Modern Optimization Methods 3/27/2022

1. 组合最优化问题：$\min f(x)$ s.t. $g(x)\ge 0$, $x\in D$

可行解：满足约束的解；最优解

0-1背包：容量为b的包，n个物品，尺寸为 a_i，价值为 c_i，使总价值最大

TSP：两两城市距离 d_{ij}，怎么每个城市走一遍回到起点，路径最短

整数(线性规划)：$\min c^Tx$ s.t. $Ax=b$, $x\ge 0$, $x\in Z^n$

装箱：n个尺寸 ≤ 1 的物品 $a_1\sim a_n$，最少的箱子

(有并行机排序)：n个加工时间为 d_i 的工件，m台机器，每个时刻每台机器只加工一个工件，最小时间加工

2. 计算复杂性

问题规模：实例 I，规模长度 $l(I)$

整数 x 二进制

$2+\log_2 x\le l(x)=\lceil\log_2(|x|+1)\rceil+2\le 3+\log_2 x$

设求 I 计算量为 $C_A(I)$，$\exists g(x)$ 与常数 α，使 $\forall I$ 有 $C_A(I)\le \alpha g(l(I))$，即 $C_A(I)=O(g(l(I)))$

若 $g(x)$ 为多项式 $\Rightarrow$ P问题

3. NP：

判定问题：NP问题：

优化型转判定问题：$\begin{cases}\min x \text{ s.t.} \cdots\\ \exists x\le s, \text{ s.t.} \cdots\end{cases}$

Hamilton回路：是否存在经过所有节点的回路，每个节点仅过一次

三精确覆盖：子集族 $F=\{S_1\sim S_n\}$，每个为三元组，是否有m个子集，其并为 $S=\{u_1\sim u_{3m}\}$

SAT(可满足性)：是否存在使合取范式为真的赋值

P：$\forall$ 实例 I，$\exists$ 多项式 $g(x)$，常数 α，使 $C_A(I)\le\alpha g(l(I))$

NP：

① 可在多项式时间 $\alpha g(l(I))$ ② 验证是否为解的条件 $\alpha g(l(I))$

多项式时间转换：

A_1 多项式时间转化为 A_2：

存在 T，对 $\forall A_1$ 问题的实例 I_1，转化为 A_2 问题实例 I_2，I_1 为真 $\Leftrightarrow$ I_2 为真，T为多项式算法

多项式时间归约：算法输入 A_1 任一实例 I 时，调用 A_2 算法作为子程序多项式次，运行时间 $O(g(l(I)))$ 次

NPC：$A\in NP$，且NP任一问题可多项式时间归约为A

NPH：NP任一问题可多项式归约为A为NPH

$P\subseteq NP$，$NPC\subseteq NPH$

4. 邻域：$x\in D\rightarrow N(x)\subseteq 2^D$

e.g. 1-opt：由2元素对互换 (k-opt)

局部最优：$f(x^*)\le f(x)$ 对于 $\forall x\in N(x^*)\cap F$

近似算法：对于 $\varepsilon>0$，$\dfrac{|Z_H(I)-Z_{opt}(I)|}{|Z_{opt}(I)|}\le\varepsilon$ 对于 $\forall I$ 成立，则H为 ε 近似算法

设计：贪心；松弛(去掉一定约束)；Lagrange

最大化问题形式对偶可行解，判断是否 α 为 $Z_{opt}(I)\le Z_H(I)\le Z_{opt}(I)$，$\alpha<1$ 以下近似算法

评估近似算法：$AR(H)=\lim_{k\to\infty}\sup_I \dfrac{Z_H(I)}{Z_{opt}(I)}\Big|_{Z_{opt}(I)=k}$

分析：概率分析，大量数据计算分析

近似算法分类：
多项式时间近似算法 | 完全多项式时间近似 (FPTAS)

PTAS：(多项式时间近似方法) 对问题一个算法 A，若存在二元函数 $g(x,y)$，使 $C_A(I)=O(g(l(I),\#(I)))$，g 为多项式，$\#(I)$ 为 I 最大数 (e.g. 背包问题：时间复杂度 $O(nb)$)

强NP完全：所有实例在 $O(g(l(I)))$ 的时间内求解的子问题为NP完全 (无伪多项式时间算法) (e.g. Hamilton 强NP完全)

