Лабораторная работа №12

Умножение матриц, транспонирование, решение СЛАУ

Оглавление

Цель

Научиться получать программную реализацию алгоритмов: умножение матрицы на матрицу и матрицы на вектор, транспонирование матриц, решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Инструкция:

Умножение матриц:

Пусть даны две матрицы ***a*** и ***b***. Найти матрицу ***c***, равную произведению исходных матриц.

Правило:

$$A = \{a_{ij}\}, i = 0 \dots n, j = 0 \dots m$$
$$B = \{b_{ij}\}, i = 0 \dots m, j = 0 \dots k$$
$$C = \{c_{ij}\}, i = 0 \dots n, j = 0 \dots k, c_{ij} = \sum_{l=0}^{n} a_{il} b_{lj}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц:

Дана неквадратная матрица ***a***. Получить транспонированную матрицу.

Правило:

строки исходной матрицы становятся столбцами транспонированной.

Примеры:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонированных матриц:

$(A^T)^T = A;$
$(k \cdot A)^T = k \cdot A^T;$
$(A + B)^T = A^T + B^T;$
$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$

Решение СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений) методом Гаусса:

Правило:

Выписать матрицу системы, привести ее к верхнетреугольному виду. Находить последнюю координату решения из последнего уравнения. Подставить в предпоследнее и т д. Найти все координаты решения.

Пример:

Исходная СЛАУ

$$\begin{aligned} 2x_0 + 4x_1 + x_2 &= 36 \\ 5x_0 + 2x_1 + x_2 &= 47 \\ 2x_0 + 3x_1 + 4x_2 &= 37 \end{aligned}$$

СЛАУ в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 47 \\ 37 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x = b$$

Обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 36 \\ 47 \\ 37 \end{bmatrix}$$

Расширенная матрица системы

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 36 \\ 5 & 2 & 1 & 47 \\ 2 & 3 & 4 & 37 \end{bmatrix}$$

«Прямой ход» решения:

Приведение матрицы системы к треугольному виду.

Проводимые манипуляции с матрицей системы отражаются и на правой части

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 47 \\ 37 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -6/2 * [1] \\ -2/2 * [1] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -1,5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -43 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1/8 * [2] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -1,5 \\ 0 & 0 & 3,1875 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -43 \\ 6,3750 \end{bmatrix}$$

«Обратный ход» решения:

Нахождение координат решения.

$$x_2 = \frac{6,3750}{3,1875} = 2$$

$$x_1 = \frac{-43 + 1,5x_2}{-8} = 5$$

$$x_0 = \frac{36 - x_2 - 4x_1}{-8} = 7$$

Найденное решение:

$$x = (\,7\,,5\,,2\,)^T$$

Проверка.

Для проверки корректности найденного решения его необходимо подставить в исходную СЛАУ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*7+4*5+1*2=36 \\ 5*7+2*5+1*2=47 \\ 2*7+3*5+4*2=37 \end{bmatrix}$$

<u>Задача 1:</u>Умножить матрицу на матрицу. Исходные данные считывать с экрана. Результат выводить на экран.

<u>Реализация:</u>

```
//-------main.cpp---------
//Лабораторная работа №12: Умножение матриц, транспонирование, решение СЛАУ

#include <iostream>
#include "matrio.h"
#include "get_matr.h"
#include "min_max_matr.h"
#include "matr_act.h"
#include "solve.h"

#define n 3
#define m 4
#define k 2

using namespace std;

int main()
{
    int **a, **b, **c;

    a=new int *[n];
      for(int i=0;i<n;i++)
        a[i]=new int [m];

    b=new int *[m];
      for(int i=0;i<m;i++)
        b[i]=new int [k];

    c=new int *[n];
      for(int i=0;i<n;i++)
        c[i]=new int [k];

    RandomMatr(a,n,m,-2,2);
    cout<<endl<<"A: "<<endl;
    OutputDescMatr(a,n,m);

    RandomMatr(b,m,k,-2,2);
    cout<<endl<<"B: "<<endl;
    OutputDescMatr(b,m,k);

    Mult(a,b,c,n,m,k);

    cout<<endl<<"C = (A x B) "<<endl<<endl;
    OutputDescMatr(c,n,k);

    for(int i=0;i<n;i++)
        delete[] a[i];
    delete[] a;
    a=NULL;

    for(int i=0;i<m;i++)
        delete[] b[i];
    delete[] b;
    b=NULL;

    for(int i=0;i<n;i++)
        delete[] c[i];
    delete[] c;
    c=NULL;

return 0;
}
```

```
//-------solve.h---------

#ifndef SOLVE_H_INCLUDED
#define SOLVE_H_INCLUDED

void Mult(int **a, int **b, int **c, int n, int m, int m1);

#endif // SOLVE_H_INCLUDED
```

```
//-------solve.cpp---------

void Mult(int **a, int **b, int **c, int n, int m, int m1)
{
int i, j, k;
int s;
    for (i=0; i<n; i++)
        for (j=0; j<m1; j++)
        {   s = 0;
            for (k=0; k<m; k++)
                s = s + a[i][k]*b[k][j];
            c[i][j] = s;
        }
}
```

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Умножить матрицу на вектор.
2. Транспонировать <u>неквадратную</u> матрицу.

