Convex Optimization
Week 7
11/2/2021

2021312593

清華大學
Tsinghua University

5.21 (a): (1)

若 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, $0\le\theta\le1$ (2) $y_1>0$, $y_2>0$,

$\theta(x_1,y_1)+(1-\theta)(x_2,y_2)$:

$=(\theta x_1+(1-\theta)x_2,\ \theta y_1+(1-\theta)y_2)\in D$

$f(x,y)=e^{-x}$: $\nabla f(x,y)=(-e^{-x},0)$ $Hf(x,y)=\begin{bmatrix}e^{-x}&0\\0&0\end{bmatrix}$ 半正定

$f(x,y)$ 为凸函数

$g(x,y)=\frac{x^2}{y}$,

$\nabla g(x,y)=\left[\frac{2x}{y},\ -\frac{x^2}{y^2}\right]$

$Hg(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2}\\ -\frac{2x}{y^2} & 2\frac{x^2}{y^3}\end{bmatrix}$

$\frac{2}{y}>0$, $4\frac{x^2}{y^4}-\frac{4x^2}{y^4}=0$,

$Hg(x,y)$ 半正定

$\therefore g(x,y)$ 为凸函数

$\therefore$ 凸问题,

$\because y>0$, $\frac{x^2}{y}\le0$ $\therefore x=0$

$\therefore$ 最优值为 1

(b) $L(x,y,\lambda)$

$=e^{-x}+\lambda\frac{x^2}{y}$ $(\lambda\ge0)$

$g(\lambda)=\inf\limits_{x,y\in D} L(x,y,\lambda)=0$ (取 $x\to\infty$, $y\to\infty$, $\frac{x^2}{y}\to0$)

对偶问题:

maximize 0

s.t. $\lambda\ge0$

$\lambda^*=0, d^*=0$

$\therefore$ 对偶间隙为 1

(c) 不成立, $\forall(x,y)$ 使 $y>0$, 有 $\frac{x^2}{y}\ge0$,

(d) 对偶问题:

$L(x,y,\lambda)=e^{-x}+\lambda\frac{x^2}{y}-\lambda u$ $(\lambda\ge0)$

$g(\lambda)=\inf\limits_{x,y\in D} L(x,y,\lambda)=-\lambda u$ (取 $x\to\infty$, $y\to\infty$, $\frac{x^2}{y}\to0$)

对偶问题: maximize $-\lambda u$

s.t. $\lambda\ge0$, $d^*(u)=\begin{cases}0 & u\ge0\\ +\infty & u<0\end{cases}$

若 $u\le0$, Slater 条件不成立, $u>0$: Slater 条件成立,

$u<0$: $p^*(u)$ 无定义 (D 为空集) $d^*(u)=p^*(u)$

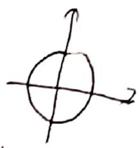
$u=0$: $p^*(u)=1$

$\therefore p^*(u)=\begin{cases}1 & u=0\\ 0 & u>0 \quad (\lambda^*=0)\\ -\infty & u<0\end{cases}$

$p^*(0)-\lambda^* u=1$,
$u>0$ 时 $p^*(u)=0$,
不成立

5.22: ① : $L(x,\lambda) = x + \lambda(x^2-1)$ $(\lambda \ge 0)$.

$$g(\lambda) = \inf_x L(x,\lambda) = \begin{cases} -\infty & \lambda=0 \\ -\lambda-\frac{1}{4\lambda} & \lambda>0 \end{cases}$$



~~x、x^2-1 均为凸函数~~

对偶问题: $\max \; -\lambda-\frac{1}{4\lambda}$

s.t. $\lambda>0$

∵ ∃ $x \in D$, 使 $x^2<1$, 满足 slater, 强对偶成立

∵ x, x^2-1 均为凸函数 ∴ 为凸问题

∴ 对偶问题解为 $\lambda^*=\frac{1}{2}$, $p^*=d^*=-1$

② ∵ x, x^2 均为凸函数, R为凸集 ∴ 凸问题

不存在 $x\in R$ 使 $x^2<0$, ∴ 不满足 slater

对偶问题: $L(x,\lambda) = \lambda x^2 + x$

$$g(\lambda) = \begin{cases} -\infty & \lambda=0 \\ -\frac{1}{4\lambda} & \lambda>0 \end{cases}$$

