

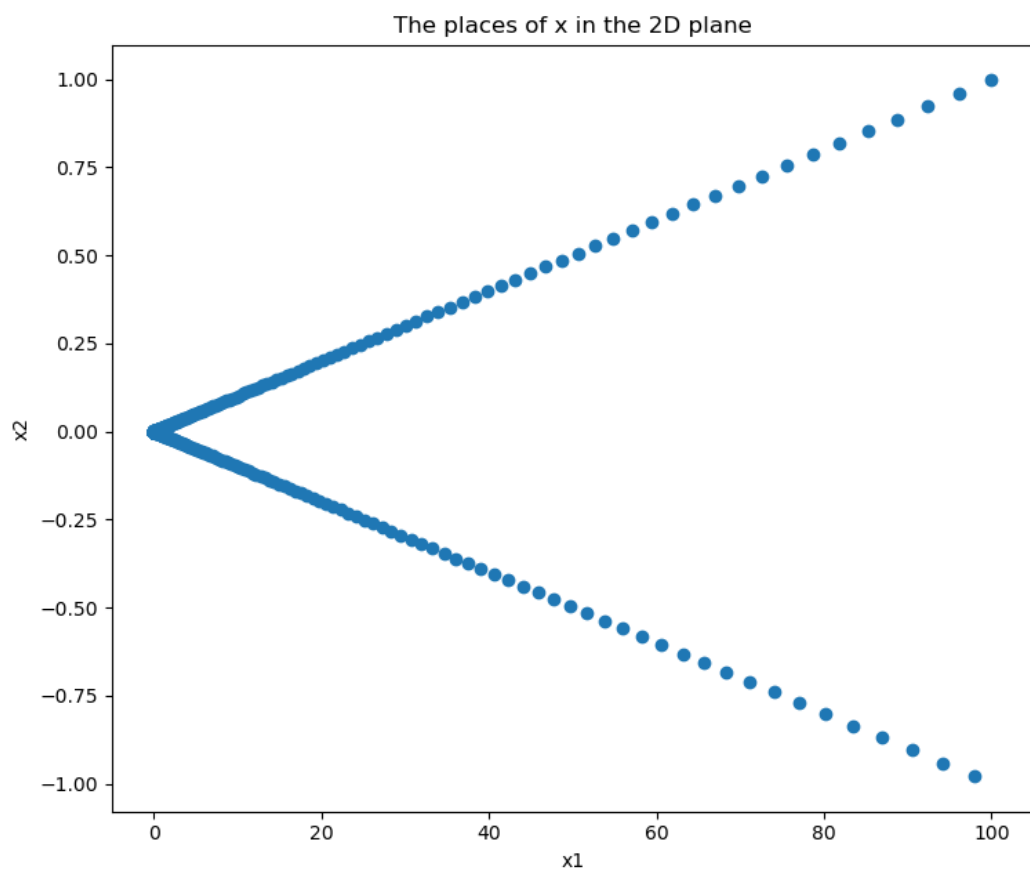
1. t最优解为2/101, 推导过程如下:

①: $f(x) = \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} x$
 $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} x = Ax$
 根据 Banach 不动点定理: 算子 $T = I - t \nabla f$
 若 $\forall x, y, \|x - tAx - y + tAy\| \leq \rho \|x - y\|$ 有 $x^* = y^*$
 $\rho < 1, \mathbb{R}^1, T(x) = x^*$
 ~~$\|x - tAx\| \leq \rho \|x\|$~~
 ~~$\|(I - tA)x\| \leq \rho \|x\|$~~
 $\therefore I \leq tAx \leq 100I$
 $\|x - y\| \leq \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq 100 \|x - y\|$
 $\therefore 1 - t \leq t \leq 100$
 $\| (I - tA)x \| \leq \max(|1 - t|, |1 - 100t|) \|x\|$
 当 $t = \frac{2}{101}$ 时,
 ρ 取最小,
 收敛最快

