12/26/2018

复变函数

learn and let learn

极限

极限: ∀ε为正数, 使∀z在z_0去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$, $|f(z)-A|<\varepsilon$,

则 $\lim_{z\to z_0} f(z)=A$

等价: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$

极限连续可导解析

连续: $f(z)$在z_0连续 ⇔ $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

等价: $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在(x_0,y_0)连续

导数: $f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 可导⇔可微 $=u_x-iu_y$

微分: $\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$

解析 {在z_0及其邻域上每一点可导, 则$f(z)$在z_0解析; $f(z)$在D上处处解析 → $f(z)$为D上解析函数}

条件: ~~①~~ ② 若$u(x,y)$, $v(x,y)$在(x,y)可微

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ (Cauchy-Riemann) ⇒ (x_0,y_0)可导 / 解析

导数: $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

区域内可导: 区域解析 (充要条件)

解析性质: {和差积商解析; e^z, sin, cos, ch, sh 解析, 幂函数, $\ln z$, z^b 除原点及负实轴外解析; n阶导解析}

复数运算

$z=x+iy$, $x=Re(z)$, $y=Im(z)$

$z=re^{i\theta}=\sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r=|z|$

θ: $\arg z$ $(-\pi<\theta\le\pi)$

$Arg z=\arg z+2k\pi$

乘除: $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

$Arg(z_1z_2)=Arg(z_1)+Arg(z_2)$

$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Arg(z_1)-Arg(z_2)$

复变函数: $w=f(z)$ (w: 一值 or 多值)

等同于二元实函数 {$u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$} $(z=u+iv)$

初等函数:

指数: $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ (C上解析)

对数: $Ln(z)=\ln|z|+iArg z$ (除原点及负实轴外解析)

幂: $z^b=e^{b\ln z}$ (除原点及负实轴外解析)

三角函数: ① {$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$}

② {$ch z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $sh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$}

③ 性质: ① 周期性 ② $\cos iy=ch y$, $\sin iy=i\,sh y$ ③ C上解析

积分

定义: 实际上是二型曲线积分

性质 {
$\int_c(\alpha f(z)+\beta g(z))dz=\alpha\int_c f(z)dz+\beta\int_c g(z)dz$ (线性)
$\int_c f(z)dz=\int_{c_1}f(z)dz+\int_{c_2}f(z)dz$ (可加)
估值 $\left|\int_c f(z)dz\right|\le\int_c|f(z)|ds\le ML$ }

积分计算

①: 化为实数,

$\int_c f(z)dz=\int_c udx-vdy+i\int_c vdx+udy$ (Cauchy Riemann)

② 二型曲线转换

$\int_c f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$

③: 对于封闭路径:

① 若解析: Cauchy-Goursat 定理: 设$f(z)$在单连通域B内解析, $C\subset B$, 则 $\oint_c f(z)dz=0$

② 若中间有不解析点(多个), 闭路变形, 与各闭路积分: 区域内的解析函数沿闭曲线的积分不因闭曲线在区域内作连续变形而改变 (不经过不解析点)

③ 若$f(z)$在多连通区域D内解析, 边界连续

$\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz$ ⇒ 积分 = 沿各不解析点处的积分和

用积分性质计算

①: Cauchy 积分

Cauchy 积分公式: 若$f(z)$在区域D内处处解析 (C为D内任一正向闭曲线, 内部全含于D), z_0为C内一点, 则: $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}dz$

② 高阶导数: {解析函数D: n阶导解析; $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$}

⇓

已知值 导数控制

~~Cauchy积分公式~~ 二求所有不解析点的积分和

积分与路径无关

① 积分与路径无关等价: $w=f(z)$在D上解析, 边界连续 (可多连通)
{①: $\oint_c f(z)=0$, C为D上任一封闭曲线
② $f(z)$在D上积分与路径无关
③ $f(z)$在D上有原函数: ($F'(z)=f(z)$, $F(z)=\int f(z)dz+C$)}

⇓ 解析函数的性质

① 最大模原理: $f(z)$解析, 内部不能取最大值 $\sup|f(z)|$ ($D_1\cap D_2=\Phi$, [illegible]) 内部两个只能边界

