

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет

**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И  
ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ**

**Отчет по (учебной) практике**  
Студентов группы 427(0424С1ИБг1)  
2 курса специалитета  
Скороходов С.А., Степушов Г.С.

Основная образовательная программа  
подготовки по направлению  
10.05.02 «Информационная  
безопасность  
телекоммуникационных систем»  
(направленность «Системы  
подвижной цифровой  
защищенной связи»)

|   |           |
|---|-----------|
| <b>I. Введение</b>  | <b>2</b>  |
| Цель . . . . .  | 2         |
| Задачи . . . . .  | 2         |
| Приборы и оборудование . . . . .                              | 3         |
| <b>II. Теоретическая часть</b>                                | <b>4</b>  |
| 1. Измерение разности фаз синусоидальных напряжений . . . . . | 8         |
| <b>III. Практическая часть</b>                                | <b>12</b> |
| 1. Расчет . . . . .   | 12        |
| <b>IV. Вывод</b>  | <b>15</b> |
| <b>V. Контрольные вопросы</b>                                 | <b>16</b> |
| <b>VI. Приложение</b>   | <b>19</b> |

# I. ВВЕДЕНИЕ

## Цель

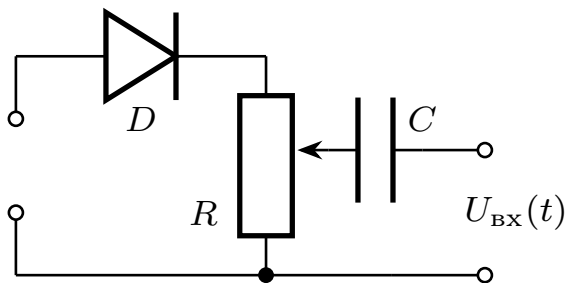
1

## Задачи

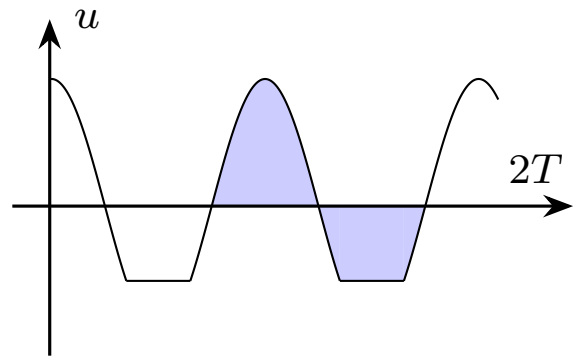
1. Для дифференцирующего четырёхполюсника с постоянной времени  $\tau_0 = 10$  мкс и интегрирующего четырёхполюсника с постоянной времени  $\tau_0 = 5$  мс снимите зависимость модуля  $K(\omega)$  и аргумента  $\varphi(\omega)$  коэффициента передачи от частоты. Входной сигнал подавайте от звукового генератора, а величину выходного сигнала фиксируйте с помощью осциллографа, используя калиброванный коэффициент усиления. Сдвиг фаз определите по форме эллипса, которая получается на экране осциллографа при подаче входного сигнала на вертикальный (Y) канал, а выходного — на горизонтальный (X) канал.

Постройте графики зависимостей  $K(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ . Попытайтесь качественно оценить, для какой области частот приближённо осуществляется дифференцирование и интегрирование.

2. При помощи схемы, изображённой на рис. 3а, получите осциллограмму напряжения, представленную на рис. 3б, среднее значение которого равно нулю (т.е. равны площади, обозначенные штриховкой).



(а) Схема выпрямителя



(б) Осциллограмма напряжений

Рис. 1

Разложите эту функцию в ряд Фурье. Нарисуйте её амплитудный спектр. Считая существенными первые семь гармоник спектра, оцените параметры цепочек, пригодных для дифференцирования и интегрирования этой функции. Зарисуйте осциллограммы выходных напряжений для выбранных цепочек. По чертежу (рис. 3б) постройте производную и интеграл функции  $U_a(t)$  и сравните их с полученными осциллограммами.

3. Подайте на вход осциллографа сигналы с генератора импульсов (меандр, треугольный и пилообразный). Зарисуйте их осциллограммы. Постройте графически производную и интеграл от этих сигналов.

4. Подключив выход генератора импульсов ко входу четырёхполосников, получите осциллограммы преобразованных сигналов. При неизменной частоте следования импульсов убедитесь, как влияет изменение постоянной времени на качество преобразования. Оцените постоянные времени, при которых, на ваш взгляд, наступает удовлетворительное дифференцирование и интегрирование. Сравните ваши оценки с теоретическими.
5. Прodelайте то же задание, изменяя частоту следования импульсов при неизменной  $\tau_0$ .  
При выполнении этих заданий зарисовывайте осциллограммы преобразования сигналов как в режиме, когда дифференцирование и интегрирование ещё не наступило, так и в режиме, когда, по-вашему, дифференцирование и интегрирование вполне удовлетворительно.
6. Выясните, какой из трёх импульсных сигналов при прочих равных условиях «легче» дифференцируется или интегрируется. Обоснуйте ваш вывод со спектральной точки зрения.

