1.

$$\nabla f(x) = (10x_1 - \frac{5e^{-x_1-x_2}}{1+e^{-x_1-x_2}}, x_2 - \frac{5e^{-x_1-x_2}}{1+e^{-x_1-x_2}})$$

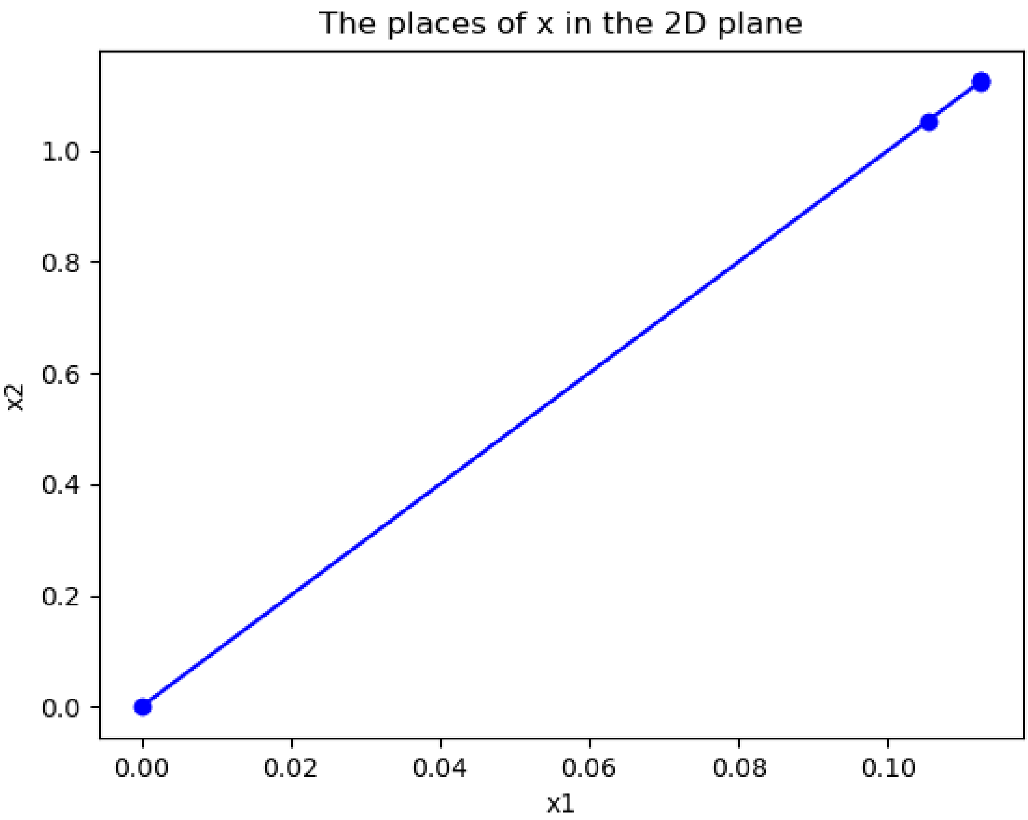
$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 10 + \frac{5e^{-x_1-x_2}}{(1+e^{-x_1-x_2})^2} & \frac{5e^{-x_1-x_2}}{(1+e^{-x_1-x_2})^2} \\ \frac{5e^{-x_1-x_2}}{(1+e^{-x_1-x_2})^2} & 1 + \frac{5e^{-x_1-x_2}}{(1+e^{-x_1-x_2})^2} \end{bmatrix}$$

根据牛顿法，有$\Delta x_{nt} = -\nabla^2 f(x)^{-1}\nabla f(x), \lambda^2 = \nabla f(x)^T \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$