④: 代数基本定理: $z^n+\cdots+a_0=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$

⑤: 有界整函数为常数 (刘维尔定理)

(除...为常函数)

② 调和函数 (二种函数): 若实函数 $\varphi(x,y)$ 在D内 {$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$: 调和函数 ($\Delta$记为 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$)}

性质 ① D内解析函数: 实虚部u, v均为调和函数

② 若u为单连通区域D内调和函数, 则∃$f(z)$在D内解析 (u, v为共轭调和函数)

构造 {不定积分 $u_x-iu_y=f'(z)$, 使 $Re f(z)=u$; 偏积分法: 由C-R方程 [illegible] 积分}

12/28/2018

级数与留数

级数定义：$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$

部分和 $S_n=\sum_{i=1}^{n} z_i = z_1+\cdots+z_n$ 构成序列 S_n

敛散性：
- 收敛：$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in C$
- 绝对收敛：$\sum |z_n|$ 收敛
- 条件收敛：{收敛, 不绝对收敛}

判别法：
- 收敛条件：$\lim z_n = 0$
- ① Cauchy 准则
- ② Cauchy 根式：普通形式：$\forall n > N_0$，$\sqrt[n]{|z_n|} \le q < 1$：绝收；$\forall n > k_0$：$\sqrt[n]{|z_n|} \ge q \ge 1$ 发散
- 极限：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$ {$q<1$：绝收；$q=1$：无法判断；$q>1$：发散}
- ③ 达朗贝尔判值：普通：$n > N_0$，$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le q < 1$ 绝收；$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \ge q \ge 1$ 发散
- 极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ {<1：绝收；>1：发散}
- ④ Dirichlet：$\lim a_n = 0$，b_n 部分和有界 $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛
- Abel：{a_n 单调有界，b_n 部分和收敛} $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛

序列极限：本质：$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 极限；定义：$\forall \varepsilon \in C$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$，$\forall n>N$，有 $|z_n - A| < \varepsilon$，则 $\lim_{n\to\infty} z_n = A$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$

和函数 $S(z)=\lim_{n\to\infty} C_n z^n$

数项一致收敛

收敛半径与收敛圆

定义：$\forall z$，$|z-a|<R$，$\sum C_n(z-a)^n$ 绝对收敛；$|z-a|>R$，$\sum C_n(z-a)^n$ 发散；$|z-a|=R$：可收可发

则收敛圆：a 为圆心，R 为半径的圆；收敛半径：R

{$R=0$：原点外处处发散；$R=+\infty$：处处绝对收敛}

性质：若 $|z_0-a|$ 绝对收敛，则 $R > |z_0-a|$；若 $z=a+z_0$ 发散，则 $|z-a|>|z_0|$ 时发散 $R < z_0$

求法：① 比值法 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lambda$ 存在 $\Rightarrow R=\frac{1}{\lambda}$

② 根值法 若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\lambda$ 存在，则 $R=\frac{1}{\lambda}$

运算：$I_1 \pm I_2$，$I_1 \cdot I_2$ 收敛半径 $\ge \min(R_1,R_2)$

$I_1 \cdot I_2$ 收敛半径 $=\min(R_1,R_2)$

若 $g(z)$ 解析，$|g(z)| < R$，$g(z)$ 解析，$f(z)=\sum C_n z^n$，则 $f(g(z))$ 仍解析

和函数的性质：
- $f(z)$ 在收敛圆内解析
- $f'(z)=$ 逐项求导再求和
- $\int f(z)dz=$ 逐项积分再求和

收敛半径仍为 R

Taylor 级数

若 $f(z)$ 在 D 上解析，在全封闭的圆 $|z-z_0| \le r$ 上，

有 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$，$C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$

存在且唯一，收敛半径 $\ge d$

解析 $\Leftrightarrow$ 可 Taylor 展开

洛朗级数

混合级数

$I=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n$（$I_1$，$I_2$）

（若 I_1，I_2 均收敛，则 I 在 z_0 收敛）

I_1 收敛域 $|z-z_0|<R$；I_2 收敛域 $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{r}$，$|z-z_0|>r$

