Convex Optimization
Week 5
10/18/2021

致远书21
沈[illegible]
2021012593

清华大学 Tsinghua University **数学作业纸**

班级 姓名 编号 科目 第 页

1. $Q^* = \{ (y, r) \in R^{n+1} \mid x^T y + t \cdot r \geq 0, \forall x, t, \ s.t. \|x\|_2 \leq t \}$

①: 证明 $Q^* \subseteq Q$:

$\forall (x_1, t_1), (x_2, t_2) \in C$,

~~$x_1^T x_2 + t_1 t_2$~~ $x_1^T x_2 \geq -\|x_1\|_2 \|x_2\|_2$,

$x_1^T x_2 + t_1 t_2 \geq t_1 t_2 - \|x_1\|_2 \|x_2\|_2$,

$0 \leq \|x_1\|_2 \leq t_1$,

$0 \leq \|x_2\|_2 \leq t_2$

$\therefore t_1 t_2 \geq \|x_1\|_2 \|x_2\|_2$,

$x_1^T x_2 + t_1 t_2 \geq 0$,

$\forall x \in Q, x \in Q^*$

② 证明 $Q \subseteq Q^*$

若此不成立,

则有: $\exists (y, r) \in R^{n+1}$,

$\|y\|_2 > r$, $\|y\|_2 \geq 0$

~~对 $\forall (y, r)$~~

对 $\forall (x, t)$ s.t. $\|x\|_2 \leq t$,

有 $x^T y + t \cdot r \geq 0$

令 $x = \|x\|_2 \cdot v_1$, $\|v_1\| = 1$

$y = \|y\|_2 \cdot v_2$, $\|v_2\| = 1$

令 $v_1 = -v_2$, $t = \|x\|_2$, 且 $\|x\|_2 > 0$, 这必在Q中取到

则 $x^T y = -\|x\|_2 \|y\|_2$

~~$t \cdot r \geq \|x\|_2$~~

有 $r \cdot \|x\|_2 - \|x\|_2 \|y\|_2 \geq 0$,

$\|x\|_2 (r - \|y\|_2) \geq 0$, $r \geq \|y\|_2$,

与 $r < \|y\|_2$ 矛盾

$\therefore Q \subseteq Q^*$

综上, $Q = Q^*$, Q自对偶

2. 设 $\pi_C(x_2)=y_2$, $\pi_C(x_1)=y_1$

~~若 $x_1\in C$, $x_2\in C$, 则 $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, $d(x,C)=0$~~ 此时 $\|\pi_C(x_2)-\pi_C(x_1)\| = \|x_2-x_1\|$

~~若两者一个 $\in C$, 一个 $\notin C$, 不妨令 $x_1\in C$, $x_1=y_1$, $x_2\notin C$, $x_2\neq y_2$,~~

∵ C 凸 ∴ C 凸

设 ∃ $x_2, x_1 \in C$

$\|y_2-y_1\| > \|x_2-x_1\|$

~~则 $\|\pi_C(x_2)-\pi_C(x_1)\| = \|y_2-y_1\|$~~

$\|x_2-x_1\| = \|x_2-y_1\|$

~~此时 x_2 与 C 不相离, ∃ a 和 b, 使~~

① 若 $x_1\in C$, $x_2\in C$, 则 $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, $d(x,C)=0$, 此时 $\|\pi_C(x_2)-\pi_C(x_1)\| = \|x_2-x_1\|$

② 若一个 $\in C$, 另一个 $\notin C$, 不妨令 $x_1\in C$, $x_1=y_1$, $x_2\notin C$, $x_2\neq y_2$

若此时 $y_1=y_2$, 则 $\|x_2-x_1\| = \|x_2-y_2\|\geq 0$, $\|y_2-y_1\|=0$, 成立

否则, 则 $y_1-y_2\neq 0$,

设 $(y_1-y_2, V_1, \ldots, V_{n-1})$ 为空间一组正交基,

超平面 $(y_1-y_2)^T x+b$ 过 y_2, 则必有 x_2 与 y_1 在超平面异侧

否则: $x_2=y_2+k(y_1-y_2)+A\cdot V$, $k>0$

若 $0<k\leq 1$, $y'=y_2+k(y_1-y_2)\in C$,

$\|x_2-y'\| = \|AV\|$, $\|x_2-y_2\| = \|k(y_1-y_2)\| + \|AV\| > \|x_2-y'\|$ 与 x_2 与 y_2 最近矛盾