## Приборы и оборудование

1. Дифференцирующий и интегрирующий четырехполосник;
2. Функциональный генератор с модуляцией сигнала AG1012F;
3. Низкочастотный генератор GW Instek GAG-810;
4. Осциллограф цифровой GDS-71022;

## II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В радиотехнических приборах требуется осуществить преобразование исходного эксцентрического сигнала, носящее характер дифференцирования или интегрирования. Иными словами, если на вход некоего четырехполюсника должен сниматься сигнал

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \tau_0 \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt} \quad (1)$$

а с выхода интегрирующего четырехполюсника – сигнал

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^t u_{\text{ВХ}}(t) dt, \quad (2)$$

где  $\tau_0$  – константа, имеющая размерность времени, которую в дальнейшем будем называть постоянной времени.

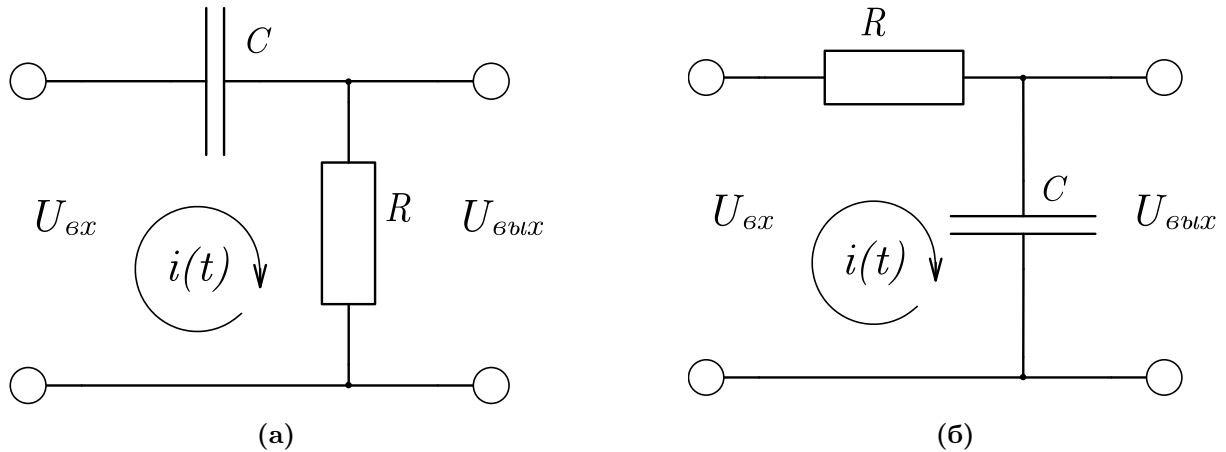


Рис. 2

Поскольку дифференцирование и интегрирование – линейные математические операции, то и на практике они осуществляются с помощью линейных четырехполюсников. Рассмотрим четырехполюсники, изображенные на рис. 2.

Подразумевая под входным сигналом электродвижущую силу, запишем уравнение второго закона Кирхгофа для этих схем:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = u_{\text{ВХ}}(t). \quad (3)$$

Домножив это выражение на  $C$  и считая, что произведение  $RC$  равно постоянной времени цепи  $\tau_0 = RC$ , будем иметь:

$$\tau_0 i(t) + \int_{-\infty}^t i(t) dt = Cu_{\text{ВХ}}(t). \quad (4)$$

Рассмотрим два крайних случая: очень малого и очень большого  $\tau_0$ . Если  $\tau_0$  очень мало, то можно пренебречь первым слагаемым в (4). Продифференцировав оставшиеся после отбрасывания этого слагаемого уравнение по  $t$ , получим:

$$i(t) \approx C \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Напряжение на резисторе  $R$ , пропорционально току, будет, в свою очередь, пропорционально производной от входного сигнала

$$u_R = Ri(t) \approx RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \tau_0 \frac{du_{\text{вх}}}{dt},$$

Таким образом, схема, приведенная на рис. 2а, у которой  $u_R = u_{\text{вых}}(t)$ , может осуществлять приближенное дифференцирование входного сигнала.

При очень больших  $\tau_0$  можно отбросить второе слагаемое в (4). Тогда ток будет пропорционален входному сигналу

$$i(t) \approx \frac{C}{\tau_0} u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{R} u_{\text{вх}}(t),$$

а напряжение на конденсаторе

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \approx \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(t) dt = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(t) dt$$

пропорционально интегралу от входного сигнала. Такое преобразование может приближенно осуществлять четырехполюсник, приведенный на рис. 2б.

