МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Отчет по (учебной) практике
Студентов группы 427(0424С1ИБг1)
2 курса специалитета
Скороходов С.А., Степушов Г.С.

Основная образовательная программа
подготовки по направлению
10.05.02 «Информационная
безопасность
телекоммуникационных систем»
(направленность «Системы
подвижной цифровой
защищенной связи»)

Нижний Новгород 2025

Содержание

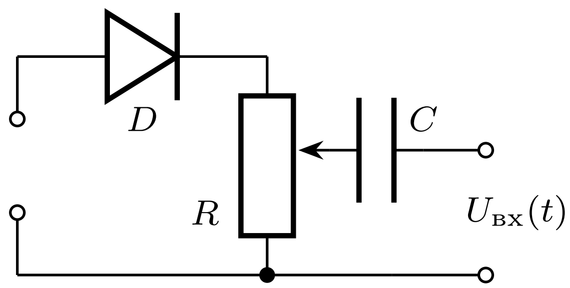
I. ВВЕДЕНИЕ

Цель

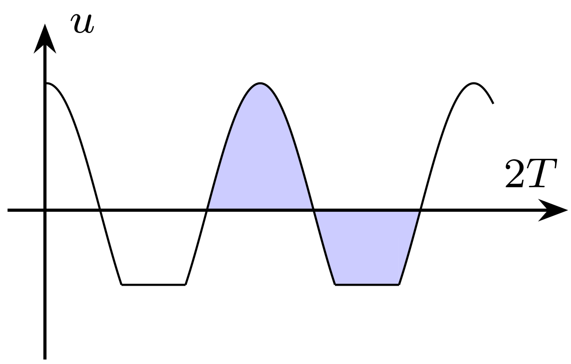
Исследовать устройство и принцип работы интегрирующих и дифференцирующих цепочек. Научиться работать с ними, провести операции с сигналами.

Задачи

1. Для дифференцирующего четырёхполюсника с постоянной времени $\tau_0 = 10$ мкс и интегрирующего четырёхполюсника с постоянной времени $\tau_0 = 5$ мс снимите зависимость модуля $K(\omega)$ и аргумента $\varphi(\omega)$ коэффициента передачи от частоты. Входной сигнал подавайте от звукового генератора, а величину выходного сигнала фиксируйте с помощью осциллографа, используя калиброванный коэффициент усиления. Сдвиг фаз определите по форме эллипса, которая получается на экране осциллографа при подаче входного сигнала на вертикальный (Y) канал, а выходного — на горизонтальный (X) канал.
   Постройте графики зависимостей $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Попытайтесь качественно оценить, для какой области частот приближённо осуществляется дифференцирование и интегрирование.
2. При помощи схемы, изображённой на рис. 3а, получите осциллограмму напряжения, представленную на рис. 3б, среднее значение которого равно нулю (т.е. равны площади, обозначенные штриховкой).



(а) Схема выпрямителя



(б) Осциллограмма напряжений

Рис. 1

   Разложите эту функцию в ряд Фурье. Нарисуйте её амплитудный спектр. Считая существенными первые семь гармоник спектра, оцените параметры цепочек, пригодных для дифференцирования и интегрирования этой функции. Зарисуйте осциллограммы выходных напряжений для выбранных цепочек. По чертежу (рис. 3б) постройте производную и интеграл функции $U_a(t)$ и сравните их с полученными осциллограммами.
3. Подайте на вход осциллографа сигналы с генератора импульсов (меандр, треугольный и пилообразный). Зарисуйте их осциллограммы. Постройте графически производную и интеграл от этих сигналов.

4. Подключив выход генератора импульсов ко входу четырёхполюсников, получите осциллограммы преобразованных сигналов. При неизменной частоте следования импульсов убедитесь, как влияет изменение постоянной времени на качество преобразования. Оцените постоянные времени, при которых, на ваш взгляд, наступает удовлетворительное дифференцирование и интегрирование. Сравните ваши оценки с теоретическими.
5. Проделайте то же задание, изменяя частоту следования импульсов при неизменной τ_0.

   При выполнении этих заданий зарисовывайте осциллограммы преобразования сигналов как в режиме, когда дифференцирование и интегрирование ещё не наступило, так и в режиме, когда, по-вашему, дифференцирование и интегрирование вполне удовлетворительно.
6. Выясните, какой из трёх импульсных сигналов при прочих равных условиях «легче» дифференцируется или интегрируется. Обоснуйте ваш вывод со спектральной точки зрения.

Приборы и оборудование

1. Дифференцирующий и интегрирующий четырехполюсник;
2. Функциональный генератор с модуляцией сигнала `AG1012F`;
3. Низкочастотный генератор `GW Instek GAG-810`;
4. Осциллограф цифровой `GDS-71022`;

II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

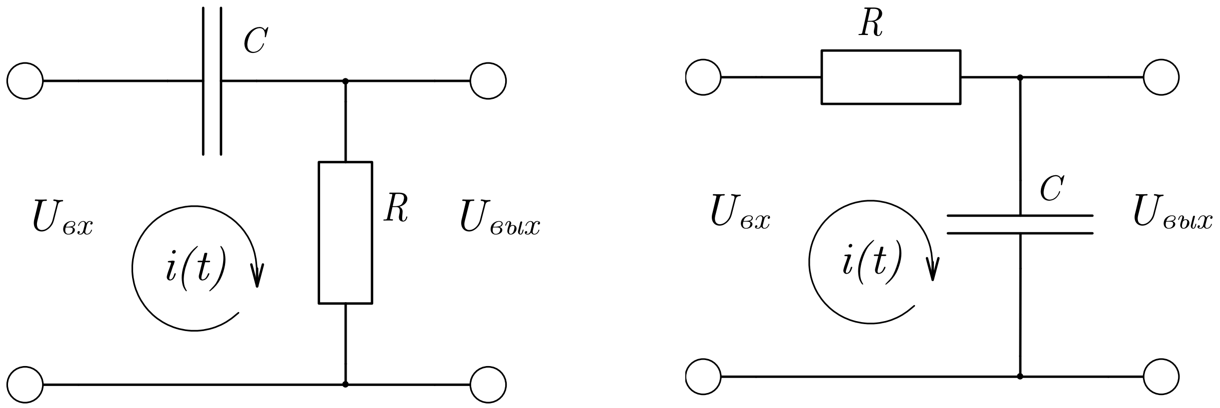
В радиотехнических приборах требуется осуществить преобразование исходного эксцентрического сигнала, носящее характер дифференцирования или интегрирования. Иными словами, если на взод некоего четырехполюсника должен сниматься сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = \tau_0 \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt} \tag{1}$$

а с выхода интегрирующего четырехполюсника – сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int\limits_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(t)\, dt, \tag{2}$$

где τ_0 – константа, имеющая размерность времени, которую в дальнейшем будем называть постоянной времени.



(а) **(б)**

Рис. 2

Поскольку дифференцирование и интегрирование – линейные математические операции, то и на практике они осуществляются с помощью линейных четырехполюсников. Рассмотрим четырехполюсники, изображенные на рис. 2.

