多项式

定义：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

a_nx^n 首项（首1：首一多项式）
$n=\deg(f(x))$
$f(x)=0$ $\boxed{\text{零多项式 无次数}}$

5大运算：加法 减法 乘法、乘法交换律 结合律、分配律、乘法消去律

整除性

$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$

$q(x)$ 商式，$r(x)$ 余式
$\deg r(x)<\deg g(x)$
$r(x)=0 \Leftrightarrow$ 整除

算法：长除法、综合除法

e.g. x^3-1 除以 x^2+2x

	$x^3 \qquad -1$	$x-2=q(x)$
	x^3+2x^2-2x	
	$-2x^2+2x-1$	
	$-2x^2-4x+4$	
	$6x-5=r(x)$	

$$\begin{cases} f(x)=q(x)(x-a)+f(a) \\ f(a)=0 \Leftrightarrow (x-a)\mid f(x) \end{cases}$$

求 $f(a)$：综合除法

e.g. $a \mid a_n \quad a_{n-1}$

-3	1	-4	-5	$+2$
		-3	$+21$	-48
	1	-7	$+16$	-46

第一位落下，上右斜对角乘 a，直到与下相加得到为和。二长除法

最大公因式/最小公倍式

$d(x)=(f(x),g(x))$（首1）

最大公因式：
$$\begin{cases} d(x)\mid f(x),\ d(x)\mid g(x) \\ 若 d_1(x)\mid f(x),\ d_1(x)\mid g(x),\ 则 d_1(x)\mid d(x) \end{cases}$$

性质：最大公因式不唯一，相差为常数倍（非0）
$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

求法：辗转相除

$x+1$	$g(x)$	$f(x)$	$x+1$
x^3+x^2	x^3-3	$x^4+x^3-x^2-2x+1$	
x^3+x^2	$-2x$	x^4+x^3-3x	
x^2	$+2x-3$	$-x^3-x^2+x+1$	
x^2	$+x-2$	$-x^3-2x+3$	
	$r_1(x)=x-1$	$r_2(x)=x^2+x-2$	$x+2$
	最大公因式	x^2-x	
		$2x-2$	
		$2x-2$	
		$r_3(x)=0$	

最小公倍式：
$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$$

互素：$(f(x),g(x))=1$

性质：
① 互素 $\Leftrightarrow u(x)g(x)+v(x)f(x)=1$
② $(f(x),g(x))=1 \Leftrightarrow (f^m(x),g^n(x))=1$
③ $(f(x),g(x))=1$，$f(x)\mid h(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)g(x)\mid h(x)$
④ 若 $(f(x),g(x))=1$，$f(x)\mid g(x)h(x) \Rightarrow f(x)\mid h(x)$

因式分解

① 不可约：不能表示为两个次数更低的多项式乘积
若 $p(x)$ 不可约，$p(x)\mid f(x)g(x)$
则：$p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$

复数域：
$f(x)=C(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_m)^{r_m}$
（一次式）

实数域：
$f(x)=C\prod_{k=1}^{n}(x-c_k)^{r_k}\prod_{j=1}^{m}(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$
（一次、二次式）

有理数域：
② $g(x)\in Z(x)$，且系数最大公因子 ±1：本原多项式

判断是否可约：Eisenstein 判别法（充分条件）

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in Z(x)$
若存在素数 p：
$$\begin{cases} p\nmid a_n \\ p\mid a_0\sim a_{n-1} \\ p^2\nmid a_0 \end{cases}$$
则不可约

~~有理数~~（有理数）根判断

若 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$
且 $f(\frac{r}{s})=0$，则必有 $r\mid a_0$，$s\mid a_n$

重零点与重因式：（C 上）
若 $f(x)^m\mid p(x)$，$f(x)^{m+1}\nmid p(x) \to m$ 重因式

充要条件：若 $f(x)$ 不可约：
则：n 重不可约因式 $\Leftarrow f(x)\mid p(x) \cdots f(x)^n\mid p(x)$，$f(x)\nmid p(x)^{(n)}$