Уточним теперь приведенные выше понятия: малое и большое  $\tau_0$ . Проще всего это сделать на спектральном языке.

Известно, что практически все радиосигналы могут быть представлены в виде суперпозиции гармонических составляющих, в частности, для периодических сигналов – в виде ряда Фурье:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \theta_n).$$

Этот же ряд, если воспользоваться формулой Эйлера, может быть записан в комплексном виде

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\Omega t},$$

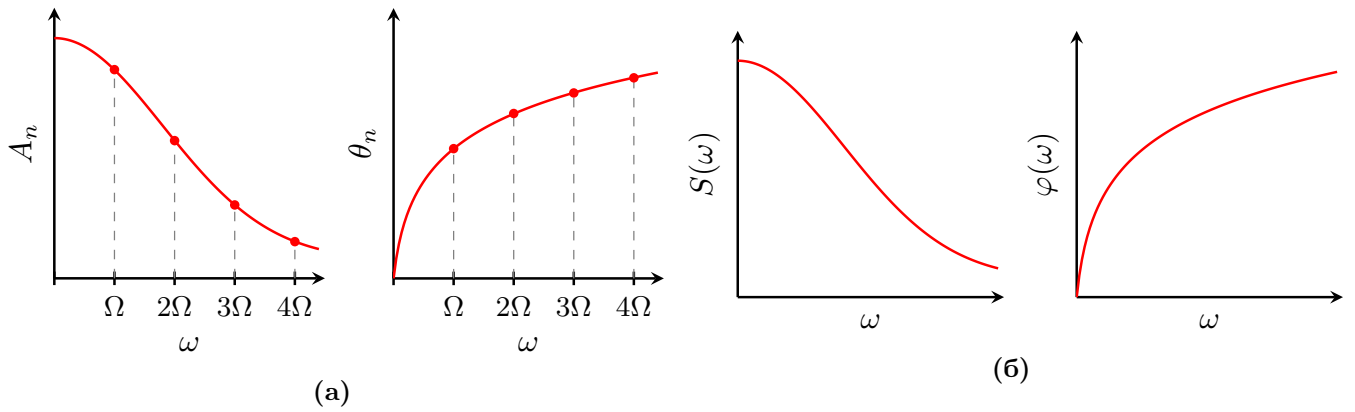


Рис. 3

где комплексная амплитуда  $n$ -ой гармоники определяется интегралом.

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

Здесь  $T$  – период функции  $u(t)$ , связанный с угловой частотой соотношением  $T = 2\pi/\Omega$ .

Для непериодических сигналов аналогичные соотношения имеют вид:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \dot{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

Множитель  $S(j\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$  называют *спектральной плотностью*.

Связь между коэффициентами Фурье  $\dot{A}_n$  и спектральной плотностью  $S(j\omega)$  иллюстрируется рисунками рис. 3а и 3б, на первом из которых изображены амплитудная и фазовая спектральные диаграммы произвольной периодической последовательности импульсов, а на втором – спектр одиночного импульса из этой последовательности. Форма огибающей на рис. 3а в некотором масштабе повторяет вид функции на рис. 3б.

Для четырехполюсников вводится также понятие коэффициента передачи – комплексной функции вида

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где  $\dot{U}_{\text{ВХ}}$  и  $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$  – комплексные амплитуды входного и выходного напряжения. (Напомним, что для сигнала вида  $U(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  комплексная амплитуда записывается в виде  $\dot{U} = U_0 e^{j\varphi}$ ). Модуль  $K(\omega)$  называют амплитудной характеристикой четырехполюсника, а аргумент  $\varphi(\omega)$  – фазовой характеристикой.

Каждая гармоника входного сигнала даст на выходе линейного четырехполюсника гармонический отклик той же частоты. Для его нахождения нужно эту гармонику умножить на коэффициент передачи четырехполюсника. Просуммировав

отклики по всем гармоникам, можно определить выходной сигнал. В частности, для непериодических сигналов выражение для выходного сигнала запишется в интегральной форме:

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6)$$

где  $S(j\omega)$  — спектральная плотность входного сигнала.

