МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет

С. А. Скороходов

ОТВЕТЫ НА ФИЗИКУ

Ответы на вопросы экзамена
Дисциплины – Физика

Студента группы 417/0424С1ИБг1
1 курса специалитета

Основная образовательная программа
подготовки по направлению
10.05.02 «Информационная безопасность
телекоммуникационных систем»
(направленность «Системы подвижной цифровой
защищенной связи»)

Нижний Новгород
Издательство "Невыспавшийся Студент"
2025

Содержание

1. Ответы на вопросы

В данном разделе представлены ответы на все билеты по физике за 1 курс 2 семестра.

Предупреждение

Данные ответы были составлены не самым умным студентом из-за чего могут встречаться различного рода ошибки. Просим сообщать о их нахождении по контактным данным, указанные в конце документа.

Благодарность

Благодарность хотелось бы выразить таким людям, как:

- Osso за предоставление красиво оформленных лекций;
- Помелову Сергею Дмитриевичу;

1.1. Теорема об изменении импульса с.м.т. Условия сохранения импульса.

Запишем теорему об изменении импульса для одной материальной точки:

- $\vec{p} = m\vec{v}$ – определение импульса;
- $\dfrac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}$ – II закон Ньютона (Теорема об изменении импульса материальной точки).

Импульсом системы материальных точек называется сумма импульсов всех точек, входящих в систему.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

Импульс системы является характеристикой поступательного движения системы как целого.

$$\frac{d\,\vec{p}_1}{d\,t} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{31} + \cdots + \vec{f}_{i1} + \cdots + \vec{f}_{n1} + \vec{F}_1;$$
$$\frac{d\,\vec{p}_i}{d\,t} = \vec{f}_{1i} + \cdots + \vec{f}_{(i-1)\,1} + \vec{f}_{(i+1)\,1} + \cdots + \vec{f}_{ni} + \vec{F}_i;$$
$$\frac{d\,\vec{p}_n}{d\,t} = \vec{f}_{1n} + \cdots + \vec{f}_{in} + \cdots + \vec{f}_{(n-1)n} + \vec{F}_n;$$

Сложим попарно внутренние силы и сократим: $\vec{f}_{ik} + \vec{f}_{ki} = 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\,\vec{p}_i}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Где $\vec{F}_{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – суммарная внешняя сила. Из чего следует:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\,\vec{p}_i}{d\,t} = \frac{d}{d\,t} \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}_{\text{внеш}}}$$

Запишем в интегральной форме:

$$\boxed{\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{\text{внеш}}\, dt}$$

Замечания

1. Теорема справедлива и в НСО[a] (нужно учесть силы инерции);
2. Описывает поступательное движение в целом и не включает внутреннюю силу;

[a] Неинерциальная система отсчета (НСО) — система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной. Простейшими НСО являются системы, движущиеся ускоренно прямолинейно, и вращающиеся системы.

Условия сохранения импульса

Импульс сохраняется, если сумма внешних сил равна нулю:

$$\vec{p} = \text{const}, \quad \text{если} \quad \vec{F}_{\text{внеш}} = 0.$$

1. **Замкнутая (изолированная) система:**

$$\vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0$$

2. **Сбалансированная система:**

$$\vec{F}_i^{\text{внеш}} \neq 0, \quad \text{но} \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0;$$

3. **Сохранение проекции импульса:** Если внешняя сила вдоль оси x равна нулю, то соответствующая проекция импульса сохраняется:

$$F_x^{\text{внеш}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \text{const}.$$

Случай мгновенного взаимодействия ($\Delta t \to 0$):

Если внешняя сила конечна, а время взаимодействия стремится к нулю ($\Delta t = t - t_0 \to 0$), то изменение импульса также стремится к нулю:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{\text{внеш}}\, dt \to 0.$$

Это означает, что при очень коротких взаимодействиях (например, ударах) импульс системы можно считать приблизительно постоянным, даже если внешние силы не равны нулю.

Примеры:

- Движение ракеты в открытом космосе (замкнутая система);
- Столкновение бильярдных шаров на столе (силы реакции опоры компенсируются);
- Движение снаряда в горизонтальной плоскости (если пренебречь сопротивлением воздуха).

1.2. Теорема о движении центра масс.

Центр масс системы материальных точек называется геометрическая точка такая, что $\vec{r}$ которой равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Рассчитаем скорость центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{d\,\vec{r}_c}{d\,t} = \frac{1}{M}\frac{d}{d\,t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}}{M} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = M\vec{v}_c}$$

Центру масс можно приписать импульс всей системы:

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}_{\text{внеш}} \qquad\qquad \vec{p} = M\vec{v}_c \quad \rightarrow \quad M\vec{a}_c = \vec{F}$$

Замечания

1. Расположение центра масс не зависит от выбора точки:

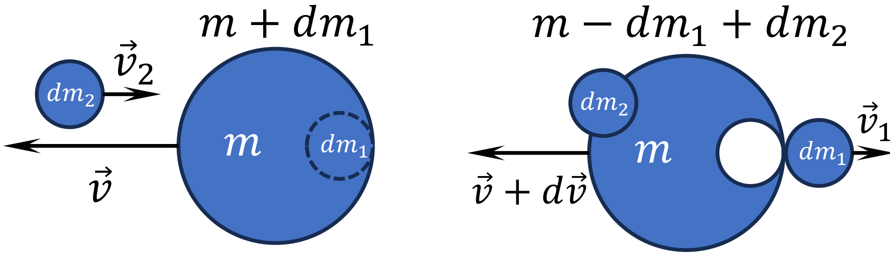
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,\prime} + \vec{\rho}$$

$$\vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,\prime} + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho} = \vec{r}_i^{\,\prime} + \vec{\rho}$$

2. Внутренние силы не влияют на движение центра масс. Они воздействуют на него, но опосредованно;
3. Теорема о движении центра масс предоставляет общее представление о системе. Для более детального анализа систему переводят в систему отсчета, связанную с центром масс, и исследуют ее более подробно.

1.3. Уравнение Мещерского. Реактивная сила.

На практике часть массы тела изменяется из-за присоединения или отсоединения вещества. Примерами такого рода движения могут быть: ракета, реактивный самолет, нагружаемая на ходу платформа, катер с водометным двигателем, метеорит.



