多元函数微分学

多元函数 $R^n \to R^1$ 的映射（多→一对应）

向量值函数：$R^n \to R^m$ 的映射（多→多）

（m个多元函数组合）

n维Euclid空间：欧式空间加法数乘运算，距离 $\|X-Y\|_n = \sqrt{\sum (x_i-y_i)^2}$

对称性、正定性、三角不等式

邻域 $B(X_0,\delta)=\{X\in R^n \mid \|X-X_0\|<\delta\}$ 去心 $B^\circ(X_0,\delta)$

内点：$\exists \delta>0$，使邻域 $B(X_0,\delta)\subset \Omega$

边界点：任给 $\delta>0$，都有 $B(X_0,\delta)$ 中既有 Ω 中点也有非 Ω 中点

内部：全部内点 $\mathring{\Omega}$

边界：全部边界点 $\partial\Omega$，闭包 $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$

开集与闭集性质

闭集：开集的补集

闭区域：连通的开集（区域）与边界的并

多元函数极限：$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall X\in B^\circ(X_0,\delta)$，有 $\|f(X)-A\|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A$

向量值函数极限 $\Leftrightarrow$ 每个分量函数极限

点列极限：$\forall \varepsilon>0, \exists N\in N^*, \forall k>N, |a_k-A|<\varepsilon$，$\lim\limits_{k\to\infty} a_k=A$

充要条件：每个分量数列收敛于A的分量

Cauchy准则

聚点

有界：存在收敛子列（同一元类似）

闭集：有限覆盖

小性质：

① 四则运算，复合

② 夹逼定理（也有保序性）

$\forall X\in B_0(X_0,\delta)$，$f(x)\le g(x)\le h(x)$

$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=\lim\limits_{X\to X_0} h(X)=A$

则 $\lim\limits_{X\to X_0} g(X)=A$

事实：① 定义

② Cauchy准则：$\forall\varepsilon, \exists\delta, \forall X_1, X_2\in B^\circ(X_0,\delta)$，$\|f(X_1)-f(X_2)\|<\varepsilon$ 存在极限

③ 换元为一元函数求极限

④ 夹逼定理放缩论证

⑤ 路径极限与累次极限 → 二重极限与累次极限均存在则二者相等；累次极限存在但不等 ⇒ 二重极限不存在

两路径极限不同 or 有路径无极限 ⇒ 无极限

无穷小：

$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=0$　$o(1)$

$\lim\limits_{X\to X_0} \frac{f(X)}{\rho^k}=0$：高阶无穷小 $o(\rho^k)$

被控制：$\|f(X)\|\le M\rho^k$　$O(\rho^k)$

$\lim\limits_{X\to X_0}\frac{f(X)}{\rho^k}=C$，$k$阶无穷小（无穷大也一样）

连续：定义：

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall X, X\in B(X_0,\delta)\cap\Omega$，有 $\|f(X)-f(X_0)\|<\varepsilon$：在 X_0 连续

（函数值＝极限）

小性质：四则运算，复合连续

初等函数连续

最值定理：有界闭集上连续函数 → 最大值、最小值

介值定理：连通集上，函数：若有 $f(X_1)=p$，$f(X_2)=q$，$p<r<q$，则 Ω 上有 X_3，$f(X_3)=r$

偏导数：$\frac{\partial f}{\partial x_i}$：仅对 x_i 求导，其余变量看作常数

定义：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_i+\Delta x,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{\Delta x}$

方向导数：沿向量方向求导

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(X_0)=\lim\limits_{X\to X_0}\frac{f(X)-f(X_0)}{\|X-X_0\|}$

（可微必有二偏导存在，推出各方向导数存在）

梯度：$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

与梯度同向方向导数最大

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(X_0)=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}\cdot \mathrm{grad}(X_0)$

高阶偏导数：对偏导数函数再求偏导

至 k 阶偏导连续可微 $f\in C^k(\Omega)$

所有 k 阶（$k\le n$）偏导数连续，与求导次序无关

定义：$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2,\dots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)$

$=\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)dx_n+o(\|\Delta X\|)$

（全微分 线性主部）

可微分：$\lim\limits_{\Delta X\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x_1,\dots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)-\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)dx_i}{\sqrt{\Delta x_1^2+\dots+\Delta x_n^2}}=0$

