Week 4

软73 沈冠霖 2017013569

March 18, 2019

1 T1

证明：设$0 \le \alpha \le 0.5$，且n足够大，则设三次取的数分别为a，b，c，要求最坏为$\alpha, 1-\alpha$的分割的概率，也就是求中位数落在$(n\alpha, n-n\alpha)$间的概率。
先考虑一种情况：$a \le b \le c \cap n\alpha \le b \le n-n\alpha$
设$P(a \le b \le c | n\alpha \le b \le n-n\alpha) = \int_{\alpha}^{1-\alpha} x(1-x)dx = \mathrm{P1}$
$P(n\alpha \le b \le n-n\alpha) = 1-2\alpha = P2$
根据条件概率公式，所求概率 $= P1 * P2$
而a，b，c的大小排列有六种互斥，等概率的情况，所以总概率为 $6P1 * P2 = 4\alpha^3 - 6\alpha^2 + 1$

2 T2

1 证明：假设存在常数c_1, c_2,有对于$\forall n, c_1 n^2 \le T(n) \le c_2 n^2$,而T(1)=1,必定存在这两个常数使得T(1)满足。
设对于n = k满足条件，则对于n = k+1，$T(k+1) = T(k) + \theta(n) = T(k) + c(k+1) + d$,而$c_1 k^2 \le T(k) \le c_2 k^2$,只需要满足$2c_1 k \le ck + (c+d-1) \le 2c_2 k$即可,当k足够大时，取$c_1 \le \frac{c}{2} < c_2$即可

1 每次划分都返回r，相当于左边都是长n-1的段，右面无效段，因此有$T(n) = T(n-1) + \theta(n)$
假设存在常数c_1, c_2,有对于$\forall n, c_1 n^2 \le T(n) \le c_2 n^2$,而T(1)=1,必定存在这两个常数使得T(1)满足。
设对于n = k满足条件，则对于n = k+1，$T(k+1) = T(k) + \theta(n) = T(k) + c(k+1) + d$,而$c_1 k^2 \le T(k) \le c_2 k^2$,只需要满足$2c_1 k \le ck + (c+d-1) \le 2c_2 k$即可,当k足够大时，取$c_1 \le \frac{c}{2} < c_2$即可
因此，$T(n) = \theta(n^2)$

2
```
PARTITION'(A,p,r)
  x = A[r]
  i = p - 1
  q = p - 1
  for j = p to r-1
```

```
        if A[j] < x
            i = i + 1
            exchange A[i] with A[j]
            q = q + 1
            exchange A[i] with A[q]
        else if A[j] ¡= x
            i = i + 1
            exchange A[i] with A[j]
    exchange A[i+1] with A[r]
    t = i + 1
    q = q + 1
    return q,t
```

3

```
RANDOMIZED_PARTITION'(A,p,r)
i = RANDOM(p,r)
exchange A[r] with A[i]
return PARTITION'(A,p,r)
```

```
QUICKSORT'(A,p,r)
if(p<r) then
(q,t)=RANDOMIZED_PARTITION'(A,p,r)
QUICKSORT'(A,p,q-1)
QUICKSORT'(A,t+1,r)
```

4 如果A[i]!=A[j]，那么这两个元素比较过的概率还是$\frac{2}{j-i+1}$
而如果两个数相等，假设这个数出现了k次，则这两个元素比较过的概率是$\frac{k-1}{C_K^2} = \frac{2}{k}$，而因为$j - i + 1 \leq k$，因此新的比较次数小于等于原来的比较次数，因此结论不变