Подразумевая под входным сигналом электродвижущую силу, запишем уравнение второго закона Кирхгофа для этих схем:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int\limits_{-\infty}^{t} i(t)\, dt = u_{\text{вх}}(t). \tag{3}$$

Домножив это выржание на C и считая, что произведение RC равно постоянной времени цепи $\tau_0 = RC$, будем иметь:

$$\tau_0 i(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} i(t)\, dt = C u_{\text{вх}}(t). \tag{4}$$

Рассмотрим два крайних случая: очень малого и очень большого τ_0. Если τ_0 очень мало, то можно пренебречь первым слагаемым в (4). Продифференцировав оставшиеся после отбрасывания этого слагаемого уравнение по t, получим:

$$i(t) \approx C\frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Напряжение на резисторе R, пропорционально току, будет, в свою очередь, пропорционально производной от входного сигнала

$$u_R = Ri(t) \approx RC\frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \tau_0\frac{du_{\text{вх}}}{dt},$$

Таким образом, схема, приведенная на рис. 2а, у которой $u_R = u_{\text{вых}}(t)$, может осуществлять приближенное дифференцирование входного сигнала.

При очень больших τ_0 можно отбросить второе слагаемое в (4). Тогда ток будет пропорционален входному сигналу

$$i(t) \approx \frac{C}{\tau_0}u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{R}u_{\text{вх}}(t),$$

а напряжение на конденсаторе

$$u_c = \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \approx \frac{1}{RC}\int\limits_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(t)\,dt = \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(t)\,dt$$

пропорционально интегралу от входного сигнала. Такое преобразование может приближенно осуществлять четырехполюсник, приведенный на рис. 2б.

Уточним теперь приведенные выше понятия: малое и большое τ_0.Проще всего это сделать на спектральном языке.

Известно, что практически все радиосигналы могут быть представлены в виде суперпозиции гармонических составляющих, в частности, для периодических сигналов – в виде ряда Фурье:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \theta_n).$$

Этот же ряд , если воспользоваться формулой Эйлера, может быть записан в комплексном виде

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega i},$$

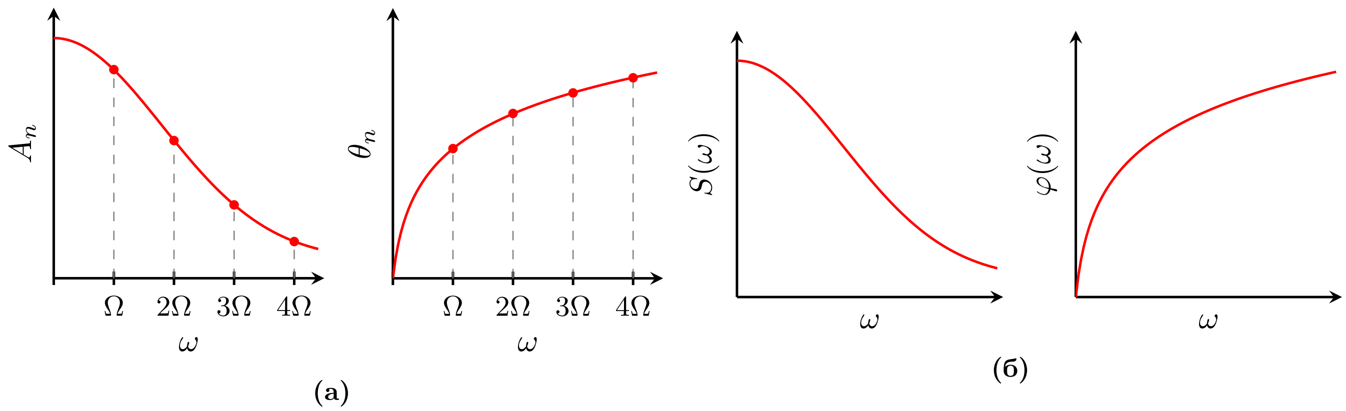


Рис. 3

где комплексная амплитуда n-ой гармоники определяется интегралом.

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\Omega t}\, dt$$

Здесь T – период функции $u(t)$, связанный с угловой частотой соотношением $T = 2\pi/\Omega$.

Для непериодических сигналов аналогичные соотношения имеют вид:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t}\, dt \tag{5}$$

Множитель $S(j\omega) = S(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ называют *спектральной плотностью.*

Связь между коэффициентами Фурье $\dot{A}_n$ и спектральной плотностью $S(j\omega)$ иллюстрируется рисунками рис. 3a и 3б, на первом из которых изображены амплитудная и фазовая спектральные диаграммы произвольной периодической последовательности импульсов, а на втором – спектр одиночного импульса из этой последовательности. Форма огибающей на рис. 3a в некотором масштабе повторяет вид функции на рис. 3б.

Для четырехполюсников вводится также понятие коэффициента передачи — комплексной функции вида

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где $\dot{U}_{\text{вх}}$ и $\dot{U}_{\text{вых}}$ — комплексные амплитуды входного и выходного напряжения. (Напомним, что для сигнала вида $U(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ комплексная амплитуда записывается в виде $\dot{U} = U_0 e^{j\varphi}$). Модуль $K(\omega)$ называют амплитудной характеристикой четырехполюсника, а аргумент $\varphi(\omega)$ — фазовой характеристикой.

Каждая гармоника входного сигнала даст на выходе линейного четырехполюсника гармонический отклик той же частоты. Для его нахождения нужно эту гармонику умножить на коэффициент передачи четырехполюсника. Просуммировав отклики по всем гармоникам, можно определить выходной сигнал. В частности, для непериодических сигналов выражение для выходного сигнала запишется в интегральной форме:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{6}$$

где $S(j\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала.

Т.к. при дифференцированном напряжении $U_{\text{вых}} = \tau_0 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}$, то используя (5) и (6), будем иметь:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$
$$= \tau_0\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] = \tau_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)j\omega e^{j\omega t}d\omega.$$

Из последнего равенства видно, что коэффициент передачи дифференцирующего четырехполюсника

$$K(j\omega) = \tau_0 j\omega = \tau_0\omega e^{\frac{j\pi}{2}}. \tag{7}$$

Например, при дифференцировании гармонического напряжения типа $e^{j\omega t}$ выражение для выходного сигнала имеет вид:

$$u_{\text{вых}}(t) = \tau_0\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = \tau_0 j\omega e^{j\omega t} = \tau_0\omega e^{j\pi/2}e^{j\omega t}.$$

Иными словами, для получения требуемого выходного сигнала каждая гармоника входного сигнала умножается на коэффициент $\tau_0\omega$ и сдвигается по фазе на $\pi/2$.

Аналогичным образом для интегрирующей цепи можно получить

$$K(j\omega) = \frac{1}{\tau_0 j\omega} = \frac{1}{\tau_0\omega}e^{-\frac{j\pi}{2}}. \tag{8}$$

Показанные на рис. 2а, 2б четырехполюсники имеют коэффициенты передачи

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = RC\frac{j\omega}{1 + RCj\omega} = \frac{\tau_0 j\omega}{1 + \tau_0 j\omega}. \tag{9}$$

и

$$K(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + \tau_0 j\omega}. \tag{10}$$

соответственно.