(a) (b)

Рис. 1 Реактивное движение

Запишем уравнение импульса (см. рис. 1):

$$d\vec{p} = (m - dm_1 + dm_2)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_1\vec{v}_1 - (m\vec{v} + dm_2\vec{v}_2)$$

$$d\vec{p} = \cancel{m\vec{v}} - \cancel{dm_1\vec{v}} + dm_2\vec{v} + md\vec{v} - \underbrace{(dm_1 - dm_2)}_{0} d\vec{v} + \cancel{dm_1\vec{v}} - \cancel{m\vec{v}} - dm_2\vec{v}_2$$

Величины dm_1 и dm_2 бесконечно малые, поэтому при вычислении их разницы получим значение стремящиеся к нулю.

$$d\vec{p} = dm_2(\vec{v} - \vec{v}_2)$$

Изменение импульса системы:

$$d\vec{p} = (m - dm_1 + dm_2)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_1\vec{v}_1 - dm_2\vec{v}_2 - m\vec{v}$$

Раскрываем скобки и упрощаем:

$$d\vec{p} = \cancel{m\vec{v}} + md\vec{v} - dm_1\vec{v} \cancel{- dm_1 d\vec{v}} + dm_2\vec{v} \cancel{+ dm_2 d\vec{v}} + dm_1\vec{v}_1 - dm_2\vec{v}_2 - \cancel{m\vec{v}}$$

После отбрасывания малых второго порядка и сокращений:

$$d\vec{p} = md\vec{v} - dm_1\vec{v} + dm_2\vec{v} + dm_1\vec{v}_1 - dm_2\vec{v}_2$$

$$\boxed{d\vec{p} = md\vec{v} + dm_1(\vec{v}_1 - \vec{v}) - dm_2(\vec{v}_2 - \vec{v})}\,\Bigg|\, : dt$$

Для удобства произведем замену переменных:

- $u_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}$ – скорость отделяемого вещества, относительно тела;
- $u_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}$ – скорость присоединяемого вещества, относительно тела.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 - \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2}$$

Уравнение Мещерского

$$\boxed{m\frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = \vec{F} - \vec{u}_1\frac{d\,m_1}{d\,t} + \vec{u}_2\frac{d\,m_2}{d\,t}},$$

где $\frac{d\,m_1}{d\,t}$ – темп отсоединения вещества ($\frac{d\,m_1}{d\,t} < 0$),
$\frac{d\,m_2}{d\,t}$ – темп присоединения вещества ($\frac{d\,m_2}{d\,t} > 0$),
$\vec{u}_1$ – скорость отсоединяемого вещества относительно тела,
$\vec{u}_2$ – скорость присоединяемого вещества относительно тела,
$\vec{F}$ – сумма внешних сил, действующих на систему.

Замечание: Массу m нельзя выносить за знак производной, так как она зависит от времени: $m = m(t) = m_0 + m_2(t) - |m_1(t)|$.

Реактивная сила - это реальная сила, действующая на тело со стороны отделяемого и присоединяемого вещества:

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = \vec{u}_1\frac{d\,m_1}{d\,t} - \vec{u}_2\frac{d\,m_2}{d\,t}$$

Примеры

1. **Прямоточный воздушно-реактивный двигатель (ПВРД)**

   В прямоточном воздушно-реактивном двигателе (ПВРД) воздух сжимается за счёт скоростного напора потока на входе, из чего следует, что ему нужна окружающая среда. В камере сгорания нагревается смесь сжатого воздуха и продуктов горения топлива. В выходном сопле газы расширяются, преобразуя тепловую энергию в кинетическую, что приводит к истечению газов с высокой скоростью.

   Для ПВРД уравнение реактивной силы принимает вид:

$$\vec{F}_{\text{р}} = \vec{u}_1 \frac{d\,m_1}{d\,t} - \vec{u}_2 \frac{d\,m_2}{d\,t} = \frac{d\,m_1}{d\,t}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$$

   где $\vec{u}_1$ – скорость истечения газов, $\vec{u}_2$ – скорость поступающего воздуха.

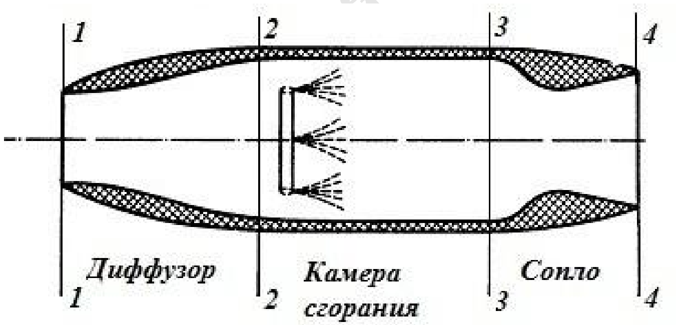


Рис. 2 Схема работы прямоточного воздушно-реактивного двигателя

2. **Твердотопливный реактивный двигатель (РДТТ)**

   В ракетном двигателе твердого топлива (РДТТ) топливо и окислитель содержатся в самом корпусе двигателя. При горении топлива образуются газы, истекающие через сопло:

$$\vec{F}_{\text{р}} = \vec{u} \frac{d\,m}{d\,t}$$

где $\dfrac{d\,m}{d\,t} < 0$ (масса ракеты уменьшается).

3. **Жидкостный ракетный двигатель (ЖРД)**

   В жидкостном ракетном двигателе отдельно хранятся топливо и окислитель, которые подаются в камеру сгорания. Преимущество – возможность регулирования тяги:

$$\vec{F}_{\text{р}} = \vec{u}\frac{d\,m}{d\,t} + p_e A_e$$

   где p_e – давление на срезе сопла, A_e – площадь выходного сечения.

4. **Турбореактивный двигатель (ТРД)**

   В турбореактивном двигателе воздух сжимается компрессором, затем в камере сгорания смешивается с топливом. Продукты сгорания расширяются в турбине и реактивном сопле:

$$\vec{F}_{\text{р}} = \vec{u}_{\text{г}}\frac{d\,m_{\text{г}}}{d\,t} - \vec{u}_{\text{в}}\frac{d\,m_{\text{в}}}{d\,t}$$

   где $\vec{u}_{\text{г}}$ – скорость истечения газов, $\vec{u}_{\text{в}}$ – скорость поступающего воздуха.