微分

小性质：偏导连续 → 可微 → 连续、偏导存在

向量值函数：

$f(X+\Delta X)-f(X)=A\Delta X+o(\Delta X)$

$\lim\limits_{\Delta X\to 0}\frac{\|o(\Delta X)\|_m}{\|\Delta X\|_n}=0$

可微 $\Leftrightarrow$ m个分量函数均可微

微分 $Jf(X_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$

Jacobi矩阵

复合函数微分

若函数 g 在 X_0 可微，f 在 $g(X_0)$ 可微，

则：$d(f\circ g)(X_0)=d(f(g(X_0)))$

$=\frac{\partial(y_1,y_2,\dots,y_n)}{\partial(u_1,u_2,\dots,u_m)}\cdot\frac{\partial(u_1,\dots,u_m)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}$

$=Jf(U_0)\cdot Jg(X_0)$

$\frac{\partial y}{\partial x_i}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}$

反函数：

$Jf|_{X_0}$ 可逆则局部可逆

$f^{-1}(y)=\left(Jf(X_0)\right)^{-1}$

存在性：

$F(x_0,y_0)=0$，

$F(x,y)\in C^1(W)$

$F_y'(x_0,y_0)\ne 0$

隐函数 $y(x)$ 在局部存在

$y(x)\in C^1$

隐函数：一个 $F(x)=0$，确定一个隐函数

$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\ \frac{\partial F}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}1\\ \frac{dy}{dx}\end{pmatrix}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$

应用

几何应用

	$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$	$F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$
切线	$(x'(t),y'(t),z'(t))$	$\mathrm{grad}F\times\mathrm{grad}G$

	$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$	$F(x,y,z)=0$	$z=f(x,y)$
法向量	$\mathrm{grad}u\times\mathrm{grad}v$	$\mathrm{grad}F$	$(f_x, f_y, -1)$

Taylor公式：

Lagrange：$f(X)=f(X_0)+\mathrm{grad}f(X_0)(X-X_0)+\frac{(X-X_0)^T\,\mathrm{Hesse}(X_0+\theta(X-X_0))(X-X_0)}{2}$ $(0<\theta<1)$

Peano：$f(X)=f(X_0)+\mathrm{grad}f(X_0)(X-X_0)+\frac{(X-X_0)^T\,\mathrm{Hesse}(X_0)(X-X_0)}{2}+o(\|X-X_0\|^2)$

$\mathrm{Hesse}(X)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$

中值定理：转化为一元函数

二元Taylor公式

极值：基于Taylor公式

① 无条件：

(1) 求 $\mathrm{grad}f(X_0)=0$ 驻点

(2) 判Hesse矩阵

正定 → 极小值

负定 → 极大值

不定 → 非极值

半正/负定：用Taylor展开（更高阶）

驻点 → 判定

② 条件：Lagrange乘子法

$f(x,y,z)$

$g(x,y,z)=0$

设 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$

① 求 x,y,z,λ 驻点

② 比较值

最大/小值

含参积分

前置条件

一致连续

定义:
对于 $f(x)$, $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x_1, x_2 \in D$,
当 $\|x_1-x_2\|<\delta$ 时都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

充分条件: $f(x)$ 在有界闭集 D 上连续

一致收敛

判别定理:

- Weierstrass: ~~……收敛~~
  - $f(t,x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续
  - $|f(t,x)| \le g(x)$, $g(x)$ 在 $[b,+\infty)$ 收敛
- Dirichlet:
  - $f(t,x), g(t,x)$ 连续
  - $f(t,x)$ 关于 x 单调, 且 $x\to+\infty$ 时 $f(t,x)\to 0$ 一致成立
  - $\int^{+\infty} g(t,x)dx$ 一致有界
- Abel:
  - $f(x)g(x)$ 连续
  - $f(x)$ 单调, 一致有界
  - $\int^{+\infty} g(x)dx$ 一致收敛

Cauchy 准则 (基础): $\forall \varepsilon>0, \exists M(\varepsilon)$, 对 $\forall A_1, A_2 > M$, $\forall t\in D$, 有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(t,x)dx\right|$