0.1 Зависимость коэффициента передачи и аргумента от частоты

Для операции интегрирования комплексный коэффициент передачи K представлен в формуле (9), перепишем его в виде $a + bj$ (алгебраическая форма комплексного числа):

$$\dot{K} = \frac{jRCw(1 - jRCw)}{(1 + jRCw)(1 - jRCw)} = \frac{(RCw)^2 + jRCw}{1 + (RCw)^2} = \frac{(RCw)^2}{1 + (RCw)^w} + \frac{RCw}{1 + (RCw)^2}j$$

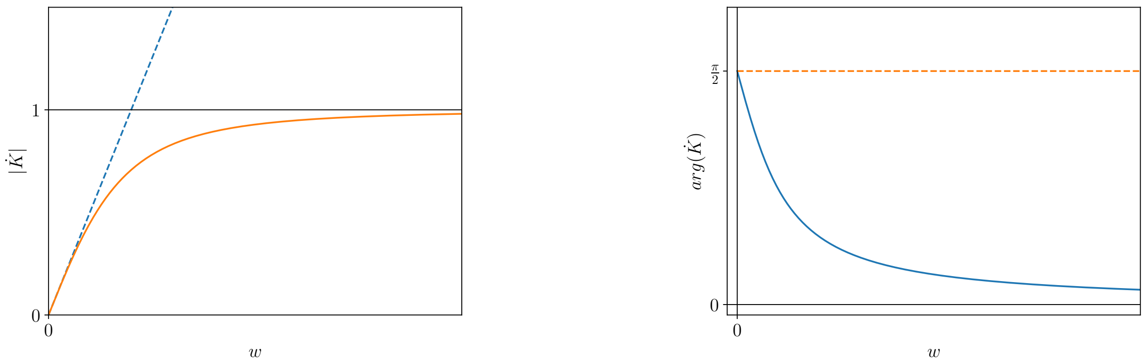
Тогда модуль $|\dot{K}|$ будет равен:

$$|\dot{K}| = \frac{CRw}{(RCw)^2 + 1}\sqrt{(RCw)^2 + 1} = \frac{RCw}{\sqrt{(RCw)^2 + 1}}$$

А аргумент $arg(\dot{K})$, то есть фаза:

$$arg(\dot{K}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{RCw}\right)$$

Изобразим графически зависимости аргумента и модуля от частоты w



(а) **(б)**

Рис. 4. Зависимость $|\dot{K}|$ и $arg(\dot{K})$ для операции интегрирования

Для операции дифференцирования комплексный коэффициент передачи K представлен в формуле (10), перепишем его в виде $a + bj$ (алгебраическая форма комплексного числа):

$$\dot{K} = \frac{1}{1 + j\omega CR}\frac{(1 - jRCw)}{(1 - jRCw)} = \frac{1}{1 + (RCw)^2} - \frac{RCw}{1 + (RCw)^2}$$

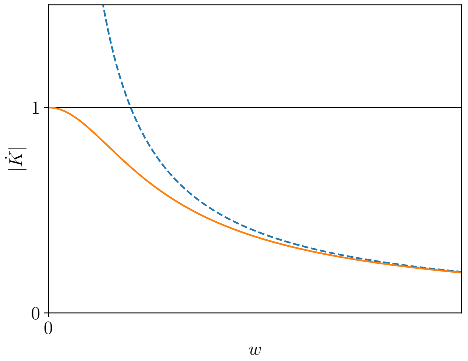
Тогда модуль $|\dot{K}|$ будет равен:

$$|\dot{K}| = \frac{\sqrt{(RCw)^2 + 1}}{(RCw)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{(RCw)^2 + 1}}$$

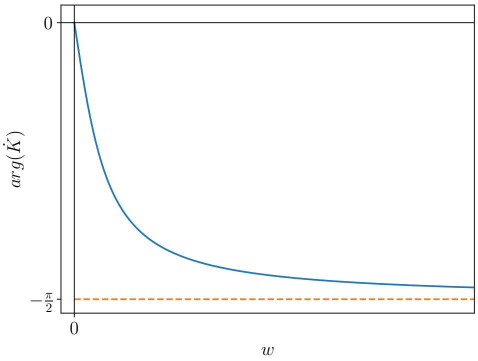
А аргумент $arg(\dot{K})$:

$$arg(\dot{K}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(-RCw)$$

Изобразим графически зависимости аргумента и модуля от частоты w:



(а)



(б)

Рис. 5. Зависимость $|\dot{K}|$ и $arg(\dot{K})$ для операции дифференцирования

Из сравнения выражений (7), (9) и графики зависимостей (см. рис. 5) следует, что для удовлетворительного дифференцирования необходимо выполнение условия:

$$\tau_0\omega \ll 1, \tag{11}$$

а сравнивая выражения (8), (10) и графики зависимостей (см. рис. 4а), приходим к выводу, что удовлетворительное интегрирование возможно, если

$$\tau_0\omega \gg 1. \tag{12}$$

Причем, эти условия должны выполняться для всех частот в существенной части спектра входного сигнала (говоря о существенной части спектра входного сигнала, имеется в виду, что теоретически спектр любого сигнала бесконечен).

Из этих неравенств вытекает также следующее принципиальное положение: чем точнее дифференцирование или интегрирование, тем меньше (по модулю) коэффициент передачи четырехполюсника, осуществляющего это преобразование. В пределе при идеальном преобразовании $K(\omega) \to 0$.

Собственно говоря, все предыдущие рассуждения о степени точности интегрирования или дифференцирования носили чисто качественный характер. Можно было бы, конечно, попытаться ввести какие-либо количественные критерии, но вряд ли стоит это делать. На практике все выглядит достаточно просто: есть конкретная задача о конкретном спектре, которую нужно продифференцировать или проинтегрировать с заданной степенью точности. Исходя из этого и выбирается параметр соответствующего четырехполюсника.

В заключение отметим, что рассмотренные выше модели дифференцирующих и интегрирующих цепей практически являются элементами более сложных электронных устройств. Как правило, для этих цепей применяются операционные усилители с обратной связью (в качестве элементов обратной связи и используются R, C—цепочки). В этом случае удается сочетать приемлемый коэффициент передачи с достаточно высоким качеством преобразования.

1. Измерение разности фаз синусоидальных напряжений

Фазовые соотношения между напряжениями на отдельных элементах цепи можно измерить при помощи катодного осциллографа.

Рассмотрим подробно двухполюсник, изображенный на рис. 6.