若 $k>1$, 同理有 $\|x_2-y_1\| < \|x_2-y_2\|$ 矛盾

∴ 此时 $x_2=y_2+k(y_1-y_2)+A\cdot V$, $k\leq 0$

此时 $\|x_2-x_1\| = \|x_2-y_1\|$

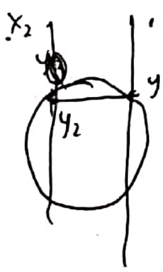
$= \|(1-k)(y_2-y_1)+AV\|$

$= \|AV\| + (1-k)^2\|y_2-y_1\|$

$-k\geq 0$,

∴ $\|x_2-x_1\| \geq \|y_2-y_1\|$

③ 若两个均 $\notin C$,



若 $y_2=y_1$, $\|y_2-y_1\|=0$, $\|y_2-y_1\|\leq\|x_2-x_1\|$

否则: 超平面P: $(y_1-y_2)^T x+p$ 过 y_2

超平面Q: $(y_2-y_1)^T x+q$ 过 y_1

由上一问可知, x_2 与 y_1 在 P 异侧, x_1 与 y_2 在 Q 异侧

则有: $x_2=y_2-k_1(y_1-y_2)+AV$

$x_1=y_1+k_2(y_1-y_2)+BV$, $k_1\geq 0$, $k_2\geq 0$

$\|x_1-x_2\| = \|(1+k_1+k_2)(y_1-y_2)+(B-A)V\|$

$= \|y_1-y_2\|(1+k_1+k_2) + \|BV-AV\|$

$\geq \|y_1-y_2\|$

2.(2)

①: 若 $x_0 \notin C$:

对 $\{x_0\}$, $\{C\}$ 用凸集分离定理

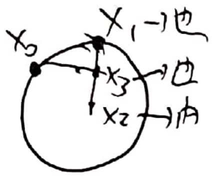
必 $\exists a$ 使 $\forall x\in C$, $\langle a,x\rangle \geq \langle a,x_0\rangle$

② 若 $x_0\in C$, $x_0\notin \mathrm{int}\,C$, $x_0 \in \mathrm{bd}\,C$

若 $\mathrm{int}\,C=\emptyset$, C 必在一超平面 $y=a^Tx+b$ 上,

从有 $\langle a,x_0\rangle=\langle a,x\rangle$

否则 对 $\{x_0\}$, $\{\mathrm{int}\,C\}$ 用凸集分离定理,



对 $\forall x\in \mathrm{int}\,C$, 有 $\langle a,x\rangle \geq \langle a,x_0\rangle$

~~③ 只需证 $\forall x\in C\setminus\mathrm{int}\,C$, 有 $\langle a,x\rangle \geq \langle a,x_0\rangle$ 不行~~

设 ~~$\exists x_1 \in C\setminus\mathrm{int}\,C$~~, 有 ~~$\langle a,x_1\rangle < \langle a,x_0\rangle$~~

$a^Tx_1 < a^Tx_0$

~~取任一点 $x_2\in \mathrm{int}\,C$, 有 $a^Tx_2 \geq a^Tx_0$~~

③ 先证 $\forall x\in \mathrm{int}\,C$,

有 $\langle a,x\rangle > \langle a,x_0\rangle$

若 $\exists x_1\in \mathrm{int}\,C$, $\langle a,x_1\rangle = \langle a,x_0\rangle$.

则 $\exists \sigma>0$, $\forall v$ 使 $\|v\|=1$: $x_0+\sigma v\in \mathrm{int}\,C$,

$a^T(x_0+\sigma v)$

$=a^Tx_0+\sigma a^Tv$, 取 $v=-\frac{a^T}{\|a\|}$,

$a^T(x_0+\sigma v)$

$=-\sigma<0$. 矛盾

$\therefore \forall x\in \mathrm{int}\,C$, 有 $\langle a,x\rangle > \langle a,x_0\rangle$

④ 证 $\forall x\in C\setminus\mathrm{int}\,C$, 有 $\langle a,x\rangle \geq \langle a,x_0\rangle$