无重因式 $\Leftrightarrow (f(x),f'(x))=1$

有理因式具体分解：
① Eisenstein 判别（是否可约）
（有理根法，先换元 $y=x+t$）

① 先分析系数 a_n,a_0，找出可行的 r/s，去试
② 综合除法，除因式得到低次
③ Eisenstein 判别可约性
④ 若可约，待定系数（二、三次）法分解

因式分解定理：

设 $f(x)=r\,p_1^{m_1}(x)\,p_2^{m_2}(x)\cdots p_n^{m_n}(x)$
$g(x)=s\,p_1^{n_1}(x)\,p_2^{n_2}(x)\cdots p_n^{n_n}(x)$
（$p_1(x)\sim p_n(x)$ 均为不可约首1因式）

整除：$f(x)\mid g(x) \Leftrightarrow \forall i$，$\boxed{m_i\le n_i}$

公因/公倍式：
$(f(x),g(x))=p_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_n^{t_n}(x)$
（$t_i=\min(m_i,n_i)$）

$[f(x),g(x)]=p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_n^{r_n}(x)$
（$r_i=\max(m_i,n_i)$）

互素：$\forall i,\ \min(m_i,n_i)=0$

Jordan 标准形 —实质: 求相似矩阵 $P^{-1}AP=B$ 最简形式

理论

对角矩阵

均可上三角化

根子空间:

$V_\lambda=\{\alpha\in V\mid \exists m\in N, 使(\sigma-\lambda\varepsilon)^m\alpha=\theta\}$

性质: 其中 V_λ 为σ不变子空间

λ为σ特征值 (V_λ 相同)

σ-λε 限制在 V_λ 上为幂零变换, 在其余根子空间上可逆

V_λ 维数为λ代数重数

$V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}+\cdots\oplus V_{\lambda_n}$ 为直和

$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_n}$

且在 V_{λ_i} 上, σ-λε 为幂零变换

对幂零阵

不变子空间

①: 特殊幂零阵: 循环阵:

α, σα, ⋯ $\sigma^{n-1}\alpha$ 为V一组基, 且 $\sigma^n\alpha=\theta$

在 α, σα ⋯ $\sigma^{n-1}\alpha$ 下, 循环阵为 $\begin{bmatrix}0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0\end{bmatrix}$

②: 一般幂零阵: $\exists m\in N, \sigma^m=0$, 则σ为幂零变换,

可分解为循环阵 (在W上不变)

设 $W_i=\mathrm{Im}\,\sigma^i$

则 $\{\theta\}=W_n\subset W_{n-1}\subset\cdots\subset W_0=V$

$W_{n-1}\subset\ker\sigma$

$W_{n-i}\subset\ker\sigma^i$

设 W_{n-1} 基为 $\varepsilon_1^{n-1},\varepsilon_2^{n-1}\cdots\varepsilon_{r(n-1)}^{n-1}$

在 W_{n-2} 中取 $\varepsilon_1^{n-2},\varepsilon_2^{n-2}\cdots\varepsilon_{r(n-1)}^{n-2}$, (其中)

再扩充为 W_{n-2} 一组基 (其余基均取自 ker σ)

则: W_{n-2} 一组基为

$\varepsilon_1^{n-1}\cdots\varepsilon_{r(n-1)}^{n-1}$

$\varepsilon_1^{n-2},\cdots\varepsilon_{r(n-1)}^{n-2}\cdots\varepsilon_{r(n-2)}^{n-2}$

以此类推: V一组基为

$\varepsilon_1^{n-1}\cdots\varepsilon_{r(n-1)}^{n-1}$

$\varepsilon_1^{n-2}\cdots\varepsilon_{r(n-1)}^{n-2}\cdots\varepsilon_{r(n-2)}^{n-2}$

