清華大學

Convex Optimization Week 15 12/22/2021

经管21 (徐?) 2021012591

1. min $x^TA^TAx - 2(A^Tb)^Tx + b^Tb$

s.t. $x^Tx - 1 = 0$

引入 $X = xx^T$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} A^TA & -A^Tb \\ (-A^Tb)^T & b^Tb \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

问题化为 问题化为

$$\min \ tr(Q_0 X) \quad s.t.\ tr(Q_1 X) = 1,\ X \succeq 0,\ rank(X) = 1$$

1.

(1) $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|Ax-b\|_2^2$

$$= \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^TA & -A^Tb \\ -b^TA & b^Tb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \bar{x}^T Q_0 \bar{x} = trace(Q_0 X),\quad X = \bar{x}\bar{x}^T,\quad Q_0 = \begin{bmatrix} A^TA & -A^Tb \\ -b^TA & b^Tb \end{bmatrix}$$

问题:

$$\begin{aligned} \min\ & tr(Q_0 X) \\ s.t.\ & tr(Q_1 X) = 1 \\ & X_{n+1,n+1} = 1 \\ & X \succeq 0 \\ & rank(X) = 1 \end{aligned}$$

$\|x\|_2 = 1$

$\Updownarrow$

$x^Tx = 1$

$\Updownarrow$

$\bar{x}^T Q_1 \bar{x} = 1$

$\Updownarrow$

$trace(Q_1 X) = 1$, $Q_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

去掉非凸条件 $rank(X)=1$:

$$\begin{aligned} \min\ & tr(Q_0 X) \\ s.t.\ & tr(Q_1 X) = 1 \\ & X_{n+1,n+1} = 1 \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

其中 $Q_0 = \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$ 半正定,

Q_1 也半正定

(2) 能取到原问题最优值

$\because$ 仅一个凸约束(即 $tr(Q_1X)=1$

$\therefore$ 能找到 $r(X)=1$ 的最优 X,

~~可找到 $\bar{x}\bar{x}^T = X$, $\therefore$ 由~~

$\therefore$ SDP问题 最优解对原问题可行,

$\therefore$ 也为原问题最优解

2\. ①：若G'为G最大完全子图，G'的点为$x_{i1}, x_{i2} \cdots x_{in}$

若$\alpha(G) < |G'|$：

可取$x_{i1}=1, x_{i2}=1 \cdots x_{in}=1$，其余为0，也满足条件，

此时目标函数值为$|G'| > \alpha(G)$，矛盾

若$\alpha(G) > |G'|$：

令存在$x_{j1}, x_{j2} \cdots x_{jn}=1$为最优解

则$\forall k, l$，有x_{jk}与x_{jl}相连

$x_{j1} \cdots x_{jn}$构成新的完全子图，

其大小为$\alpha(G) > |G'|$，矛盾

$\therefore \alpha(G) = |G'|$

得证

(2)

$\max \sum_{i=1}^{n} x_i$

等价于$\min -(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$

$= -x^T A_0 x$，$= tr(-A_0 X)$，$X = xx^T$

$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

A_1：$A_{1ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \notin E \\ 0 & (i,j) \in E \end{cases}$

$\therefore \forall i, (i,j) \in E, A_1(i,j) = 0$，$A_1$为全正的矩阵且$A_1$对称

$\therefore$故A_1半正定

$x_i \in \{0,1\}$可转化为

$\forall i, x_i^2 \leq 1$,

即$x^T I_{ii} x \leq 1$,

$tr(I_{ii} X) \leq 1$

(I_{ii}：只I_{ii}为1，其余为0)

目标函数为

minimize $tr(-A_0 X)$

s.t. $tr(A_1 X) = 0$

$\forall i,j,\ tr(I_{ij} X) \leq 1$

$X \succeq 0$

I_{ij}为(i,j)为1，其余为0