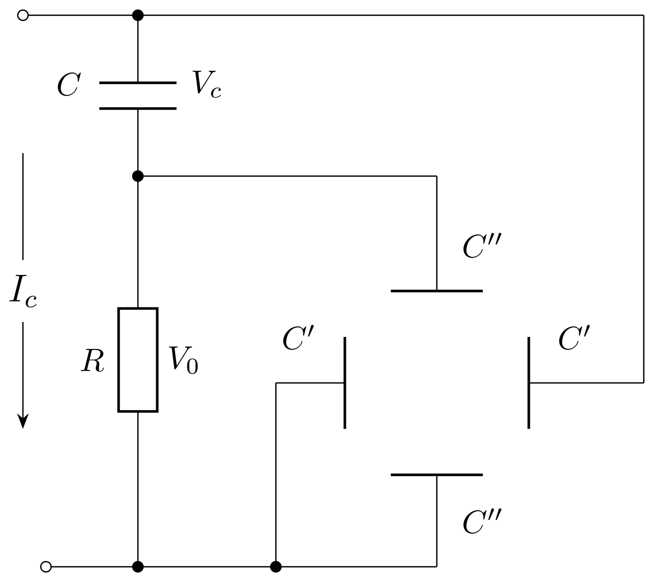


Рис. 6. Схема

У нему подведено переменное синусоидальное напряжение

$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

Векторная диаграмма напряжений на отдельных элементах двухполюсника приведена на рис. 7.

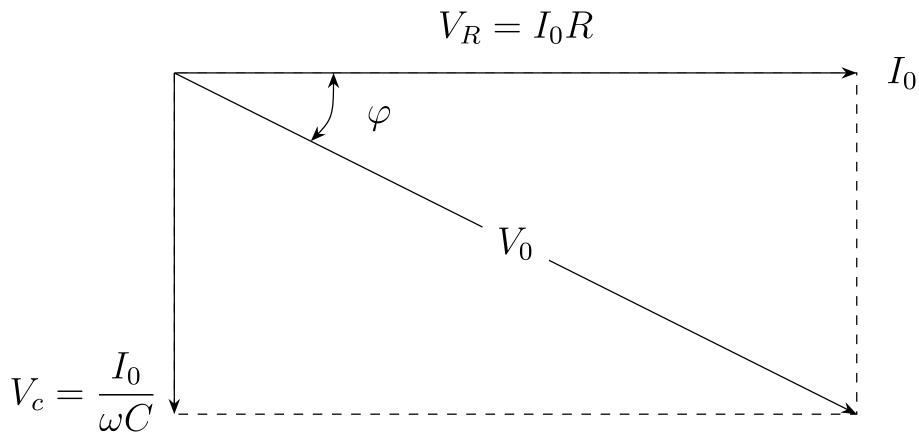


Рис. 7. Векторная диаграмма напряжений

Для определения величины φ следует напряжение со всего двухполюсника подать на горизонтально отклонение пластины $C'C'$ катодного осциллографа, а напряжение с резистора U_a на вертикальное отклонение пластины $C''C''$. На экране осциллографа получается неподвижный эллипс.

Построение эллипса, который получается при сложении двух взаимно перпен-

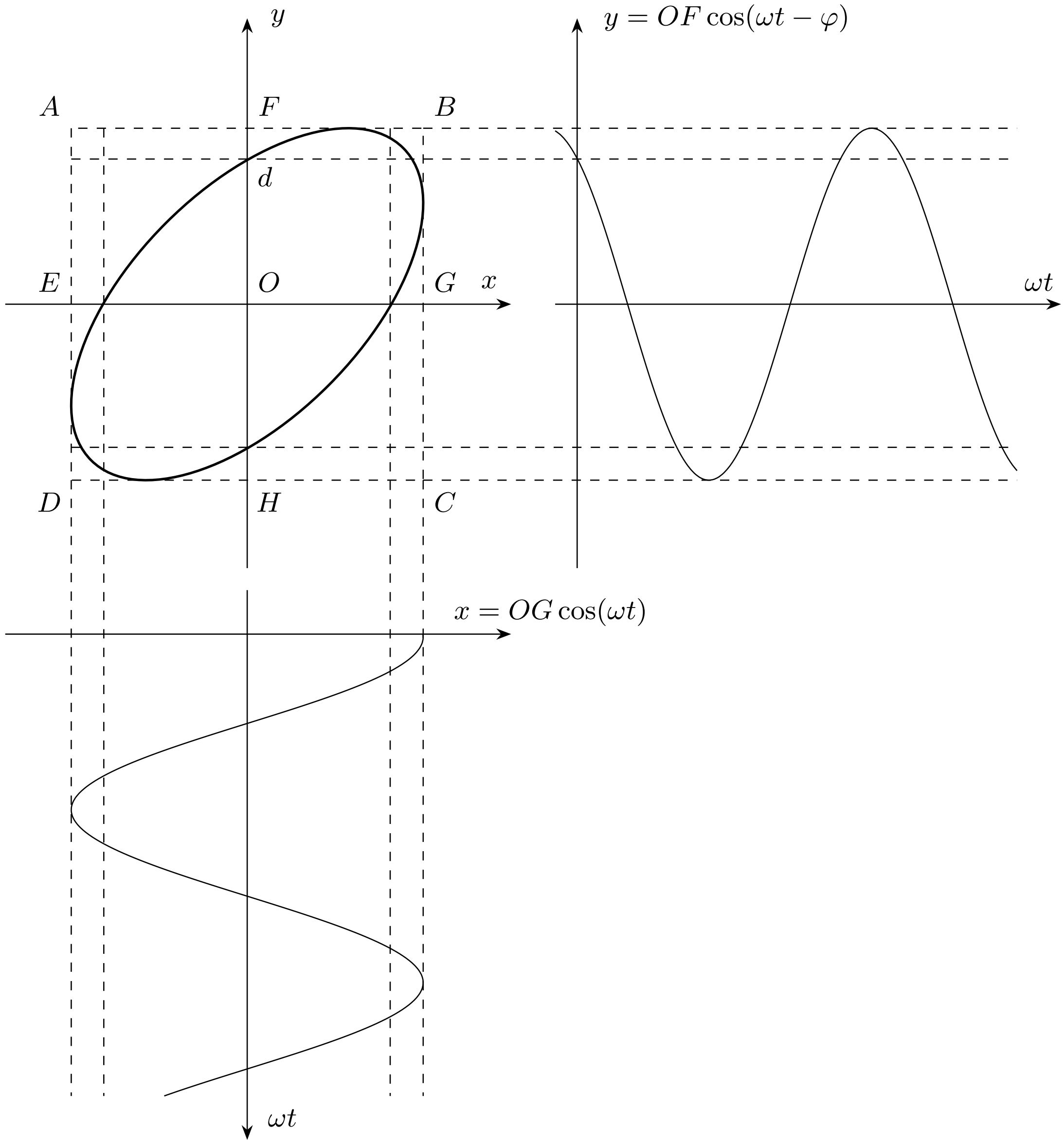


Рис. 8. Построение эллипса

дикулярных синхронных синусоидальных колебаний

$$x = OG\ \cos\omega t \quad \text{и} \quad y = OF\ \cos\omega t,$$

наглядно показано на рис. 8.

