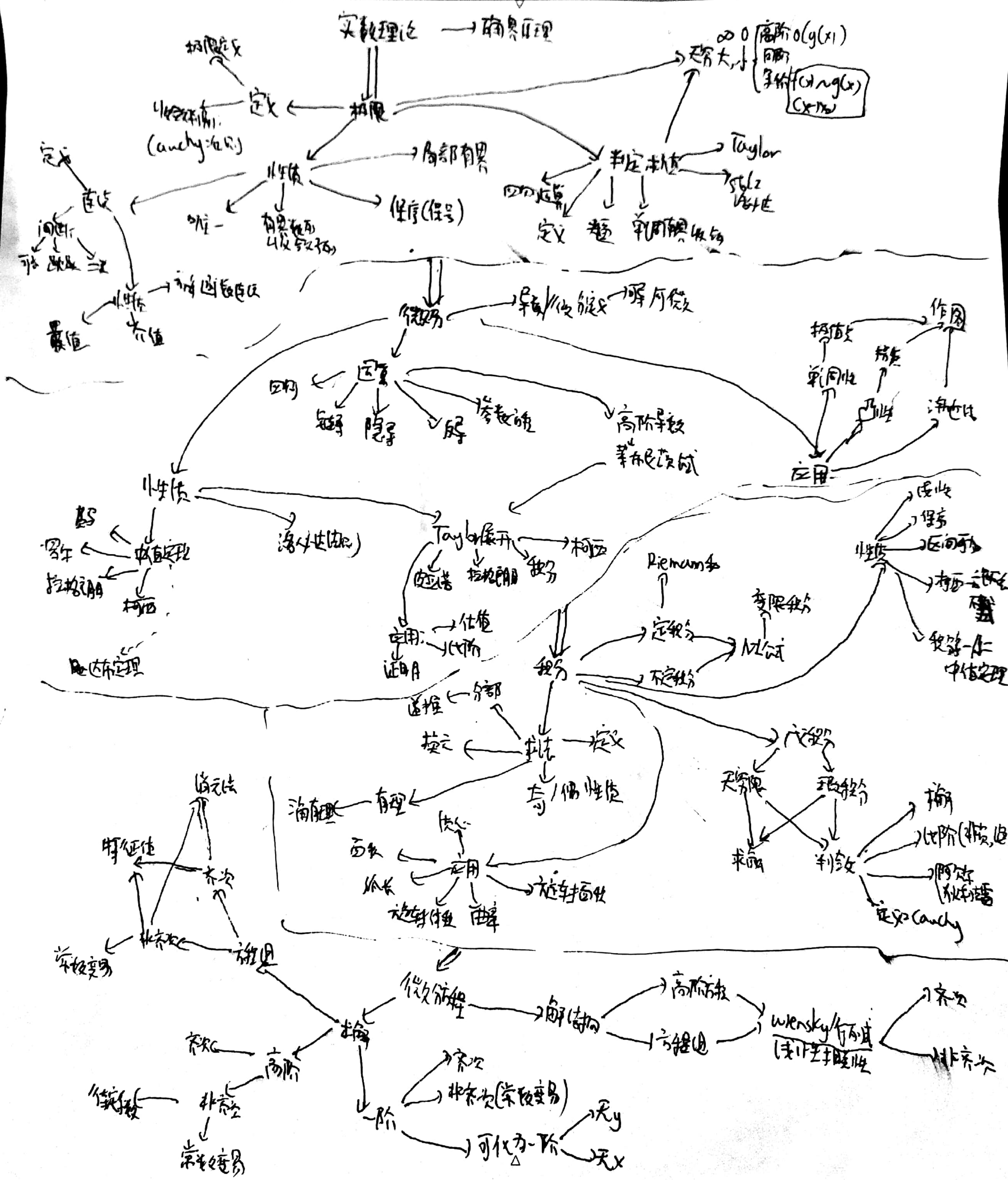
编号： 班级： Entire Map 姓名： 第 页



基础：实数理论：对一非空数集 A：$\forall x \in A$ 若 $x \le M$：M 为上界 $\longrightarrow A$ 必有上确界

$x \ge m$：m 为下界 $\longrightarrow A$ 必有下确界

$\Downarrow$

夹逼

极限定义：

x 在 x_0：

$\forall \varepsilon, \exists \delta, \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$