$\varepsilon_1^{0}\cdots\cdots\varepsilon_{r(0)}^{0}$

每一列构成一个循环子空间, 可分解为 $\varepsilon_{r(0)}^0$ 个循环阵

(维数为阶数)

计算

若尔当标准形

实质: 求标准形

若尔当块个数, 维数

基本行, 列数

①: 求A的特征多项式

$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{s_1}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{s_t}$

(说明有t个 s_i 维以 λ_i 特征值的根子空间)

② 求若尔当块个数, 维数

个数: $\ker(\sigma-\lambda\varepsilon)$ 维数, 基本行个数,

即 $s_i-r(\sigma-\lambda\varepsilon)$

维数: 每个块对应循环阵幂零指数 = 列长

$\boxed{基本列数=s_i}$ (维数即列数)

若尔当标准形: $\begin{bmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}$

s_i: 基本 s_i 列维数

第一行: 即求 $\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)$ 的基

第二行: 解方程组

$(A-\lambda_i I)x=(k_1 s_1+\cdots+k_s s_s)$ 第一行向量

以此类推

(若有一行) $(A-\lambda_i I)^t x=s_i$

(上一列, 方法, $x_1^{(1)}\cdots x_1^{(t_1)}, x_2^{(1)}\cdots x_2^{(t_2)}\cdots$)

P

将基本按列排列, 与若尔当块一一对应: $P^{-1}AP=B$

应用: ①: 求不变子空间

先求根子空间 V_{λ_i}

然后再求 V_{λ_i} 中所有不变子空间,

且每个 V_{λ_i} 中各子空间直和

②: 极小多项式

定义: A使零多项式中次数最小的首一多项式

求法: 若特征值 λ_i, 若尔当块最大阶为 k_i

则: $f=\prod(x-\lambda_i)^{k_i}$ → 判断可否对角化

③: A^m

$J_A=P^{-1}AP$, 或 $A=PJP^{-1}$

$A^m=PJ^mP^{-1}$

$J=\mathrm{diag}(A_1,A_2\cdots A_m)$

$J^m=\mathrm{diag}(A_1^m,A_2^m\cdots A_n^m)$

$A_1^m=(\lambda I+N)^m=\lambda^m I+C_m^1\lambda^{m-1}N+C_m^2\lambda^{m-2}N^2+\cdots$

内积的应用

（二次型）

①补充：正交变换：
- σ 正交变换
- $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$
- $\forall\alpha\in V$，$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$
- 将标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 变为另一组标准正交基 $\sigma(\varepsilon_1)\cdots\sigma(\varepsilon_n)$
- 任一组基下矩阵为正交阵

对称变换：
- $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$
- 在任一组基下为实对称阵

②三大应用

①：奇异值分解：实矩阵 $m\times n$ A：$r(A)=r$

$A=U\Sigma V^T$ → n阶正交阵；U：m阶正交阵；$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \\ & \ddots \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$

→ 求法：① 求 A^TA 特征值 $\lambda_1\cdots\lambda_r$ 并按大小排序：$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r$

相应单位正交特征向量 $v_1\cdots v_r$

$A[v_1\cdots v_r]=$

① 求对应的 $u_i=\dfrac{Av_i}{\sqrt{\lambda_i}}$

② 将 $v_1\cdots v_r$ 扩补为 R^n 上标准正交基 $v_1\cdots v_n$，

$u_1\cdots u_r$ 扩补为 R^m 上标准正交基 $u_1\cdots u_m$

③ $\begin{bmatrix}u_1^T\\ \vdots \\ u_m^T\end{bmatrix}A[v_1\cdots v_r\,v_{r+1}\cdots v_n]=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \\ & \ddots \\ & & \sqrt{\lambda_r} \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots\end{bmatrix}$，$V$

$A=\underbrace{[u_1\cdots u_m]}_{U}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \\ & \ddots \\ & & \sqrt{\lambda_r} \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^T\\ \vdots \\ v_n^T\end{bmatrix}$

