Week 5 Homework

1 预习作业

预习教材 3.6 和 4.7 节。下节课小测会考察。

2 作业题

1. 定义如下二阶锥

$$Q = \left\{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq t\right\},$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}$. 证明 Q 是自对偶的，即其对偶锥还是 Q.

2. 凸集 $C \in \mathbf{R}^n$ 非空, 定义点 x 与凸集 C 的距离 $d(x,C) = \inf_{y \in C} \|x-y\|$. 定义点 x 在凸集 C 的投影 $\Pi_C(x) = \{y \in \bar{C} \mid \|x-y\| = d(x,C)\}$，其中 $\bar{C}$ 是 C 的闭包.

(1) 证明

$$\|\Pi_C(x_2) - \Pi_C(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n.$$

因此 $\Pi_C(x)$ 是连续函数。

(2) 证明对于任意 $x_0 \notin \mathrm{int}(C)$[1], 存在超平面可以将 x_0 与 C 分离，即存在 a 使得

$$\langle a, x \rangle \geq \langle a, x_0 \rangle, \forall x \in C.$$

3. 已知 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}, b \in \mathbf{R}^m$，方程 $Ax = b$ 有解。请用凸集分离定理证明：

$$\nexists \lambda \in \mathbf{R}^m, \lambda \neq 0, A^T\lambda \geq 0, b^T\lambda \leq 0 \implies \exists x \in \mathbf{R}^n, x > 0, Ax = b.$$

注：其中向量不等式 $> 0, \geq 0, \leq 0$ 代表每个元素 $> 0, \geq 0, \leq 0$，向量 $\neq 0$ 代表向量元素不全为 0。凸集分离定理可以直接使用，请具体写出凸集的形式。

4.K 是一个正常锥，K^* 是其对偶锥，证明：x 是集合 S 中关于 $\preceq_K$ 的最小元的充要条件是对任意 $\lambda \succ_{K^*} 0$, x 是 $\min_{z \in S} \lambda^T z$ 的唯一最优解。

5. **教材习题 2.31.（对偶锥的性质）**

[1] $\mathrm{int}(C)$ 是 C 的内点集。

3 作业说明

- 在教室上课的同学提交纸质版，每次上课前放在讲台上。注意网络学堂的作业提交按钮也需要在截止日期前点击 (用于记录分数)，但不需要在网络学堂提交作业。
- 无法到现场上课的同学在网络学堂提交作业照片或扫描电子版。