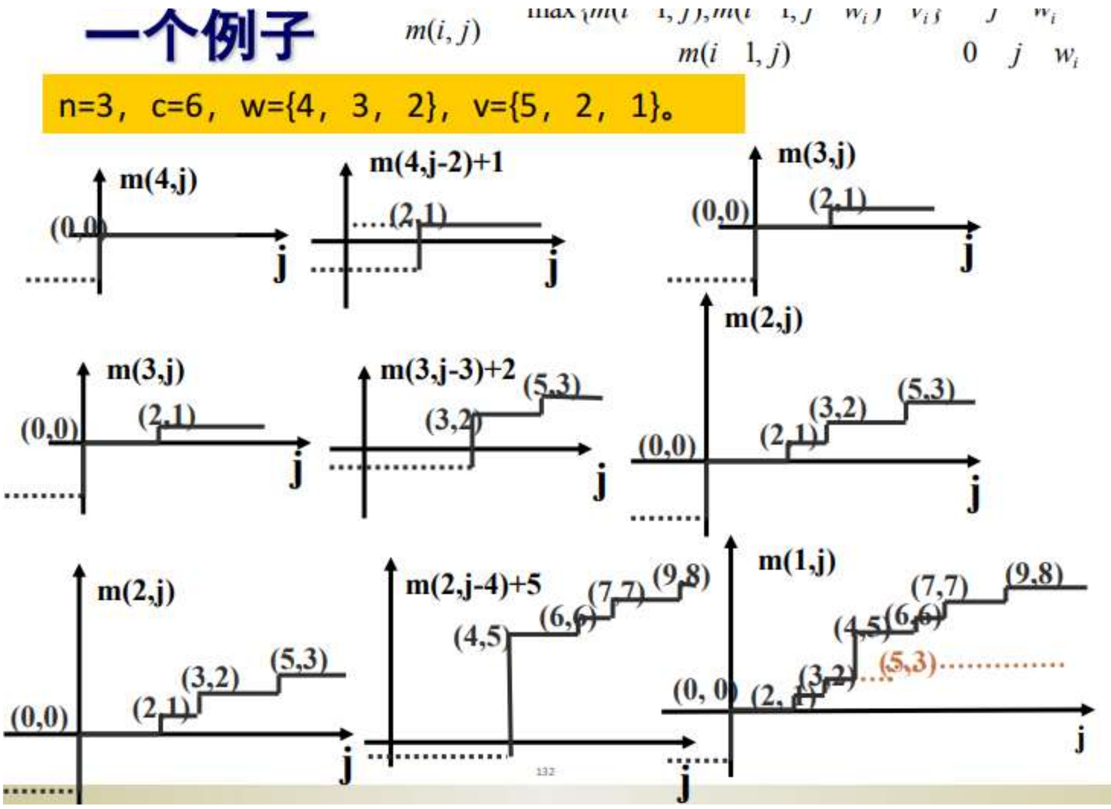
（2） 当背包容量 c 很大时，算法需要计算的时间很大，该算法的时间复杂度在 c>2^n 时为 n*c；在算法中，注意到 m(i,j)是阶梯状单调不减函数。请试图改进该算法，提高算法复杂度。

由 m(i,j)的递归式容易证明，在一般情况下，对每一个确定的 i(1≤i≤n)，函数 m(i,j)是关于变量 j 的阶梯状单调不减函数。跳跃点是这一类函数的描述特征。在一般情况下，函数 m(i,j)由其全部跳跃点唯一确定。如图所示。



对每一个确定的 i(1≤i≤n)，用一个表 p[i]存储函数 m(i，j)的全部跳跃点。表 p[i]可依计算 m(i，j)的递归式递归地由表 p[i+1]计算，初始时 p[n+1]={(0，0)}。

举个例子：



算法改进想法：

•函数m(i,j)是由函数m(i+1,j)与函数m(i+1,j-wi)+vi作max运算得到的。因此，函数m(i,j)的全部跳跃点包含于函数m(i+1，j)的跳跃点集p[i+1]与函数m(i+1，j-wi)+vi的跳跃点集q[i+1]的**并集**中。易知，(s,t)∈q[i+1]当且仅当wi≤s≤c且(s-wi,t-vi)∈p[i+1]。因此，容易由p[i+1]确定跳跃点集q[i+1]如下

q[i+1]=p[i+1]⊕(wi,vi)={(j+wi,m(i,j)+vi)|(j,m(i,j))∈p[i+1]}

•另一方面，设(a，b)和(c，d)是p[i+1]∪q[i+1]中的2个跳跃点，则当c≥a且d<b时，(c，d)受控于(a，b)，从而(c，d)不是p[i]中的跳跃点。除受控跳跃点外，p[i+1]∪q[i+1]中的其它跳跃点均为p[i]中的跳跃点。