$=\boxed{U\Sigma V^T}$

② 目的：$Ax=b$ 无解时，求 $\bar{x}$，使 $|A\bar{x}-b|^2$ 最小

①分析：最小时：$(A\bar{x}-b,A\bar{x})=0$

只需求 $A\bar{x}=p$ 的解即可（p 为 b 在 A 列空间上投影）

$\boxed{\text{即求 } A^TA\bar{x}=A^Tb \text{ 的解}}$

最优最小二乘解：长度最短的 $\bar{x}$

设 $\bar{x}=\underbrace{c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_rx_r}+x_0=x_r+x_0$

$A^TAx=0$ 通解；$A^TAx=A^Tb$ 特解，~~$x_0\in N(A)$~~

$x_r\in N(A)$

$x_0\in R(A^T)$

$\because N(A)\oplus R(A^T)=R$

$\boxed{\text{∴ 当 } x_0\in R(A^T)} \text{ 为最优}$

求法：$\boxed{x_0=A^+b}$

③广义逆：A：$m\times n$
- $AGA=A$
- $GAG=G$
- $(AG)^T=AG$
- $(GA)^T=GA$

则 $G=A^+$，为 A 广义逆

$\boxed{A^+=V\Sigma^+U^T}$

（Σ^+：非零元素取倒数后再转置）

综合：奇异值分解 $A=U\Sigma V^T$
- $u_1\cdots u_r$；$v_1\cdots v_r$：v 为 A 的特征值向量
- $u_i=\dfrac{Av_i}{\sqrt{\lambda_i}}$；$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r$：$\sqrt{\lambda_i}$

$\xrightarrow{\text{求}} A^+=V\Sigma^+U^T$（广义逆）$\xrightarrow{\text{求}}$ 最小二乘解：$A^TA\bar{x}=A^Tb$

最优解：$x_0=A^+b$

酉空间（复数域内积空间）

内积定义：$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{b_i} = \alpha^T\bar{\beta}$

性质：
- $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$ （为了让长度为正实数）
- $(k\alpha+\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$ （共轭线性）
- $(\alpha,\alpha)\geq 0$，且 $(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$
- Cauchy-Schwartz不等式：$|(\alpha,\beta)|^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$ （复数的模）

长度：$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

正交：$(\alpha,\beta)=0 \to \alpha\perp\beta$

夹角无定义

任一正交向量组两两（线）性无关

设 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为任一组基，标正基与正交化

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

$\vdots$

$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$

再进行单位化，得到 $\gamma_1\cdots\gamma_n$

$[\gamma_1\ \gamma_2\cdots\gamma_n]R=[\alpha_1\cdots\alpha_n]$ → 任一可逆阵的UR分解

U：酉矩阵（复化正交阵）

性质：
- $|\det U|=1$
- $U^{-1}=U^H$
- U_1U_2 仍为酉矩阵
- 行、列均为标准正交基

→ 正交补与直和分解：

设 W 为 V 子空间，

$W^{\perp}=\{\alpha\mid\alpha\in V,\alpha\perp W\}$

$W\oplus W^{\perp}=V$

↓

对应相关概念：酉变换（正交变换）

等价：
- σ 为酉变换
- $(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)\quad\forall\alpha,\beta\in V$
- $\forall\alpha\in V,|\sigma\alpha|=|\alpha|$
- σ 将一组标准正交基变为标准正交基
- σ 在任一组标准正交基下为酉矩阵

共轭变换：

$\forall\alpha,\beta$，$(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma^*\beta)$，则 σ^* 为 σ 的共轭变换

标准正交基下矩阵：$A^*=A^H$

性质：
- $I^H=I$
- $(A^H)^H=A$
- $(kA)^H=\bar{k}A^H$
- $(A+B)^H=A^H+B^H$
- $(AB)^H=B^HA^H$