判定:
- 一致收敛: 放缩; 拆分
- 不一致收敛: Cauchy 准则; 转化为函数 $I(t)$, 判其不连续

	常义含参积分 $f(t)=\int_\alpha^\beta g(t,x)dx$	广义含参积分 $f(t)=\int_a^{+\infty} g(t,x)dx$
极限, 连续	条件: $g(t,x)$ 在 $\underset{t}{[a,b]}\times\underset{x}{[\alpha,\beta]}$ 连续 (实际用到 $g(t,x)$ 一致连续性) $\Downarrow$ $f(t)$ 在 $[a,b]$ 一致连续 $\lim\limits_{t\to t_0}\int_\alpha^\beta g(t,x)dx=\int_\alpha^\beta \lim\limits_{t\to t_0} g(t,x)dx$ (极限交换顺序)	条件: $g(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,+\infty)$ 连续 (实际为一致连续) $\int_a^{+\infty} g(t,x)dx$ 在 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛 $\Downarrow$ $I(t)\in C[\alpha,\beta]$ $\lim\limits_{t\to t_0}\int_a^{+\infty} g(t,x)dx=\int_a^{+\infty}\lim\limits_{t\to t_0} g(t,x)dx$
微分	条件: $g(t,x)$, $g'_t(t,x)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 连续 $\Downarrow$ $f(t)$ 在 $[a,b]$ 连续可微 $f'(t)=\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta g(t,x)dx=\int_\alpha^\beta \frac{\partial g(t,x)}{\partial t}dx$ (当 a,b 变为关于 t 函数 $a(t), b(t)$, $a\le a(t), b(t)\le b$, 且在 $[c,d]$ 上可导) $f'(t)=\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} g(t,x)dx$ $=\int_{a(t)}^{b(t)} g'_t(t,x)dx+b'(t)g(t,b(t))-a'(t)g(t,a(t))$	条件: $g(t,x)$, $g'_t(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,+\infty)$ 连续 $\forall t\in[\alpha,\beta]$, $I(t)=\int_a^{+\infty} g(t,x)dx$ $\boxed{\text{收敛}}$ $\int_a^{+\infty} g'_t(t,x)dx$ $\boxed{\text{一致收敛}}$ $\Downarrow$ $I'(t)=\frac{d}{dt}\int_a^{+\infty} g(t,x)dx=\int_a^{+\infty}\frac{d}{dt}g(t,x)dx$
积分	条件: $g(t,x)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 连续 $\Downarrow$ $\int_a^b I(t)dt=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta g(t,x)dx\right)dt=\int_\alpha^\beta dx\int_a^b g(t,x)dt$ 常见解法: ①: 对一元积分: 引用参数化为含参积分, 之后求解含参积分 ② ~~对于含参~~ 二元定积分: 化为累次积分, 交换积分次序 常用积分: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$	① 条件: $g(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,+\infty)$ 连续 $I(t)=\int_a^{+\infty} g(t,x)dx$ 一致收敛 $I(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积, 且 $\int_\alpha^\beta I(y)dy=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} g(t,x)dx\right)dt$ $=\int_a^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta g(t,x)dt$ ②: $g(t,x)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 连续 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$, $\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)dy$ 一致收敛 $\int_\alpha^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}\lvert f(x,y)\rvert dx$ 与 $\int_a^{+\infty}dx\int_\alpha^{+\infty}\lvert f(x,y)\rvert dy$ 至少一个存在 $\Downarrow$ $\int_\alpha^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}dx\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)dy$

积分

重积分解法:

① 累次积分

$z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$

$y_1(x)\le y\le y_2(x)$

$a\le x\le b$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,dz$$

② 变量替换

用 $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$, $w=w(x,y,z)$ 换元

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

常用: $x,y\to\rho,\theta$, 乘以 ρ 二维极坐标; $x,y,z\to\rho,\theta,z$, 乘以 ρ 三维柱坐标; $x,y,z\to\rho,\theta,\varphi$, 乘以 $\rho^2\sin\theta$ 球坐标

$x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$; $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$