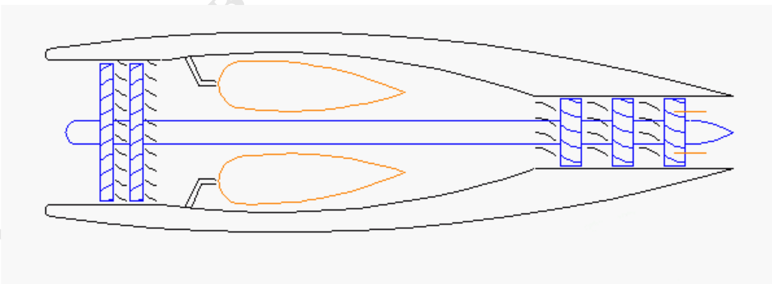


Рис. 3 Схема турбореактивного двигателя

Задача Циолковского

Определить *скорость*, которую развивает летательный аппарат под воздействием тяги ракетного двигателя, неизменной по направлению, при отсутствии всех других сил.

Введем начальные условия:

$$\vec{F} = 0 \quad \vec{v}(0) = 0 \quad m(0) = m_0 \quad \vec{u}_1 = \vec{u} = const \quad v(t) - ?$$

$$m\frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = -\frac{d\,m_1}{d\,t}\vec{u}_1$$

$$\frac{d\,m_1}{d\,t} > 0 \quad \frac{d\,m}{d\,t} < 0 \quad \frac{d\,m_1}{d\,t} = -\frac{d\,m}{d\,t}$$

Спроецируем на ось полета (x):

$$x:\, m\frac{d\,v}{d\,t} = -\left(\frac{d\,m}{d\,t}\right)(-u) = -\frac{d\,m}{d\,t}u\,\Big|\cdot dt$$

$$mdv = -udm$$

$$\int_o^v dv = -\int_{m_0}^m u\frac{dm}{m} \quad \Rightarrow \quad v = -u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Таким образом получаем **формулу Циолковского**:

$$\boxed{v = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)}$$

1.4. Теорема об изменении момента импульса с.м.т. Закон сохранения момента импульса.

Момент импульса системы материальных точек относительно начала координат O — это сумма моментов импульса всех точек системы, взятых относительно того же начала O.

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i;\, \vec{p}_i]$$

$$\frac{d\,\vec{N}_1}{d\,t} = [\vec{r}_1;\, \vec{f}_{21}] + \cdots + [\vec{r}_i;\, \vec{f}_{i1}] + \cdots + [\vec{r}_1;\, \vec{f}_{n1}] + [\vec{r}_1;\, \vec{F}_1]$$
$$\frac{d\,\vec{N}_i}{d\,t} = [\vec{r}_i;\, \vec{f}_{1i}] + \cdots + [\vec{r}_i;\, \vec{f}_{i-1\,i}] + [\vec{r}_i;\, \vec{f}_{i+1\,i}] + \cdots + [\vec{r}_i;\, \vec{f}_{ni}] + [\vec{r}_i;\, \vec{F}_i]$$
$$\frac{d\,\vec{N}_n}{d\,t} = [\vec{r}_n;\, \vec{f}_{1n}] + \cdots + [\vec{r}_n;\, \vec{f}_{in}] + \cdots + [\vec{r}_n;\, \vec{f}_{n-1\,n}] + [\vec{r}_n;\, \vec{F}_n]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\,\vec{N}_i}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i;\, \vec{F}_i] \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d\,\vec{N}_i}{d\,t} = \frac{d}{d\,t} \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i = \frac{d\,\vec{N}}{d\,t}$$

1.5. Теорема об изменении кинетической энергии с.м.т.

1.6. Потенциальная энергия с.м.т. Теорема об изменении механической энергии с.м.т. Условия сохранения механической энергии.

Теорема об изменении механической энергии с.м.т.

Запишем теорему для *материальной точки*:

$$W_{\text{п}}(\vec{r}) = A^{\text{конс}}_{\vec{r}\to\vec{r}_0} = \int_{r_0}^{r} F_r\, dr,$$

где $\vec{r}_0$ – точка, в которой потенциальная энергия принимается за 0.

Консервативная сила – это сила, которая зависит только от положения (координат) частицы и ее работа не зависит от формы траектории частицы, а зависит только от начального или конечного положения.

Физический смысл потенциальной энергии

Потенциальная энергия характеризует запас работы или возможную работу, которую совершает точка при переходе из одной точки в другую.

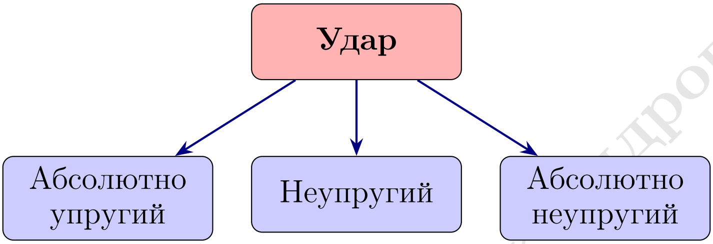
Распишем изменение кинетической энергии:

$$W_{\text{кин}} = A_{12}^{\text{всех сил}} = A_{12}^{\text{конс}} + A_{12}^{\text{неконс}} = -\Delta W_{\text{пот}} + A_{12}^{\text{неконс}}$$

$$\vec{F} = -\nabla W_{\text{пот}} \to \left(F_x = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial W_{\text{пот}}}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial W_{\text{пот}}}{\partial z} \right)$$

1.7. Абсолютно неупругое соударение двух частиц.

Соударение (удар, столкновение) — сильное кратковременное взаимодействие тел. Если нет силы реакции и внешние силы не успевают изменить импульс системы, можно применить *Закон Сохранения Импульса.*



Абсолютно неупругий удар

При абсолютно неупругом ударе тела соединяются и движутся как одно целое. Изменение кинетической энергии системы:

$$\Delta W_{\text{кин}} = \frac{m_1+m_2}{2}v^2 - \left(\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2}{2(m_1+m_2)} - \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_2v_2^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2\vec{v}_1\vec{v}_2 + m_2^2v_2^2 - m_1(m_1+m_2)v_1^2 - m_2(m_1+m_2)v_2^2}{2(m_1+m_2)} =$$

$$= -\frac{m_1m_2(\vec{v_2}-\vec{v_1})^2}{2(m_1+m_2)} = -\frac{m_{\text{пр}}v_{\text{отн}}^2}{2}$$

где $m_{\text{пр}} = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведённая масса.