•由此可见，在递归地由表p[i+1]计算表p[i]时，可先由p[i+1]计算出q[i+1]，然后合并表p[i+1]和表q[i+1]，并清除其中的受控跳跃点得到表p[i]。

再举个例子：

n=5，c=10，w={2，2，6，5，4}，v={6，3，5，4，6}。

矩阵如下：0

0	6	6	6	6	6	6	6	6	6
0	6	6	9	9	9	9	9	9	9
0	6	6	9	9	9	9	11	11	14
0	6	6	9	9	9	10	11	13	14
0	6	6	9	9	12	12	15	15	15

跳跃点的计算过程如下：

初始时 p[6]={(0,0)}

因此，q[6]=p[6]⊕(w[5],v[5])={(4,6)}

p[5]={(0,0),(4,6)}

q[5]=p[5]⊕(w[4],v[4])={(5,4),(9,10)}

p[5]与 q[5]的并集 p[5]∪q[5]={(0,0),(4,6),(5,4),(9,10)}中跳跃点(5,4)受控于跳跃点(4,6)。

将受控跳跃点(5,4)清除后，得到 p[4] ={(0,0),(4,6),(9,10)}

q[4]=p[4]⊕(6，5)={(6，5)，(10，11)}

p[3]={(0，0)，(4，6)，(9，10)，(10，11)}

q[3]=p[3]⊕(2，3)={(2，3)，(6，9)}

p[2]={(0，0)，(2，3)，(4，6)，(6，9)，(9，10)，(10，11)}

q[2]=p[2]⊕(2，6)={(2，6)，(4，9)，(6，12)，(8，15)}

p[1]={(0，0)，(2，6)，(4，9)，(6，12)，(8，15)}

p[1]的最后的那个跳跃点(8,15)即为所求的最优值，m(n,C)=15

上述算法的主要计算量在于计算跳跃点集 $p[i](1 \le i \le n)$。由于 $q[i+1]=p[i+1] \oplus (w_i, v_i)$，故计算 $q[i+1]$ 需要 $O(|p[i+1]|)$ 计算时间。合并 $p[i+1]$ 和 $q[i+1]$ 并清除受控跳跃点也需要 $O(|p[i+1]|)$ 计算时间。从跳跃点集 $p[i]$ 的定义可以看出，$p[i]$ 中的跳跃点相应于 $x_i,\ldots,x_n$ 的0/1赋值。因此，$p[i]$ 中跳跃点个数不超过 2^{n-i+1}。由此可见，算法计算跳跃点集 $p[i]$ 所花费的计算时间为 $O\left(\sum_{i=2}^{n}|p[i-1]|\right)=O\left(\sum_{i=2}^{n}2^{n-i}\right)=O(2^n)$ 从而，改进后算法的计算时间复杂性为 $O(2^n)$。当所给物品的重量 $w_i(1 \le i \le n)$ 是整数时，$|p[i]| \le c+1$，$(1 \le i \le n)$。在这种情况下，改进后算法的计算时间复杂性为 $O(\min\{nc, 2^n\})$。

三、 源代码

1. 初步部分 11_10. cpp

```
#include <iostream>
#define V 500
using namespace std;
int weight[20 + 1];
int value[20 + 1];
int m[20 + 1][V + 1];
int main()
{
   int n, C;
   cout << "请输入可供选择的物品个数和背包所能容纳的最大容量
"<<endl;
   cin >> n>>C;
   cout << "请分行输入" << n << "个物品的重量和价值, 以空格间隔:"
<< endl;
   for (int i = 1; i <= n; i++)
   {
         cin >> weight[i] >> value[i];
   }
   for (int i = 1; i <= n; i++)
   {
         for (int j = 1; j <= C; j++)
         {
               if (weight[i] > j)
               {
                     m[i][j] = m[i - 1][j];
               }
               else
               {
                     m[i][j] = m[i - 1][j] > m[i - 1][j - weight[i]] + value[i] ? m[i -
1][j] : m[i - 1][j - weight[i]] + value[i];
               }
```

```
        }
    }
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int j=1;j<=C;j++)
        {
            cout<<m[i][j]<<" ";
        }
        cout<<endl;
    }
    cout << "背包能放的最大价值为:" << m[n][C] << endl;
    system("pause");
    return 0;
}
```