设 $\exists x_1\in C\setminus\mathrm{int}\,C$, $a^Tx_1<a^Tx_0$

任取 $x_2\in \mathrm{int}\,C$, $a^Tx_2>a^Tx_0$

由于 a^Tx 连续, 则 x_1, x_2 中存在一个 $0<\theta<1$,

有 $x_3=\theta x_1+(1-\theta)x_2$, 有 $a^Tx_3=a^Tx_0$, 由③, $x_3\in C\setminus\mathrm{int}\,C$, $x_3\in \mathrm{bd}\,C$

$\because x_3\in \mathrm{bd}\,C$,

则 对于 $\sigma>0$, $\exists v_1$ s.t. $\|v_1\|=1$, $x_3+\sigma v_1\notin C$

$x_4=\theta x_1+(1-\theta)x_2+\sigma v_1\notin C$

x_5 也 $\notin C$, 在两点之间依有

$x_4=\theta x_1+(1-\theta)x_5$, $x_5=x_2+\frac{\sigma}{1-\theta}v_1$

$\forall \frac{\sigma}{1-\theta}>0$,

一对 ~~[illegible]~~,

有 $x_2+\frac{\sigma}{1-\theta}v_1\notin C$,

与 x_2 为内点矛盾

$\therefore \forall x\in C\setminus\mathrm{int}\,C$,

也有 $\langle a,x\rangle \geq \langle a,x_0\rangle$,

得证

扫描全能王 创建

清華大学 Tsinghua University 数学作业纸

班级 姓名 编号 科目 第 页 页

3. $S_1=\{y \mid y=Ax, x\ge 0\}$

$S_2=\{b\}$

若有 $x\in R^n$ $x\ge 0, Ax=b$,

则 $S_1\cap S_2=\phi$

则 $\exists \lambda\ne 0, t\in R$ 使对 $\forall x\ge 0$,

有 $x^TA^T\lambda \ge t$,

$b^T\lambda \le t$:

① 首先证有 $t\le 0$:

若 $t>0$, 令 $(A^T\lambda)_1=u_1$,

则 $\forall x_1\ge 0$

$x_1u_1\ge t$ 不成立

$u_1>\frac{t}{x_1}$, $u_1=\infty$ 不成立

② 其次证 $A^T\lambda\ge 0$.

若 $\exists i, (A^T\lambda)_i=u_i<0$,

则: 令 $x=(0,0\cdots,k,0\cdots 0)$ 与 i 位换为 k

$x^TA^T\lambda$

$=k\cdot u_i\ge t$ 对 $\forall k$ 成立

而 $k>\frac{t}{u_i}$ 时不成立

$\therefore A^T\lambda\ge 0$

③ $\because (A^T\lambda)\ge 0$, $\therefore$ 对 $\forall x\ge 0$,

$x^TA^T\lambda\ge 0$,

$\because b^T\lambda\le t$, 对 $t\le 0$

$t\le 0$ $t>0$

$\therefore b^T\lambda\le 0$ $\therefore b^T\lambda\le 0$

$\therefore$ 原命题逆否命题成立,

$\therefore$ 原命题成立

~~$\forall y$, $\exists \lambda \succ 0$, 有 $\lambda^T x \le \lambda^T y$~~

~~$\forall y \in S$, $y-x \in K$~~

$\forall y \in S$, $y-x \in K$ ，即 $y-x \succeq_K 0$

$\Updownarrow$

$\forall \lambda \succeq_{K^*} 0$ 有 $\lambda^T(y-x) \ge 0$

~~则 若 $\lambda \succ 0$, 有 $\lambda^T(y-x) \ge 0$~~

~~则若 $\forall \lambda \succ_{K^*} 0$, $\lambda^T(y-x) > 0$~~

~~若 x 不是最小元~~

~~① 若 $\forall \lambda \succ_{K^*} 0$ ① 若 x 为 min 的唯一最优解，则 $\forall y \in S$, $\lambda^T(y-x) \ge 0$, x 为关于 $\succeq_K$ 最小元~~

① 若 $\forall \lambda \succ_{K^*} 0$.