Т.к. при дифференцированном напряжении  $U_{\text{ВЫХ}} = \tau_0 \frac{dU_{\text{ВХ}}}{dt}$ , то используя (5) и (6), будем иметь:

$$\begin{aligned} U_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \tau_0 \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \tau_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Из последнего равенства видно, что коэффициент передачи дифференцирующего четырехполюсника

$$\dot{K}(j\omega) = \tau_0 j\omega = \tau_0 \omega e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (7)$$

Например, при дифференцировании гармонического напряжения типа  $e^{j\omega t}$  выражение для выходного сигнала имеет вид:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \tau_0 \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = \tau_0 j\omega e^{j\omega t} = \tau_0 \omega e^{j\pi/2} e^{j\omega t}.$$

Иными словами, для получения требуемого выходного сигнала каждая гармоника входного сигнала умножается на коэффициент  $\tau_0 \omega$  и сдвигается по фазе на  $\pi/2$ .

Аналогичным образом для интегрирующей цепи можно получить

$$K(j\omega) = \frac{1}{\tau_0 j\omega} = \frac{1}{\tau_0 \omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (8)$$

Показанные на рис. 2а, 2б четырехполюсники имеют коэффициенты передачи

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = RC \frac{j\omega}{1 + RCj\omega} = \frac{\tau_0 j\omega}{1 + \tau_0 j\omega}. \quad (9)$$

и

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + \tau_0 j\omega}. \quad (10)$$

соответственно.

Из сравнения выражений (7) и (9) следует, что для удовлетворительного дифференцирования необходимо выполнение условия:

$$\tau_0 \omega \ll 1, \quad (11)$$



а сравнивая выражения (8) и (10), приходим к выводу, что удовлетворительное интегрирование возможно, если

$$\tau_0 \omega \gg 1. \quad (12)$$

Причем, эти условия должны выполняться для всех частот в существенной части спектра входного сигнала (говоря о существенной части спектра входного сигнала, имеется в виду, что теоретически спектр любого сигнала бесконечен).

Из этих неравенств вытекает также следующее принципиальное положение: чем точнее дифференцирование или интегрирование, тем меньше (по модулю) коэффициент передачи четырехполюсника, осуществляющего это преобразование. В пределе при идеальном преобразовании  $K(\omega) \rightarrow 0$ .

Собственно говоря, все предыдущие рассуждения о степени точности интегрирования или дифференцирования носили чисто качественный характер. Можно было бы, конечно, попытаться ввести какие-либо количественные критерии, но вряд ли стоит это делать. На практике все выглядит достаточно просто: есть конкретная задача о конкретном спектре, которую нужно продифференцировать или проинтегрировать с заданной степенью точности. Исходя из этого и выбирается параметр соответствующего четырехполюсника.

В заключение отметим, что рассмотренные выше модели дифференцирующих и интегрирующих цепей практически являются элементами более сложных электронных устройств. Как правило, для этих цепей применяются операционные усилители с обратной связью (в качестве элементов обратной связи и используются  $R$ ,  $C$ —цепочки). В этом случае удастся сочетать приемлемый коэффициент передачи с достаточно высоким качеством преобразования.

## 1. Измерение разности фаз синусоидальных напряжений

Фазовые соотношения между напряжениями на отдельных элементах цепи можно измерить при помощи катодного осциллографа.

Рассмотрим подробно двухполюсник, изображенный на рис. 4.

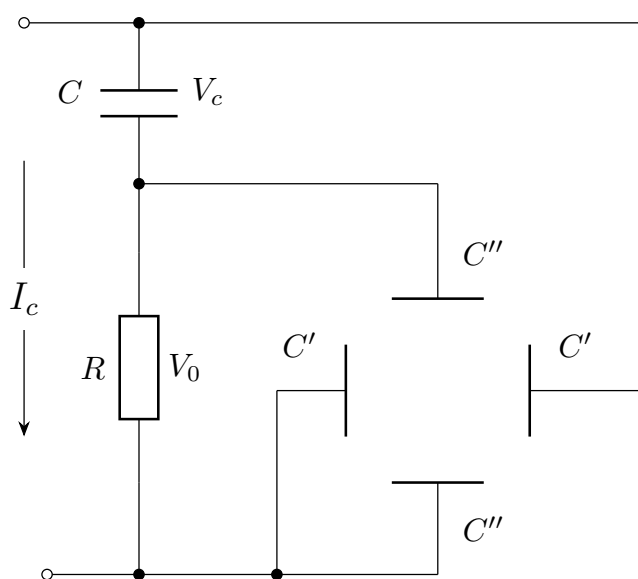
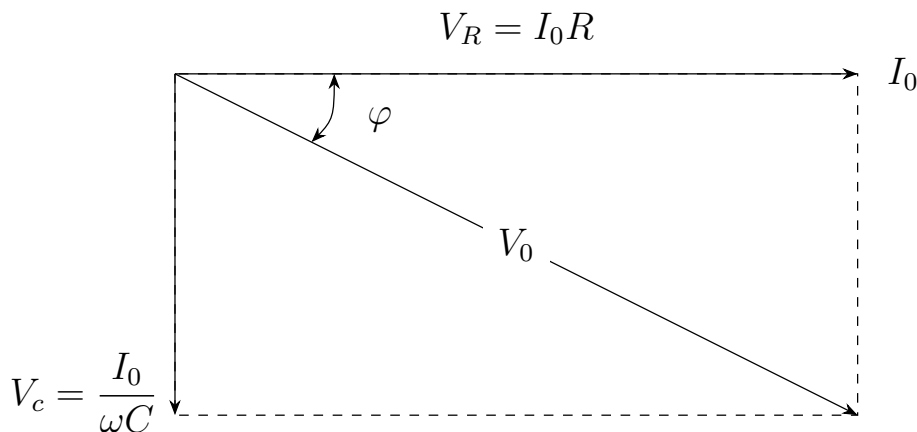