FPTAS：A为多项式近似算法，对任意 ε，复杂度为 $O(g(l(I),\frac{1}{\varepsilon}))$ 的 FPTAS

数学基础：

① 向量、矩阵空间：$x\in R^n$，$x\in R^n_+$，$m\in R^{m\times n}$，$m\in S^n=\{m\in R^{n\times n}, m=m^T\}$

② 向量、矩阵：$\det(S)$

Null space：$\{M x=0\}=N(m)$

Range space：$R(m)=\{y\,|\,y=mx\}$

半正定：$S\succeq 0 \Leftrightarrow z^TSz\ge 0, \forall z\ne 0$ (特征值 ≥ 0)，$S=B^TB$

正定：$S\succ 0 \Leftrightarrow z^TSz>0\ \forall z\ne 0$ (特征值 >0)，$S=B^TB$，B可逆

$tr(X)$：对角线之和

性质：① $tr(MN)=tr(NM)$ 对称；② 线性：$A\cdot(k_1X_1+k_2X_2)=k_1A\cdot X_1+k_2A\cdot X_2$；③ 非负性 $X\cdot X\ge 0$，$tr(X^TX)=0 \Leftrightarrow X=0$；④ $x^TQx=tr(Qxx^T)$

$(\cdot, tr(X))$ 一种内积

③ Schur补：$A\succ 0$，$X=\begin{bmatrix}A & B\\ B^T & C\end{bmatrix}$，$S=C-B^TA^{-1}B$，$\begin{cases}X\succ 0\Leftrightarrow S\succ 0\\ X\succeq 0\Leftrightarrow S\succeq 0\end{cases}$

④ 范数、内积：$\|x\|_2=\sqrt{x^Tx}$

p范数：$\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(p\ge 1)$

1范数：$\left(\sum|x_i|\right)$

∞范数：$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|\cdots|x_n|\}$

F范数：$\|X\|_F=\sqrt{tr(X^TX)}$

⑤ 集合：邻域：$N(x^*,\varepsilon)=\{x\,|\,\|x-x^*\|<\varepsilon\}$

开集：$\forall x\in X$，$\exists\varepsilon>0$，使 $N(x,\varepsilon)\subset X$

闭包：补集为开集 $cl(x)$

闭集：包含所有极限点

内部 $int(X)$，边界 $bdry(X)=cl(X)\setminus int(X)$

有界：$\forall x\in X$，$\|x\|<r$

⑥ 连续：若 $f\in C^0(X)$ 连续

$f\in C^k(X)$ k阶连续可导

P阶连续可微 $\Rightarrow$ P-1阶Taylor展开

$g(x)=O(x)$：$\lim_{x\to 0}\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|<c$

$g(x)=o(x)$：$\lim_{x\to 0}\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|=0$

⑦ 凸集合：$\sum\lambda_i x_i$

仿射：$\sum\lambda_i=1$

凸：$\sum\lambda_i=1$，$0\le\lambda_i\le 1$

超平面：$\{x\,|\,a^Tx=b\}$

半空间：$\{x\,|\,a^Tx\le b\}$

⑧ 偏序关系：自反：$a\ge a$；反对称：$a\ge b, b\ge a\Leftrightarrow a=b$；传递：$a\ge b, b\ge c \Rightarrow a\ge c$

偏序向量：

向量偏序：$a\ge b$，$\lambda\in R_+\Rightarrow\lambda a\ge\lambda b$；$a\ge b$，$c\ge d\Rightarrow a+c\ge b+d$

Computer Geometry

6/8/2022 复盘优化

3D凸包：时间 $O(n\log n)$

1. 凸集：包含所有点的凸组合

仿射：两点的直线上点 ⇒ 仍属于

1. 凸集、凸函数、凸包

凸集：$\forall x_1, x_2 \in S,\ 0<\lambda<1$，$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in S$

支撑超平面：$\forall y\in S,\ a^T y \ge b$

$ri(x)=\{x\in R^n \mid \exists y\in R^n,\ x\in y\cap H\}$

$conv(x)$：最小包含 x 的凸集

凸函数：$\forall x_1,x_2\in X$：

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$
$$f(y)\ge f(x)+\nabla f(x)^T(y-x)$$
$$\nabla^2 f(x)\succeq 0$$