Форма эллипса зависит от величины сдвига фаз и от амплитуд подведённых к пластинам напряжений. При сдвиге фаз, равном нулю или 180°, эллипс вырождается в наклонную прямую; при сдвиге фаз 90° оси эллипса совпадают с осями x и y. Эллипс на экране осциллографа может быть вписан в прямоугольник $ABCD$, стороны которого будут пропорциональны амплитудам подведённых к пластинам напряжений. Масштаб в этом случае определяется чувствительностью вертикального и горизонтального отклонения электронного пучка к подведённому напряжению и измеряется в мм/В. Обычно чувствительность осциллографа по вертикальному и горизонтальному отклонениям различна, т.к. уровни усиления соответствующих напряжений различны, и пластины находятся на разных расстояниях от экрана.

На векторной диаграмме рис. 7 видно, что:

$$\frac{V_R}{V_0} = \cos\varphi,$$

величины амплитуд V_c и V пропорциональны сторонам прямоугольника $ABCD$.

Если обозначить чувствительность осциллографа по горизонтальному отклонению через $m_г$, а по вертикальному – через $m_в$, тогда:

$$AB = m_г \cdot 2V_0$$

$$BC = m_в \cdot 2V_a$$

$$\cos\varphi = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{m_г}{m_в}$$

Определение вертикальной или горизонтальной чувствительности производится путём подачи на соответствующую пару отклоняющих пластин через усилители какого-либо известного напряжения и измерения при помощи миллиметровой бумаги или масштабной сетки величины отклонения.

Описанный способ измерения сдвига фаз φ годится только в тех случаях, когда сдвиг фаз определяется отношением амплитуд подведенных к пластинам осциллографа напряжений.

В других случаях должен быть применен более точный способ. Основанный на зависимости формы эллипса от сдвига фаз. Отрезок Od на рис. 8 – это вертикальное смещение в момент t_0, когда

$$x = OG\cos\omega t_0 = 0,$$

т.е.

$$Od = OF\cos(\omega t - \varphi) = OF\sin\varphi$$

следовательно

$$\sin\varphi = \frac{Od}{OF}$$

III. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Расчет параметров

для дифференцирования:

$$\tau_0 = 10 \text{ мкс} = 10^{-5} \text{ с} \quad R = 10 \text{ кОм} = 10^4 \text{ Ом}$$

$$C = \frac{\tau_0}{R} = \frac{10^{-5} \text{ с}}{10^4 \text{ Ом}} = 10^3 \text{ пФ} = 1\ 000 \text{ пФ} \tag{13}$$

Для интегрирования:

$$\tau_0 = 5 \text{ мс} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с} \quad R = 500 \text{ кОм} = 5 \cdot 10^5 \text{ Ом}$$

$$C = \frac{\tau_0}{R} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ с}}{5 \cdot 10^5 \text{ Ом}} = 10^4 \text{ пФ} = 10\ 000 \text{ пФ} \tag{14}$$

Таблица 1. Дифференцирование

ν, Гц	$2A_x$, В	$2A_y$, В	$2U_y\rvert_{U_x=0}$, В	$\sin \approx \frac{2U_y}{2A_y}$	$K = \frac{2A_x}{2A_y}$
100	15,70	0,10	0,10	1,000	157,00
500	19,60	0,58	0,58	1,000	33,79
700	14,20	0,60	0,60	1,000	23,67
800	14,00	0,68	0,68	1,000	20,59
900	11,00	0,61	0,61	1,000	18,03
1000	10,40	0,61	0,61	1,000	17,05
1500	7,20	0,64	0,64	1,000	11,25
2000	5,40	0,62	0,62	1,000	8,71
2500	8,20	1,22	1,19	0,975	6,72
3000	17,60	3,04	3,04	1,000	5,79
3500	30,00	6,04	5,84	0,967	4,97
4000	31,80	7,36	7,12	0,967	4,32
5000	31,80	9,00	8,40	0,933	3,53
6000	31,80	10,60	9,60	0,906	3,00
7000	31,80	12,20	10,80	0,885	2,61
8000	31,40	13,60	11,90	0,875	2,31
9000	31,40	14,60	12,20	0,836	2,15
10000	31,40	15,40	13,00	0,844	2,04
12000	31,40	17,20	13,80	0,802	1,83
14000	33,60	20,20	14,80	0,733	1,66
16000	27,40	17,60	12,20	0,693	1,56
18000	32,00	21,60	14,20	0,657	1,48
20000	31,00	22,00	13,40	0,609	1,41
30000	31,00	24,60	11,20	0,455	1,26
50000	30,40	26,20	7,80	0,298	1,16
100000	30,00	26,60	4,00	0,150	1,13

Таблица 2. Интегрирование

ν, Гц	$2A_x$, В	$2A_y$, В	$2U_y\vert_{U_x=0}$, В	$\sin \approx \frac{2U_y}{2A_y}$	$K = \frac{2A_x}{2A_y}$
20	19,8	11,80	2,8	0,237	0,60
40	20,0	10,00	5,6	0,560	0,50
60	19,6	8,20	6	0,732	0,42
80	19,6	6,88	5,84	0,849	0,35
100	19,8	5,84	5,28	0,904	0,29
120	20,2	4,96	4,48	0,903	0,25
150	20,2	4,00	3,68	0,920	0,20
200	20,2	3,04	2,88	0,947	0,15
300	20,2	2,08	1,92	0,923	0,10
400	20,2	1,54	1,5	0,974	0,08
500	20,2	1,26	1,22	0,968	0,06
1000	20,2	0,62	0,61	0,984	0,03
2000	20,2	0,31	0,31	1,000	0,02
3000	20,2	0,21	0,21	1,000	0,01