数列 or 无穷处 x：

$\forall \varepsilon, \exists N, \forall x > N$

左右极限：$x \in (x_0-\delta, x_0)$

$|f(x_0)-A| < \varepsilon$，则 $\lim\limits_{x \to \cdots} f(x) = A$

$|f(x_0)| > M$，$\lim\limits_{x \to \cdots} f(x) = \infty$

要领：核心：$\boxed{\text{找到 } \varepsilon \text{ 与 } \delta \text{ 关系}}$

局限：只能证明收敛/不收敛于某一点，不能证明能否收敛

极限证明：

①：证明$\boxed{\text{函数}}$ or 收敛：柯西准则：

$\forall \varepsilon, \exists \delta, \forall x_1, x_2 \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$

$|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在

（无限，数列类似极限定义

②：数列极限：

- 单调有界数列收敛
- （用途：先证单调，再放缩证有界，可求极限）
- Stolz 定理：
- 若 $b_n \uparrow, \to \infty$ 或 $b_n \to 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$
- 用途：证叠加数列极限：

③：数列与实数：有限与无限

- ①：有界数列有收敛子列
- ②闭区间套：$[a_n, b_n]$
  若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$
  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
  则只有唯一 $\xi \in [a_n, b_n]$
  （a_n, b_n 是闭区间）
- ③有限覆盖
  $[a,b]$ ~~若被~~ 可被有限开区间覆盖

极限+连续：

（本质：无限接近某点的函数由某点值替换近似）

求极限

①定义（太复杂）

②：四则运算，复合运算

基本初等函数直接求

③夹逼定理：$h(x) \le f(x) \le g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = g(x) = t$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = t$

（放缩求极限）

④：等价无穷小：

$\sin x, \tan x, e^x-1, \ln(x+1) \to x$

$\arcsin x, \arctan x$

$\frac{x^2}{2} \to 1-\cos x$

$\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

方法：上下同化为等价无穷小，另作

技巧：①：$\sqrt{\ } - \sqrt{\ }$：分子有理化

②：a 连乘 or 幂：取对数

③：三角/绝对值：放缩夹逼

④ $(f(x))^{k(x)}$ 化为 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 形式

⑤：洛必达：

若 $x \to x_0$ $(x\to\infty)$ $f(x) \to \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \end{pmatrix}$，$g(x) \to \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to\cdot} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\cdot} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

⑥ Taylor 展开

（无穷小不适合加减替换，洛必达不适合 $\sin x$ 等）

~~$f(x)^{k(x)}$ 化为 $(1+x)$ 之形式~~

无穷小：

$\lim\limits_{x\to x_0}$ $f(x)=0$（小），$f(x)=\infty$（大）

同阶：$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

等价：$l=1$

高阶：$=0$

（无穷小看幂指数（小）

大 — — —（大）

极限性质：

①：唯一性

②保序性：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > g(x)$

$\Downarrow$

$x \in (x_0, x_0+\delta) \cup (x_0-\delta, x_0)$

$f(x) > g(x)$

（局部保号）

③局部有界

连续：

定义：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$：在 x_0 连续

间断：

- 一类：$\lim\limits_{x\to x_0^-}$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ 存在
  - 可去：$=$
  - 跳跃：$\ne$
- 二类：有一个不存在：

性质：①连续四则运算，初等函数连续

②：介值定理：若 $f(x) \in C[a,b]$

则对于 $\forall y \in [f(a), f(b)]$ $\Rightarrow$ 零点存在定理

$[a,b]$ 上必有 ξ 使 $f(\xi) = y$

③最值定理：若 $f(x) \in C[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上… $\longrightarrow$ 可证明函数极值

则 $[a,b]$ 上必有 x_1, x_2　$f(x_2) = f_{max}$

方程

导数+微分
（导数：一阶近似）

定义

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$：f(x)导数（$0^+$, 0^-：左/右导）

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$：f(x)微分

可导条件：
- ①：若可导，必连续
- ②若可导：左导=右导
- ③可导⟺可微

运算

①：四则运算

$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$

$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

②链导：

$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

③隐导：（反函数求导）

$x=f(y)$ ⇓ $1=f'(y)\cdot y'$

$y'=\frac{1}{f'(y)}$

④参数求导：

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$

$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$

⑤高阶导：

①：$(f+g)^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$

$(cf)^{(n)}(x)=c\,f^{(n)}(x)$

②莱布尼茨公式：

$(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$

⑥：特殊导数值：

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $(\text{arccot}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(e^x)^{(n)}=e^x$，$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