③ 轮换不变: 若D关于 x,y,z 有轮换对称, 则积分也轮换: 采用 轮换

二重积分

基本性质: 将面化为一个面元做Riemann和 $\iint f(x,y)dxdy$

性质: 可积条件: 连续→可积; 线性; 区域可加 (或区域差/交集也可加); 保序; 积分中值定理

应用: 曲面面积 (一型曲面积分) 性质

$\iint f(x,y,z)dS$: 曲面质量

性质: 连续→可积; 线性; 对曲面可加

求法: 换元

$$\iint f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\|r_u'(u_i,v_j)\times r_v'(u_i,v_j)\|\,dudv$$

一型曲面积分 $dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

$A=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$, $B=\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|$, $C=\left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right|$

三重积分

基本性质: 体积元一阶体积做 Riemann 和

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$

性质与二重一样

应用: ① 质心: 质量 $=\iiint \rho(x,y,z)dxdydz$; 前分坐标 $\iiint x\rho(x,y,z)dxdydz$; 取平均即可

② 转动惯量: $I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$; 每点: $I=(dm)\cdot r^2$ (点→轴)

③ 万有引力: 球壳内: 0; 球壳外: 等效→质心处

一型曲面积分

一型曲线积分: 求曲线质量 $\int_L f dl$

性质: 光滑 (C^1) →可积; 线性; 曲线可加; 保序

求法: 设 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$

$$\int_L f dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

二型曲线积分

基本性质: 求质点沿曲线运动时做功

计算: $P=\int_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dl$; 二型→一型; $\vec\tau$: 单位正向切向量

$P=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{l}$

性质: $\vec F$ 连续, L光滑 →可积; 积分区间可加

$$\oint_{\partial D}\vec F\cdot\vec\tau\,dl=\iint_D \nabla\cdot\vec F\,dxdy$$

$$\oint_{\partial D}Pdx+Qdy=\iint_D(\nabla\times\vec F)dxdy$$

$\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}$, $\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$

封闭的二重曲线: Green 公式 化为二重积分 (二维)

$=\iiint(\nabla\cdot(\nabla\times\vec F))dxdydz$

$=\iint(\nabla\times\vec F)\cdot\vec n\,dS$

$=\oint_{\partial S}\vec F\cdot\vec\tau\,dl$

$\oint_{\partial S}Pdx+Qdy+Rdz$

Stokes 变为二重积分 (三维)

场论: 曲线积分与路径无关

保守(有势)场; 无旋 $\nabla\times\vec F=\vec 0$

势函数: ① 偏积分 ② 找合适路径求积分 ③ 积分因子法

同乘一个函数 $u(x,y)$, 将非全微分 → 全微分

常用: $d(xy)=ydx+xdy$; $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$; $d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)=\frac{ydx-xdy}{xy}$; $d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2+x^2}$

$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$

$$\oiint_{\partial\Omega}\vec F\cdot d\vec S=\oiint_{\partial\Omega}\vec F\cdot\vec n\,dS=\iiint_\Omega\nabla\cdot\vec F\,dxdydz$$

当曲面方向为向外且闭合; Gauss→三维

二型曲面积分

基本性质: 求流体流过曲面的流量

$$\iint\vec F\cdot d\vec S=\iint Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$$

性质: 曲面光滑, $\vec F$ 连续 →可积; 线性, 区间可加性

计算: 转化为一型曲面积分再一元

$$\iint\vec F\cdot d\vec S=\iint\vec F\cdot\vec n\,dS\quad(\vec n\text{: 单位法向量, 方向与取向相同})$$

$$=\pm\iint_D(PA+QB+RC)dudv$$

(看面的方向)

二重, 三重; Green, Gauss; 一线 = 二线; 一面 = 二面; 或; Stokes

级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+\cdots+a_n\cdots$

定义与基本性质：$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

收敛性：$\lim_{n\to\infty} S_n=S$：收敛于S；S_n发散：发散；($\sum a_n$收敛⟺$\{S_n\}$收敛)

必要条件：$\sum a_n$收敛 ⟹ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

充要：Cauchy准则：$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,p\geq1$，$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$；(改变有限项值→收敛性不变)