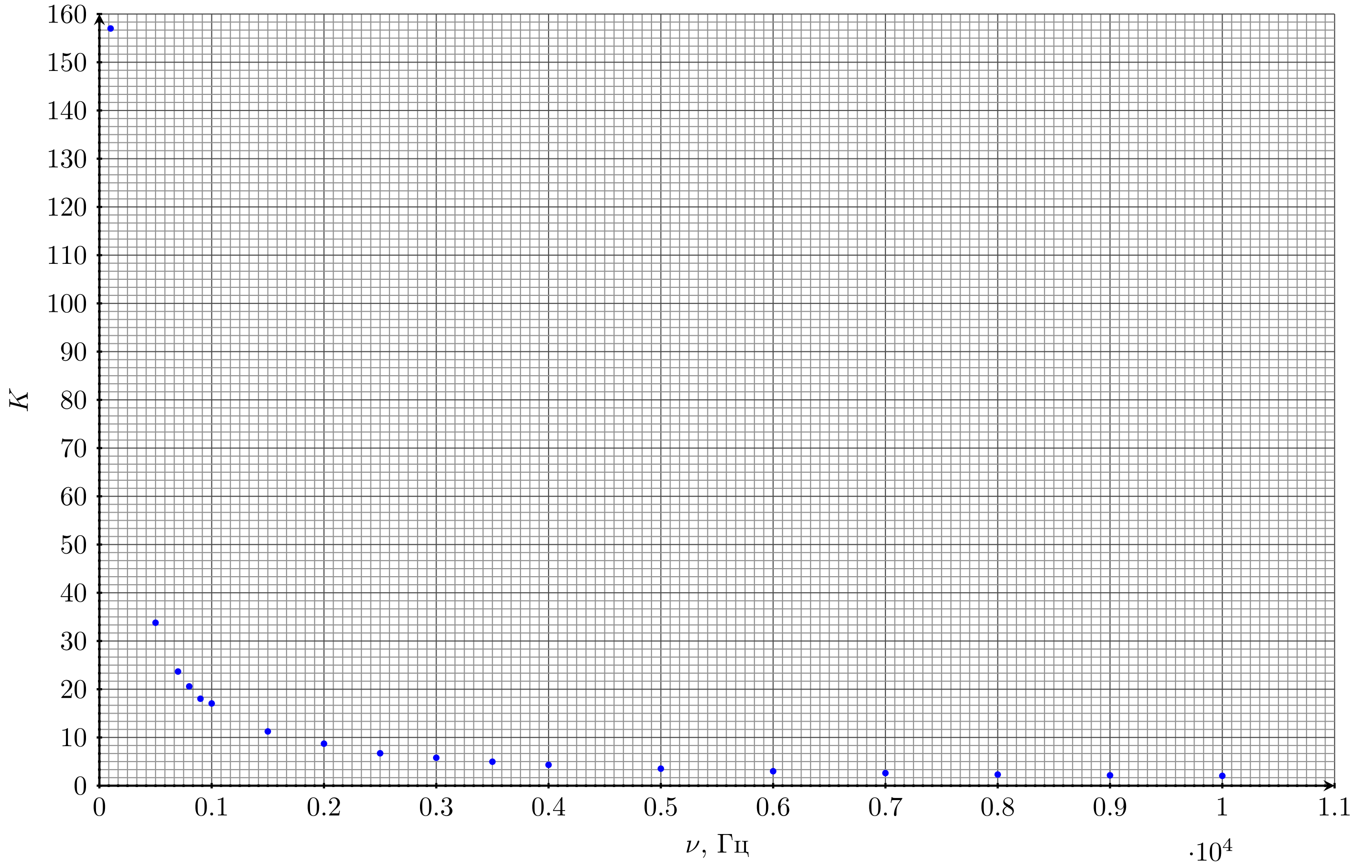


Рис. 9. Изменение коэффициента передачи K при дифференцировании сигнала

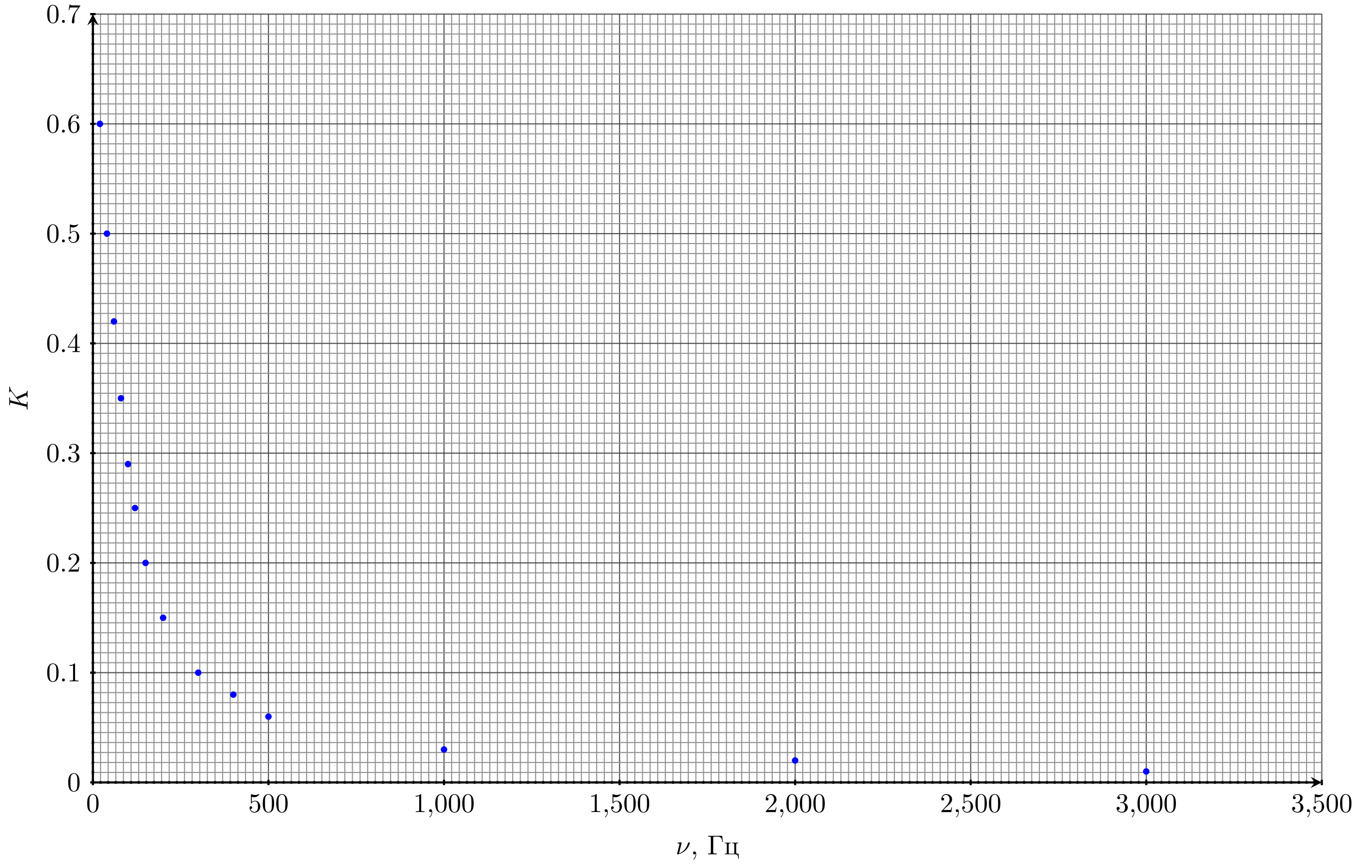


Рис. 10. Изменение коэффициента передачи K при интегрировании сигнала

Из таблиц Раздел 1. и Раздел 1. видно, что при увеличении частоты входного сигнала коэффициент передачи падает

2. Интегрирование и дифференцирование сигналов

Рассмотрим 4 сигнала: урезанную синусоиду(рис. 11(1)), пилу(рис. 11(2)), треугольник(рис. 11(3)) и меандр(рис. 11(4)).
Графически продифференцируем(пункты b) и проинтегрируем сигналы(пункты c), чтобы оценить практический результат.