Рис. 4. Схема

У нему подведено переменное синусоидальное напряжение

$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

Векторная диаграмма напряжений на отдельных элементах двухполюсника приведена на рис. 5.



**Рис. 5.** Векторная диаграмма напряжений

Для определения величины  $\varphi$  следует напряжение со всего двухполюсника подать на горизонтально отклонение пластины  $C'C'$  катодного осциллографа, а напряжение с резистора  $U_a$  на вертикальное отклонение пластины  $C''C''$ . На экране осциллографа получается неподвижный эллипс.

Построение эллипса, который получается при сложении двух взаимно перпендикулярных синхронных синусоидальных колебаний

$$x = OG \cos \omega t \quad \text{и} \quad y = OF \cos \omega t,$$

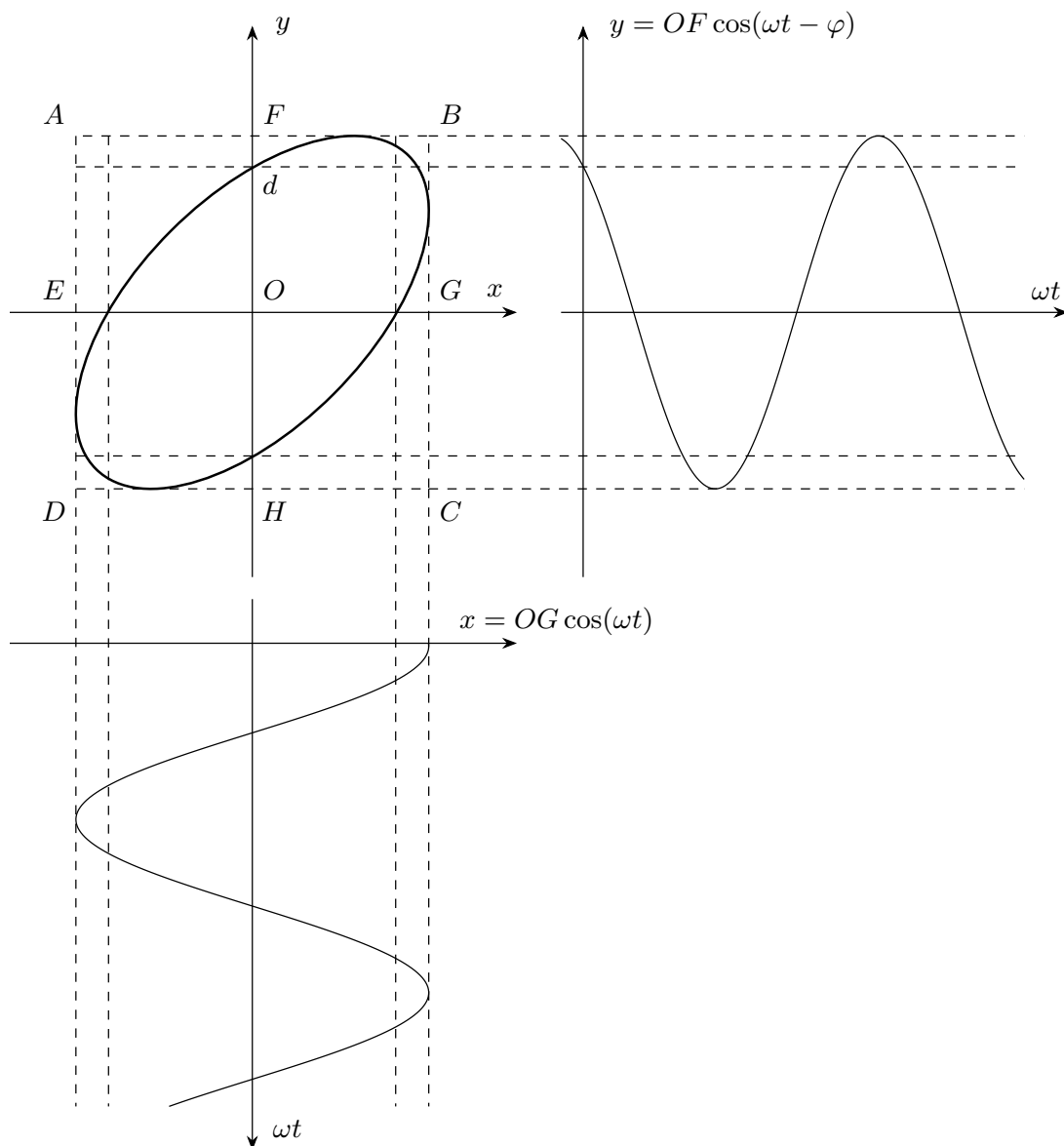
наглядно показано на рис. 6.