正项级数

比较判敛：$\forall n,\ a_n\le b_n$：
- $\sum a_n$发散 ⟹ $\sum b_n$发散
- $\sum b_n$收敛 ⟹ $\sum a_n$收敛

适用：S_n有界易于放缩的

极限形式：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$：
- $\lambda=+\infty$：$\sum a_n$收敛 ⟹ $\sum b_n$收敛
- $\lambda=c\neq0$：同收敛同发散
- $\lambda=0$：b_n发散 ⟹ a_n发散；a_n收敛 ⟸ b_n收敛

(还有上下极限形式)

适用比较 $\frac{1}{n^p}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}$

根式形式(适用：指数型)：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$：$q<1$：收敛；$q>1$：发散

或上极限：收敛；$\exists r$，$\sqrt[n]{a_n}\le r<1$；无限个 $\sqrt[n]{a_n}\geq1$：发散

比值形式：
- $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le r<1$：收敛
- $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq1$：发散
- $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$：收敛
- $\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$：发散

适用：指数、阶乘

Raabe：$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$：$>1$：收敛；$<1$：发散

(适用：阶乘等)

积分判敛：$f(x)$在$[1,+\infty)$单减，$\sum f(n)$与$\int_1^{+\infty}f(x)dx$同收同发

拆分法：收敛+收敛=收敛；收敛+发散=发散

一般级数

绝对收敛：$\sum|a_n|$收敛 → 正项判别

条件收敛：$\sum|a_n|$发散，$\sum a_n$收敛

拆分法：
- 收敛+发散=发散
- 绝收+条收=条收
- 绝收+绝收=绝收
- 条收+条收=收敛

Dirichlet：{a_n单调趋0；$\sum b_n$有界} ⟹ $\sum a_n b_n$收敛

Abel：{a_n单调有界；$\sum b_n$收敛} ⟹ $\sum a_n b_n$收敛

备注：三角 … Taylor

特殊：交错级数：$a_n>0$，$a_{n+1}\le a_n\to0$：$\sum(-1)^n a_n$收敛，$S\le a_1$

(分式可Taylor展开)

(上下分有绝)：$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}=\frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

方法：先判绝收；再拆分；原项判趋近；分式：Taylor；三角：选用积化和差、放缩

结合交换律：收敛⟹加括号可行；绝对收敛⟹任意重排

无穷乘积

$\prod p_n=p_1\cdots p_n$，部分积 $P_n=\prod_{k=1}^{n}p_k$

必要条件 $\lim p_n=1$

取$e^{\ln}$形式→一般级数；前有限项无0→可拆去

$\prod p_n$收敛⟺$\{P_n\}$收敛

函数项级数 $\sum f(x)$

逐点收敛：任定x值，单个数项级数；=数项级数性质(判别法)

一致收敛：整体性质

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N},\forall x\in I$ (一致收敛的N与x无关)

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)\right|<\varepsilon$

判别(同合并、积分)：

Weierstrass：若 $\forall n,x$，$|f_n(x)|\le M_n$，M_n收敛，则一致收敛

Dirichlet：{$\{a_n(x)\}$单调，一致→0；$\sum b_n(x)$一致有界} → $\sum a_n(x)b_n(x)$一致收敛

Abel：{$\{a_n(x)\}$单调，一致有界；$\sum b_n(x)$一致收敛} → $\sum a_n(x)b_n(x)$一致收敛

性质(同合并组合)：

①极限：$f_n(x)\in C(I)$，一致收敛于$S(x)$ ⟹ $S(x)$连续，$\lim_{x\to x_0}\sum f_n(x)=\sum\lim_{x\to x_0}f_n(x)$

②微分：$f_n(x)\in C_1$，$\sum f_n'(x)$一致收敛，$\exists x_0$，$\sum f_n(x_0)$收敛 ⟹ $f_n(x)$一致收敛，和函数$S(x)\in C_1$，$S'(x)=(\sum f_n(x))'=\sum f_n'(x)$

③积分：$\sum f(x)$一致收敛于$S(x)$，$f(x)\in C[a,b]$ ⟹ 逐项 $\int_a^x\sum f_n(t)dt=\sum\int_a^x f_n(t)dt$