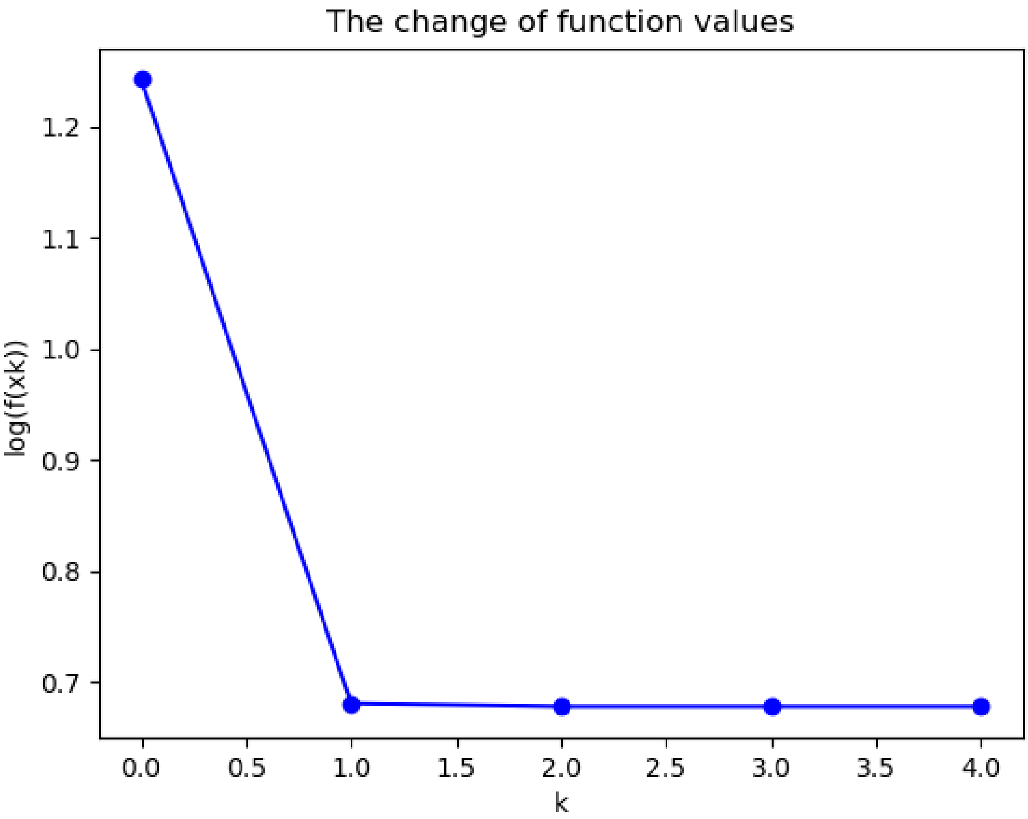
我们取$\alpha = 0.4, \beta = 0.5$，即可带入用牛顿法进行运算。

结果为x=（0.11246719， 1.12467185），y=1.969725574672439

x位置的变化曲线如图



k与ln(f(k))的变化曲线如图


The change of function values
log(f(xk))
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
k

2.(1)

清華大學

2. $\tilde{f}(t) = f(x+tv)$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \ln\left(1-a_i^T(x+v t)\right) - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1-(x_i+v_i t)^2\right)$$

$$\tilde{f}'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^T v}{1-a_i^T x - a_i^T v \cdot t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2v_i(x_i+v_i t)}{1-(x_i+v_i t)^2}$$

$$\tilde{f}''(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(a_i^T v)^2}{(1-a_i^T x - a_i^T v t)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2v_i^2(1+(x_i+v_i t)^2)}{(1-(x_i+v_i t)^2)^2}$$

$$\tilde{f}'''(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{2(a_i^T v)^3}{(1-a_i^T x - a_i^T v t)^3} + \sum_{i=1}^{n} 4v_i^3(1$$

