Convex Optimization Week 2

软件21 沈钰 2021012549

清華大学 Tsinghua University 数学作业纸

9/25/2020

班级 姓名 编号 科目 第 页

2.6 : ~~若 $\forall x, a^Tx \le b$, 有 $\tilde{a}^Tx \le \tilde{b}$, 有 $\{x \mid a^Tx \le b\} \subseteq \{x \mid \tilde{a}^Tx \le \tilde{b}\}$~~

(1) $\begin{cases} \tilde{a} = ka, k>0 \\ \tilde{b} \ge kb \end{cases}$

证明: ① 充分性:

对 $\forall x$ 使 $a^Tx \le b$,

$\tilde{a}^Tx = ka^Tx = kb \le \tilde{b}$ 必成立

$\{x \mid a^Tx \le b\} \subseteq \{x \mid \tilde{a}^Tx \le \tilde{b}\}$ 成立

② 必要性:

若 $\tilde{a}$ 与 a^T 线性无关, 且对 $\forall x$ 使 $a^Tx \le b$, 有 $\tilde{a}^Tx \le \tilde{b}$:

若 $\tilde{a}^T$ 与 a^T 线性无关,

令 $u_1 \cdots u_{n-2}$ 为 $\begin{bmatrix} a \\ \tilde{a} \end{bmatrix}$ 的一组基,

则 $x = \lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_{n-2} u_{n-2} + \lambda_{n-1} a + \lambda_n \tilde{a}$

$a^Tx = \lambda_{n-1}\|a\|^2 + \lambda_n a^T\tilde{a} \le b$

$\tilde{a}^Tx = \lambda_n\|\tilde{a}\|^2 + \lambda_{n-1} a^T\tilde{a}$

(2) $\begin{cases} \tilde{a} = ka, k>0 \\ \tilde{b} = kb \end{cases}$, 二根据上述推论,

$S_1 \subseteq S_2$, 有 $\begin{cases} \tilde{a} = ka \\ \tilde{b} \ge kb \end{cases}$

$S_2 \subseteq S_1$, 有 $\begin{cases} a = t\tilde{a}, t = \frac{1}{k} \\ b \ge \frac{\tilde{b}}{k}, kb = \tilde{b} \end{cases}$

若 $\tilde{a} = ka, k<0$

则: $a^Tx \le b$

$\Downarrow$

$(-ka)x \ge -kb$ 成立

若 $a = ka, k>0$, 显然有 $\tilde{b} \ge kb$

若 $\tilde{a} = ka$, 则若有 $k>0$, $\tilde{b} \ge kb$, 否则不成立

$\therefore$ 设 $\|a\|^2 = m^2$, $\|\tilde{a}\|^2 = n^2$:

$u_1 + \frac{u_2}{m^2} a^T\tilde{a} \le \frac{b}{m^2}$ ①

$u_2 + \frac{u_1}{n^2} a^T\tilde{a} \le \frac{\tilde{b}}{n^2}$ ②

由①, $u_1 \le \frac{b}{m^2} - \frac{u_2}{m^2} a^T\tilde{a}$

~~代入② $u_2 + \frac{u_1}{n^2} a^Ta \le u_2 \cdots \frac{b}{mn} a^Ta \frac{(a^Ta)^2}{mn} u_2$~~

若 $u_1 = \frac{b}{m^2} - \frac{u_2}{m^2} a^T\tilde{a}$,

代入②, 要 $\forall u_2$, $(m^2n^2 - (a^T\tilde{a})^2) u_2 \le \frac{\tilde{b}}{n^2} - \frac{b}{m^2} a^Ta$

比成立

则 $a^T\tilde{a} = mn$, $a^T \parallel \tilde{a}$,

$\tilde{a} = ka$

对 $\forall u_1, u_2$,

若 $u_1\|a\|^2 + u_2 a\tilde{a} \le b$

必有 $u_2\|\tilde{a}\|^2 + u_1 a\tilde{a} \le \tilde{b}$ 成立,

此时 $\tilde{b} \ge kb$ 必成立

扫描全能王 创建

2.8 (b) 是多面体，

$-I \in R^n$

$A = -I$

$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$F = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$

$g = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} Ax = -x \preceq 0 \\ Fx = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = g \end{cases}$$