Потерянная кинетическая энергия переходит в:

- Тепловую энергию

- Энергию деформации
- Энергию вращения по теореме Кенинга: $W_{\text{к}} = \underbrace{W'_{\text{к}}}_{\text{вращения}} + \frac{m_1+m_2}{2}v_c^2$

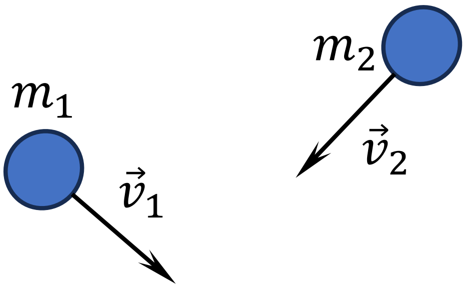


Рис. 4 Схема соударения двух тел

Абсолютно упругий удар

Для сравнения приведём основные характеристики абсолютно упругого удара:

- Сохранение кинетической энергии: $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$
- Сохранение импульса: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$
- Скорости после удара (1D случай):

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

1.8. Уравнение Бернулли

За время Δt жидкость течет из сечения: $1 \to 1'$ и $2 \to 2'$ (см. рис. 5b).

Запишем теорему об изменении механической энергии.

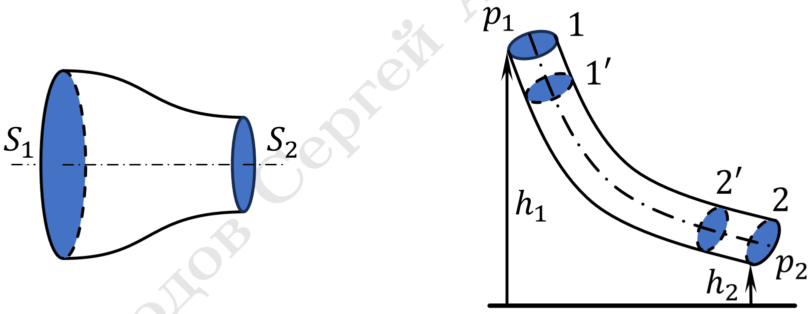
$$d\,W_{\text{механическая}} = d\,A^{\text{давления}}$$

$$\frac{d\,m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(h_2 - h_2)d\,m = v_1 p_1 d\,S_1 \cdot d\,t_1 + v_2 p_2 d\,S_2 \cdot d\,t_2$$

$$dm = \rho_1 v_1 dS_1 \cdot dt \qquad v_1 dS_1 = v_2 dS_2$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const}$$

Обобщение: Выполняется вдоль линии тока[1].



(a) (b)

Рис. 5 Пример уравнения Бернулли

Пример: (см. рис. 5a)

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 \quad (h = const)$$

Так как $S_1 > S_2$, то $v_1 < v_2$ и поэтому $p_1 > p_2$.

[1] Линия тока – линия, касательная которой в каждой точке совпадает с вектором движения

1.9. Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции, примеры его вычисления.

Твердое тело – это недеформированное тело или система материальных точек расстояние между которыми не изменяется в процессе движения.

Механика твердого тела является частным случаем механики системы материальных точек.

Признаки:

- Недеформированный;
- Сплошное (Масса размазана непрерывно);
- Переходим от материальной точки к элементу массы ($\Sigma \to \int$).

Условие равновесия твердого тела

$$\begin{cases} m\dfrac{d\,\vec{v}_0}{d\,t} = \vec{F} \\ \dfrac{d\,\vec{N}}{d\,t} = \vec{M} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{matrix} \vec{F} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \vec{v}_c(0) = 0 \\ \vec{N}(0) = 0 \end{matrix}$$

1.10. Теорема Гюйгенса-Штейнера

$$\boxed{J = J_c + ma^2}$$

Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тема, и произведению массы тела на квадрат расстояния между осями.

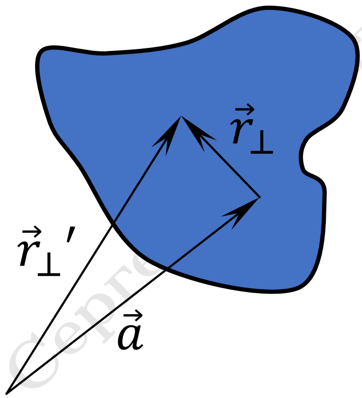


Рис. 6 Доказательство теоремы Гюгенса-Штейнера

Доказательство

$$\vec{r'_\perp} = \vec{r_\perp} + \vec{a}$$

$$J = \int_m {r'_\perp}^2\, dm = \int_m {r_\perp}^2\, dm + 2\vec{a}\underbrace{\int_m \vec{r_\perp}\, dm}_{0} + a^2 \int_m dm = \boxed{J_c + ma^2}$$

Что и требовалось доказать!

Точки O и O' являются взаимными или сопряженными в том смысле если, подвесить маятник в точке O', то центр качания будет в точке O, а период не изменится.

Доказательство

$$l'_{\text{пр}} = r'_c + \frac{J_c}{mr'_c} = \frac{J_c}{mr_c} + r_c = l_{\text{пр}} \qquad r'_c = \frac{J_c}{mr_c}$$

1.11. Кинетическая энергия и работа при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

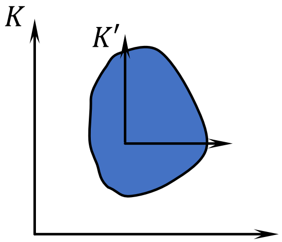
1.12. Кинематика плоского движения твердого тела. Мгновенная ось вращения

Плоское движение твердого тела – это движение, при котором каждая точка движется в плоскости и плоскости параллельной друг другу.

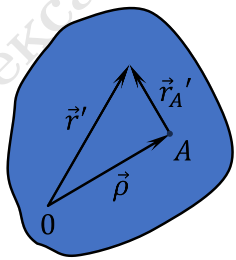
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \left| \frac{d}{d\,t} \right.$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega};\ \vec{r}']}$$

Математическое выражение плоского движения.