而要证：对 $\forall\, x, v$, $-\ln(1-a_i^T x - a_i^T v t)$ 自和谐 $= g(t)$,

$-\ln(1-(x_i+v_i t)^2) = h(t)$

$$-\ln(1-(x_i+v_i t)^2) = -\ln(1-x_i-v_i t) - \ln(1+x_i+v_i t) = h_1(t)+h_2(t)$$

$h_1'(t) = \frac{v_i}{1-x_i-v_i t}$, $h_2'(t) = -\frac{v_i}{1+x_i+v_i t}$

$h_1''(t) = \frac{v_i^2}{(1-x_i-v_i t)^2}$, $h_2''(t) = \frac{v_i^2}{(1+x_i+v_i t)^2}$

$h_1'''(t) = \frac{2v_i^3}{(1-x_i-v_i t)^3}$, $h_2'''(t) = -\frac{2v_i^3}{(1+x_i+v_i t)^3}$

$g'(t) = \frac{a_i^T v}{1-a_i^T x - a_i^T v \cdot t}$

$g''(t) = \frac{(a_i^T v)^2}{(1-a_i^T x - a_i^T v t)^2}$

$g'''(t) = \frac{2(a_i^T v)^3}{(1-a_i^T x - a_i^T v t)^3}$

$|g'''(t)| = 2 g''(t)^{\frac{3}{2}}$. $g(t)$ 自和谐

显然 $|h_1'''(t)| = (h_1''(t))^{\frac{3}{2}}$

$h_2'''(t) = (h_2''(t))^{\frac{3}{2}}$ ∴ 有 $h(t)$ 自和谐

由自和谐的加法保持

有 $f(x)$ 自和谐

(2)

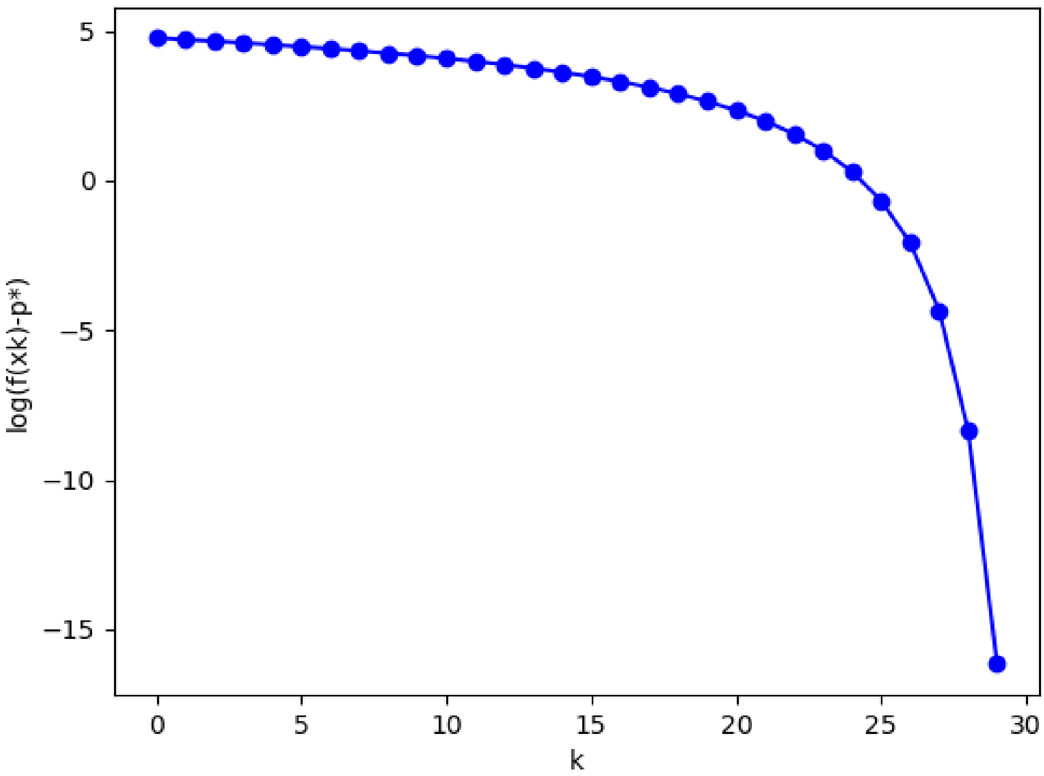
$$\nabla f(x)_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_i^T x} + \left(\frac{2x_j}{1-x_j^2}\right)$$

