1.

使用梯度下降法，使用alpha=4/121, beta=81/121的回溯直线搜索，能解得

x = (5.273082108419521e-09, 7.602272040793395e-11)

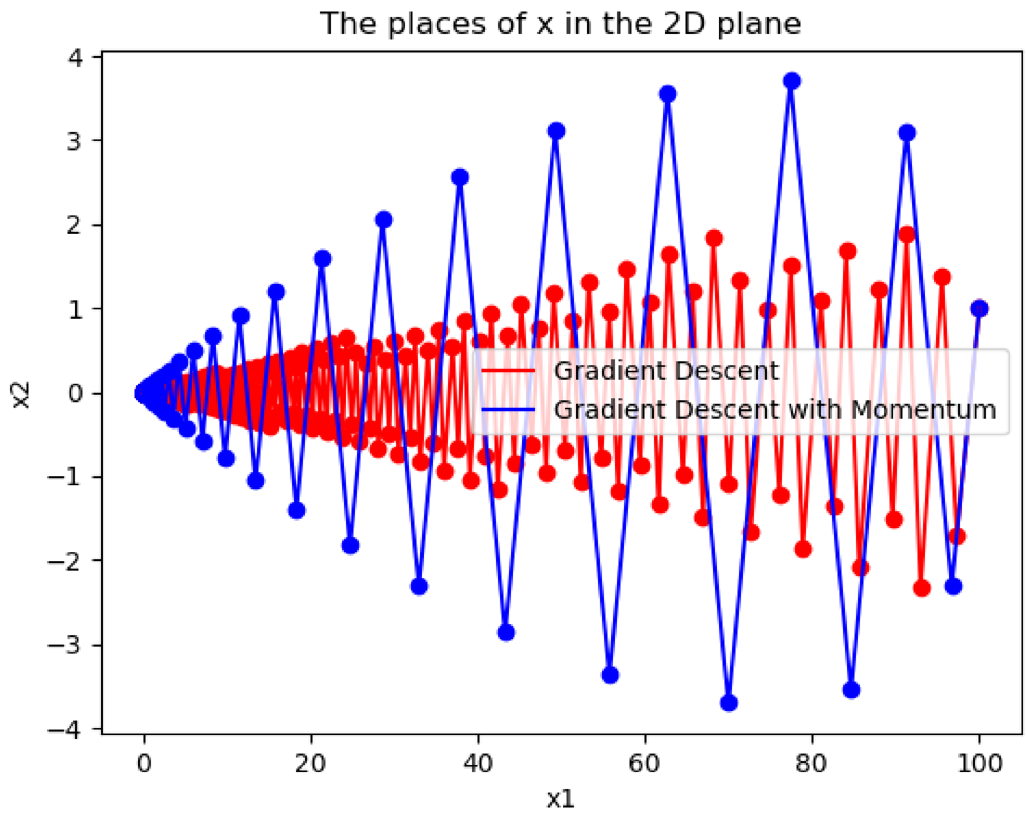
y = 1.4191670161978175e-17

直接使用Heavy ball method，解得

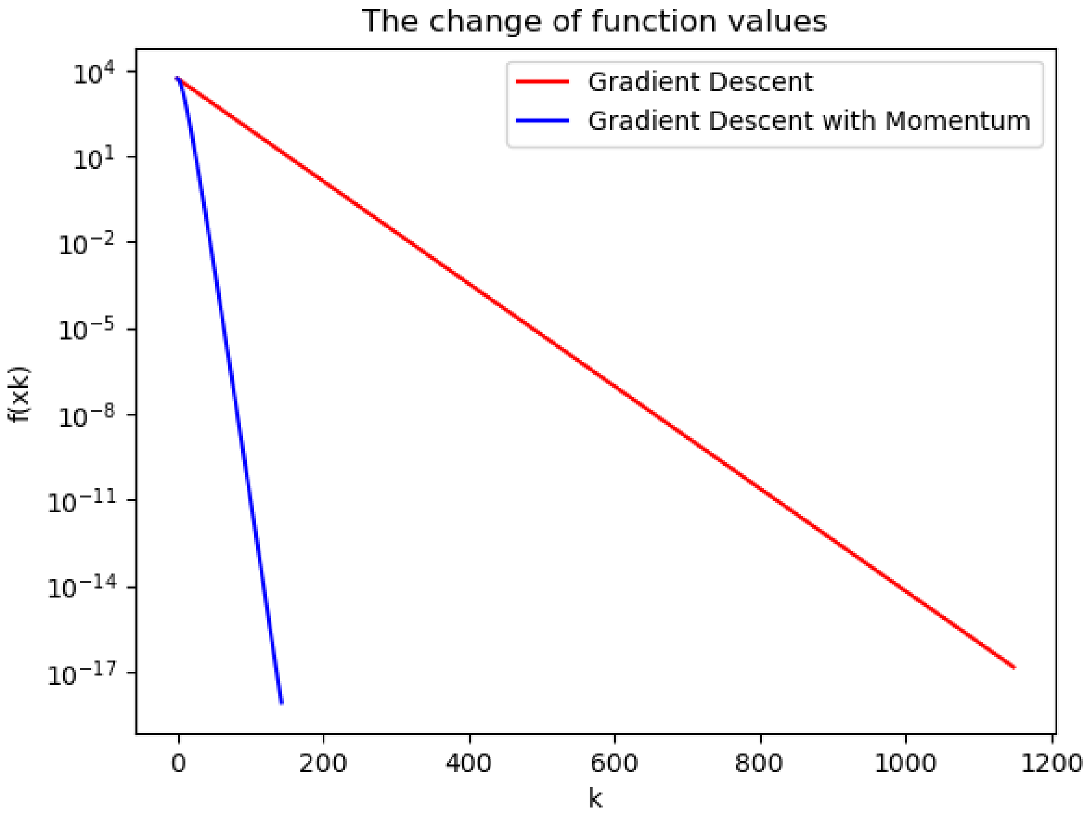
x = (9.30869147423489e-10, -8.9984017584314e-11)

y = 8.381148558431732e-19

有x的轨迹变化如图：



k-f(k)的半对数图如下：



对比二者的k-f(k)半对数图, 可以看出，Heavy ball方法远远比普通的梯度下降法要快，前者100多次迭代即可收敛，后者需要两千多次迭代。不过并不是一直如此，一开始Heavy ball方法迭代速度并没有这样快，经历了一个较慢的过程之后才迅速下降。

2.障碍函数法:

$$\text{首先，对于原问题，有障碍函数}\phi(x) = -\sum_{i=1}^{n} log(x_i)$$

$$\text{加上障碍函数后，转化为求解等式约束凸优化问题：}$$

$$minimize \quad g(x)$$

$$s.t. \ Ax = b$$

$$\text{其中}g(x) = t(\frac{1}{2}x^T Px + q^T x) - \sum_{i=1}^{n} log(x_i)$$

$$\nabla g(x) = t(Px + q) - \begin{bmatrix} \frac{1}{x1} \\ \frac{1}{x2} \\ \cdots \\ \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 g(x) = tP + diag(\frac{1}{x_i^2})$$

$$\text{牛顿法下降方向}\Delta x_{nt}\text{和对偶问题最优解}\nu^*\text{满足如下方程：}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 g(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ t\nu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla g(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{解得}x^*\text{后，根据}KKT\text{条件，有}\lambda^* = Px^* + q + A^T \nu^*$$