实例1：幂级数

$\sum a_n(x-x_0)^n$，$\sum a_n x^n$

收敛性：$\{a_n x_0^n\}$有界 → $(-|x_0|,|x_0|)$ 绝对收敛；$\forall r<|x_0|$，$[-r,r]$一致收敛(幂级数在收敛域内闭一致收敛)

$\sum a_n x_0^n$收敛

$\sum a_n x_0^n$发散 → 一定发散

$\sum a_n x_0^n$条收 ⟹ {$|x|<x_0$：绝收；$>x_0$：发散}；半径：$\rho=|x_0|$

Abel第二定理：若在收敛域端点收敛，则在$[-\rho,r]$或$[r,\rho]$一致收敛

判定：逐点收敛，然后收敛域，用比值判；一致收敛

分析性质：在$(-\rho,\rho)$内连续可微；逐项求导、积分，求导收敛半径不变

展开：①公式法：Taylor；②逐项求导/积分

实例2：Fourier

定义：在内积空间定义 $\int f(x)g(x)dx$；将$f(x)$展开于$\{1,\cos x,\sin x,\dots\}$；两个函数在正交基下坐标

求法：①延拓 {正弦→奇延拓；余弦→偶延拓}

②换元/坐标变换：(周期T：设 $t=\frac{2\pi}{T}x$，$f(x)=f(t)$)

③求坐标

$\frac{a_0^2}{2}+\sum(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int f^2$

收敛性条件：①不连续点有有限个；②极值点有有限个；③可积，左右导数存在

$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

$\lim_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$

应用：Fourier级数求和

级数+含参积分

Cauchy: $\forall\varepsilon, \exists N(\varepsilon)$, $\forall n>N, p\in N^*$, 有 $|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$