(a)



(b)

Рис. 7 Иллюстрации к вопросу

Возьмем разные полюса. Будет ли ω зависеть от выбора полюса?

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega};\ \vec{r}']$$
$$\vec{v} = \vec{v}_A + [\vec{\omega}_A;\ \vec{r}'_A]$$
$$\vec{v}_0 + [\vec{\omega};\ \vec{r}'] = \vec{v}_A + [\vec{\omega}_A;\ \vec{r}'_A]$$

$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + [\vec{\omega};\ \vec{\rho}]$ – т.к. точка A вращается вокруг O

$$\vec{v}_0 + [\vec{\omega};\ \vec{r}'] = \vec{v}_0 + [\vec{\omega};\ \vec{\rho}] + [\vec{\omega}_A;\ \vec{r}'_A]$$
$$[\vec{\omega};\ (\vec{r}' - \vec{\rho})] = \vec{v}_0 + [\vec{\omega};\ \vec{\rho}] + [\vec{\omega}_A;\ \vec{r}'_A]$$
$$[\vec{\omega};\ (\vec{r}' - \vec{\rho})] = [\vec{\omega}_A;\ \vec{r}'_A]$$
$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}' = \vec{\rho} + \vec{r}'_A \\ \vec{r}' - \vec{\rho} = \vec{r}'_A\end{array}\right| \Rightarrow [\vec{\omega};\ \vec{r}'_A] = [\vec{\omega}_A;\ \vec{r}'_A]$$

В общем случае $\vec{\omega} \neq \vec{\omega}_A$, но в случае плоского движения $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}$.

Вывод: Угловая скорость вращения носит абсолютный характер, то есть можно не указывать ось вращения. Часто за полюс берут центр масс.

$$\vec{v} = \vec{v} + [\vec{\omega};\, \vec{r}^*]$$

где $\vec{r}^*$ – радиус-вектор от центра масс до произвольной точки.

Мгновенная ось вращения

Мгновенная ось вращения – это ось, связанная с точкой тела, у которой скорость равна нулю ($\vec{v} = 0$) в данный момент времени. Такую точку всегда можно найти:

$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega};\, \vec{r}^*_M] = 0 \Big| \cdot \vec{\omega}$$

$$[\vec{\omega};\, \vec{v}_c] + [\vec{\omega};\, [\vec{\omega};\, \vec{r}^*_M]] = 0$$

$$[\vec{\omega};\, \vec{v}_c] + \omega\, \underbrace{(\vec{\omega};\, \vec{r}^*_M)}_{0} - \vec{r}^*_M \vec{\omega}^2 = 0$$

$$\vec{r}^*_M = \frac{[\vec{\omega};\, \vec{v}_c]}{\omega^2} \quad \rightarrow \quad \vec{r}^*_M = \frac{v_c}{\omega}$$

Пример: Цилиндр без проскальзывания движется по плоскости. (см. рис. 8) **Важно!** Понятие Мгновенной Оси Вращения нельзя использовать для поиска распределения ускорения.

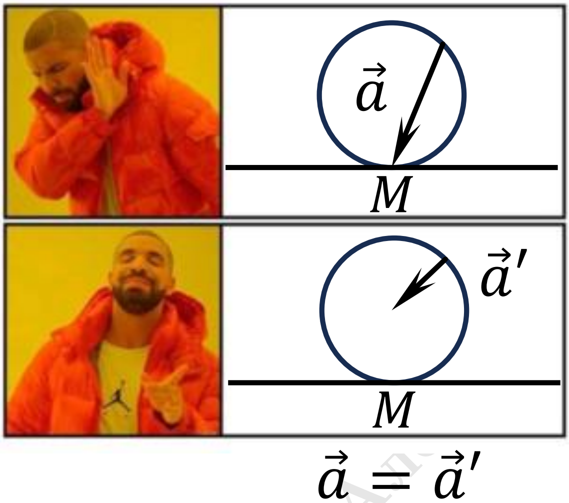


Рис. 8 Пример

1.13. Уравнения динамики плоского движения твердого тела. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении

1.14. Приближенная теория гироскопа. Прецессия гироскопа.

1.15. Распределение молекул по объёму сосуда в отсутствие внешних силовых полей. Флуктуации числа молекул

1.16. Распределение Максвелла по проекции и вектору скорости

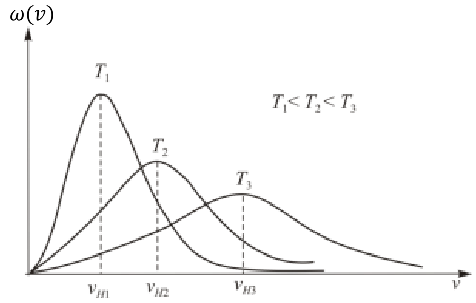


Рис. 9 Распределение Максвелла по модулю скорости

1.17. Распределение Максвелла по модулю скорости. Наиболее вероятная, средняя и средняя квадратичная скорости

Распределение Максвелла по модулю скорости

Задача: Найти плотность вероятности $\omega(v)$, которая определяет вероятность того, что скорость молекулы находится в интервале $[v;\, v+dv]$.

$$\boxed{\omega(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)} \tag{1.17.1}$$

$$\int_0^\infty \omega(v)\, dv = 1$$

Наиболее вероятный исход – это скорость, при которой функция распределения достигает максимума.

$$v_{\text{вер.}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \qquad \langle v\rangle = \int_0^\infty v\cdot\omega(v)\, dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Среднеквадратичная скорость:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \qquad \langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 \omega(v)\, dv = \frac{3kT}{m}$$

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

Среднеквадратичная скорость определяет среднюю кинетическую энергию:

$$\langle W_{\text{кин}} \rangle = \langle \frac{mv^2}{2} \rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{mv_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT \qquad \boxed{\langle W_{\text{кин}} \rangle = \frac{3}{2} kT}$$

1.18. Распределение Больцмана, барометрическая формула

1.19. Давление идеального газа. Уравнение Клапейрона-Менделеева

1.20. Внутренняя энергия идеального газа и ее связь с температурой.

1.21. Средняя длина свободного пробега молекул в газах

Средняя длина свободного пробега - это среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя соударениями. Обозначается как $\lambda\,[\text{м}]$.