中值定理

极值点：某邻域内函数值皆小于(大于)它

①费马定理：~~[illegible]~~ 若为极值点 ⟹ $f'(x_0)=0$（可导）

②：罗尔定理：[a,b]连续，(a,b)可导，若f(a)=f(b) 则 (a,b)必有$f'(\xi)=0$

⇓

③拉格朗日：必有$\xi\in(a,b)$

$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

⇓

④柯西：必有$\xi\in(a,b)$

$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

⇓

⑤应用：
- ①导函数介值定理→达布定理
- ②证明零点（罗尔）
- ③证明函数性与导数关系（拉格朗日）

方法

洛必达

条件：

① $\lim_{x\to x_0} f(x)=g(x)=0$ / ∞（$x\to x_0^+$, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$）（一定存在可导）

② 极限存在：

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

③用洛必达求极限：

连续求导直至可求

Taylor展开（n阶近似）

泰勒多项式：

$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

皮亚诺余项 $o((x-x_0)^n)$（n阶可导）

拉格朗日余项：

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

（n+1阶可导，可估）

（$\xi=\lambda x_0+(1-\lambda)x$）

麦克劳林公式：前提：展开点趋向相同

应用：
- ①：估值
- ②：证明$f''(x)$中值定理某点
- ③：无穷小替换增加精度 用于求极限

找好展开 代入消去 达成定理

应用

①：单调性：
- $f'(x)\ge0$：↑ ｜ $f'(x)\ge0$且不恒为0
- $f'(x)\le0$：↓ ｜ $f'(x)\le$ ... 严格

②极值：

$f'(x_0)=0$，$f'(x)$两侧异号

$f''(x_0)\neq0$：$f''(x)>0$：极小值；$f''(x_0)<0$：极大值

$f''(x_0)=0$：驻点

最值：与端点及不可导点比较

③：凹凸：

(1)：定义：$\lambda_i\in(0,1)$ $\lambda_1+\dots+\lambda_n=1$

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 下凸

$f(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n)<\lambda_1f(x_1)+\dots+\lambda_nf(x_n)$

(2)一阶导：$f'(x)$↑：下凸

(3)二阶导：$f''(x)\ge0$：下凸

(4)拐点：$f''(x)=0$ 左右上下凸[illegible]

④：渐近线：

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$，$\lim(f(x)-ax)=b$

$ax+b=y$（斜）

f(x)在某点发散 $x=x_0$（竖直）

⑤图象：单调、极最值、奇偶周期、定义域、凹凸、渐近线

⑥曲率半径

积分

不定积分

直接法：e.g. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

换元

分部：$\int v(x) \cdot u'(x) dx = v(x)u(x) - \int v'(x)u(x)$

$v(x)$：求导变易的 $(x^p, \ln x, \arctan x)$ $\int f(x) dx$

$u(x)$：求积不变的 $(\sin x, \cos x, e^x)$

应用：递推公式

有理分式可积：有理 + 三角有理

化为：$\frac{A}{(x-a)}$　$\frac{A}{(x-a)^k}$　$\frac{Ax+B}{(x+a)^2+b^2}$　$\frac{Ax+B}{((x+a)^2+b^2)^k}$

三角代换 $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$　$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

运算

定积分：不定积分求得（多次换元可以）

周期性：奇函数 $=0$　偶函数 $=2$倍

广义积分：化为定积分的极限形式

应用

面积：直角/参数：$y\Delta x$ 关于积分；极坐标 $\rho\Delta\theta$ 关于 θ 积分

质心/物理量……：求每一个元件 Δx 的质量，之后求积分

弧长：$\int \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$

旋转体体积：旋转体侧面积 πy^2 关于 x 积分

曲面面积：$2\pi y$ 关于弧长积分

曲率

$(\theta$：转角　σ：弧长$)$

$\lim_{\sigma \to 0} \left|\frac{\theta}{\sigma}\right|$

$\sigma = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$

$\theta = \arctan \frac{y'(t+\Delta t)}{x'(t+\Delta t)} - \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}$　（化为函数导数）