正规变换：

$\sigma\sigma^*=\sigma^*\sigma$

（$AA^H=A^HA$ 正规矩阵）→ 性质：
- 若 λ 为属于 λ 特征向量，则 ξ 也为 $\bar\lambda$ 属于 $\bar\lambda$ 的特征向量
- σ 不同特征值特征向量（相互）正交

↓

则存在一个酉矩阵 U，

使 $U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$

必可相似对角化

↓

做法：
- ①求特征值与特征向量
- ②特征向量Schmidt正交化，变为矩阵 U

埃尔米特变换：

（自共轭、对称变换）

定义：$(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma\beta)$

性质：
- 特征值为实数
- 是正规变换

$\sigma^*=\sigma$

$A^H=A$

埃尔米特矩阵

埃尔米特二次型

定义：$f(x)=x^HAx$

↓

标准化：
- ①必存在可逆酉矩阵 U，使做可逆线性替换 $x=Uy$ 使 $x^HAx=y^H(U^HAU)y$，其中 U^HAU 为对角阵（同正交矩阵相似对角化）
- ②做可逆变换配方，但用 $\bar{y}$ 为对角阵

规范化：标准化后再操作，必可做到

↓

$A\to B$，$f=\bar{y_1}y_1+\cdots+\bar{y_p}y_p-\bar{y}_{p+1}y_{p+1}-\cdots-\bar{y_r}y_r$

- r：秩
- p：正惯性指数
- $r-p$：负惯性指数
- $2p-r$：符号差

$f\to k_1\bar{y_1}y_1+k_2\bar{y_2}y_2+\cdots+k_n\bar{y_n}y_n$

正定
- ① $\forall x,x^HAx>0$
- ② $r=p=n$
- ③ A 与 I 相合，即 $\exists$ 可逆阵 P，$P^HAP=I$，$\exists$ 可逆阵 C，$A=C^HC$
- ④特征值全为正数
- ⑤有正线（对角线正实数）上三角阵 R，$A=R^HR$
- ⑥主子式 >0，顺序主子式 >0

半正定
- ① $\forall x,x^HAx\geq 0$
- ② $p=r<n$
- ③ $\exists P$，$P^HAP=\mathrm{diag}(I_r,0)$
- ④ $\exists C$（不一定可逆），$A=C^HC$
- ⑤ A 的特征值 ≥ 0

$\forall x$，x^HAx：
- >0 正定
- ≥ 0 半正定
- <0 负定
- ≤ 0 半负定

其余：正定性与所取标准正交基无关，做酉变换不变

射影几何

(x_1, x_2, x_3)

$x_3=0$：$(x_1, x_2, 0)$ 无穷远点 $k=\frac{x_2}{x_1}$

$x_1=0$：$(0, x_2, 0)$：y 轴上

齐次坐标 $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$

$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

(u_1, u_2, u_3) $\left(u_1=u_2=0\right.$：无穷远直线$)$ $\left(k=\frac{u_2}{u_1}\right)$

对偶原理与5点(线)：点线对称

扩 Euclid 平面：+无穷远点

平行线的无穷远点相同

一线一定有无穷远点

无穷远点在同一直线上

→ 两点确定一直线

两直线间有交一点

坐标：任意5点 (A_1, A_2, A_3, A) 确定一坐标，

(任三点不共线)

能找到一齐次向量 A_1, A_2, A_3 使 $A=(A_1)+(A_2)+(A_3)$

点X坐标，$x_1(A_1)+x_2(A_2)+x_3(A_3)=(X)$：

$X=(x_1, x_2, x_3)$

坐标变换：$P\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ (A各列：新基的旧坐标)

可逆(三点不共线)