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_i^T}{(1-a_i^T x)^2} + diag\left(\frac{2(1+x_i^2)}{(1-x_i^2)^2}\right)$$

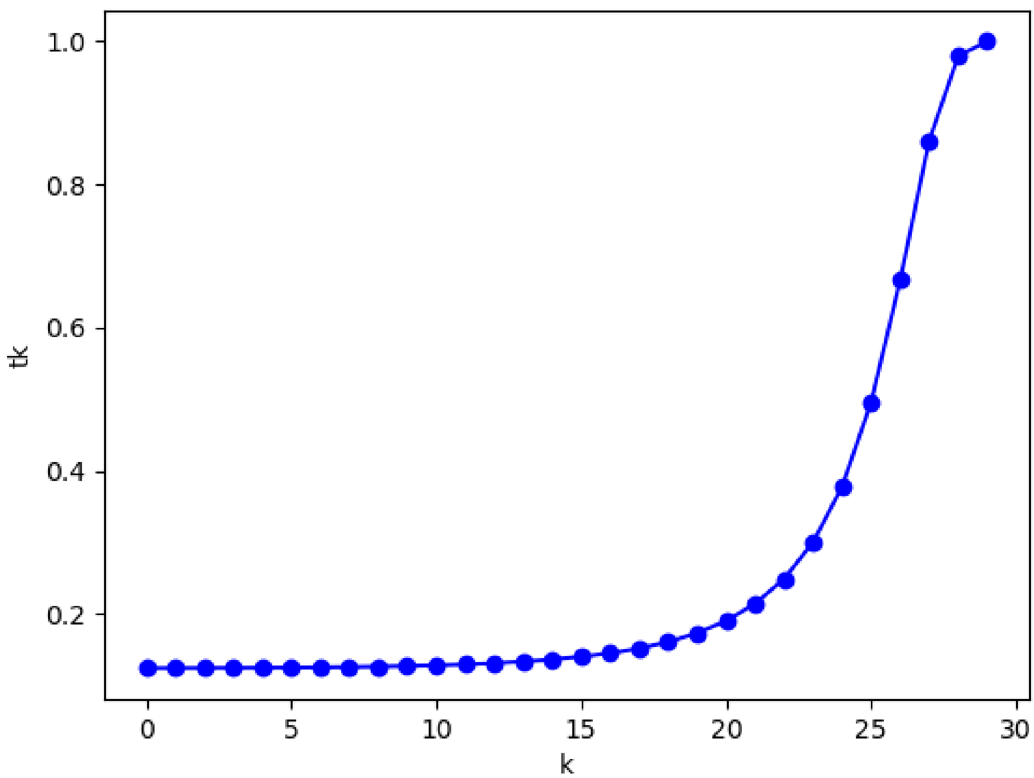
根据牛顿法，有$\Delta x_{nt} = -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x), \lambda^2 = \nabla f(x)^T \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$, 可以带入牛顿法进行运算