级数	定义	收敛	展开/求和	性质
正项级数	$\sum a_n$, a_n全≥ 0 (≤ 0)	比较判敛: $a_n\leq b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$ { $\lambda=0$: b_n收→a_n收; $\lambda=c$: 同收同发; $\lambda=+\infty$: a_n收→b_n收 }; b_n发→a_n发 根式判敛 $\sqrt[n]{a_n}$: { $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$: 发; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$: 收 } 比值判敛 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ { <1 收; >1 发 } Raabe: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ { >1 收; <1 发 } a_n单调减: 可积分判敛	等比/等差/裂项/错位相减	$\sum a_n\pm b_n$: a_n,b_n收敛→收敛 a_n,b_n一收一发→发散 a_n,b_n发散→未知 收敛→$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$
一般项级数	定义: $\sum a_n$, a_n任意 (交错): $\sum(-1)^n a_n$ (a_n恒≥ 0或≤ 0)	①绝对收敛: 正项级数 ②Dirichlet: a_n单调→0, $\sum b_n$有界 ③Abel: a_n单调有界, $\sum b_n$收敛 Leibniz: $(-1)^n a_n$, a_n单调→0	同正项级数	① a_n,b_n均绝收→绝收 $\sum a_n\pm b_n$: a_n,b_n均条收→收敛 a_n,b_n一绝一条: 条收 ② 若级数收敛→可添加括号 若级数绝收→可交换求和顺序 (用反证)
无穷乘积	$\prod p_n$	收敛→$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=1$ 收敛⇔$\sum\ln p_n$收敛		收敛→~~$\lim$~~
函数项级数 含参积分	$\sum a_n(x)$ $\int_1^{+\infty}f(t,x)dt$	①点态收敛: 确定x变为一般级数 ②一致收敛: 定义: $\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)$, $\forall n>N, p\in N^*$, 有 $\lvert a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)\rvert<\varepsilon$ (含参积分 $\lvert\int_n^{n+p}f(t,x)dx\rvert<\varepsilon$) 判敛: Weierstrass: $\lvert a_n(x)\rvert\leq b_n$ ($\lvert f(t,x)\rvert\leq g(x)$), $\sum b_n$收敛 ($\int_1^{+\infty}g(x)dx$) Dirichlet: $a_n(x)$ ($f(x,t)$) 一致单调→0, $\sum b_n(x)$一致有界 ($\int_1^{+\infty}g(x,t)$) Abel: $a_n(x)$ ($f(x,t)$) 一致单调有界, $\sum b_n(x)$ ($\int_1^{+\infty}g(x,t)$) 一致收敛		①极限: 条件: $\sum a_n(x)$一致收敛 ($\int_1^{+\infty}g(t,x)$一致收敛), $a_n(x)$连续 ($g(t,x)$连续) 结论: $S(x)$ ($\int_1^{+\infty}g(t,x)dt$) 连续; $\lim\limits_{x\to x_0}\sum a_n(x)=\sum\lim\limits_{x\to x_0}a_n(x)$ ($\lim\limits_{x\to x_0}\int_1^{+\infty}g(t,x)dt=\int_1^{+\infty}\lim\limits_{x\to x_0}g(t,x)dt$) 极限可换序 ②微分: 条件: $\sum a_n'(x)$一致收敛 ($\int_a^{+\infty}f_t'(t,x)$一致收敛), $\exists x_0$, $\sum a_n(x_0)$收敛 ($\exists t_0$, $\int_a^{+\infty}f(t_0,x)dx$收敛), $a_n(x)\in C^1$ ($g(x,t), g'(x,t)\in C$) 结论: $S(x)\in C^1$ ($\int_a^{+\infty}f(t,x)dx\in C_1$), $(\sum a_n(x))'=\sum a_n'(x)$ ($(\int_a^{+\infty}f(t,x)dx)'=\int_a^{+\infty}f_t'(t,x)dx$) 求导可换序 ③积分: 条件: $\sum f(x)$一致收敛 ($\int_a^{+\infty}g(t,x)dx$一致收敛), $f(x)\in C[a,b]$ ($g(t,x)\in C$) 结论: $S(x)$可积 ($\int_a^{+\infty}f(x,t)dt$可积), $\sum\int_a^x f_n(t)dt=\int_a^x\sum f_n(t)dt$ ($\int_\alpha^\beta I(y)dy=\int_a^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta g(t,x)dx$) 积分可换序
幂级数	$\sum a_n(x-x_0)^n$ $\sum a_n x^n$	①在x_0收敛→$(-x_0,x_0)$收敛, 内闭一致收敛 ②x_0发散: $\lvert x\rvert>x_0$发散 ③x_0条收: $(-x_0,x_0)$收敛, $\lvert x\rvert>x_0$发散 ④收敛半径外发散 $(-p,p)$, $[-p,p]$一致收敛	①Taylor展开法 ②逐项求导/积分法 ③变量替换法 ④待定系数/常数项 拆分	$(-p,p)$上无穷可微 逐项求导/积分收敛半径不变
Fourier	$a_0+\sum a_n\cos nx+b_n\sin nx$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,f(x)dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,f(x)dx$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{1}{2}dx$	①收敛条件: $f(x)$在$[-\pi,\pi]$有限个间断点/可积, 不存在无穷振荡, 收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ②若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$可积则均方收敛	①延拓到R上 (若奇函数→奇延拓, 偶函数→偶延拓) ②若$T=2l$: 则令 $\varphi(t)=f(x)=f(\frac{l}{\pi}t)$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,\varphi(t)dt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}f(x)dx$ 即可 ③求内积需部分和	①用Fourier级数求和 $1+\frac{1}{2^2}+\cdots$ ②Parseval等式: 若均方收敛(可积): $\frac{a_0^2}{2}+\sum a_n^2+b_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

多元微积分 → 含参积分

连续 → 极限可交换 + 连续；积分可交换 + 连续性 求导 ← 一致连续

C' → 导数可交换 + 求导 C'