上镜图：$epi\, f=\{(x,\lambda)\mid \lambda\ge f(x)\}$

f凸 ⇔ $epi\, f$ 凸；f闭 ⇔ $epi\, f$ 闭

次梯度：$\forall y, x$：$f(y)\ge f(x)+d^T(y-x)$

共轭函数：$f^*(y)=\sup_{x\in dom f}(y^T x-f(x))$

$f(x)$ 正常：epi 非空，且不包含竖直线 $(\forall x, f(x)\ne -\infty)$

若 $f(x)$：proper，凸，闭，则 $f(x)=f^{**}(x)$

$f(x-a) \Leftrightarrow f^*(y)+y\cdot a$

$\lambda f(x) \Leftrightarrow \lambda f^*(y/\lambda)$

锥：$\forall x\in K,\ \lambda\ge 0 \Rightarrow \lambda x\in K$

尖锥：$K\cap -K=\{0\}$

实锥：$int K\ne\emptyset$

正则锥：point, solid, closed, convex

锥组合：$\sum \lambda_i x_i,\ \lambda_i\ge 0$

对偶锥：$K^*=\{y\in R^n \mid y^T x\ge 0, \forall x\in K\}$

性质：
① $(K^*)^*=cl(K)$
② 若 $K_1\cap K_2,\ K_1\cup K_2,\ K_1+K_2$ 也为锥
③ $(K_1+K_2)^*=K_1^*\cap K_2^*$
④ $K_1\subseteq K_2$ 闭 ⇒ K_1+K_2 闭
⑤ $ri(K_1+K_2)=ri(K_1)+ri(K_2)$
⑥ K的支撑超平面过原点
⑦ K实/尖 ⇒ K^*尖/实

偏序关系：$a\succeq_K b \Leftrightarrow a-b\in K$；$a\succ_K b \Leftrightarrow a-b\in int K$

2. 锥优化问题

$$\min c^T x \quad s.t.\ Ax=b,\ x\in K \quad (\text{LCoP 线性锥规划})$$

线性规划 (LP)：$\min c^T x$ s.t. $Ax=b$，$x\ge 0$

$\subseteq$ 二次规划 QP：$\min \frac12 x^T P x+q^T x+r$ s.t. $Ax=b$，$x\ge 0$（目标二次，约束一次）

$\subseteq$ 二次约束二次规划 QCQP：$\min \frac12 x^T A_0 x+b_0^T x+c_0$ s.t. $\frac12 x^T A_i x+2b_i^T x+c_i\le 0$，$Ax=b$（$A_0\succeq 0$，且 $A_i\succeq 0$）

对于只有一个约束：转SDP

$\subseteq$ 二阶锥规划 (SOCP)：$\min c^T x$ s.t. $Ax=b$，$x\succeq_K 0$，$K:\{x \mid \sqrt{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2}\le x_n\}$

$\subseteq$ 半定规划 (SDP)：$\min tr(CX)$ s.t. $tr(A_iX)=b_i$，$X\succeq 0$

转SDP：用 Schur补

3. SOCP/SDP 可表示

到SOCP：$t^2\le x_1x_2 \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix} t \\ \frac{x_1-x_2}{2}\end{pmatrix}\right\|\le \frac{x_1+x_2}{2}$

SOC可表示集：$X=\{x\in R^n \mid A_i\binom{x}{u}\succeq_{L} b_i\}$

SOC可表示函数：$epi\, f=\left\{\binom{x}{t}\in R^{n+1} \mid f(x)\le t\right\}$ 凸 ⟸ 可表示

性质：包含：αx，$x_1\cap x_2\cdots x_n$，$x_1\times x_2\times\cdots\times x_n$ 仍SOC可表示；$x_1+\dots+x_n$；$Bx+d$（仿射映射）

SOC可表示函数：$\alpha f_1(x)$，$\max(f_1\dots f_n(x))$，$f_1(x)+\dots+f_n(x)$，$f_1(f_2(x))$（要求 $f_1(y)$ 单调递增，② f_1, f_2 均凸可表示）