I 收敛域：$r<|z-z_0|<R$，$D(z_0,r,R)$ 为 I 收敛的圆环域

洛朗级数定义：若 $w=f(z)$ 在 $D(z_0,r,R)$ 解析，

则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$，

其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$，$C \subset D(z_0,r,R)$，唯一确定

在不同的圆环域内展开可能不同

性质：幂级数，积分二阶（可求导/积分的导/积分）收敛半径不变

留数

零点 / 孤立奇点

对 D 上解析函数 $f(z)$：$f(z_0)=0$：z_0 为 $f(z)$ 零点；$f(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$，$f^{(m)}(z_0)\ne 0$：$m$ 阶零点

若 $f(z)$ 在 D 上解析，则其在 D 上所有零点孤立（除非 $f(z)\equiv 0$）

孤立奇点：定义：$f(z)$ 在 z_0 不解析（奇点），在其去心邻域内解析 $\Rightarrow$ 孤立奇点

分类：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$，$B_\delta^*(z_0)$（洛朗展开）

① 可去奇点：等价：
- 无负幂项
- $f(z)$ 无负次幂项
- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在
- $f(z)$ 在 $B_\delta^*(z_0)$ 有界

② 极点：z_0 为 m 阶极点，等价：
- 洛朗展式中负项有限，且最高负幂项次数为 m $\Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$
- 在 $B_\delta^*(z_0)$ 中，$f(z)(z-z_0)^m = g(z)$ 在 $B_\delta(z_0)$ 解析，且 $g(z_0)\ne 0$
- $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=A \in C$，$A \ne 0$
- z_0 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点

③ 本性奇点：有无穷个负幂项，$e^{\frac{1}{z}}$，$\sin\frac{1}{z}$；$\lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在，非 ∞

性质：Weierstrass 定理：$\exists$ 序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_\delta^*(z_0)$，$\lim z_n = z_0$，$\forall A \in C$，$\lim f(z_n)=A$（可找到序列，趋近于任意数）

Picard 定理：$\forall A \in C$，$\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B_\delta^*(z)$，$\lim z_n = z_0$，$f(z_n)=A$

④ 无穷远点：∞ 孤立奇点 $R<|z|<\infty$ 解析

判定：令 $z=\frac{1}{\xi}$，判 $\sum C_n \xi^n$

∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow \xi=0$ 可去；m 阶极点 $\Leftrightarrow \xi=0$ m 阶极点；本性奇点 $\Leftrightarrow \xi=0$ 本性奇点

留数：若 z_0 为 $f(z)$ 孤立奇点，

则 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = C_{-1}$（洛朗展开 -1 项）

性质：若区域内除有限孤立奇点外解析，曲线 C 包围全部奇点

$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=\sum C_i$

求法：
- 可去：0
- 本性：C_{-1}
- ① 若 z_0 为 m 阶极点，$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$
- 1 阶：$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
- ② 若 z_0 为 $P(z)$ 解析，$Q(z)$ 一阶零点，则 $\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

③ 求 ∞ 处留数：
- ① $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}$
- ② $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\mathrm{Res}\left[-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$

留数计算定积分

形式	条件
$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \oint_{\lvert z\rvert=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$	
$I=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$，$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$	$R(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，$m-n \ge 2$，$R(z)$ 在实轴上无奇点
$I=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx$	$m-n \ge 1$，$R(z)$ 在实轴上无奇点

形式	条件	结果
$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)dz = \oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)}{iz}dz$	$f(z)$在$\lvert z\rvert=1$无奇点	$2\pi i\sum_k Res[f(z),z_k]$ z_k为$f(z)$在$\lvert z\rvert<1$所有奇点
$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$, $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$(多项式)	$R(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$: $m-n\geq 2$ $R(z)$在实轴无奇点	$2\pi i\sum_{Im(z_k)>0} Res[R(z),z_k]$ z_k不含∞,上半平面全部奇点
$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{i\alpha x}dx$	$m-n\geq 1$ $R(z)$在实轴无奇点	$2\pi i\sum_{Im(z_k)>0} Res[R(z)e^{i\alpha z},z_k]$, $\alpha>0$ (不含∞,上 $-2\pi i\sum Res[R(z)e^{i\alpha z},z_k]$ $\alpha<0$