求法：①：找到 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=A$

$(A_i)=k_iA_i$ (齐次向量) 才为实际的坐标

②做坐标变换

三点 (a_1,a_2,a_3) 共线 $\Leftrightarrow$ $\lvert a_1 b_2 c_3\rvert=0$	三线 (u_1, u_2, u_3) 共点 $\Leftrightarrow$ $\lvert u_1, u_2, u_3\rvert=0$
Desargues：两三角形，对应点连线共点 ⇔ 对应边交点共线	两三角形，对应边交点共线 ⇔ 对应点连线共点
两点 A B 连线：$A\times B$ (坐标)	两线交点：$U\times V$ (坐标)
(方程)：$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$	$\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\v_1 & v_2 & v_3\\w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=0$

交比：与射影，坐标系无关(不变量)

设：A, B, C, D 为 $(P_1), (P_2)$，$(P_1)+\lambda(P_2)$，$(P_1)+\mu(P_2)$

$(P_1P_2; P_3P_4)=\frac{\lambda}{\mu}$

~~表示(方向)~~ 直线也一样

关系：四共点直线的交比 $(l_1l_2; l_3l_4)$ = 一条直线的4交点交比 $(P_1P_2; P_3P_4)$

几何上：$(P_1P_2; P_3P_4)=\frac{\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_2P_4}}{\overline{P_2P_3}\cdot\overline{P_1P_4}}$

$(l_1l_2, l_3l_4)=\frac{\sin\angle(l_1l_3)\cdot\sin\angle(l_4l_2)}{\sin\angle(l_3l_2)\sin\angle(l_1l_4)}$

(调和分离)点对 $(P_1P_2; P_3P_4)=-1$

射影变换

一个双映射，保持交比不变，将一个坐标映为另一平面上坐标

$P\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ (同一平面：射影变换)

线坐标：$P'\begin{bmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{bmatrix}=(A^{-1})^T\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$

不动点，线至少一个：

求法：$\begin{vmatrix}a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho\end{vmatrix}=0$

ρ 为 A 的特征值

特征向量：不动点坐标

(不动线：让特征变换的入…)

二阶曲线 (二次型)

$XAX^T=0$

(X：点坐标)

(类似二次型)

5点确定一个二阶曲线 (解方程)

切线

y不在曲线上

y的极线 z：

$yAz^T=0$

性质：P在Q极线上 ⇔ Q在P极线上

二阶曲线的任一点配极点

奇异点在每一切线上

奇异：$AX^T=0$

奇异的曲线任一点连线在曲线上

有奇异点 ⇔ 退化(为相交直线)

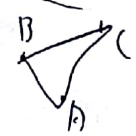
自配极三角形，已知求退化

△ABC：

A, B, C 在线外

对应点极线与对边相同

例1：



取线外一点 A

两奇异点 B, C

已知坐标，坐标变换

$x_1^2=0$ → 一条线

例2：求一个奇异点 C

取线外一点 B，求其极线 l_B

在 l_B 上再找一个 A

以 A, B, C 为新坐标系：

$P\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}$

$P^TAP=B$，对角 → 开根号

$x_1^2+x_2^2=0$ 一点

$x_1^2-x_2^2=0$ 两直线

例3：

①找自配极三角形 △ABC

(设线外一点，找极线再找一点，再求极线交点)

②以三顶点建立新坐标系，$P\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}$ (P为A坐标，etc)

~~矩阵~~ 此时：XAX^T ⇒ $X(P^TAP)X^T$，$P^TAP=B$ 对角

③开根号，变为

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 虚

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 圆锥曲线

标准形

步骤：①求A的 ρ

②求奇异/自配极三角形

③坐标变换，对角化

④标准化

Linear Algebra

多项式 | 线性空间 | 矩阵

多项式

整除：带余除法；综合除法（一次）

deg约：
$\begin{cases} \deg q(x) + \deg g(x) = \deg f(x) \\ \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$

最大公因，最小公倍 → 性质：$\exists\, u(x), v(x)$，$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$