N=50时，解得y=-116.49478021150344，对应的x保存在作业根目录的result/Q2/A_50.csv中

k-ln(f(xk)-p*)曲线如图

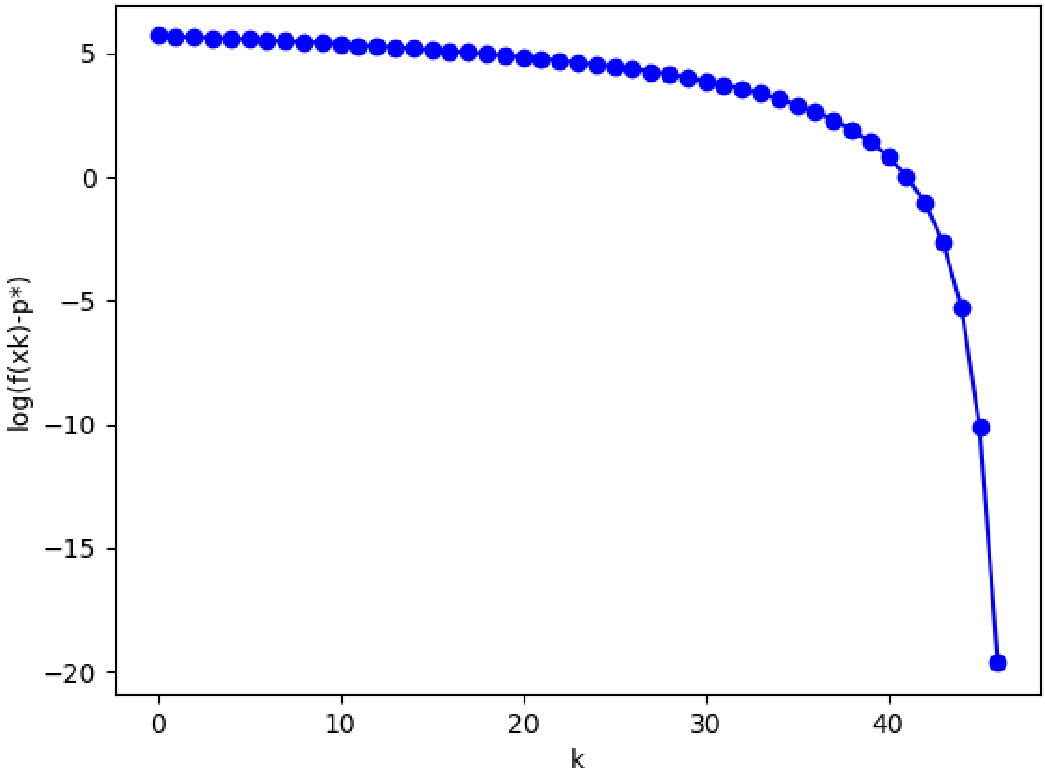


k-tk曲线如图

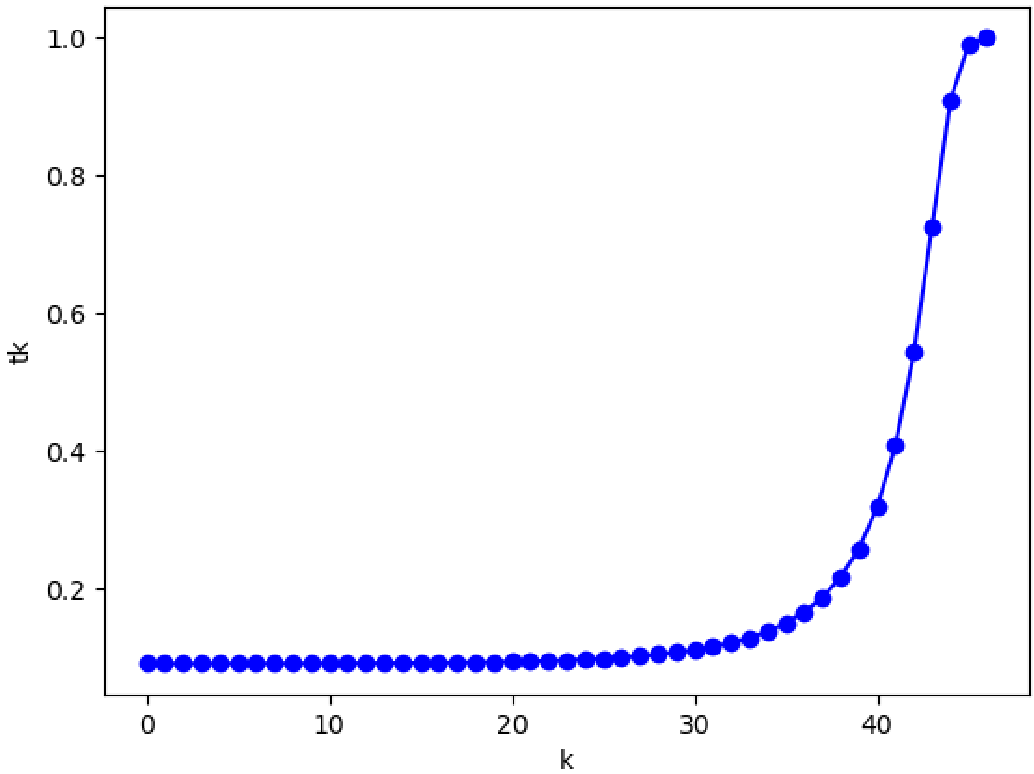


N=100时，y=-298.83964731578664，对应的x保存在作业根目录的result/Q2/A_100.csv中

k-ln(f(xk)-p*)曲线如图



k-tk曲线如图



3.

该问题KKT条件为：

$$\begin{cases} Px^* + q + A^T v^* = 0 \\ Ax^* - b = 0 \end{cases}$$

因此牛顿法下降方向有$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix}$