而需要首先求可行初值$x^{(0)}$，使用阶段1方法

即求解优化问题：

$$minimize \quad s:$$

$$s.t. -x_i - s \leq 0,\ i = 1 \ldots n$$

$$Ax = b$$

$$障碍函数\phi_0(x) = -\sum_{i=1}^{n} log(x_i + s)$$

问题转化为求解等式约束凸优化问题：

$$minimize \quad g_0(x, s)$$

$$s.t. Ax = b$$

$$其中g_0(x, s) = t * s - \sum_{i=1}^{n} log(x_i + s)$$

$$\nabla g_0(x, s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1+s} \\ -\frac{1}{x_2+s} \\ \ldots \\ t - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+s} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 g_0(x, s) = \begin{bmatrix} diag(\frac{1}{(s+x_i)^2}) & M \\ M^T & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(s+x_i)^2} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_1+s)^2} \\ \frac{1}{(x_2+s)^2} \\ \ldots \\ \frac{1}{(x_n+s)^2} \end{bmatrix}$$

牛顿法下降方向$\Delta_0 x_{nt}$满足如下方程：

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 g_0(x, s) & A_e^T \\ A_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_0 x_{nt} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla g_0(x, s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$其中A_e = [A \quad 0]$$

初始值选择$s^{(0)} = -min(x_i) + 1$，牛顿法收敛得到的x_0^*就是原问题求解的初始值$x^{(0)}$

对于初值问题x_0满足$Ax_0 = b$, 我们将A扩展到$A_{extend} = \begin{bmatrix} A_{left} & A_{right} \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

将B扩展到$b_{extend} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$,

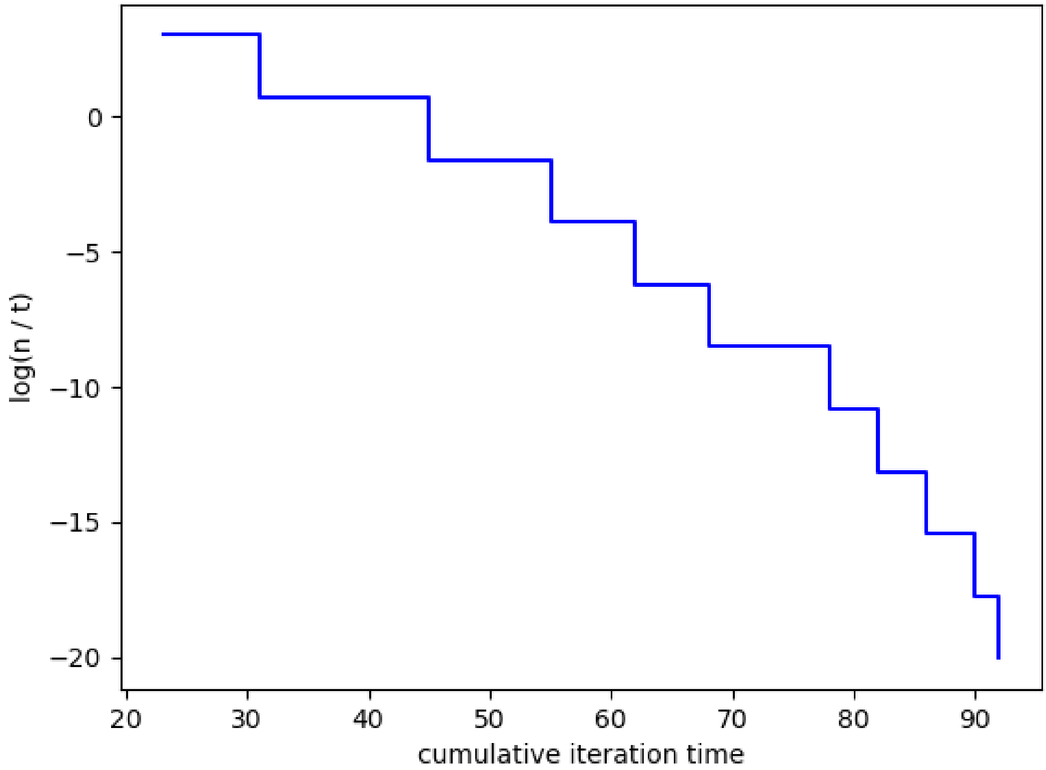
有A_{extend}可逆，且$A_{extend}^{-1} b_{extend}$为$Ax = b$的解。