2. 选做部分

（1） 上述算法要求所给物品的重量必须是整数，而实际处理问题时无法避免物品的重量是小数的情况，试编写一个能够处理重量为小数的情况。

11_11-2.cpp

```
#include <iostream>
#define V 500
using namespace std;
int weight[20 + 1];
int value[20 + 1];
double FWeight[20+1];
double FValue[20+1];
int m[20 + 1][V + 1];
int main()
{
    int n,C;
    double xc;
    cout << "请输入可供选择的物品个数和背包所能容纳的最大
```

```
容量"<<endl;
    cin >> n>>xc;
    C=xc*100;
    cout << "请分行输入" << n << "个物品的重量和价值，以空
格间隔:" << endl;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        //cin >> weight[i] >> value[i];
        cin >> FWeight[i] >> FValue[i];
        weight[i]=FWeight[i]*100;
        value[i]=FValue[i];
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        for (int j = 1; j <= C; j++)
        {
            if (weight[i] > j)
            {
                m[i][j] = m[i - 1][j];
            }
            else
            {
                m[i][j] = m[i - 1][j] > m[i - 1][j - weight[i]] +
value[i] ? m[i - 1][j] : m[i - 1][j - weight[i]] + value[i];
            }
        }
    }
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int j=1;j<=C;j++)
        {
            cout<<m[i][j]<<" ";
        }
```

```
        cout<<endl;
    }
    cout << "背包能放的最大价值为:" << m[n][C] << endl;
    system("pause");
    return 0;
}
```

（2） 当背包容量 c 很大时，算法需要计算的时间很大，该算法的时间复杂度在 c>2^n 时为 n*c；在算法中，注意到 m(i,j)是阶梯状单调不减函数。请试图改进该算法，提高算法复杂度。

11_11.cpp

```
#include <iostream>

#define V 500
using namespace std;
int weight[20 + 1];
int value[20 + 1];
int m[20 + 1][V + 1];

template<class Type>
int pack(int n,Type c,Type v[],Type w[],int **p,int x[]);
template<class Type>
void trace(int n,Type w[],Type v[],Type **p,int *head,int x[]);

int main()
{
    int n, C;
    cout << "请输入可供选择的物品个数和背包所能容纳的最大容量
"<<endl;
    cin >> n>>C;
    cout << "请分行输入" << n << "个物品的重量和价值，以空格间隔:" <<
endl;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
```

```
  {
        cin >> weight[i] >> value[i];
   }
   int x[20+1]; //针对物品而言，xi 被装进去，就置 1；否则置 0

  int **p=new int *[V];
   for(int i=0;i<V;i++)
   {
        p[i]=new int[2]; //记录跳跃点，第一个 int 存重量，第二个 int 存价值
  }
   cout << "背包能放的最大价值为:" << pack(n,C,value,weight,p,x) << endl;
   cout<<"背包装下的物品编号为：";
for(int i=1; i<=n; i++)
{
if(x[i]==1)
{
cout<<i<<" ";
}
}
cout<<endl;

for(int i=0; i<V; i++)
{
delete p[i];
}

delete[] p;
   system("pause");
   return 0;
}

template<class Type>
```

```
int pack(int n,Type c,Type v[],Type w[],int **p,int x[])
{
int *head = new int[n+2];//下标从 1 开始，记录 n+1 个结点
head[n+1]=0;

p[0][0]=0;//第一个记录重量，第二个记录价值
p[0][1]=0;

// left 指向 p[i+1]的第一个跳跃点，right 指向最后一个，next 指向下一个
跳跃点要存放的位置
int left = 0,right = 0,next = 1;
head[n]=1;

for(int i=n; i>=1; i--)
{
int k = left;//k 指向 p[ ]中跳跃点,移动 k 来判断 p[]与 p[]+（w v）中的受控
点
for(int j=left; j<=right; j++)
{
if(p[j][0]+w[i]>c)
            break;//背包装不下第 i 个物品，直接退出循环
Type y = p[j][0] + w[i],m = p[j][1] + v[i];

//若 p[k][0]较小则(p[k][0] p[k][1])一定不是受控点，将其作为 p[i]的跳跃
点存储
while(k<=right && p[k][0]<y)
{
p[next][0]=p[k][0];
p[next++][1]=p[k++][1];
}

//受控点，不存
if(k<=right && p[k][0]==y)
```

```
{
if(m<p[k][1])//对（p[k][0]    p[k][1]）进行判断
{
m=p[k][1];
}
k++;
}

// 若 p[k][0]>=y 且 m> =p[k][1],判断是不是当前 i 的最后一个跳跃点的受
控点
//若不是跳跃点，则作为 i 的跳跃点存储
if(m>p[next-1][1])
{
p[next][0]=y;
p[next++][1]=m;
}

//若是，则对下一个元素进行判断。
while(k<=right && p[k][1]<=p[next-1][1])
{
k++;
}
}

while(k<=right)
{
p[next][0]=p[k][0];
p[next++][1]=p[k++][1];//将 i+1 剩下的跳跃点作为做为 i 的跳跃点存储
}

        //更改 left 和 right
left = right + 1;
right = next - 1;
```

```
// 第 i-1 个物品第一个跳跃点的位置 head[n]指第 n 个物品第一个跳跃点
的位置
head[i-1] = next;
}

trace(n,w,v,p,head,x); //回溯踪迹，便于输出
return p[next-1][1];
}


template<class Type>
void trace(int n,Type w[],Type v[],Type **p,int *head,int x[])
{
//初始化 j,m 为最后一个跳跃点对应的第 0 列及第 1 列
Type j = p[head[0]-1][0],m=p[head[0]-1][1];
for(int i=1; i<=n; i++)
{
x[i]=0;// 初始化数组；
for(int k=head[i+1]; k<=head[i]-1; k++) // 初始 k 指向 p[2]的第一个跳跃
点（0 0）
{
//判断物品 i 是否装入，装入就置 1
if(p[k][0]+w[i]==j && p[k][1]+v[i]==m)
{
x[i]=1;//物品 i 被装入，则 x[i]置 1
j=p[k][0];
m=p[k][1];
break;
}
}
}
}
```

