31/3/22

1. 算法分析：计算 $C_A(I)$ ~~下界 $L_A(I)$ 上界 $U_A(I)$~~ → 低上界 最坏上界

最坏下界
算法计算量上界

多项式：$\exists g(x), \alpha$，$C_A(I) \le \alpha g(l(I))$

有限长：$l(x) = \lceil \log_2(|x|+1) \rceil + 2$

2. 邻域：对组合优化 (D, F, f)，D上一个D子集的映射 $N: x \in D \to N(x) \in 2^D$

若 $x^* \in F$，$f(x^*) \le f(x)$ 对 $\forall x \in N(x^*) \cap F$ 成立

邻域搜索：
- 构造初始解
- 利用邻域迭代到满足某些条件

3. 近似：启发式算法：

$\forall I$，当 $|z_H(I) - z_{opt}(I)| \le \varepsilon |z_{opt}(I)|$ 时，H为ε近似算法

性能比 $R = \sup \frac{z_H(I)}{z_{opt}(I)}$：有效近似时，$R \le 1+\varepsilon$

最坏上界 α：多项式

渐近性能比：$\lim_{k \to \infty} \sup_I \left(\frac{z_H(I)}{z_{opt}(I)} \,\middle|\, z_{opt}(I) \ge k \right)$

性能评价：
- 最坏情况
- 概率分析
- [illegible]

---

1. NP问题（判定问题 优化→判定）

非确定性：多项式解 $f(x)$ ⇒ 对每个实例，存在 $O_g(l(I))$

两个阶段：
- guess ⇒ 猜个解
- verify ⇒ 多项式时间验证"是"

2. 归约：

$$\begin{array}{ccc} A1 & \xrightarrow{\text{输入转换}} & A2 \\ & & \downarrow \\ A1解 & \xleftarrow[\text{多项}]{} & A2解 \end{array}$$

A2解决时间 → 问题规模

有效算法

A1 可以在 $O_g(l(I))$

↓

A2 部分解

Week 6

3/10/2022

1.

多项式归约: A1 → A2:
若A1用 多项式调用A2

A2复杂度: $g_2(x)$
调用: $g(|x|)$: 调用次数

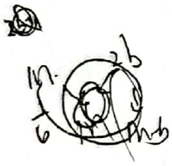
A1时间: $O(g(|x|)\, g_2(g(|x|)))$

2. NP: {非确定性多项式
{多项式时间内可验证

~~NP-Hard:~~

NPH / NP完全: {任意NP问题可归约A, NP
NP难: 所有NP可归约A
NP: 非确定性多项式

优化问题多项式 ⇔ 任一判定问题多项式



3/22/2022

Week 5

李[illegible]

1. 局部搜索： 选定初始可行解 x^0，记为当前最优解 $x^{best} = x^0$，$T = N(x^{best})$（邻域）

② 当 $T \setminus \{x^{best}\} = \phi$，停止；否则从 T 中选一集合 S，更新 x^{best}，若有 $T = T - S$

2. 禁忌搜索 邻域结构 2-opt

① 令禁忌表 $H = \phi$，初始 x_{now}

② x_{now} 邻域中找 满足禁忌 的候选集 $Can\_N(x^{now})$ 一选出 x^{next}，$x_{now} = x^{next}$

附：禁忌长度
~~禁忌~~ 禁忌表有限长，

3/24/2022

3. 模拟退火：

① 任选一初始解 i_0，$i := i_0$，$k := 0$，$t_0 := t_{max}$

② 若满足停止 ⇒ step 3

否则：从 $N(i)$ 中选一 j，$\Delta f_{ij} = f(j) - f(i)$

若 $f(ij) \le 0$：$i := j$

否则 $\exp(-\frac{\Delta f_{ij}}{t_k}) > random(0,1)$，$i := j$

③ $t_{k+1} = d(t_k)$；$k := k+1$

清華大學

Week 6

模拟退火

1. 退火: 温度T, 分子服从 Boltzmann 概率分布 $Pr(\bar{E}=E(r)) = \frac{1}{Z(T)}\exp\left(-\frac{E(r)}{k_B T}\right)$

高温时: 每个概率基本相同, 接近 $\frac{1}{|D|}$

p(能量低) > p(能量大)

最低能量状态的概率随着 T 升高下降:

$T\to 0$, $Pr(\bar{E}=E(r_{min})) \to \frac{1}{|D_0|}$

启发式
局部优化 已被证明全局收敛
贪心 邻域

① 给定一个初始解, $i=i_0$, $k=0$, $t_0=t_{max}$

② 从 $N(i)$ 中随机选 j, $\Delta f_{ij} = f(j) - f(i)$ 若 $\begin{cases} \Delta f_{ij} \le 0: 接受 \\ \exp\left(-\frac{\Delta f_{ij}}{t_k}\right) > random(0,1) \quad i=j, 接受 \end{cases}$

③ $t_{k+1} = d(t_k)$, $k=k+1$

$G_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{|N(i)|} & j\in N_i \\ 0 & else \end{cases}$ $A_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & f(i)\ge f(j) \\ \exp\left(-\frac{\Delta f_{ij}}{t}\right) & f(i)<f(j) \end{cases}$

2. Markov链

$p_{ij}(t) = \begin{cases} G_{ij}(t)A_{ij}(t) & \forall j\ne i \\ 1-\sum G_{ik}(t)A_{ik}(t) & j=i \end{cases}$

可证明
渐近收敛性
分布收敛 $\begin{cases} T减扫描 \\ T=0 齐次 \end{cases}$
收敛到全局 ($T\to 0$, 全局最优 $p\to 1$)

① 无后效性/马尔可夫性 $P(X(n)=j \mid X(1)\ldots X(n-1))$

$= P(X(n)=j \mid X(n-1)=i)$ 仅与上一步有关

时齐: $p_{ij}(n+1) = p_{ij}(n)$, $\forall n$

可达: $i\to j$

互通: $i\leftrightarrow j$ 若 $i\to j$, $j\to k$, 则 $i\to k$

($\exists n$, $p_{ij}^{(n)} > 0$)

$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij}=n \mid X(0)=i)$

$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 从i到j的概率

状态i: 常返: $f_{ii}=1$ (一定会返回 i) → 回到原状态的概率

非常返: $f_{ii}<1$ (有可能不返回)

$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ $\begin{cases} 正常返: \mu_i<\infty \\ 零常返: \mu_i=\infty \end{cases}$ → 回到原状态的平均步数

② 非周期, 不可约, 所有状态正常返: 可以有一平稳分布 v_j: $v_j = \sum_i v_i p_{ij}$

③ 若 $\forall i,j$ $\exists n$, $p_{ij}^{(n)} > 0$, 则称为不可约

④ 若 i 与 j 互通, 则同周期/非周期

非周期: 若 $p_{ii}^{(n)}$ 仅 $n=t, 2t, \ldots$ 其余为0, 则 i 有周期

周期为1 → 非周期

不可约: 非平凡闭集 → 不可约

① 不可约, 有限, 则所有状态为正常返

3. 收敛性: ① 立存平衡分布 $v_j(t) = \pi_j > 0$
② 存在 $\pi_j = \lim_{t\to\infty} v_j(t)$
③ 全局最优收敛: $\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{|D_{opt}|} & j \in D_{opt} \\ 0 & j \notin D_{opt} \end{cases}$ $\lim_{t\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} P(X(n,t) \in D_{opt}) \right\} = 1$

Week 8 遗传算法

1. ① 编码, ② 随机初始种群, N个个体

② 对每个个体 $pop_i(t)$ 计算适应度 $f_i = fitness(pop_i(t))$

③ 选择概率 $p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1} f_j}$, 按概率随机选出一个新种群 $Newpop(t+1) = \{pop_j(t) | j = 1 \ldots N\}$ 共N个

4. 交叉 → $Crosspop(t+1)$

5. 变异: $pop(t) = Mutpop(t)$

模板定理: ~~① 低阶 $E(H, t+1) = f(H, t) N(H, t)$~~

$t\uparrow$, 多保留 基因的优化和保护

收敛性: 有 Markov 链 有 $\lim_{t\to\infty} Pr(Z_t = f^*) = 1$ 才收敛 ⇒ 不收敛

7. 改进: 适应度函数: $fitness(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} \\ \frac{1}{f_{max} - f(x)} \end{cases}$

交叉, 变异, 两者引导, 交叉向……向法, 收敛的条件

多保留本代最优

改进代替传统