Форма эллипса зависит от величины сдвига фаз и от амплитуд подведённых к пластинам напряжений. При сдвиге фаз, равном нулю или  $180^\circ$ , эллипс вырождается в наклонную прямую; при сдвиге фаз  $90^\circ$  оси эллипса совпадают с осями  $x$  и  $y$ . Эллипс на экране осциллографа может быть вписан в прямоугольник  $ABCD$ , стороны которого будут пропорциональны амплитудам подведённых к пластинам напряжений. Масштаб в этом случае определяется чувствительностью вертикального и горизонтального отклонения электронного пучка к подведённому напряжению и измеряется в мм/В. Обычно чувствительность осциллографа по вертикальному и горизонтальному отклонениям различна, т.к. уровни усиления соответствующих напряжений различны, и пластины находятся на разных расстояниях от экрана.

На векторной диаграмме рис. 5 видно, что:

$$\frac{V_R}{V_0} = \cos \varphi,$$

величины амплитуд  $V_c$  и  $V$  пропорциональны сторонам прямоугольника  $ABCD$ .



**Рис. 6.** Построение эллипса

Если обозначить чувствительность осциллографа по горизонтальному отклонению через  $m_{\Gamma}$ , а по вертикальному – через  $m_{\text{в}}$ , тогда:

$$AB = m_{\Gamma} \cdot 2V_0$$

$$BC = m_{\text{в}} \cdot 2V_a$$

$$\cos \varphi = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{m_{\Gamma}}{m_{\text{в}}}$$

Определение вертикальной или горизонтальной чувствительности производится путём подачи на соответствующую пару отклоняющих пластин через усилители какого-либо известного напряжения и измерения при помощи миллиметровой бумаги или масштабной сетки величины отклонения.

Описанный способ измерения сдвига фаз  $\varphi$  годится только в тех случаях, когда сдвиг фаз определяется отношением амплитуд подведенных к пластинам осциллографа напряжений.

В других случаях должен быть применен более точный способ. Основанный

на зависимости формы эллипса от сдвига фаз. Отрезок  $Od$  на рис. 6 – это вертикальное смещение в момент  $t_0$ , когда

$$x = OG \cos \omega t_0 = 0,$$

т.е.

$$Od = OF \cos(\omega t - \varphi) = OF \sin \varphi$$

следовательно

$$\sin \varphi = \frac{Od}{OF}$$

### III. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

#### 1. Расчет

для дифференцирования:

$$\tau_0 = 10 \text{ мкс} = 10^{-5} \text{ с} \quad R = 10 \text{ кОм} = 10^4 \text{ Ом}$$

$$C = \frac{\tau_0}{R} = \frac{10^{-5} \text{ с}}{10^4 \text{ Ом}} = 10^3 \text{ пФ} = 1 \text{ 000 пФ} \quad (13)$$

Для интегрирования:

$$\tau_0 = 5 \text{ мс} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с} \quad R = 500 \text{ кОм} = 5 \cdot 10^5 \text{ Ом}$$

$$C = \frac{\tau_0}{R} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ с}}{5 \cdot 10^5 \text{ Ом}} = 10^4 \text{ пФ} = 10 \text{ 000 пФ} \quad (14)$$