$= \left(\arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'$

~~$k = \left|\arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}\right|$~~

曲率半径 $R = \frac{1}{k}$

$k = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\theta}{\Delta t} \Big/ \frac{\sigma}{\Delta t}\right| = \frac{\left(\arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$

定义

广义积分：将可积范围扩大。无穷限：上/下界为无穷；瑕积分：有瑕点（函数无界）

定积分：黎曼和 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x$（$\xi_i$ 任取），与 ξ_i 选取无关

可积 $R[a,b]$：在 $[a,b]$ 上不连续的部分为零测度集

定积分：N-L公式：求原函数：$F(x) = \int_a^x f(t) dt$（变限积分）（里面换元与 t 换）

① $F \in C[a,b]$

② 若 f 在 x_0 处连续，F 在 x_0 可导，$F'(x_0) = f(x_0)$

③ $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$　$(f(x) \in C[a,b])$

性质（定积分）

线性：$\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))$

区间可加性：$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

保序性：若 $[a,b]$ 上 $f(x) \le g(x)$，则 $\int_a^b f(x) dx \le \int_a^b g(x)$

若 $m \le f(x) \le M$，$m(b-a) \le \int_a^b f(x) dx \le M(b-a)$

绝对值积分：$\left|\int_a^b f(x) dx\right| \le \int_a^b |f(x)| dx$

柯西不等式：$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x)$

中值定理：$f \in C[a,b]$，$g \in R[a,b]$ 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 不变号

存在 $\xi \in [a,b]$，$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$

$(f(x) \in C[a,b]$，$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a))$

第二中值定理：若 g 在 $[a,b]$ 单调

则 $\int_a^b f(x)g(x) = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx$

广义积分（判敛）

① 求积分

根本：柯西收敛准则 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x) dx\right| < \varepsilon$

分类：绝对收敛：$|f(x)|$ 积分收敛；条件收敛：不绝对收敛，但 $f(x)$ 积分收敛

非负函数 / 绝对收敛：比阶法：$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$

$C > 0$：同收同发

$C = 0$：$g(x)$ 收 → $f(x)$ 收

常用阶：$\frac{1}{x^p}$，$\frac{1}{x \ln x}$，$\frac{1}{x \ln^p x}$

条件收敛：$g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx$ 收敛

阿贝尔判别法

① $\int f(x) dx$ 收敛，$g(x)$ 单调有界（阿贝尔）

② $\int f(x) dx$ 有界，$g(x)$ 单调，$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$（狄利克雷）

求积分：①定义法：数量和：（数极限→积分）

e.g $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x=\frac{2}{\pi}$

②：牛-莱公式直接/分段法：

e.g $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\le 0\\ \cos x & x>0\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x+C_1 & (x\le 0)\\ C_2+\sin x & (x>0)\end{cases}$ （注意常数） $F(0)=C_1=C_2$

$\therefore F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x+C & (x\le 0)\\ \sin x+C & (x>0)\end{cases}$

常见原函数：x^α，$\sin x$，$\cos x$，

$\frac{1}{\cos^2 x}$，$\frac{1}{\sin^2 x}$， $\frac{a}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$，$\frac{ax+b}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$，$\underset{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$，$\underset{-\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$

③：换元法：

对于无理函数：$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx= a^2\int\cos^2 t\,dt$

$\frac{x}{a}\to\cos t$

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$： $\to\int\frac{1}{\tan t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}$

$x\to\frac{1}{\cos t}$

④：分部积分：①：$v(x)$ 求导易 $u(x)$ 求积便 e.g. $v(x)=\ln x$ $u'(x)=1$

② 二者均不变，两次 e.g $v(x)=e^x$ $u'(x)=\cos x$

③ 递推：e.g. $\int_0^\pi\sin^5 x\,dx$ → （$\int_0^\pi\sin^n x\,dx=I_n$

$v(x)=\sin^{n-1}x$ $u'(x)=\sin x$

$v'(x)=(n-1)\sin x^{n-2}$ $u(x)=-\cos x$

$I_n=-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^\pi+(n-1)\int_0^\pi\sin x^{n-2}\cos x=(n-1)\int_0^\pi\sin x^{n-2}\cos x$