(c): 设 $x = x' \cdot \|x\|_2$，其中 $\|x'\| = 1$:

则 $x^T y = x'^T y \cdot \|x\|_2$

对 $\forall \|y\|_2 = 1$，$x^T y \le 1$，

$\Updownarrow$

即: $\|x\|_2 \le 1$

不是多面体

扫描全能王 创建

2.12:

(a) 是凸集，是 $\{x \mid \alpha \le a^T x \le \beta\}$ 与 $\{x \mid -a^T x \le -\alpha\}$ 的交

(b) 是凸集，是 $\{x \mid x \le \beta\}$ 与 $\{x \mid x \ge \alpha\}$ 的交

(c) 是凸集，是 $\{x \mid a_1^T x \le b_1\}$ 与 $\{x \mid a_2^T x \le b_2\}$ 的交

~~(d)~~

~~若 $x_0 \in S$~~

~~则结合有 $f(x_0)$ 凸~~

若 $x_0 \notin S$：设

(d) 是凸集，记为 S_1

若 $x_1 \in S_1$，$x_2 \in S_1$，

则有 $\forall y \in S$，$\|x_1 - x_0\|_2 \le \|x_1 - y\|_2$

$\|x_2 - x_0\|_2 \le \|x_2 - y\|_2$

对 $0 \le \theta \le 1$，

$x_3 = \theta x_1 + (1-\theta) x_2$，

有 $\|x_3 - x_0\|_2 = \|\theta x_1 + (1-\theta) x_2 - x_0\|_2$

$\le \theta \|x_1 - x_0\|_2 + (1-\theta)\|x_2 - x_0\|_2$

$\le \forall y_1, y_2$，

$\theta \|x_1 - y_1\|_2 + (1-\theta)\|x_2 - y_2\|_2$

记为 S_1

若 $x_1 \in S_1$，$x_2 \in S_1$，

则有 $\forall y \in S$，$\|x_1 - x_0\|_2 \le \|x_1 - y\|_2$

$\|x_2 - x_0\|_2 \le \|x_2 - y\|_2$

对 $\forall\, 0 \le \theta \le 1$，

$x_3 = \theta x_1 + (1-\theta) x_2$，

有 $\|x_3 - x_0\|_2$

$= \|\theta x_1 + (1-\theta) x_2 - x_0\|_2$

$\le \cancel{\theta \|x_1 - x_0\|_2 + (1-\theta)\|x_2 - x_0\|_2}$

$\le \cancel{\theta \|x_1 - y\|_2 + (1-\theta)\|x_2 - y\|_2}$

$\|x_3 - y\|_2 = \|\theta x_1 + (1-\theta) x_2 - x_0\|_2$

(d) 也凸的.

记为 $S_{all} = \bigcap_{y\in S} \{x \mid \|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2\}$.

又 ∵ $\forall y$, $\{x \mid \|x-x_0\|_2 \le \|x-y\|_2\}$ 为凸的，交集凸

∴ 为凸的

(e) 不为凸的.

$S=\{-1,1\}$, $T=\{0\}$, 记 $\{x \mid dist(x,S) \le dist(x,T)\}$ 为 R

$-1 \in R$

$1 \in R$

$0=\frac{1}{2}\cdot -1+\frac{1}{2}\cdot 1$, $0 \notin R$,

(f) 为凸的:

若对 x, $x+S_2 \subseteq S_1$,

即 $\forall y\in S_2$, $x+y\in S_1$,

记 $\{x \mid x+S_2 \subseteq S_1\}=T$:

若 $x_1, x_2 \in T$:

则 $\forall y\in S_2$, $x_1+y\in S_1$, $x_2+y\in S_1$,

则对 $\forall \theta_1,\theta_2 \in R$, $\theta_1\ge 0$, $\theta_2\ge 0$, $\theta_1+\theta_2=1$,

$\forall y \in S_2$

$(\theta_1 x_1+\theta_2 x_2)+y$

$=\theta_1(x_1+y)+\theta_2(x_2+y) \in S_1$,

$\theta_1 x_1+\theta_2 x_2 \in T$, 为凸

(g) 为凸的,

记为 S

若 $x_1\in S$, $x_2\in S$.