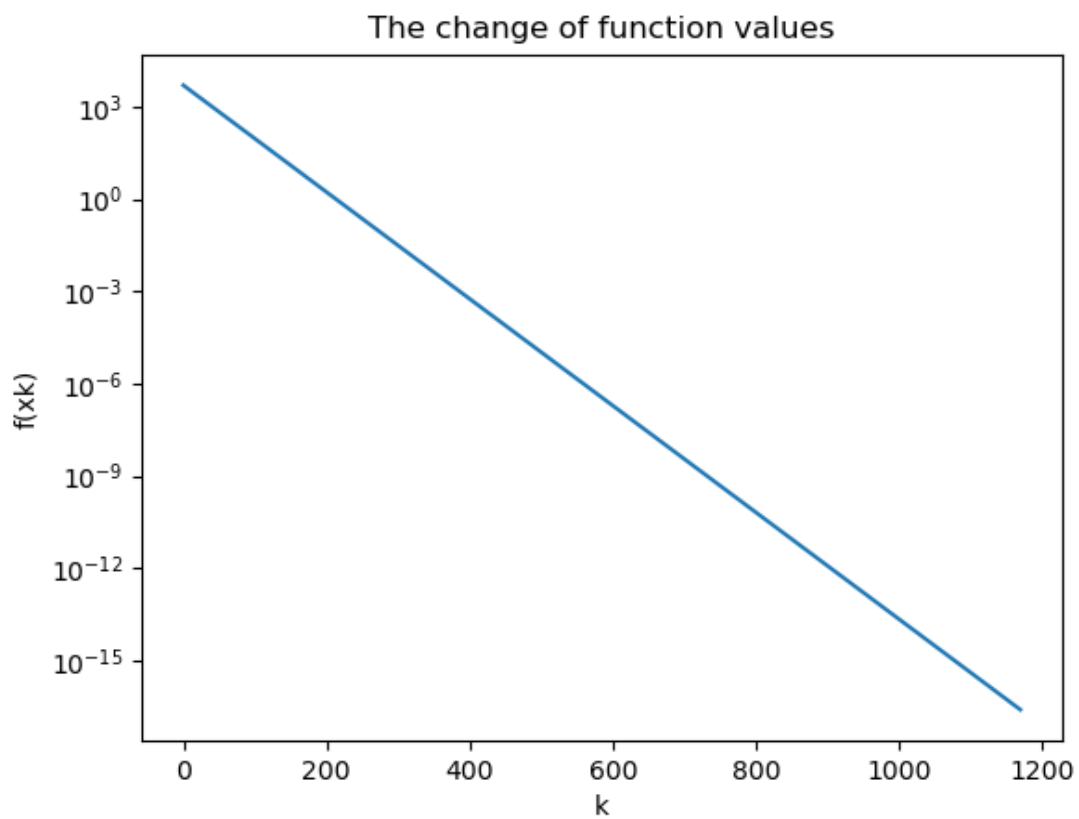
A/x
 $I - tA/x$
 ~~A^2/x~~
 $2tA^2 + t^2A^3/x$
 $f(x) = \frac{1}{2} x^T (A^3 t - A^2) x$

经过1170步迭代, 最终收敛于 $x = (7.012241 \times 10^{-9}, -7.011969 \times 10^{-11})$, 此时
 $y = 2.4831599683733593 \times 10^{-17}$

x的位置变化如下图:

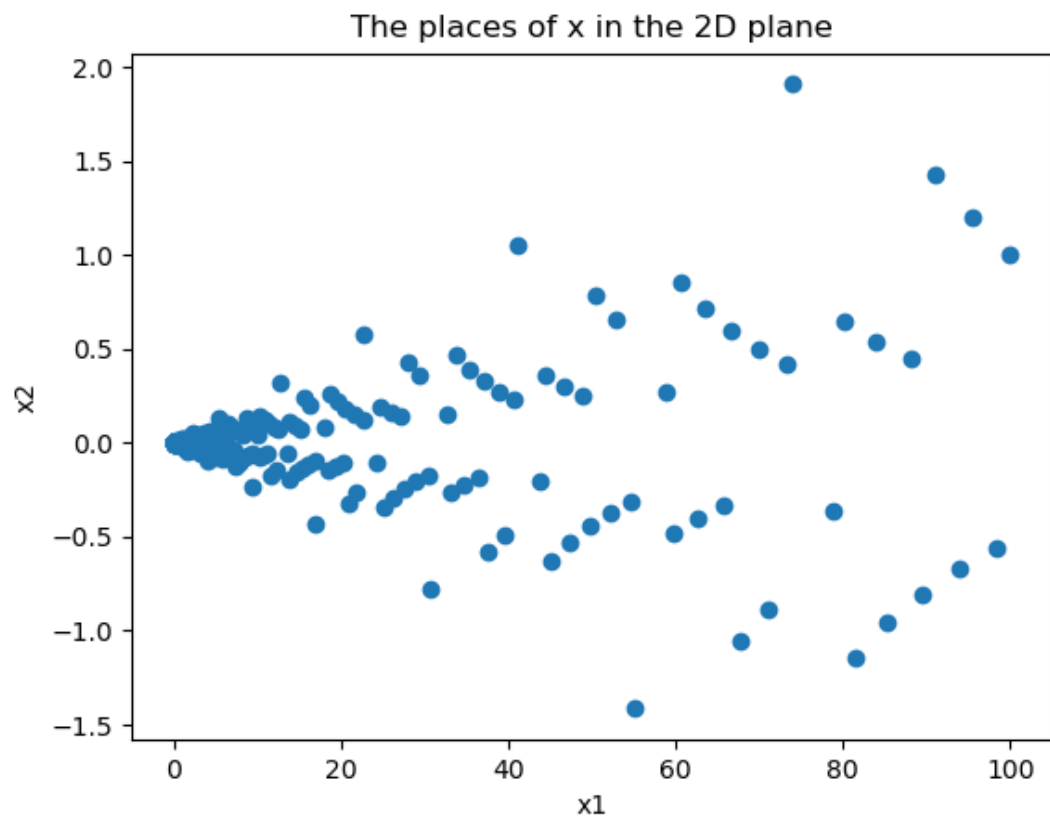


$k-f(k)$ 的示意图如下，说明 $f(k)-p^*$ 的值指数收敛：

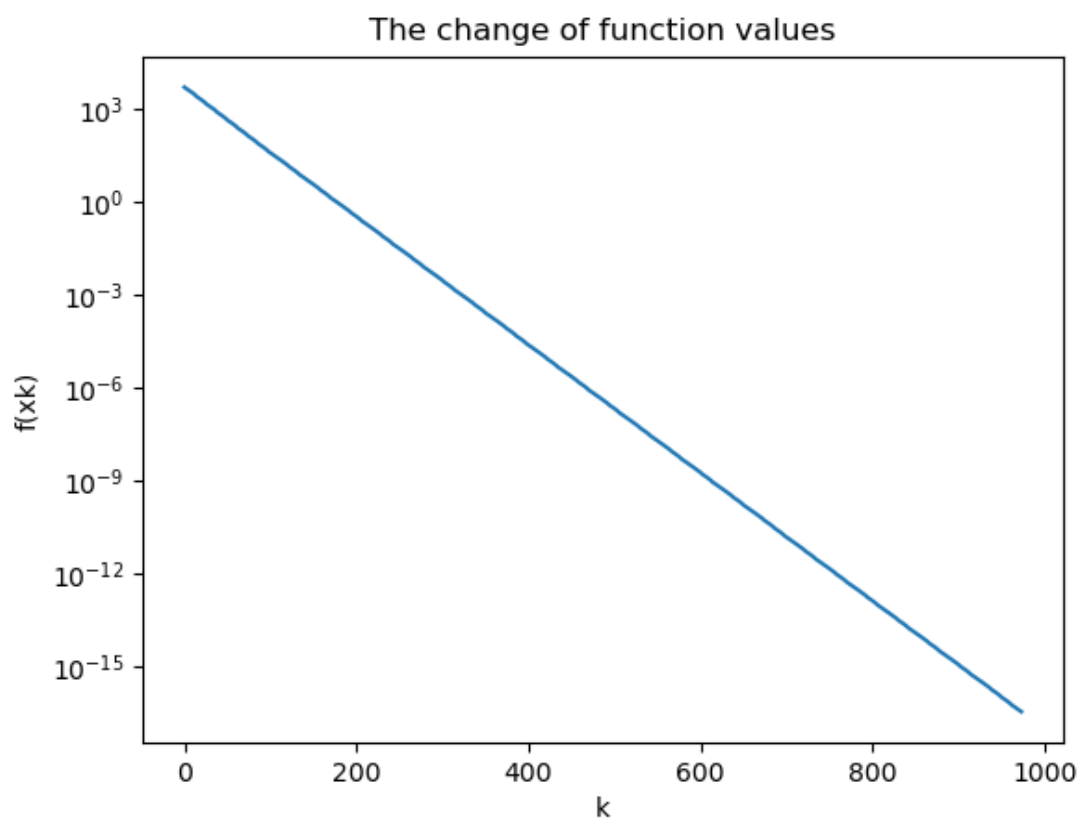


2.经过974步迭代, 收敛于 $x=(8.2212521 \times 10^{-9}, 4.5670842 \times 10^{-11})$, 此时 $y=3.3898784635986683 \times 10^{-17}$

x的位置变化如下图:



k-f(k)的示意图如下, 说明 $f(k)-p^*$ 的值指数收敛:



3.

$$t = \frac{x^T A^2 x}{x^T A^3 x}$$

推导步骤如下:

① $f(x-tA^2x)$

$$= \frac{1}{2} (x-tA^2x)^T A (x-tA^2x)$$

$$= \frac{1}{2} x^T (I-tA)^T A (I-tA) x$$

$$= \frac{1}{2} x^T (A - 2tA^3 + t^2A^5) x$$

$$\frac{\partial f(x-tA^2x)}{\partial t} = x^T (A^3 - A^5) x$$

$$\frac{\partial^2 f(x-tA^2x)}{\partial t^2} = -2x^T A^5 x$$

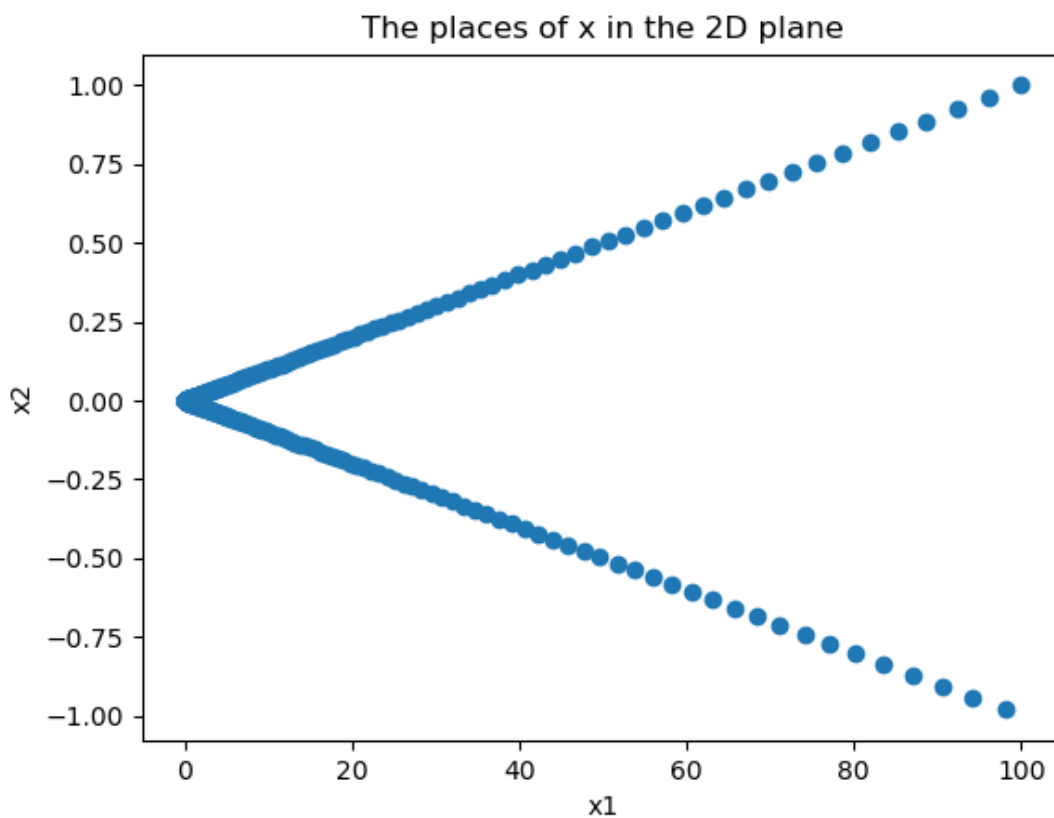
当 $t = \frac{x^T A^2 x}{x^T A^3 x}$ 时, $f(x-tA^2x)$ 取极值

Handwritten notes on the right:

- $\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|$ (Lipschitz)
- $\|x\| \leq \|I-tA\| \|x\| \leq \|I\| \|x\|$
- $\|I-tA\| \leq \max(\|I\|, \|tA\|)$
- 当 $t = \frac{2}{\|A\|}$ 时, $\|I-tA\| = 1$

经过1170步迭代, 收敛于 $x = (7.0122335 \times 10^{-09}, -7.0122227 \times 10^{-11})$, 此时 $y = 2.4831564942147865 \times 10^{-17}$.

x 的位置变化如下:



$k-f(k)$ 的示意图如下, 说明 $f(k)-p^*$ 的值指数收敛:

The change of function values