Домашнее задание:

<u>БЛОК А</u>

Задание на отметку «удовлетворительно»

Решить СЛАУ и выполнить проверку.

$$\begin{aligned} 2x_0 + 4x_1 + x_2 &= 36 \\ 5x_0 + 2x_1 + x_2 &= 47 \\ 2x_0 + 3x_1 + 4x_2 &= 37 \end{aligned}$$

<u>БЛОК В</u>

Задания на отметку «хорошо»

<u>Инструкция:</u>

Решить СЛАУ методом Гаусса и найти определитель матрицы системы.

Для вычисления определителя матрицы размера три можно воспользоваться правилом:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| = {} & 2\cdot 2\cdot 4 + 5\cdot 3\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 2 - \\ & -1\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot - 5\cdot 4\cdot 4 \quad = \\ = {} & 16 + 15 + 8 - 4 - 6 - 80 \quad = -51 \end{aligned}$$

Или, можно привести матрицу к верхнетреугольному виду. Тогда определителем будет являться произведение диагональных элементов полученной матрицы.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -1,5 \\ 0 & 0 & 3,1875 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{B}| = 2\cdot(-8)\cdot 3,1875 = -51$$

<u>Задание:</u>

Вычислить определитель матрицы СЛАУ:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 13 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \\ 5 & 1 & 25 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 \\ 10 & 2 & 20 \end{pmatrix}$

Вектор правой части СЛАУ заполнен единицами.

<u>БЛОК С</u>

Задания на отметку «отлично»

<u>Инструкция:</u>

Для нахождения обратной матрицы необходимо проверить является ли матрица вырожденной (равен ли определитель нулю). Если определитель не равен нулю, тогда обратная матрица существует.

$$\boldsymbol{A^{-1} \cdot A = E}$$

Обозначим

$$\boldsymbol{C = A^{-1}}$$

Выполняем проверку, а существует ли обратная матрица. Для этого вычисляем определитель.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \ 2\cdot 2\cdot 4 + 5\cdot 3\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-1\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot - 5\cdot 4\cdot 4 \quad =$$

$$= \ 16 + 15 + 8 - 4 - 6 - 80 \quad = -51$$

Тогда для нахождения Снеобходимо решить систему:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Делим систему на три, последовательно решая которые, восстанавливаем столбцы искомой матрицы.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{00} \\ C_{10} \\ C_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{01} \\ C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{02} \\ C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = -\frac{1}{51} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -13 & 2 \\ -18 & 6 & 3 \\ 11 & 2 & -16 \end{bmatrix}$$

Результат и проверка:

$$\boldsymbol{A^{-1} \cdot A} \quad = -\frac{1}{51} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -13 & 2 \\ -18 & 6 & 3 \\ 11 & 2 & -16 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{51} \cdot \begin{bmatrix} -51 & 0 & 0 \\ 0 & -51 & 0 \\ 0 & 0 & -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Задание:</u>

Найти обратную матрицу для своего варианта матрицы из *задания блока В.*

<u>Требования к оформлению программ:</u>

1. **Содержание**. Программа должна делать то, что предусмотрено заданием. Не надо выполнять лишних действий, заданием не предусмотренных.
2. **Спецификация.** В преамбуле программы в комментариях указывать сведения:
   - Кто выполнил.
   - Что делает программа (кратко).
   - Что на входе (имена входных файлов и т.д.).
   - Что на выходе (что является результатов работы программы?).
3. **Ввод и вывод**
   - Приглашения к вводу (например, сколько чисел, какого типа и через какой разделитель нужно вводить).
   - Контрольный вывод (все введенные данные выводить на экран, и только после этого выполнять необходимые вычисления.)
   - «Защита от дурака». Проверять вводимые данные на корректность. Например, если необходимо считать количество чего – то, то эта величина не может быть отрицательной и т.д.
4. **Структура кода.** Набираемый код должен быть хорошо структурированным. Использовать:
   - Отступы.
   - Комментарии – поясняют решение программы.
   - Осмысленные названия переменных.
   - Пояснения о назначении переменных в комментариях (кроме счетчиков).
5. **Декомпозиция кода**
   - Функциональная. Программу оформлять с помощью функций.
6. **Многофайловые проекты**
   - Все проекты должны состоять минимум из двух модулей: главного и подключаемого.

   <u>Главный модуль **main.cpp**.</u> В нем оставить только функцию main, в которой вызывать функции, описанные в других модулях.

   <u>Модуль с описанием пользовательских функций **file.cpp** и **file.h.**</u> В этот модуль перенести определение всех функций, необходимых для выполнения задания.

Контрольные вопросы:

1. Напишите функцию для умножения матрицы на матрицу. Нарисуйте блок-схему для данной функции.
2. Напишите функцию для транспонирования матрицы.
3. Напишите функцию для приведения матрицы к верхнетреугольному виду. Нарисуйте блок-схему для данной функции.