Таблица 1 Эффективные диаметры атомов и молекул в газовой фазе

Элемент	**Символ**	**Эффективный диаметр,** $d\,(\mathring{A})$
Гелий	He	2,0
Неон	Ne	2,2
Аргон	Ar	3,6
Криптон	Kr	4,0
Ксенон	Xe	4,5
Радон	Rn	5,0
Водород	H_2	2,4
Азот	N_2	3,7
Кислород	O_2	3,5
Углекислый газ	CO_2	4,6

Будем считать что все молекулы кроме одной неподвижны. Среднее расстояние проходимое молекулой за время t тогда будет равно:

$$L = \langle v \rangle \cdot t \quad \text{и} \quad V = \pi d^2 L = \pi d^2 \langle v \rangle t$$

Среднее *число соударений*:

$$z = Vn = \pi d^2 n \langle v \rangle t$$

Средняя *частота соударения*:

$$\vartheta = \frac{z}{t} = \pi d^2 n \langle v \rangle$$

Средняя *длина свободного пробега*:

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{\vartheta} = \frac{1}{\pi d^2 n}$$

Если учитывать движение всех молекул, то:

$$\vartheta = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle v\rangle = \sqrt{2}\sigma n\langle v\rangle, \quad \text{где } \sigma = \pi d^2$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

При нормальных условиях концентрация равна:

$$n = N_L = 2{,}7 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$$

$$\lambda \approx 1{,}7 \times 10^{-5} \text{ см} = 170 \text{ нм}$$

$$\langle v\rangle \approx 10^{-1}\,\text{км/с}$$

$$\tau = \frac{1}{\vartheta} \approx 10^{-9} \text{ с}$$

За это время устанавливается распределение Максвелла.

Распределение Максвелла

Распределение Максвелла описывает распределение молекул газа по скоростям в условиях термодинамического равновесия. Для идеального газа вероятность того, что молекула имеет скорость в интервале от v до $v + dv$, задаётся функцией:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

где:

- m — масса молекулы
- k — постоянная Больцмана ($1,380649 \times 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$)
- T — абсолютная температура
- v — скорость молекулы

Характерные скорости:

1. **Наиболее вероятная скорость** (соответствует максимуму распределения):

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

2. **Средняя скорость**:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

3. **Среднеквадратичная скорость**:

$$v_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Соотношение между характерными скоростями:

$$v_{\text{вер}} : \langle v \rangle : v_{\text{ск}} = 1 : \sqrt{\frac{4}{\pi}} : \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1 : 1,128 : 1,225$$

За время порядка $\tau \approx 10^{-9}$ с после соударения устанавливается распределение Максвелла.

1.22. Диффузия в газах. Закон Фика, расчёт коэффициента диффузии

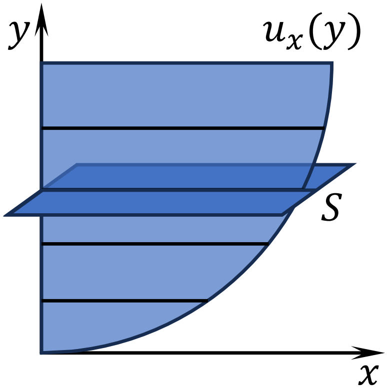


Рис. 10 Градиент внутреннего трения в газах

1.23. Внутреннее трение в газах. Формула Ньютона, расчет вязкости

Рассмотрим ламинарный[2] неоднородный поток (см. рис. 10):

Эмпирический закон Ньютона:

$$\boxed{F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{d\,u_x}{d\,y} \right| S} \tag{1.23.1}$$

где η – динамическая вязкость, $\dfrac{d\,u_x}{d\,y}$ – градиент скорости.

В формуле (1.23.1) переносится импульс:

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}_{\text{тр}} \qquad J_y^{(p_x)} = -\eta \frac{d\,u_x}{d\,y} S \qquad \vec{v} = \vec{v}_{\text{тела}} + \vec{u}$$

Доказательство

Смотреть рисунок 11:

$$(1)\ \frac{1}{6} n\langle v\rangle dt \cdot S m u_x(y-\lambda) \qquad (2) \frac{1}{6} n\langle v\rangle dt \cdot S m u_x(y+\lambda)$$

[2] Ламинарный поток – поток, в котором слои не перемешиваются.

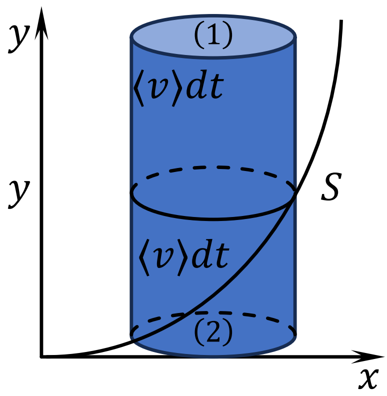


Рис. 11 Иллюстрация к доказательству

$$dp_x = \frac{1}{6}n\langle v\rangle dt \cdot Sm(u_x(y-\lambda) - u_x(y+\lambda)) = -\frac{d\,u_x}{d\,y}\cdot 2\lambda$$

$$\boxed{J_y^{(p_x)} = \frac{d\,p_x}{d\,t} = -\underbrace{\frac{1}{3}\lambda n\langle v\rangle m}_{\eta}\frac{d\,u_x}{d\,y}\cdot S = -\eta\frac{d\,u_x}{d\,y}S}$$

Вывод: Вязкость не зависит от концентрации.

С уменьшением концентрации уменьшается число переносчиков упорядоченного импульса, но при этом увеличивается длина свободного пробега и молекулы с дальних расстояний попадают в другой слой увеличивая поток переносимых молекул.

Парадокс возникает когда $n \to 0$. Работает при $\lambda \ll$, L – характерный размер системы.

1.24. Теплопроводность в газах. Закон Фурье, расчет коэффициента теплопроводности

Теплопроводность – это явление возникновения потока тепла в неравномерно нагретой среде, обусловленное передачей энергии от более нагретых участков к менее нагретым за счет теплового движения и взаимодействия частиц (атомов, молекул, электронов).

1.25. Броуновское движение. Формула Эйнштейна

Броуновское движение

Броуновское движение - это непрерывное хаотическое движение макроскопических частиц в жидкости или газе, вызванное ударами молекул окружающей среды.