x 为 min $\lambda^T z$ 唯一最优解

但不为最小元，

设 y 为最小元，$y \ne x$, $y \in S$

$x - y \succeq_K 0$,

即对 $\forall \lambda \succeq_{K^*} 0$,

$\lambda^T(x-y) \ge 0$

而 x 为唯一最优解，

应有 ~~$\lambda^T x < $~~ $\lambda^T(x-y) < 0$,

矛盾

② 若 x 不为唯一最优解，

则 $\exists y \ne x \in S$,

$\exists \lambda_1 \succ_{K^*} 0$, $\lambda^T(y-x) = 0$

$\because \lambda_1 \succ_{K^*} 0$, 则 λ_1 在 K^* 内部，

$\exists \sigma > 0$, 使对 $\forall V$ 使 $\|V\| = 1$,

有 $\lambda + \sigma V \in K^*$

$(\lambda + \sigma V)^T (y-x)$

$= \sigma V^T (y-x)$

$\because y \ne x$ 当 $V = -\frac{y-x}{\|y-x\|}$ 时，

$(\lambda + \sigma V)^T (y-x)$

$= -\sigma < 0$,

即 $\exists \lambda' = \lambda + \sigma V$, $\succeq_{K^*} 0$

$\lambda'^T y < \lambda'^T x$, 与 x 为最小元矛盾

综上，充要条件

清華大學 Tsinghua University 数学作业纸

班级　　姓名　　编号　　科目　　第　页

2-31 1) $K^* = \{y \mid x^Ty \geq 0\ \forall x \in K\}$

① $\forall y_1, y_2 \in K^*$, $0<\theta<1$;

$\forall x,\ x^T(\theta y_1 + (1-\theta) y_2) = \theta \cdot x^Ty_1 + (1-\theta)\cdot x^Ty_2$

$\because x^Ty_1 \geq 0,\ x^Ty_2 \geq 0$

$\therefore \theta x^Ty_1 + (1-\theta)x^Ty_2 \geq 0$,

$\theta y_1 + (1-\theta) y_2 \in K^*$，凸锥

K^*为无限个空间 $x^Ty \geq 0$（与之均过0点）的交

为闭凸锥

② 如 $K_1 \subseteq K_2$,

~~则对 $\forall x_1 \in K_1$ 有 $x_1^Ty \geq 0$,~~

~~则对 $\forall x_2 \in K_2$~~

要证 $K_2^* \subseteq K_1^*$,

即证 $\forall y_2 \in K_2^*$, $y \in K_1$

$\because y \in K_2^*$, $\therefore \forall x \in K_2$, $x^Ty \geq 0$

$\because K_1 \subseteq K_2$, 此时 $\forall x \in K_1$ 也有 $x^Ty \geq 0$

$K_2^* \subseteq K_1^*$

K^*为若干无限个空间

③ $x^Ty \geq 0$ 的交

且每个均过原点，为闭凸锥

即证 $R^n - K^*$ 为开集：

$R^n - K^* = \{y \mid x^Ty < 0, \forall x \in K\}$

~~要证 $\exists \sigma > 0$, $\forall y + \sigma v$ ($\|v\|=1$),~~

~~有 $\forall x \in K$ 有 $x^T(y+\sigma v) < 0$~~

~~$x^Ty + \sigma x^Tv$~~

~~$\leq x^Ty + \sigma \cdot \|x\|$~~

(4) ~~设 $x \in \mathrm{int}\, K^*$,~~

~~则有 $\forall x \in K$, $y^Tx \geq 0$,~~

~~且 $\exists \sigma > 0$, 对 $\|v\|=1$, $(y+\sigma v)^Tx \geq 0$~~

~~$\forall x \in K$,~~

(4) 设 $x \in \mathrm{int}\, K^*$

则有 $\forall x \in K$, $y^Tx \geq 0$, 且 $\exists \sigma > 0$, 对 $\forall \|v\|=1$, $\forall x \in K$, $(y+\sigma v)^Tx \geq 0$