$\max \; -\frac{1}{4\lambda}$

s.t. $\lambda>0$

原问题最优解: $p^*=0$, $x^*=0$

对偶问题最优解: $d^*=0$, $\lambda\to+\infty$ (取不到)

故不满足对偶性条件

③ x, $|x|$ 均为凸函数, R为凸集 ∴ 凸问题

不存在 $x\in R$ 使 $|x|<0$, 不满足 slater

对偶问题: $L(x,\lambda) = x+\lambda|x|$

$$g(\lambda) = \inf_{x\in R} L(x,\lambda) = \begin{cases} -\infty & \lambda<1 \\ 0 & \lambda\ge 1 \end{cases}$$

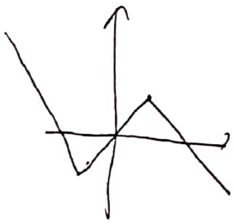
∴ 对偶问题: maximize 0

s.t. $\lambda \ge 1$

$d^*=0$, $\lambda^*=1$

原问题: $x^*=0$, $p^*=0$, $p^*=d^*$, 满足强对偶

④:



$f_1(x)$ 不为凸函数, 不为凸问题

∃ $x=-0.5$, 使 $f_1(x)<0$, 满足 slater

原问题解: $p^*=-2$, $x^*=-2$

对偶问题: $L(x,\lambda) = x+\lambda f_1(x)$

$$= \begin{cases} (1-\lambda)x+2\lambda & x\ge 1 \\ (1+\lambda)x & -1<x\le 1 \\ (1-\lambda)x-2\lambda & (x\le -1) \end{cases}$$

s.t. $\lambda>0$

L关于x在R上连续, 在三段开区间可微

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{x} = \begin{cases} 1-\lambda & x>1 \\ 1+\lambda & -1<x<1 \\ 1-\lambda & x<-1 \end{cases}$$

$$g(\lambda) = \inf_{x\in D} L(x,\lambda) = \begin{cases} -\infty & \lambda<1 \\ -\infty & \lambda>1 \\ -2 & \lambda=1 \end{cases}$$

$g(\lambda) = $ maxime -2

s.t. $\lambda=1$

$d^*=-2$, $\lambda^*=1$

$p^*=d^*$, 满足强对偶

⑤ ~~x^3 ...~~ x^3 在 R 上不为凸函数

$f''(x)=6x$，$x<0$ 时 <0.

∴ 不为凸问题

⑥ x^3 为凸函数

$-x+1$ 凸函数

∃ $x=2$ 使 $-x+1<0$，故 slater 条件

$L(\lambda,x)=x^3-\lambda x+\lambda$，$(\lambda\geq 0)$

$g(\lambda)=\inf\limits_{x\in R}(x^3-\lambda x+\lambda)$

$\frac{\partial L(\lambda,x)}{\partial x}=3x^2-\lambda$，在 $(-\infty,-\sqrt{\frac{\lambda}{3}})$ 单增，

$(-\sqrt{\frac{\lambda}{3}},\sqrt{\frac{\lambda}{3}})$ 单减

$(\sqrt{\frac{\lambda}{3}},+\infty)$ 单增

∴ 对偶问题：

maximize $-\infty$

s.t. $\lambda\geq 0$，$d^*=-\infty$

原问题：$x^*=1$，$p^*=1$，不满足强对偶性

⑥ x^3 在 $(0,+\infty)$ 上

有 $(x^3)''=6x\geq 0$，凸，为凸问题

$x\geq 0$

∃ $x=2$ 使 $-x+1<0$，故 slater 条件

满足强对偶性

$L(\lambda,x)=x^3-\lambda x+\lambda$

$g(\lambda)=\inf\limits_{x\in R_+}(x^3-\lambda x+\lambda)$ $(\lambda\geq 0)$

$L(\lambda,x)$ 关于 x 在 $(0,\sqrt{\frac{\lambda}{3}})$ 单调减

$(\sqrt{\frac{\lambda}{3}},+\infty)$ 单调增

$g(\lambda)=\frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}-\lambda\sqrt{\frac{\lambda}{3}}+\lambda$

$=-\frac{2}{3}\lambda\sqrt{\frac{\lambda}{3}}+\lambda$

对偶问题：maximize $-\frac{2}{3}\lambda\sqrt{\frac{\lambda}{3}}+\lambda$

s.t. $\lambda\geq 0$

$\lambda^*=3$

$d^*=1$

原问题 $p^*=1$，$x^*=1$，$p^*=d^*$

~~满足强对偶性~~

8.