Частица образует с молекулами газа единую систему **ТРРЭПСС** (термодинамически равновесную систему с равномерно распределённой энергией по степеням свободы).

Будем считать, что смещения статистически независимы: смещение от 0 до t_1 и от t_1 до t ничего не дает в корреляции.

$$\langle x^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle$$
$$\langle x^2 \rangle = f(t)$$
$$\langle x_1^2 \rangle = f(t_1) \quad \langle x_2^2 \rangle = f(t - t_1)$$
$$f(t) = f(t_1) + f(t - t_1)$$

Единственное решение, удовлетворяющее этому функциональному уравнению - линейная зависимость:

$$f(t) = \alpha t \qquad \text{где } \alpha = \text{const}$$

Таким образом получаем:

$$\langle x^2 \rangle = \alpha t \qquad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \alpha t$$

Формулы Эйнштейна

Уравнение Ланжевена для броуновской частицы:

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} + F_x(t) \quad \Big| \cdot x$$

где:

- m — масса частицы [кг]

- h — коэффициент трения [кг/с]
- $F_x(t)$ — случайная сила [Н]
- x — координата частицы [м]

$$m x\ddot{x} = -h x\dot{x} + x F_x(t)$$

Используем тождества для производных:

$$\frac{d}{dt}(x^2) = 2x\dot{x}, \quad \frac{d^2}{dt^2}(x^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x}$$

Выражаем $x\ddot{x}$:

$$x\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2 - \dot{x}^2$$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2 - m\dot{x}^2 = -\frac{h}{2}\frac{d}{dt}x^2 + xF_x(t)$$

Усредняем:

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle - \langle m\dot{x}^2\rangle = -\frac{h}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle + \langle xF_x(t)\rangle$$

Учитываем:

- $\langle m\dot{x}^2\rangle = kT$ [Дж], где k — постоянная Больцмана [Дж/К], T — температура [К]
- $\langle xF_x(t)\rangle = 0$ [Н·м]

Для стационарного режима ($t \gg m/h$):

$$-kT = -\frac{h}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle$$

Получаем:

$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = \frac{2kT}{h} \quad [\text{м}^2/\text{с}]$$

Интегрируем:

$$\langle x^2\rangle = \frac{2kT}{h}t = \frac{kT}{3\pi\eta a}t \quad [\text{м}^2]$$

где η — вязкость жидкости [Па·с], a — радиус частицы [м]

Для трехмерного случая:

$$\langle r^2\rangle = \frac{kT}{\pi\eta a}t \quad [\text{м}^2]$$

Итоговые формулы:

$$\boxed{\langle x^2\rangle = \frac{kT}{3\pi\eta a}t \quad [\text{м}^2]}, \quad \boxed{\langle r^2\rangle = \frac{kT}{\pi\eta a}t \quad [\text{м}^2]}$$

1.26. Классическая теория теплоемкости газов. Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы. Недостатки классической теории теплоемкости

1.27. Общий и нулевой принципы термодинамики. Измерение температуры. Классификация процессов

1.28. Первый принцип термодинамики. Внутренняя энергия идеального газа. Примеры применения: соотношение Майера, уравнение адиабатического процесса

1.29. Второй принцип термодинамики. Формулировки для тепловых двигателей и холодильных машин

1.30. Цикл Карно и его КПД. Первая теорема Карно

1.31. Необратимые циклы, вторая теорема Карно

1.32. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Фазовые переходы.

1.33. Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса.

1.34. Приведенное количество теплоты. Равенство Клаузиуса. Энтропия. Энтропия идеального газа.

Энтропия - это функция её состояния,

Равенство Клаузиуса. II принцип термодинамики для обратимых процессов

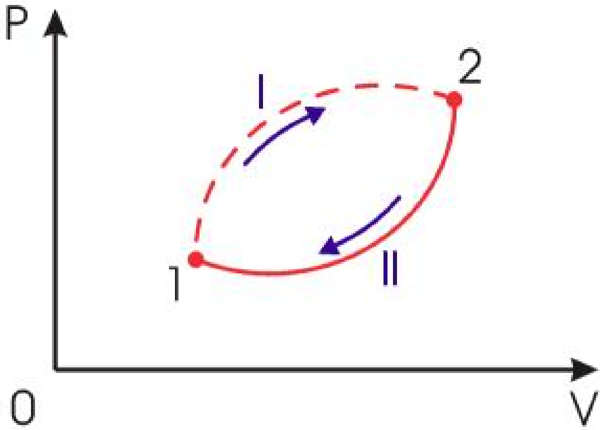


Рис. 12 График pV-диаграммы. Кривые I и II представляют разные термодинамические процессы между состояниями 1 и 2.

Из его равенства вытекает важное следствие. Приведенное количество теплоты при конечном обратимом переходе не зависит от пути, а зависит от:

$$\boxed{\oint \frac{dQ}{T} = 0} \tag{1.34.1}$$

$$\int\limits_{1\,I\,2} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{2\,II\,1} \frac{dQ}{T} = 0 \tag{1.34.2}$$

Математическая формула II принципа термодинамики для обратных процессов.

ВАЖНО!

Существует такая функция состояния системы ее энтропии S, что разность значений этой функции в состояниях 1 и 2 (S_1 и S_2) равна:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \qquad (1.34.3)$$

(для обратимых процессов)

Энтропия идеального газа

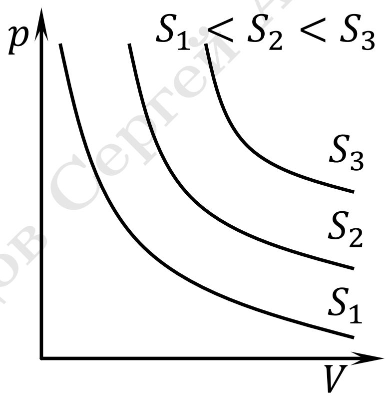


Рис. 13 Энтропия идеального газа

Запишем I принцип термодинамики и определение энтропии:

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad dQ = dU + dA' = \vartheta C_\vartheta dT + pdV = \\ = \vartheta C_\vartheta dT + \vartheta R T dV$$

$$dS = \frac{\vartheta C_\vartheta dT}{T} + \vartheta R dV$$

$$S = \vartheta C_\vartheta \ln T + \vartheta R \ln V + const$$

$$S = \vartheta C_\vartheta (\ln T + \frac{R}{C_\vartheta} \ln V) + const$$

Пусть $\frac{R}{C_\vartheta} = \gamma - 1$:

$$\boxed{S = \vartheta C_\vartheta \ln(TV^{\gamma-1}) + const} \quad \boxed{S = \vartheta C_\vartheta \ln(pV^{\gamma}) + const} \tag{1.34.4}$$

1.35. Неравенство Клаузиуса. Закон возрастания энтропии (с примерами).