所有函数上式都可表示成 $\sqrt{g_1^2(x_1\dots x_n,t)+\dots+g_n^2(x_1\dots x_n,t)}\le g_{n+1}(x_1\dots x_n,t)$ 形式

SDP可表示：LMI不等式
① $tr(A^T X)+a^T x\le b$
② $\sum x_i C_i - D\in S_+^n$（$C_i\in S^n$ 对称）

LMI约束函数：看上镜图 $epi(f)$

意味着 $\sum x_i C_i - D$ 为半正定矩阵，其各主子式非负

引理1分解：若 $X\succeq 0$，秩为 r，若 $tr(GX)\ge 0$，则 $X=\sum p_i p_i^T$，$p_i^T G p_i\ge 0$

证明：
① 分解 $X=\sum p_i p_i^T$ 得到 p_i
② 找 i 使 $(p_i^T G p_i)(p_j^T G p_j)<0$
③ 找 α 使 $(p_i+\alpha p_j)^T G (p_i+\alpha p_j)=0$，令 $y=(p_i+\alpha p_j)/\sqrt{1+\alpha^2}$

此时 $0\le y^T G y\le GX$，$X-yy^T$ 秩为 $r-1$ 半正定

应用：SDP问题解秩为 X ……

4. 对偶与共轭

原问题：$\inf f(x)$ s.t. $x\in X\cap K$ ⟺ 共轭对偶：$\inf f^*(y)$ s.t. $y\in Y\cap K^*$

性质：弱对偶：$c^T x\ge b^T y$

强对偶：若 $int(K)$ 内有可行点 ……

半定：一个有可行内点，一个可行有界 ……

① 一个可行无界 ② 原问题不可行

$c^T x^* = b^T y^*$ 没优值（SDP 对应为 $tr(C^T X^*)$）

LP：$\min c^T x$ s.t. $a_i^T x=b_i,\ x\in K$

令 $u=(u_0\dots u_m)\in R^{m+1}$，$f(u)=u_0$，

$X=\{u\in R^{m+1}\mid u_i=b_i\}$

$K_0=\{u\in R^{m+1}\mid u_0=c^T x,\ u_i=a_i^T x,\ x\in K\}$

$\inf f(u)$ s.t. $u\in X\cap K_0$

① CD：$v=(v_0\dots v_m)$

$$f^*(v)=\sup_{u\in X}\{u\cdot v-f(u)\}=\sup_{u_0\in R}\{(v_0-1)u_0+\sum b_i v_i\}=\sum_{i=1}^m b_i v_i$$

$Y=\{v\in R^{m+1}\mid v_0=1\}$

$K_0^*=\{v\in R^{m+1}\mid v_0 c+\sum v_i a_i\in K^*\}$

$Y\cap K_0^*=\{v\in R^{m+1}\mid c+\sum v_i a_i=s,\ s\in K^*\}$

④ 令 $y=-(v_1\dots v_m)$

$$\max b^T y \quad s.t.\ A^T y+s=c,\ s\in K^*,\ y\in R^m$$

5. 内点法：引入障碍函数

$-\sum \log(x_i)$ 或 $-\log(\det(X))$

问题转为 $\min c^T x - t\sum \log(x_i)$

最优解：中心路径 $(x(t), y(t), s(t))$

原对偶内点法：

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f_0(x)+\sum\lambda_i\nabla^2 f_i(x) & Df(x)^T & A^T \\ -diag(\lambda)Df(x) & -diag f(x) & 0 \\ A & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta\lambda\\ \Delta v\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\nabla f_0(x)+Df(x)^T\lambda+A^Tv \\ -diag(\lambda)f(x)-(1/t)\mathbf{1} \\ Ax-b\end{bmatrix}$$

更新：$x=x+t\Delta x$，$\lambda=\lambda+t\Delta\lambda$，$v=v+t\Delta v$

Lagrangian：$\min f(x)$ s.t. $g(x)\le 0$，$h(x)=0$

$L(x,\lambda,\mu)=f(x)+\sum\lambda_i g_i(x)+\sum\mu_i h_i(x)$，$\lambda_i\ge 0$

对偶：$\sup \inf L(x,\lambda,\mu)$

Slater：$\exists x\in relint\, dom$，满足 $g(x)<0$，$h(x)=0$