其中$\nabla f(x) = Px + q, \nabla^2 f(x) = P$

用牛顿法解得x^*后，可以带入求解对偶问题最优解$v^* = -(AA^T)^{-1}A(Px^* + q)$。

由于该问题$Hesse$矩阵半正定且满足$Slater$条件，因此强对偶，原问题和对偶问题最优解同时取到而且最优值一样。

对于初值问题x_0满足$Ax_0 = b$, 我们将A扩展到$A_{extend} = \begin{bmatrix} A_{left} & A_{right} \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

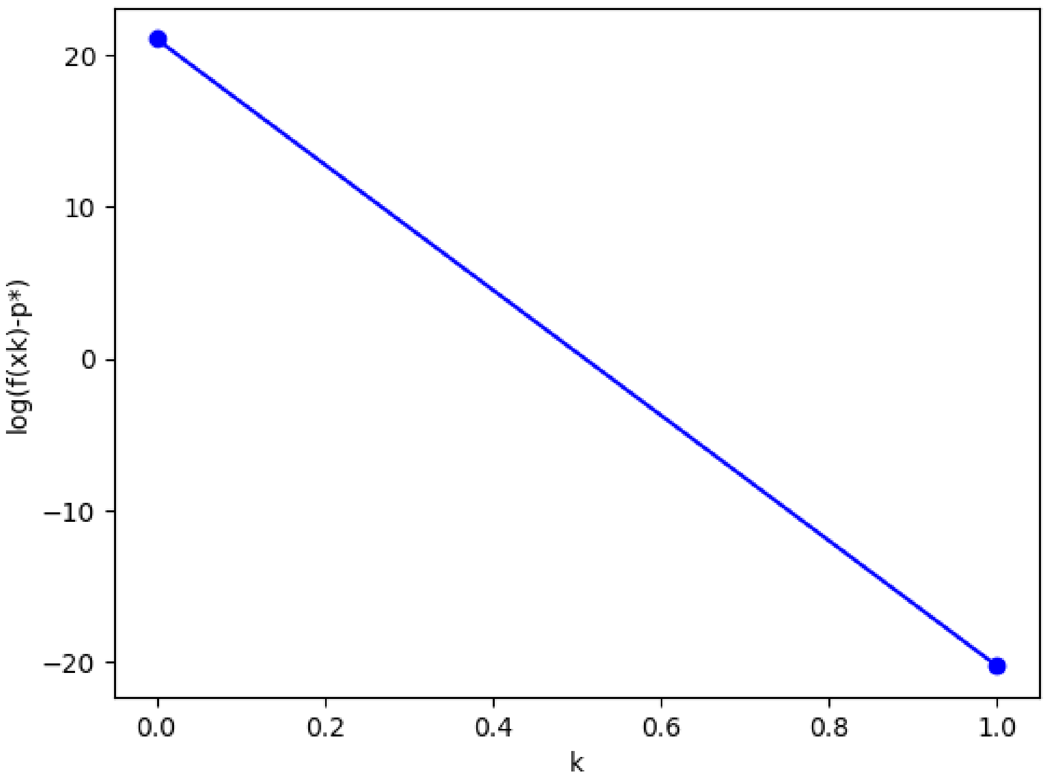
将B扩展到$b_{extend} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$,

