Week 1

软73 沈冠霖 2017013569

May 7, 2019

1 T2

证明：$\forall 1 \leq i \leq n$,有B[(i+offset) mod n]=A[i]，而offset取1-n之间任意整数的概率都是$\frac{1}{n}$，因此A[i]和B中任意一位相等的概率都是$\frac{1}{n}$。而因此，B只有n种取值可能，不是n!种取值可能，所以无法这样生成全排列。

2 T3

证明：考虑原事件的补集，如果生成的P有重复，则$\exists 1-n$间的整数i,j,使得P[i]=P[j]。给定$i = i_0, j = j_0$,P(P[i]=P[j]) $= \frac{1}{n^3} * \frac{1}{n^3} * n^3 = \frac{1}{n^3}$，而根据概率测度的性质，$P(A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$，因此原事件补集的概率P(重复)$\leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n}$,原事件发生概率P$\geq 1 - \frac{1}{n}$

3 T1

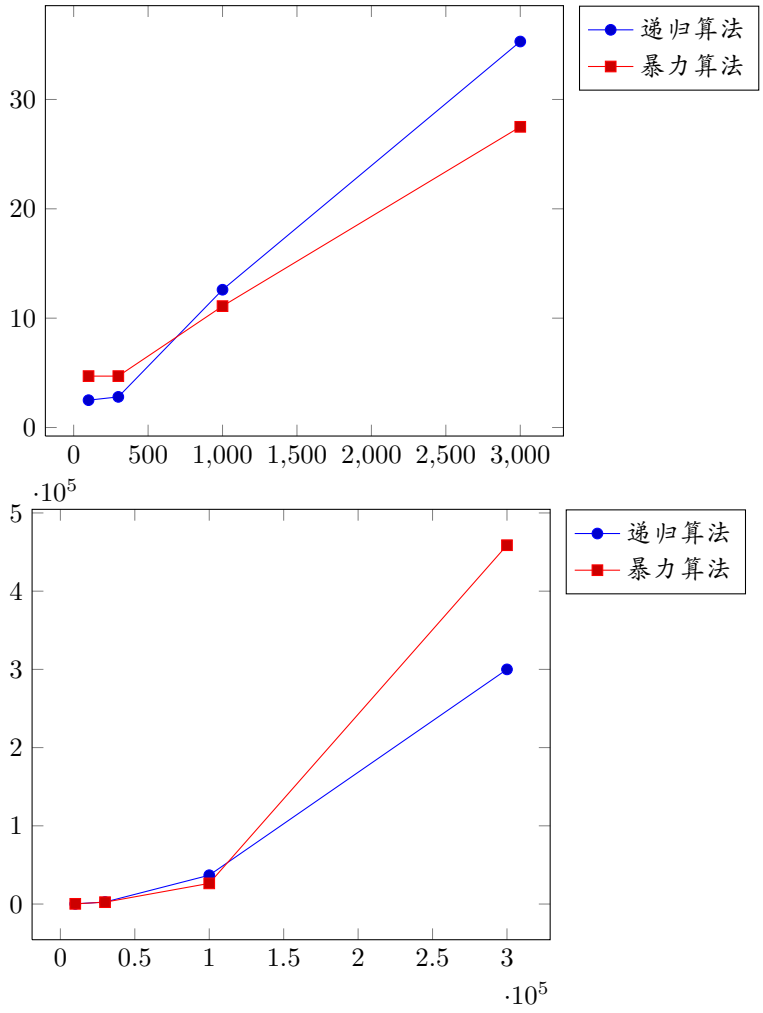
测试环境 CPU:Inter Core i5-6300HQ,2.3GHZ
内存：12G
环境：VS2017,release模式

第一部分：比较不同数据规模下暴力算法与分治算法的结果,具体数据见Table 1 与下方折线图。
结果分析如下：首先，当数据规模很小(低于1000)的时候，递归算法略快于暴力算法，原因是递归算法在20处停止，相当于只进行了2-4次递归，之后使用暴力算法求解数据规模20的子问题，效率更好。
其次，当数据规模中等(1000-30000)的时候，递归算法慢于暴力算法，原因是递归算法有7n的常数，还有递归栈操作等，而在这个时候，递归的次数在5-12次之间，次数已经不小了(递归栈空间成百上千个),因此可能效率降低。
最后，数据规模很大(100000+)的时候，递归算法又快了，原因是随着n趋向无穷，f(n) $=\theta$ (nlgn)的递归算法相比f(n) $=\theta(n^2)$的暴力算法优势又显现出来了。

Table 1: 不同数据规模下计算最近两点的时间

测量序号	1	2	3	4	5	6	7	8
数据范围	100	300	1000	3000	10000	30000	100000	300000
第一组(递归到20截止)时间 (ms)	2.5	2.8	12.6	35.3	231.5	2559	36847.3	300000
第二组(暴力)时间 (ms)	4.7	4.7	11.1	27.5	268.7	2379.5	26414.8	458747

注：每组数据都是运行10次后取的平均值



第二部分 ：对于n=10000的情形，比较在不同取值m时，停止递归进行暴力求解的程序运行时间，具体数据见Table 2 与下方折线图。

分析：首先，当m很小(m≤ 20)的时候，因为此时递归层数已经有 10-15层，递归栈的大小，栈操作的时间等随递归层数指数增长，因此递归还不如暴力快。
其次，当m中等($50 \leq m \leq 1000$)，当递归层数¡8层的时候，递归的效率已经高于暴力了。当m在500-1000间，也就是递归3-4层的时候，递归效率大致达到最高。此时，递归降低时间复杂度的优点和常数大，栈内存操作多的劣势达到了平衡
最终，当m较大(m $\geq$ 2000)的时候，虽然递归还是能明显提高速度，但是因为层数太小，没有把子问题分解的足够小，因此效率还是不高。
综上，可以看出，在实际情况下，如果要用递归的方法优化一个程序，我们需要平衡好递归的优点(降低时间复杂度)和缺点(栈内存各种操作太慢)等，对于10000这个数据规模而言，3-4次递归是最好的。

Table 2: n=10000时，不同递归终止条件消耗的时间

测量序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
递归截止的数据大小m	1	5	10	20	50	100	500	1000	2000	10000(不递归
时间 (ms)	3842.5	814.1	410.4	219.8	115.8	64	29.1	29.8	41.1	268.7

注：每组数据都是运行10次后取的平均值