

Week 10 Homework

1 预习作业

预习教材 11.1, 11.2 节。下节课小测会考察。

2 编程题

1. 求解下述无约束优化问题, 用 Newton 法选择下降方向, 使用回溯直线搜索选择步长, 参数 α, β 自行设定。

$$\min f(x) = (10x_1^2 + x_2^2)/2 + 5 \log(1 + e^{-x_1 - x_2})$$

初始点取为 $x_0 = (0, 0)^T$, 停止准则为 $\|\nabla f(x)\|_2 < 10^{-8}$. 要求画出点 x 在 2 维平面上的迭代轨迹 (将每个点连线) 以及目标函数值的自然对数 $\log(f(x_k))$ 关于迭代次数 k 的图像。

2. 考虑无约束优化问题

$$\text{minimize } f(x) = -\sum_{i=1}^m \log(1 - a_i^T x) - \sum_{i=1}^n \log(1 - x_i^2)$$

(1) 证明 $f(x)$ 是自和谐的。

(2) 给定数据矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}^T$, 其中使用 Newton 法求解 $m = n = 50$ 和 $m = n = 100$ 两种规模下的最优解 x^* 和最优值 p^* . 下降步长采用 $t = \frac{1}{1+\lambda(x)}$, 其中

$$\lambda(x) = (\nabla f(x)^T \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x))^{1/2}.$$

要求停止条件为 $\lambda(x)^2 < 10^{-5}$, 分别画出对数误差 $\log(f(x_k) - p^*)$ 和下降步长 t_k 关于迭代次数 k 的图像。

请使用 Q2_data 文件夹中提供的数据求解以上问题, 所需数据存在文件 A_50 和 A_100 里, 第 i 行存储行向量 a_i^T 。

3. 考虑等式约束优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Px + q^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in R^n, \quad P \in S_+^n, \quad q \in R^n, \quad A \in R^{m \times n}, \quad b \in R^m \end{aligned}$$

使用牛顿方法求解上述优化问题, 采用回溯直线搜索方法, 自己设定参数和初始点. 停止准则为牛顿减量 $\lambda(x)^2 < 10^{-5}$. 求出原问题和对偶问题的最优解, 函数最优值. 分别画出对数误差 $\log(f(x_k) - p^*)$ 和下降步长 t_k 关于迭代次数 k 的图像.

请使用 Q3_data 文件夹中提供的数据求解以上问题. 我们给出了 $m = 100, n = 200$ 时对应的矩阵 P, q, A, b .

3 作业说明

- 编程作业部分需要撰写报告, 包含推导步骤和运行结果. 报告提交电子版, 和代码一起打包提交至网络学堂.
- 编程语言不限, 下降过程需要自己编写, 不使用现成的优化器.
- 请大家在截止日期前提交作业, 过期不候.