我们的完整流程如下：

1. 对A进行扩展，求得满足等式约束Ax=b，但是不满足不等式约束的初值x0。
2. 使用阶段1方法，取初始t=1000，u=10，收敛指标为1e-8。使用回溯直线搜索的牛顿法进行迭代，alpha=0.4，beta=0.5，迭代终止指标为1e-12。能求得满足不等式和等式约束的初值x1。
3. 使用障碍函数法，取初始t=1，u=10，收敛指标为1e-8，使用回溯直线搜索的牛顿法进行迭代，alpha=0.4，beta=0.5，迭代终止指标为1e-12。能求得最优解x*和对应的对偶最优解、最优值。

解得最优值p*=214982.08024465642，最优解和对偶最优解储存在根目录下result/barrier的对应文件中。

对数对偶间隙log(n/t)与牛顿迭代次数k的关系如下：



原对偶内点法:

$$x，\lambda，\nu\text{的更新方向}\Delta x,\Delta\lambda,\Delta\nu\text{的更新方向满足如下方程:}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta\lambda\\ \Delta\nu\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\nabla^2 f(x) & -I & A^T\\ diag(\lambda) & diag(x) & 0\\ A & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}r_{dual}\\ r_{cent}\\ r_{pri}\end{bmatrix}$$

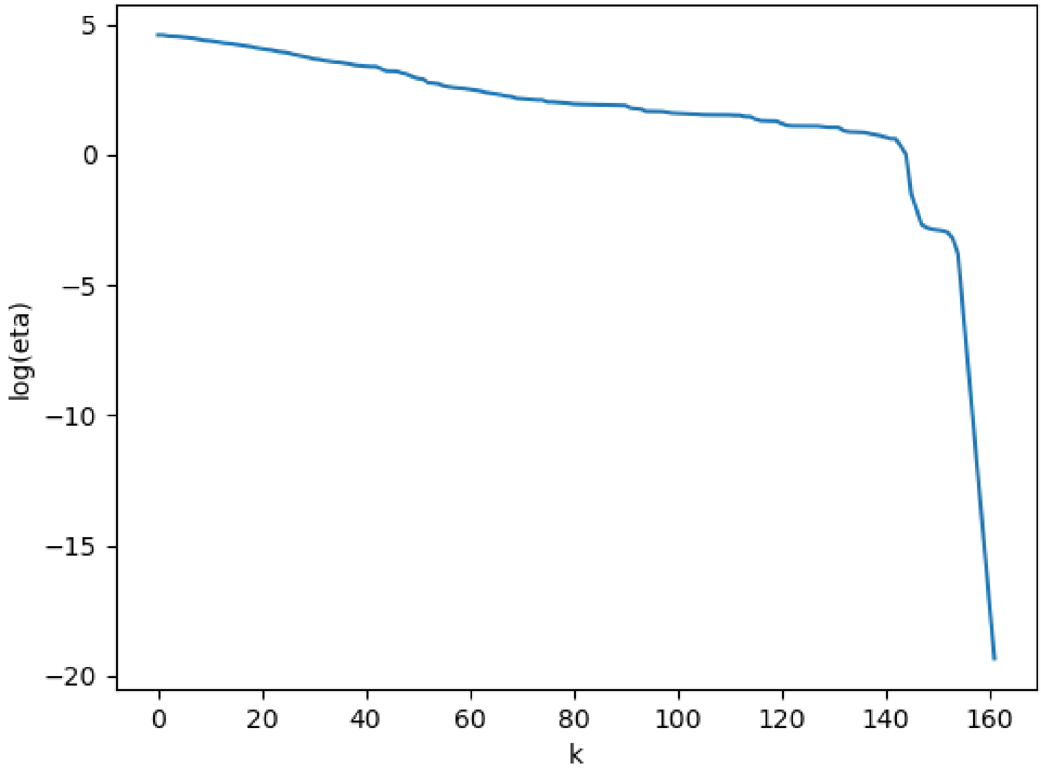
$$\text{其中}\begin{bmatrix}r_{dual}\\ r_{cent}\\ r_{pri}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla f(x)-\lambda+A^T\nu\\ (\lambda_i x_i)-(1/t)1\\ Ax-b\end{bmatrix}$$