Неравенство Клаузиуса

Из первой и второй теоремы Карно следует следующие неравенство:

$$\frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} \leqslant \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{1.35.1}$$

В данном случае знак в неравенстве обоснован тем, что при равенстве (=) он соответствует случаю описания *обратимой* тепловой машины, а знак меньше (<) - описанию *необратимой тепловой машины.*

Формулу (1.35.1) можно преобразовать к виду:

$$\frac{T_2}{T_1} \leqslant \frac{Q_2'}{Q_1} \tag{1.35.2}$$

В свою очередь выражение (1.35.2) дает:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2'}{T_2} \leqslant 0 \tag{1.35.3}$$

Если полученное выражение записать через количество теплоты, подводимой к рабочему телу от нагревателя и холодильника , то оно примет окончательную форму:

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leqslant 0} \tag{1.35.4}$$

При переходе к бесконечному числу тепловых резервуаров, с которыми рабочее тело тепловой машины обменивается теплотой:

$$\boxed{\oint \frac{dQ}{T} \leqslant 0} \tag{1.35.5}$$

Закон возрастания энтропии

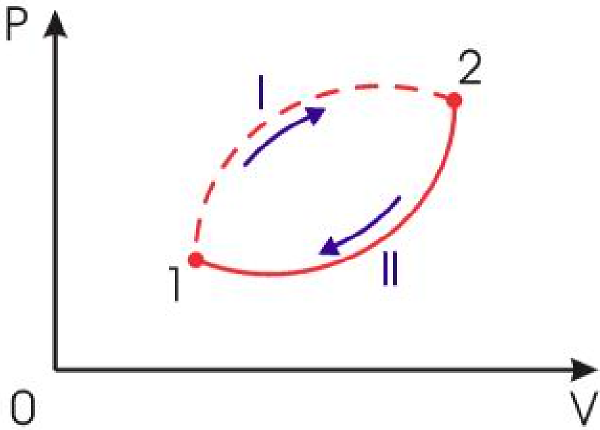


Рис. 14 График pV-диаграммы, иллюстрирующий закон возрастания энтропии. Кривые I и II представляют разные термодинамические процессы между состояниями 1 и 2.

Для любого необратимого процесса в замкнутой системе энтропия возрастает, а для обратимого процесса остается постоянной. Математически это выражается через интеграл Клаузиуса и изменение энтропии.

$$\int\limits_{1\,I\,2} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{2\,II\,1} \frac{dQ}{T} < 0 \Rightarrow S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{dQ}{T} \tag{1.35.6}$$

Здесь интегралы представляют циклический процесс, где первый интеграл - по пути I из состояния 1 в 2, а второй - по пути II из 2 в 1. Неравенство показывает, что для необратимого процесса изменение энтропии больше, чем интеграл от приведенного тепла.

Из чего следует фундаментальное неравенство:

$$\boxed{S_2 - S_1 \geqslant \int_1^2 \frac{dQ}{T}} \tag{1.35.7}$$

В этом обобщенном виде неравенство объединяет оба случая: для обратимых процессов (равенство) и необратимых (строгое неравенство). dQ - элементарное количество тепла, переданное системе при температуре T.

В тепло изолированной системе ($dU = 0$), следует запись:

$$\boxed{S_2 - S_1 \geqslant 0} \tag{1.35.8}$$

Физические смыслы энтропии

1. **Энтропия (S)** мера необратимости процессов (если $\Delta S = 0$, то процесс обратим). Чем больше $\Delta S = S_2 - S_1$, тем необратимее процесс.

   Если $S_2 > S_1$, то процесс $1 \to 2$ возможен, а $2 \to 1$ нет, так как энтрапия не может возрастать.

   Второй принцип термодинамики играет роль директора – определяет направление протекающих процессов. В замкнутой системе при достижении системой термодинамического равновесия энтропия достигает максимального значения.

2. **Энтропия (S)** – мера близости системы и состояния термодинамического равновесия.

3. **Энтропия (S)** – мера качества тепловой энергии.

   В замкнутой системе внутренняя энергия постоянна.

4. **Энтропия (S)** – мера вероятности макро состояния. Чем выше S, тем более вероятно состояние.

5. **Энтропия (S)** – мера беспорядка (хаоса) в системе. Чем более хаотично, тем более вероятно.

Список литературы

1. 3.7. Неравенство Клаузиуса | Физическая термодинамика | МГТУ им. Н.Э. Баумана. Кафедра физики. — 17.11.2005. — URL: http://fn.bmstu.ru/data-physics/library/physbook/tom2/ch3/texthtml/ch3_7.htm (дата обр. 18.06.2025).
2. 3.9. Закон возрастания энтропии | Физическая термодинамика | МГТУ им. Н.Э. Баумана. Кафедра физики. — 17.11.2005. — URL: http://fn.bmstu.ru/data-physics/library/physbook/tom2/ch3/texthtml/ch3_9.htm (дата обр. 18.06.2025).
3. 4.2. Вывод распределения Максвелла. — 19.06.2025. — URL: https://studfile.net/preview/4574654/page:15 (дата обр. 19.06.2025).
4. Aviaki. Сердце реактивного самолета: Как устроен и работает турбореактивный двигатель. — 18.06.2025. — URL: https://dzen.ru/a/Z4u6g2frv2sfr803 (дата обр. 18.06.2025).
5. П6. Прямоточный воздушно-реактивный двигатель (ПВРД). — 18.06.2025. — URL: https://studfile.net/preview/7524987/page:22 (дата обр. 18.06.2025).

Скороходов Сергей Александрович

Студент 1 курса

Email:	sergey.skor007@gmail.com
Telegram:	t.me/SerKin0
GitHub:	github.com/SerKin0
VK:	vk.com/serking2