要 $\forall x \in \mathrm{cl}\,K$ 有 $y^Tx > 0$,

反之，若 $\exists$ 非零 x 使 $y^Tx = 0$,

则当 v 与 x 相反,

$(y+\sigma v)^Tx = y^Tx - \sigma\|x\|$

$= -\sigma\|x\| < 0$,

不成立

设 $x = \|x\| \cdot x_v$,

$\|x_v\| = 1$

$(y+\sigma v)^Tx$

$= y^Tx + \sigma \cdot v^Tx$

$v^Tx \geq -\|x\|$,

$(y+\sigma v)^Tx$

$= y^Tx - \sigma\|x\|$

$= \|x\|(y^Tx_v - \sigma)$

综上，则

且存在取到的 当 $\sigma \leq y^Tx_v$ 时即可

(e) 若尖的，则 $\forall x \in K^*$ 非0，$-x \notin K^*$，

否K不是尖的 则 $\exists y \in K^*$ 非0，$-y \in K^*$，

则 $\forall x \in K$，$x^T y \geq 0$，$-x^T y \geq 0$，

即 $\forall x \in K$，$x^T y = 0$

若K内部非空，设 $x_0 \in \mathrm{int}\, K$

则 $\exists \sigma$，$\forall \|v\| = 1$，

$x_0 + \sigma v \in K$，

$x_0^T y = 0$

$(x_0 + \sigma v)^T y = x_0^T y + \sigma \cdot v^T y$

$= \sigma \cdot v^T y$，

$z y$ 非0，∴ 不可能对 $\forall y$ 有 $v^T y = 0$，

∴ $(x_0 + \sigma v)^T y$ 不小于0，

$x_0 + \sigma v$ 不属于K，

∴K内部为空

(f) 若K上 $\forall x \in \mathrm{int}\, K$，

$K^* : \{y \mid y^T x \geq 0, \forall x \in K\}$

$K^{**} : \{z \mid z^T y \geq 0, \forall y \in K^*\}$

$\{z \mid z^T y \geq 0, \forall y^T x \geq 0, \forall x \in K\}$

① ~~若对 $\forall y$，$\forall x \in K$，$x^T y \geq 0$~~，

有 $z^T y \geq 0$，

① ∵对 $\forall y \in K^*$，若 $x \in K$，

必有 $x^T y \geq 0$，

因此若 $x \in K$，

$x \in K^{**}$，

$K \subseteq K^{**}$

~~若任意有 $K \subseteq K^{**}$~~ ~~$\subseteq S$~~

~~……~~

~~……~~

$\exists x \in K^{**}$，$x \notin S$

~~……$\forall y \in K^*$，$x^T y \geq 0$，$x \notin S$~~

② K^{**} 为闭集

③ ~~若一闭集合S有 $K \subseteq S$，则必有 $\forall x \in K$，$x \in S$~~

~~即 $\forall y \in K$，$\forall y \in K^*$，$x^T y \geq 0$~~

且 $\exists z \in S$，$z \notin K$，

$z \notin K^{**}$，即 $\exists y \in K^*$，$z^T y < 0$，

∴ $z \in K$，

∴ ~~$\forall y \in K^*$~~ 矛盾

∴ 对闭集合S有 $K \subseteq S$，

必有 $K^{**} \subseteq S$，

$K^{**} = \mathrm{cl}(K)$

∴ $K^{**} = \mathrm{cl}(K)$

K^* 内部为空 若 K^{**} 尖，即 $\forall x \in K^{**}$ 非0，$-x \notin K^{**}$，

~~即对 $\forall y \in K^*$~~，$x^T y \geq 0$，且 x 非0，

则 $-x^T y < 0$，

则有 $\forall x$ 非0 $\in K^{**}$，

则 $y^T x \geq 0$，$\forall x \in \mathrm{cl}\, K$ 内的 z

即 $\forall y \in K^*$，$\exists x \in \mathrm{cl}\, K^{**}$ 非0

有 $y^T x = 0$

清华大学 Tsinghua University　　数学作业纸

班级　　姓名　　编号　　科目　　第　页

(f) ~~K的闭包: ……~~

K的闭包: 所有包含K的闭半空间之交

$$cl\,K = \bigcap_{y\in K^*} \{x \mid y^T x \ge 0\} = \{x \mid y^T x \ge 0, \forall y\in K^*\} = K^{**}$$

(g) ~~$cl\,K = K^{**}$~~

若 K^* 内部为空,

则 K^* 必位于一个超平面时,

$\exists a$ 均使 $a^T y = 0, \forall y\in K^*$

此时 a 与 $-a$ 均 $\in K^{**}$,

K^{**} 不尖, 矛盾

$\therefore K^{**}$ 尖

则有 $\forall y\in K^*$, $-y^T x<0$

$\Downarrow$

即 $\forall y\in K^*$ 有 $y^T x>0$

$\therefore \operatorname{int} K^* = \{y \mid y^T x > 0, \forall x\in cl\,K\}$