Таблица 1. Дифференцирование

| $\nu$ , Гц | $2A_x$ , В | $2A_y$ , В | $2U_y _{U_x=0}$ , В | $\sin \approx \frac{2U_y}{2A_y}$ | $K = \frac{2A_x}{2A_y}$ |
|------------|------------|------------|---------------------|----------------------------------|-------------------------|
| 100        | 15,70      | 0,10       | 0,10                | 1,000                            | 157,00                  |
| 500        | 19,60      | 0,58       | 0,58                | 1,000                            | 33,79                   |
| 700        | 14,20      | 0,60       | 0,60                | 1,000                            | 23,67                   |
| 800        | 14,00      | 0,68       | 0,68                | 1,000                            | 20,59                   |
| 900        | 11,00      | 0,61       | 0,61                | 1,000                            | 18,03                   |
| 1000       | 10,40      | 0,61       | 0,61                | 1,000                            | 17,05                   |
| 1500       | 7,20       | 0,64       | 0,64                | 1,000                            | 11,25                   |
| 2000       | 5,40       | 0,62       | 0,62                | 1,000                            | 8,71                    |
| 2500       | 8,20       | 1,22       | 1,19                | 0,975                            | 6,72                    |
| 3000       | 17,60      | 3,04       | 3,04                | 1,000                            | 5,79                    |
| 3500       | 30,00      | 6,04       | 5,84                | 0,967                            | 4,97                    |
| 4000       | 31,80      | 7,36       | 7,12                | 0,967                            | 4,32                    |
| 5000       | 31,80      | 9,00       | 8,40                | 0,933                            | 3,53                    |
| 6000       | 31,80      | 10,60      | 9,60                | 0,906                            | 3,00                    |
| 7000       | 31,80      | 12,20      | 10,80               | 0,885                            | 2,61                    |
| 8000       | 31,40      | 13,60      | 11,90               | 0,875                            | 2,31                    |
| 9000       | 31,40      | 14,60      | 12,20               | 0,836                            | 2,15                    |
| 10000      | 31,40      | 15,40      | 13,00               | 0,844                            | 2,04                    |
| 12000      | 31,40      | 17,20      | 13,80               | 0,802                            | 1,83                    |
| 14000      | 33,60      | 20,20      | 14,80               | 0,733                            | 1,66                    |
| 16000      | 27,40      | 17,60      | 12,20               | 0,693                            | 1,56                    |
| 18000      | 32,00      | 21,60      | 14,20               | 0,657                            | 1,48                    |
| 20000      | 31,00      | 22,00      | 13,40               | 0,609                            | 1,41                    |
| 30000      | 31,00      | 24,60      | 11,20               | 0,455                            | 1,26                    |
| 50000      | 30,40      | 26,20      | 7,80                | 0,298                            | 1,16                    |
| 100000     | 30,00      | 26,60      | 4,00                | 0,150                            | 1,13                    |

Таблица 2. Интегрирование

| $\nu, \Gamma_{\text{ц}}$ | $2A_x, \text{ В}$ | $2A_y, \text{ В}$ | $2U_y _{U_x=0}, \text{ В}$ | $\sin \approx \frac{2U_y}{2A_y}$ | $K = \frac{2A_x}{2A_y}$ |
|--------------------------|-------------------|-------------------|----------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| 20                       | 19,8              | 11,80             | 2,8                        | 0,237                            | 0,60                    |
| 40                       | 20,0              | 10,00             | 5,6                        | 0,560                            | 0,50                    |
| 60                       | 19,6              | 8,20              | 6                          | 0,732                            | 0,42                    |
| 80                       | 19,6              | 6,88              | 5,84                       | 0,849                            | 0,35                    |
| 100                      | 19,8              | 5,84              | 5,28                       | 0,904                            | 0,29                    |
| 120                      | 20,2              | 4,96              | 4,48                       | 0,903                            | 0,25                    |
| 150                      | 20,2              | 4,00              | 3,68                       | 0,920                            | 0,20                    |
| 200                      | 20,2              | 3,04              | 2,88                       | 0,947                            | 0,15                    |
| 300                      | 20,2              | 2,08              | 1,92                       | 0,923                            | 0,10                    |
| 400                      | 20,2              | 1,54              | 1,5                        | 0,974                            | 0,08                    |
| 500                      | 20,2              | 1,26              | 1,22                       | 0,968                            | 0,06                    |
| 1000                     | 20,2              | 0,62              | 0,61                       | 0,984                            | 0,03                    |
| 2000                     | 20,2              | 0,31              | 0,31                       | 1,000                            | 0,02                    |
| 3000                     | 20,2              | 0,21              | 0,21                       | 1,000                            | 0,01                    |

## IV. ВЫВОД

Вывод к лабораторной работе



## V. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

### 1. Выведите формулу (8)

Для идеального интегрирующего четырёхполюсника связь выходного и входного сигналов:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(t) dt.$$

Представим входной сигнал через спектральную плотность  $S(j\omega)$ :

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Тогда выходной сигнал:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Сравнивая с общим выражением для линейного четырёхполюсника:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

получаем коэффициент передачи интегрирующей цепи:

$$K(j\omega) = \frac{1}{\tau_0 j\omega} = \frac{1}{\tau_0 \omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Это и есть формула (8).

### 2. Почему нельзя неограниченно увеличивать постоянную времени интегрирующего четырёхполюсника и неограниченно уменьшать – дифференцирующего?