有A_{extend}可逆，且$A_{extend}^{-1} b_{extend}$为$Ax = b$的解。

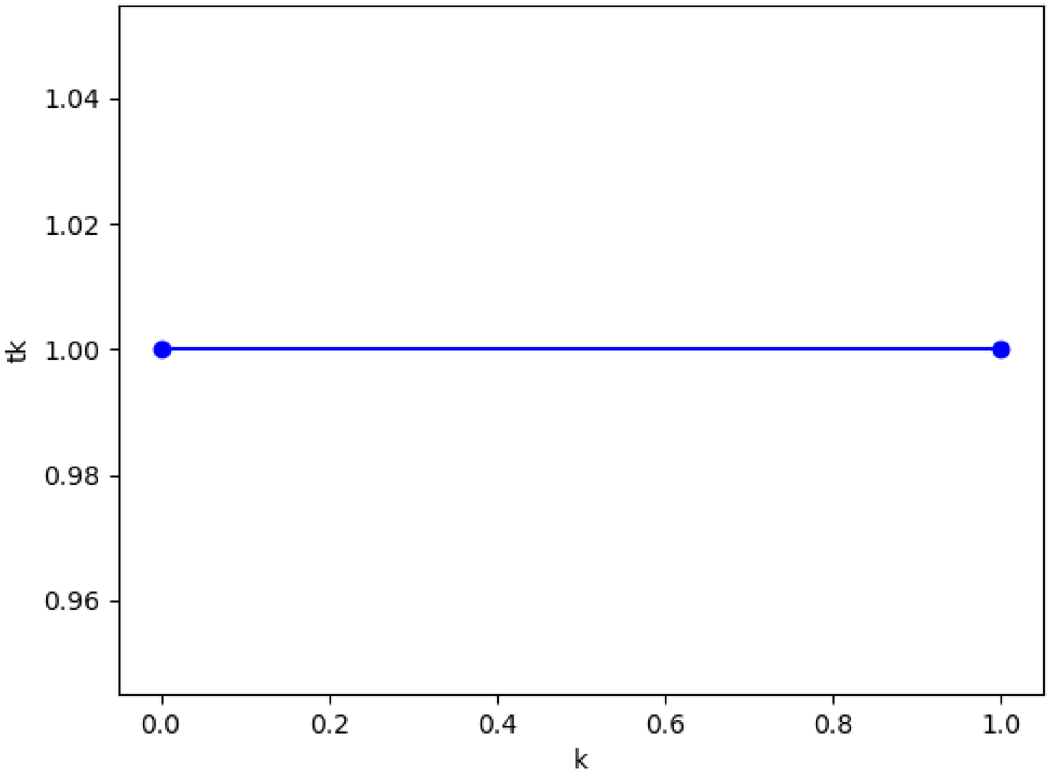
我们取$\alpha = 0.4, \beta = 0.5$，即可带入用牛顿法进行运算。

解得y=56957.0794509534，对应的原问题最优解x保存在作业根目录的result/Q3/x.csv中，对应的对偶问题最优解u保存在作业根目录的result/Q3/u.csv中。

k-ln(f(xk)-p*)曲线如图



k-tk曲线如图



可以看出，第一次迭代t取得1时，牛顿法可以一次取得二次优化的最优解。