则 $\|x_1-a\|_2 \le \theta\|x_1-b\|_2$

$\|x_2-a\|_2 \le \theta\|x_2-b\|_2$.

则对 $\forall 0<u\le 1$,

$\|u x_1+(1-u)x_2-a\|_2$

$\le u\|x_1-a\|_2+(1-u)\|x_2-a\|_2$

$\le u\theta\|x_1-b\|_2+(1-u)\theta\|x_2-b\|_2$

清华大学 数学作业纸
Tsinghua University

班级 姓名 编号 科目 第 页

(9) 为凸集

记为 S

若 $x_1 \in S,\ x_2 \in S$

则 $\|x_1-a\|_2 \le \theta \|x_1-b\|_2$

$\|x_2-a\|_2 \le \theta \|x_2-b\|_2$

对 $\forall\ 0 \le u \le 1$

$\|ux_1+(1-u)x_2-a\|_2$

$= \|u(x_1-a)+(1-u)(x_2-a)\|_2$

$= \sqrt{u^2\|x_1-a\|_2^2+(1-u)^2\|x_2-a\|_2^2+2u(1-u)(x_1-a)^T(x_2-a)}$

$\theta\|ux_1+(1-u)x_2-b\|_2$

$= \theta\|u(x_1-b)+(1-u)x_2-b\|_2$

$= \sqrt{\theta^2u^2\|x_1-b\|_2^2+\theta^2(1-u)^2\|x_2-b\|_2^2+2\theta^2u(1-u)(x_1-b)^T(x_2}$

(9) 为凸集:

$\|x-a\|_2 \le \theta\|x-b\|_2$

$\Downarrow$

$(x-a)^T(x-a) \le \theta^2(x-b)^T(x-b)$

$\|x\|_2^2+\|a\|_2^2-2a^Tx$

$\le \theta^2\|x\|_2^2+\theta^2\|b\|_2^2-2\theta^2b^Tx$

$\Downarrow$

$(\theta^2\|b\|_2^2-\|a\|_2^2)-(1-\theta^2)x^Tx$

$+(2a^T-2\theta^2b^T)x \ge 0$,

令仿射变换 $f(x) = x - \dfrac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}$,

$\theta=1$ 时是超平面 (见2.7)

有 $\|f(x)\|_2^2 \le \dfrac{\theta^2\|b\|_2^2-\|a\|_2^2+\dfrac{\|a-\theta^2b\|_2^2}{(1-\theta^2)}}{1-\theta^2}$,

当 $\theta \neq 1$ 是一个范数球仿射变换得到, 为凸集

2.1^6 证明:

若 $z_1, z_2 \in S$,

$z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$

则 $\exists\, y_3, y_4, y_5, y_6 \in \mathbb{R}^n$, ~~$y_3, y_5 \in S_1$, $y_4, y_6 \in S_2$,~~

有 $(x_1, y_3) \in S_1$, (x_2, y_5), $(x_1, y_4) \in S_2$, (x_2, y_6), 且 $y_3 + y_4 = y_1$, $y_5 + y_6 = y_2$

则对 $\forall\, 0 \le \theta \le 1$:

$$\theta z_1 + (1-\theta) z_2 = (\theta x_1 + (1-\theta) x_2,\ \theta y_1 + (1-\theta) y_2)$$

$\because S_1, S_2$ 凸,

$\therefore \theta(x_1, y_3) + (1-\theta)(x_2, y_5) \in S_1$,

$\theta(x_1, y_4) + (1-\theta)(x_2, y_6) \in S_2$

$\because$ ~~$(\theta x_1 + (1-\theta) x_2,\ \theta y_1 + (1-\theta) y_2)$~~

$$\theta(x_1, y_3) + (1-\theta)(x_2, y_5) + \theta(x_1, y_4) + (1-\theta)(x_2, y_6)$$
$$= (x_1 + (1-\theta) x_2,\ \theta y_3 + (1-\theta) y_5 + \theta y_4 + (1-\theta) y_6)$$
$$= (x_1 + (1-\theta) x_2,\ \theta y_1 + (1-\theta) y_2)$$

$\therefore (\theta x_1 + (1-\theta) x_2,\ \theta y_1 + (1-\theta) y_2) \in S$

S为凸集