求法：辗转相除

互素：性质：互素 $\Leftrightarrow u(x)g(x) + v(x)f(x) = 1$

因式分解与不可约多项式：

$f(x) = r p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}(x)$

$g(x) = k p_1^{n_1}(x) \cdots p_n^{n_n}(x)$

整除：$\forall i, m_i \le n_i$

公因，公倍：取小，取大

互素：$\forall i, m_i, n_i$ 至少一个为0

有理分解：
- 先求一次因式：（有理根 $\frac{r}{s}$ 为根，则 $r \mid a_0, s \mid a_n$）
- 再算重根数（任何数域均成立）

$f(x) \mid g^n(x)$，$f(x) \nmid g^n(x)$

$\left(f^2(x)\right)^n \mid g(x)$，$\left(f^2(x)\right)^{n+1} \nmid g(x)$

- 再用待定系数拆高次因式
- 最后：Eisenstein判别法（有理）（什么可以线性替换）

找素数 p：$p \nmid a_n$，$p \mid a_i (i \ge 1)$，$p^2 \nmid a_0$，$\Rightarrow$ 不可约

线性空间

内积 → 二次型

正交与对称变换

奇异值分解 $(m \times n)$

① 求 A^TA 特征值与特征向量 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$，按顺序排列 $\lambda_1 \cdots \lambda_r$

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$

② 求特征向量，正交化 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$，再补充 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$（正交）

③ 求 $u_i = A\varepsilon_i$（前 r 个），再补充 $u_1 \cdots u_m$

$A = U\Sigma V^T$

$V = [\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n]$（特征向量）

$U = [u_1 \cdots u_m]$

② 最小二乘问题：$\|Ax - b\|$，解 $A^TAx = A^Tb$；最优：$\|\cdot\|$ 最小的，为 A^+b

广逆：$A^+ = V\Sigma^+U^T$

复数域内积空间

定义：$(x, y) = x^T \cdot \bar{y}$

$(x, y) = \overline{(y, x)}$（共轭对称性）

长度：$\sqrt{(x, x)}$

标准正交

UR分解：Schmidt正交化

两矩阵正交 $A^HA = I$（酉，正交阵）

正交化，再分解

共轭变换 $(\sigma\alpha, \beta) = (\alpha, \sigma^*\beta)$

$\sigma\sigma^* = \sigma^*\sigma$：正规（可对角化）

$\sigma = \sigma^*$ $(A = A^H)$：埃尔米特变换

$(\sigma\alpha, \beta) = (\alpha, \sigma\beta)$ 特征值全为实数

二次型 → 标准化，正交化

正定：
- 与单位阵合同
- 存在可逆 P
- 特征值 > 0
- 主子式/顺序主子式 > 0
- $\forall x$，$x^TAx > 0$

线性变换

特征值 → 相似对角化 → Jordan标准型

① 求特征值，代数重数

λ_i 根子空间 $(\sigma - \lambda_i)^{r_i} x = \theta$

维数 r_i，$\sigma - \lambda_i$ 为幂零变换（σ 不变子空间）

② 求块数：$(\sigma - \lambda_i)x = 0$：几个解，几块

③ 求基

$\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{1n}$

$\varepsilon_{k1} \cdots \varepsilon_{kn}$

每一列循环基

正求：找出 $\varepsilon_{11} \cdots \varepsilon_{1n}$，再求 $\varepsilon_{21} \cdots \varepsilon_{2n}$

逆求：先求最下方一行，再向上推

④ 矩阵

$P = [\varepsilon_{11} \cdots \varepsilon_{1n}\ \varepsilon_{21} \cdots \varepsilon_{m1} \cdots \varepsilon_{mt}]$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{bmatrix}$

应用：① 最小多项式：$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{k_n}$

k_i：λ_i 最大Jordan块的阶数，为A化为多项式时的最小次数

② 不变子空间：
① 求根子空间
② 求根子空间下不变子空间
(3) 不同根子空间下各选一个直和

③ A^m：$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = U^m$

$U_i = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$\mathrm{diag}\begin{bmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_n \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} U_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & U_n^m \end{bmatrix}$