$\cancel{v_1(x)=\sin x^{n-2}}$ $\cancel{v_1'(x)=(n-2)\sin x^{n-3}\cos x}$

$\cancel{u_1'(x)=\cos x}$ $\cancel{u_1(x)=\sin x}$

编号： 班级： 姓名： 第 页

微分方程

一阶

$y'+p(x)y=q(x)y^a$

$y^{-a}y'+p(x)y^{1-a}=q(x)$

常数变易法

设 $y^{1-a}=z$

$\frac{1}{1-a}z'+p(x)z=q(x)$

伯努利方程

设齐次方程解：$C(x)e^{-\int p(x)dx}$（齐次通解）

代入：$C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$

$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$

非齐次

$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

$p(x)dx=q(y)dy$

$\boxed{\int p(x)dx=\int q(y)dy}$

齐次

可化为一阶

设 $y'(y'')=t$：解一阶方程

无 y 的：

设 $p=p(y)$

[illegible]

无 x 的

转化为一阶方程

解的结构

n 阶线性微分方程：$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$

齐次方程有 n 个线性无关解

（其朗斯基行列式 $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}\neq 0$）

（若有 $\sum=0$，$\sum=0$，线性相关）（线性无关）

齐次通解：$Y=C_1y_1(x)+\cdots+C_ny_n(x)$

非齐次通解：$Y=\underset{特解}{y_0(x)}+\underset{齐次通解}{C_1y_1(x)+\cdots+C_ny_n(x)}$

$\boxed{若有一个特解可降一阶。n个特解可求出通解}$

n 阶线性微分方程组：$Y'=A(x)Y$：

n 个线性无关通解

朗斯基行列式 $\begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x)\end{vmatrix}\neq 0$，（$\sum=0$，$\sum=0$），线性无关

~~基本解组~~ 通解 $Y=\begin{bmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n\end{bmatrix}$

非齐次 $Y(x)=\underset{特解}{\tilde{Y}}+C_1Y_1(x)+\cdots+C_nY_n(x)$

阶数次数大

高阶（常系数）

关于虚数

$y_1+iy_2=p(x)+iq(x)$

y_1 为 $y=p(x)$ 的解，y_2 为 $y=q(x)$ 的解

齐次

化为特征方程

$\lambda^2+a\lambda+b$

λ 为一重根：$e^{\lambda x}$ 为一解

λ 为 k 重根：$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ 均为解

λ 为复根：$e^{(a+bi)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$\boxed{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx 均为方程解}$

非齐次

① 一般情况（不一定常系数）：常数变易法

case(1)：二阶方程

$y''+a(x)y'+b(x)y=0$

已知一个齐次通解 $Y(x)$ 求特解：

设 $y(x)=c(x)Y(x)$

代入得到特解

（化为可降阶的二阶方程）

求出通解

case(2)：

已知两通解 $y_1(x), y_2(x)$

求特解：

设 $Y(x)=C_1y_1+C_2y_2$

$Y'(x)=C_1'y_1+C_2'y_2+C_1y_1'+C_2y_2'$

$\boxed{设 C_1'y_1+C_2'y_2=0}$

再求导，代入，

解方程组

得到特解

② 常系数：

待定系数法

①：方程右边形如 $p(x)e^{\lambda x}$ 形式

若 λ 不为方程特征根：

设 $Q(x)e^{\lambda x}$ 为解（$Q(x)$ 与 $p(x)$ 同阶）

若为方程 k 重根：

设 $x^kQ(x)e^{\lambda x}$ 为解

②：求解后，实部[illegible]为解

欧拉方程：可化为常系数：

$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$

此时，用 $\boxed{t=\ln x}$ 替换，

得到关于 t 的高阶常系数方程

方程组

齐次：

设 $Y=e^{\lambda t}U$（U 为向量）

$(A-\lambda I)U=0$

λ：特征值

U：特征向量

①：代数重数 $=$ 几何重数

$e^{\lambda_i t}U_i$ 为解向量

（若 λ 为虚特征，$a+bi$）

则 $e^{at}\cos bt U_i$，$e^{at}\sin bt U_i$ 均为解向量

且线性无关

②：代数重数 $>$ 几何重数

对于重根的 λ：

设 $\begin{bmatrix} a_0+a_1t+\cdots \\ \vdots \\ a_0+\cdots+a_mt^m\end{bmatrix}$ 为解向量

非齐次

①：消元法：求导 + 代换

方程组 → 高阶方程

②：常数变易法（通用）

设 $Y(x)=\Phi(x)C(x)$

代入，得

$C(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(t)F(t)dt$