Из условий удовлетворительного интегрирования  $\tau_0 \omega \gg 1$  и дифференцирования  $\tau_0 \omega \ll 1$  следует, что: - Для интегрирующей цепи увеличение  $\tau_0$  улучшает выполнение условия  $\tau_0 \omega \gg 1$  на низких частотах, но при слишком больших  $\tau_0$  коэффициент передачи  $K(\omega) = \frac{1}{\tau_0 \omega}$  становится очень малым, сигнал на выходе затухает, и практическое выделение интеграла затрудняется из-за шумов и ограничений усилителей. - Для дифференцирующей цепи уменьшение  $\tau_0$  улучшает выполнение условия  $\tau_0 \omega \ll 1$  на высоких частотах, но при слишком малых  $\tau_0$  коэффициент передачи  $K(\omega) = \tau_0 \omega$  также становится малым, выходной сигнал ослабляется, усиливаются высокочастотные шумы, а паразитные ёмкости и индуктивности начинают влиять на работу цепи.

Таким образом, неограниченное изменение  $\tau_0$  приводит к неприемлемому ослаблению полезного сигнала и ухудшению соотношения сигнал/шум.

### 3. Чем отличаются спектры периодических и непериодических сигналов?

Спектр периодического сигнала дискретный и представляется рядом Фурье:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \theta_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t},$$

где комплексная амплитуда  $\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\Omega t} dt$ ,  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Спектр непериодического сигнала непрерывный и описывается преобразованием Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Здесь  $S(j\omega)$  — спектральная плотность, а график её модуля  $|S(j\omega)|$  образует сплошную кривую (см. рис. 3б), в отличие от дискретных линий на рис. 3а.

4. Каким условиям должны удовлетворять приборы, подключаемые ко входу и выходу исследуемых четырехполюсников?

Приборы должны иметь достаточно высокое входное сопротивление и малое выходное сопротивление, чтобы минимизировать влияние на работу четырёхполюсника. Для осциллографа это означает, что его входное сопротивление  $R_{\text{вх осц}}$  должно быть много больше сопротивления  $R$  цепи ( $R_{\text{вх осц}} \gg R$ ), чтобы не шунтировать цепь. Генератор сигналов должен обеспечивать достаточно низкое выходное сопротивление ( $R_{\text{вых ген}} \ll R$ ), чтобы напряжение на входе четырёхполюсника не зависело от нагрузки. Также приборы должны работать в полосе частот, соответствующей спектру исследуемого сигнала, чтобы не исказить его.

5. Поясните принцип работы схемы, изображенной на рис. 1.

На рис. 1 изображён двухполупериодный выпрямитель. Переменное напряжение  $u_{\text{вх}}$  подаётся на трансформатор, затем на диодный мост, который пропускает ток только в одном направлении в нагрузку  $R_{\text{н}}$ . Конденсатор  $C$  служит для сглаживания пульсаций. Выходное напряжение  $u_{\text{вых}}$  близко к постоянному с небольшой остаточной пульсацией. Осциллограмма показывает, что отрицательные полуволны входного напряжения преобразуются в положительные на выходе.

6. Изобразите векторные диаграммы напряжения для четырехполюсников, представленных на рис. 2. Проследите, как изменяются соотношения между  $U_{\text{вых}}$  и  $U_{\text{вх}}$  при изменении  $\tau_0$ .

Для четырёхполюсника на рис. 2а (дифференцирующего) векторная диаграмма: вектор напряжения на резисторе  $U_R$  опережает ток  $I$  на  $0^\circ$ , напряжение на конденсаторе  $U_C$  отстает от тока на  $90^\circ$ , входное напряжение  $U_{\text{вх}} = U_R + U_C$ . При малых  $\tau_0$  ( $\tau_0\omega \ll 1$ )  $U_C \gg U_R$ , поэтому  $U_{\text{вых}} = U_R \approx \tau_0 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}$  мало по сравнению с  $U_{\text{вх}}$ . При увеличении  $\tau_0$  отношение  $U_R/U_{\text{вх}}$  растёт, но условие дифференцирования ухудшается.

Для четырёхполюсника на рис. 2б (интегрирующего) векторная диаграмма:

$U_{\text{вх}} = U_R + U_C$ , выходное напряжение  $U_{\text{вых}} = U_C$ . При больших  $\tau_0$  ( $\tau_0\omega \gg 1$ )  $U_R \gg U_C$ , поэтому  $U_{\text{вых}} = U_C \approx \frac{1}{\tau_0} \int U_{\text{вх}} dt$  мало. При уменьшении  $\tau_0$  отношение  $U_C/U_{\text{вх}}$  увеличивается, но условие интегрирования ухудшается.

## VI. ПРИЛОЖЕНИЕ