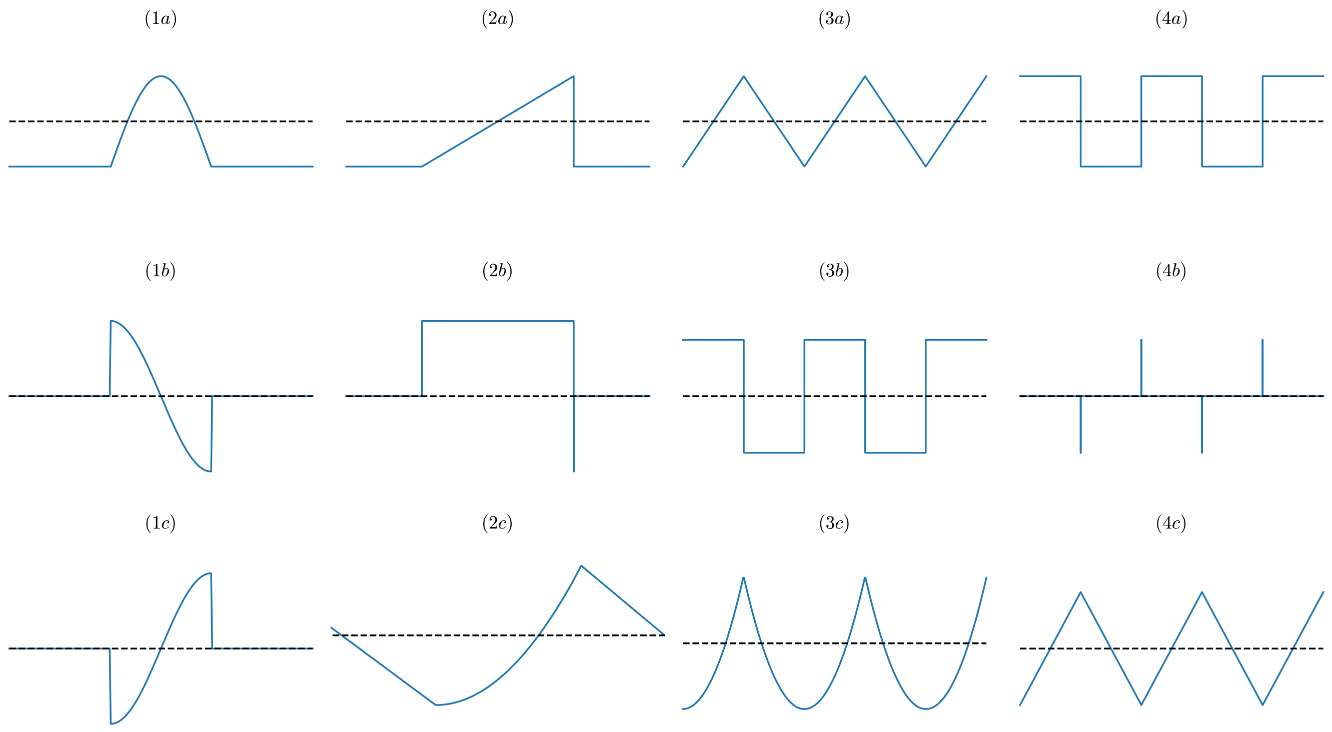


Рис. 11. Ожидаемые результаты измерений

Соберём установку для интегрирования и дифференцирования. Будем считать измерения при наших параметрах (вычисленных ранее) — основными. Наша задача изучить как будет вести себя сигнал при изменении этих параметров.

2.1 Изменение параметров интегрирования и дифференцирования

Будем рассматривать следующие варианты:

- Параметры выше основных по R
- Параметры выше основных по C
- Параметры выше основных по R и C
- Основные параметры
- Параметры ниже основных по R
- Параметры ниже основных по C
- Параметры ниже основных по R и C

В случае малого разброса значений, приведём один график при максимальном отклонении от нормы по обоим параметрам. В противном случае будут приведены 3 графика: малое отклонение(1-2 шага), среднее(3-4 шага), максимальное отклонение. Графики прилагаются отдельно.

2.2 Изменение частоты сигнала

Максимальная частота генератора равна 1 кГц, поэтому будет изучать поведение выходного сигнала при уменьшении частоты входного сигнала. Графики прилагаются отдельно.

3. Анализ результатов эксперимента

Заметим, что оценка улучшения результатов затруднительна, так как на практике сигнал становиться шумным, что делает визуальный анализ неточным. При ухудшении параметров выходной сигнал начинает совпадать с входным, это отчётливо видно на примере: синусоиды, треугольника и пилы. В случае меандра нам не удалось достичь совпадения из-за ограничения частоты генератора.

Можно сделать вывод, что меандр является самым стабильным сигналом для операций дифференцирования и интегрирования, так как нам не удалось добиться полного искажения выходного сигнала, в отличии от других примеров.

4. Разложение усечённой синусоиды в ряд Фурье

Ряд Фурье позволяет заменить данную периодическую функцию бесконечной суммой гармонических функций (синусов и косинусов), каждые и которых имеют свои амплитуды и частоты. Если принять, что период функции $f(x)$ лежит в интервале от L до $-L$, то ряд выглядит следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right), \text{ где:} \tag{15}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

По заданию будем считать, что существенными являются первые 7 гармоник спектра.

Составим уравнение для нахождения смещения синусоиды, чтобы получить функцию сигнала. Для этого введём следующие переменные: c − константа, которой "обрезаем" сигнал, α − искомое смещение синусоиды, $\epsilon = \arcsin(|c|)$ − константа для удобства записи.

$$\int_{0}^{\pi+\epsilon}(\sin x + \alpha)dx + \int_{\pi+\epsilon}^{2\pi-\epsilon}(c+\alpha)dx + \int_{2\pi-\epsilon}^{2\pi}(\sin x + \alpha)dx = 0$$

Очевидно, что после интегрирования и преобразования, получим:

$$\alpha = c\left(\frac{\pi - 2\epsilon}{2\pi}\right)$$

Пусть в нашем случае $c = -1/5$. Отобразим результат графически (рис. 12)

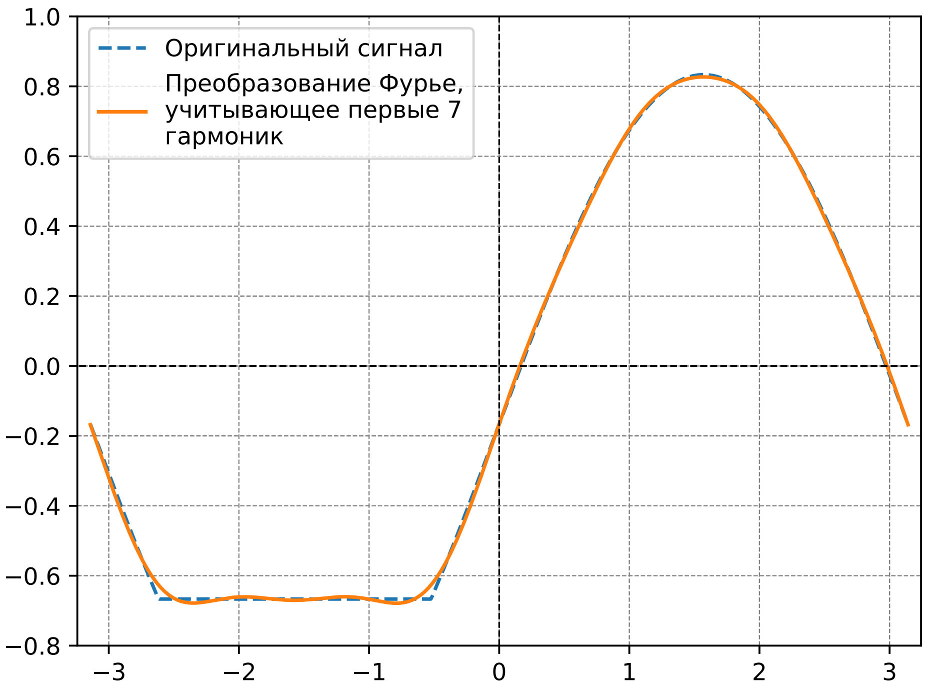


Рис. 12. График сигнала и его разложения в ряд Фурье

5. Исследование «сложности» дифференцирования и интегрирования сигналов

В данном контексте «легче» означает, что результирующий сигнал после операции (дифференцирования или интегрирования) будет менее искажён, более предсказуем и будет иметь лучшую форму. Ключевую роль здесь играют высокочастотные компоненты спектра сигнала.