5.24: ~~设∃~~ $\cancel{f(w,z)}$ ~~使~~ $\cancel{\sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z) > \inf\limits_{w\in W}\sup\limits_{z\in Z} f(w,z)}$

~~对于∀~~ $\cancel{z_0\in Z}$, $\forall w_0 \in W$,

~~则~~ $\cancel{\inf\limits_{w\in W} f(w,z_0) \le f(w_0,z_0)}$

~~两边取上界,~~ $\cancel{\sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z) \le \sup\limits_{z\in Z} f(w_0,z)}$

~~两边取下界 为~~ $\cancel{\sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z) \le \inf\limits_{w\in W}\sup\limits_{z\in Z} f(w,z)}$

若 W, Z 均为空集, $\sup\inf f(w,z) = -\infty$, $\inf\sup f(w,z) = +\infty$, 成立

若 W 为空 Z 不为空: $\cancel{\sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z) = -\infty}$ 成立

$\cancel{\inf\limits_{w\in W}\sup\limits_{z\in Z} f(w,z) = -\infty}$

否则: 对 $\forall z_0 \in Z$, $w_0 \in W$,

$$\inf_{w\in W} f(w,z_0) \le f(w_0,z_0)$$

两边取 $\sup\limits_{z\in Z}$: $\sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z) \le \sup\limits_{z\in Z} f(w_0,z)$

两边取 $\inf\limits_{w\in W}$: $\sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z) \le \inf\limits_{w\in W}\sup\limits_{z\in Z} f(w,z)$

扫描全能王 创建

清華大學

Tsinghua University

5.31: ∵ $\forall i \le m$, $\lambda_i^* \ge 0$, $f_i(x) \le 0$, $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$

设 $\lambda_{i0}^* \ldots \lambda_{ip}^* = 0$，则 $\lambda_{i0}^* \ldots \lambda_{iq}^* > 0$

∵ 问题为凸问题

则有 $f_{i0}(x^*), \ldots, f_{iq}(x^*) = 0$

∴ $f(x) \ge f(x^*) + \nabla f_0(x^*)^T (x - x^*)$

$\nabla f_0(x^*) = -\sum_{i=1}^{q} \lambda_{ij}^* \nabla f_{ij}(x^*)$

$\nabla f_0(x^*)^T (x - x^*) \le f(x) - f(x^*)$

∵ 问题为凸问题且 x^*, λ^* 满足KKT

则有 $\forall x$, $f(x) - f(x^*) \ge 0$

若 ∃ x_0 使 $\nabla f_0(x^*)^T (x_0 - x^*) < 0$，

令 $x_1 = x^* + (x_0 - x^*)\Delta d$.

$$\lim_{\Delta d \to 0} \frac{f_0(x_1) - f_0(x^*)}{x_1 - x^*} = \lim_{\Delta d \to 0} \frac{f_0(x_1) - f_0(x^*)}{(x_0 - x^*)\Delta d} = \nabla f_0(x^*)$$

当 Δd 趋于0时 ($\Delta d > 0$)

有 $\nabla f_0(x^*)(x_0 - x^*)\Delta d = f_0(x_1) - f_0(x^*) < 0$

∴ ∃ x_1 使 $f_0(x_1) < f_0(x^*)$

与 $\forall x$, $f(x) - f(x^*) \ge 0$ 矛盾.

5.31:

~~∵ $f_i(x) \le 0$~~

∵ $\forall i$, $f_i(x)$ 凸

∴ $f_i(x) - f_i(x^*) \ge \nabla f_i(x^*)^T (x - x^*)$

∵ $f_i(x) \le 0$,

∴ $f_i(x^*) + \nabla f_i(x^*)^T (x - x^*) \le 0$,

∵ $\lambda_i \ge 0$,

∴ $\lambda_i f_i(x^*) + \lambda_i \nabla f_i(x^*)^T (x - x^*) \le 0$

$\lambda_i \nabla f_i(x^*)^T (x - x^*) \le 0$

∵ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = -\nabla f_0(x^*)$,

∴ $-\nabla f_0(x^*)^T (x - x^*) \le 0$,

$\nabla f_0(x^*)^T (x - x^*) \ge 0$