$$\text{代理对偶间隙}\hat{\eta}(x,\lambda)=\sum_{i=1} n x_i\lambda_i(\text{其中}x_i>0,\lambda_i>=0)$$

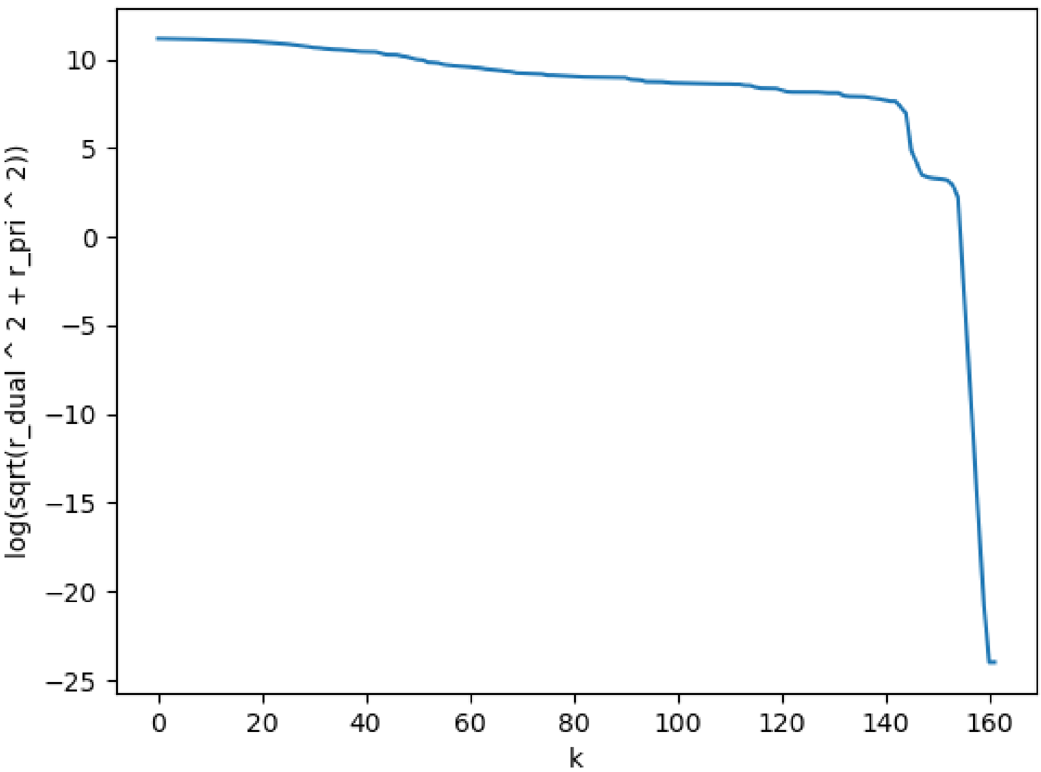
我们取u=10，使用牛顿法进行优化，使用标准的基于残差范数的回溯直线搜索搜索步长，取alpha=0.4，beta=0.5。

解得最优值为214982.0768222267，最优解和对偶最优解储存在根目录下result/primal_dual的对应文件中。

迭代次数k和对数代理对偶间隙、对数残差的关系图如下:



log(eta)
k
0
20
40
60
80
100
120
140
160
5
0
−5
−10
−15
−20



log(sqrt(r_dual ^ 2 + r_pri ^ 2))
k
0
20
40
60
80
100
120
140
160
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25