连续 + 一致收敛 → 极限、积分 可交换 } 一致收敛

导数一致收敛 + C' + 收敛 → 导数可交换

技法：一元积分 → 多元积分

poisson: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

n维Euclid：内点、边界、内部、外部、闭包

多元函数 → 点列极限 → 多元函数/向量值函数极限 → 连续，无穷小 → 介值、最值

可微 ← 一致连续；偏导连续；偏导存在

偏导 → 全微分；高阶偏导

向量值函数微分 → 隐函数；反函数；微分复合

曲线曲面切线切面

taylor公式 → 极值 → grad为0，Hesse正/负定

条件极值：Lagrange乘子法，驻点

$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d(\arctan\frac{x}{y})$

$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d(\frac{x}{y})$

$ydx+xdy=d(xy)$

$\frac{ydx-xdy}{xy}=d(\ln|\frac{x}{y}|)$

$\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d(\ln|\frac{x-y}{x+y}|)$

恰当

积分因子 只与x有关：$\frac{P_y'-Q_x'}{Q}=\varphi(x)$ 只为x函数 $u(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$

只与y有关：$\frac{P_y'-Q_x'}{-P}=\varphi(y)$ 仅为y函数 $u(x)=e^{\int\varphi(y)dy}$

路径无关 条件：单连通；偏导相关

有势=无旋=保守

向量场

积分

$\iint_{\partial\Omega} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iiint(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$

Gauss（封闭二型+三重）二型曲面→三重

② $\oint(P,Q)\cdot\vec{n}ds=\iint\nabla\cdot(P,Q)d\sigma$

① $\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint\nabla\times(P,Q)d\sigma$

区域边在左侧，逆时针

二型曲线→重积分

Green（封闭二型+曲线）

Stokes

$\oint_{\partial S}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S(\nabla\times\vec{V})\cdot\vec{n}dS$

二型曲线→二型曲面（以之为边界的曲面）（S在左侧）空间右手（与下面一样）

积分 → 重积分 → 二重：面积 $\iint f(x,y)dxdy$；三重：体积 $\iiint f(x,y,z)dxdydz$

应用：质心；面积/体积/体积；引力；转动惯量

累次积分 → 变量替换：极/柱 · r；球 · $r^2\sin\theta$；乘 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|$

曲线积分

一型曲线：$\int_L f(x,y,z)dl=\int_\alpha^\beta f(t)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt$

一型曲面：曲面积 $\iint f(x,y,z)dS$，$(x,y,z)\to u,v$，$\iint_S dudv f(x,y,z)\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

$A=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ $B=\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|$ $C=\left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right|$

二型曲线：$\int_L\vec{V}\cdot d\vec{l}$（做功）$=\int_L a_1dx+a_2dy+a_3dz$ → $\int_L\vec{V}(f_1(t),f_2(t),f_3(t))\cdot d\vec{l}$（切向量方向）→ 一型曲线

二型曲面（通量）：$\iint_S\vec{V}d\vec{S}=\iint Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$ → $\iint(P,Q,R)\cdot\vec{n}dS$；二型→一型（外侧为正）

一重、二重、三重；Green、Stokes、Gauss；一线 ← 二线；一面 ← 二面

级数 → 收敛 → Cauchy：S_n收敛

必要：$\lim_{n\to\infty}x_n=0$

正项：比较；$\sqrt[n]{a_n}<1$；$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$；Raabe $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>1$

任意：绝对收敛 $\sum|a_n|$收敛

Leibnitz交错：$\sum(-1)^n a_n$：a_n单调→0 → Taylor

Dirichlet：a_n单调→0，$\sum b_n$有界

Abel：a_n单调有界，$\sum b_n$收敛

函数项 → 定义：一般项含x

一致：Weierstrass $|a_n(x)|\le c_n$，c_n收敛

Abel：$a_n(x)$一致有界单调，$\sum b_n(x)$一致收敛

Dirichlet：$a_n(x)$一致趋于0单调，$\sum b_n(x)$一致有界

性质：连续 + 一致收敛；积分交换 + 可积；极限交换 + 连续

收敛 + 导数一致收敛 → S_n C'，导数交换（一元含参积分）

幂级数 $\sum(x-x_0)^n$ → 收敛域：收敛 → 内闭一致；条件收敛 → 收敛半径；发散 → 外发散；端点 收敛 → 连续

求和：求导/积分；化为 e^x、$\frac{1}{1-x}$ 等形式

展开：Taylor → Fourier；延拓；区间变换；内积

收敛：不连续点有限个；分段单调...；有限个极值

收敛于 $f(x)$（连续）；$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$（不连续）

Parseval：可积 $\int f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum(a_n^2+b_n^2)$