四、 实验结果及分析

1. 初步部分

```
请输入可供选择的物品个数和背包所能容纳的最大容量
5 10
请分行输入 5 个物品的重量和价值，以空格间隔:
2 6
2 3
6 5
5 4
4 6
0 6 6 6 6 6 6 6 6 6
0 6 6 9 9 9 9 9 9 9
0 6 6 9 9 9 9 11 11 14
0 6 6 9 9 9 10 11 13 14
0 6 6 9 9 12 12 15 15 15
背包能放的最大价值为:15
Press any key to continue . . .
```

2. 选做部分

（1） 上述算法要求所给物品的重量必须是整数，而实际处理问题时无法避免物品的重量是小数的情况，试编写一个能够处理重量为小数的情况。

```
请输入可供选择的物品个数和背包所能容纳的最大容量
5 0.1
请分行输入 5 个物品的重量和价值，以空格间隔:
0.02 6
0.02 3
0.06 5
0.05 4
0.04 6
0 6 6 6 6 6 6 6 6 6
0 6 6 9 9 9 9 9 9 9
0 6 6 9 9 9 9 11 11 14
```

```
0 6 6 9 9 9 10 11 13 14
0 6 6 9 9 12 12 15 15 15
背包能放的最大价值为:15
Press any key to continue . . .
```

（2） 当背包容量 c 很大时，算法需要计算的时间很大，该算法的时间复杂度在 c>2^n 时为 n*c；在算法中，注意到 m(i,j)是阶梯状单调不减函数。请试图改进该算法，提高算法复杂度

```
请输入可供选择的物品个数和背包所能容纳的最大容量
5 10
请分行输入 5 个物品的重量和价值，以空格间隔:
2 6
2 3
6 5
5 4
4 6
背包能放的最大价值为:15
背包装下的物品编号为：1 2 5
Press any key to continue . . .
```

五、 实验心得

在本次背包问题的解决中，我借助于老师上课的讲解和 PPT、互联网的帮助，学习了动态规划中的典型问题——背包问题的设计求解。在学习过程中，我了解到除了最基础的 0-1 背包外，还有完全背包、多重背包等“背包九讲”，对背包九讲有了一定的了解，体会到了动态规划“上帝视角”、万变不离其宗的奇妙之处，受益匪浅。