Дифференцирование — усиливает высокие частоты. Чем выше частота, тем больше коэффициент усиления (пропорционально w). Поэтому если в исходном сигнале много высоких частот, после дифференцирования они станут очень большими, что может привести к выбросам, шумам и искажениям.

Интегрирование — подавляет высокие частоты. Чем выше частота, тем больше коэффициент ослабления (пропорционально $1/w$). Поэтому если в исходном сигнале много высоких частот, они будут подавлены, и форма интеграла будет определяться в основном низкими частотами.

Вывод: Для «лёгкого» дифференцирования исходный сигнал должен иметь мало высокочастотных компонент. Для «лёгкого» интегрирования, наоборот, наличие высоких частот не так критично, так как они будут подавлены. Следовательно, «лучшим» сигналом будет синусоида, так как нам необходимо меньше всего сигналов разной амплитуды, чтобы её получить.

IV. ВЫВОД

Мы изучили устройство и принцип работы интегрирующих и дифференцирующих цепочек. Получили осциллограммы для интегрирования и дифференцирования следующих сигналов: урезанная синусоида, меандр, треугольник и пила. Изучили влияние параметров на выходной сигнал. Разложили урезанную синусоиду в ряд Фурье.

V. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу (8)

Для идеального интегрирующего четырёхполюсника связь выходного и входного сигналов:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(t)\, dt.$$

Представим входной сигнал через спектральную плотность $S(j\omega)$:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Тогда выходной сигнал:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Сравнивая с общим выражением для линейного четырёхполюсника:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

получаем коэффициент передачи интегрирующей цепи:

$$K(j\omega) = \frac{1}{\tau_0 j\omega} = \frac{1}{\tau_0 \omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Это и есть формула (8).

2. Почему нельзя неограниченно увеличивать постоянную времени интегрирующего четырехполюсника и неограниченно уменьшать – дифференцирующего?

Из условий удовлетворительного интегрирования $\tau_0\omega \gg 1$ и дифференцирования $\tau_0\omega \ll 1$ следует, что: - Для интегрирующей цепи увеличение τ_0 улучшает выполнение условия $\tau_0\omega \gg 1$ на низких частотах, но при слишком больших τ_0 коэффициент передачи $K(\omega) = \frac{1}{\tau_0\omega}$ становится очень малым, сигнал на выходе затухает, и практическое выделение интеграла затрудняется из-за шумов и ограничений усилителей. - Для дифференцирующей цепи уменьшение τ_0 улучшает выполнение условия $\tau_0\omega \ll 1$ на высоких частотах, но при слишком малых τ_0 коэффициент передачи $K(\omega) = \tau_0\omega$ также становится малым, выходной сигнал ослабляется, усиливаются высокочастотные шумы, а паразитные ёмкости и индуктивности начинают влиять на работу цепи.

Таким образом, неограниченное изменение τ_0 приводит к неприемлемому ослаблению полезного сигнала и ухудшению соотношения сигнал/шум.

3. Чем отличается спектры периодических и непериодических сигналов?

Спектр периодического сигнала дискретный и представляется рядом Фурье:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \theta_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t},$$

где комплексная амплитуда $\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\Omega t} dt$, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

Спектр непериодического сигнала непрерывный и описывается преобразованием Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Здесь $S(j\omega)$ — спектральная плотность, а график её модуля $|S(j\omega)|$ образует сплошную кривую (см. рис. 3б), в отличие от дискретных линий на рис. 3а.

> 4. Каким условиям должны удовлетворять приборы, подключаемые ко всходу и выходу исследуемых четырехполюсников?

Приборы должны иметь достаточно высокое входное сопротивление и малое выходное сопротивление, чтобы минимизировать влияние на работу четырёхполюсника. Для осциллографа это означает, что его входное сопротивление $R_{\text{вх осц}}$ должно быть много больше сопротивления R цепи ($R_{\text{вх осц}} \gg R$), чтобы не шунтировать цепь. Генератор сигналов должен обеспечивать достаточно низкое выходное сопротивление ($R_{\text{вых ген}} \ll R$), чтобы напряжение на входе четырёхполюсника не зависело от нагрузки. Также приборы должны работать в полосе частот, соответствующей спектру исследуемого сигнала, чтобы не искажать его.

> 5. Поясните принцип работы схемы, изображенной на рис. 1.

На рис. 1 изображён двухполупериодный выпрямитель. Переменное напряжение $u_{\text{вх}}$ подаётся на трансформатор, затем на диодный мост, который пропускает ток только в одном направлении в нагрузке $R_{\text{н}}$. Конденсатор C служит для сглаживания пульсаций. Выходное напряжение $u_{\text{вых}}$ близко к постоянному с небольшой остаточной пульсацией. Осциллограмма показывает, что отрицательные полуволны входного напряжения преобразуются в положительные на выходе.

> 6. Изобразите векторные диаграммы напряжения для четырехполюсников, представленных на рис. 2. Проследите, как изменяются соотношения между $U_{\text{вых}}$ и $U_{\text{вх}}$ при изменении τ_0.

Для четырёхполюсника на рис. 2а (дифференцирующего) векторная диаграмма: вектор напряжения на резисторе U_R опережает ток I на $0°$, напряжение на конденсаторе U_C отстаёт от тока на $90°$, входное напряжение $U_{\text{вх}} = U_R + U_C$. При малых τ_0 ($\tau_0\omega \ll 1$) $U_C \gg U_R$, поэтому $U_{\text{вых}} = U_R \approx \tau_0 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}$ мало по сравнению с $U_{\text{вх}}$. При увеличении τ_0 отношение $U_R/U_{\text{вх}}$ растёт, но условие дифференцирования ухудшается.

Для четырёхполюсника на рис. 2б (интегрирующего) векторная диаграмма:

$U_{\text{вх}} = U_R + U_C$, выходное напряжение $U_{\text{вых}} = U_C$. При больших τ_0 ($\tau_0\omega \gg 1$) $U_R \gg U_C$, поэтому $U_{\text{вых}} = U_C \approx \frac{1}{\tau_0}\int U_{\text{вх}}dt$ мало. При уменьшении τ_0 отношение $U_C/U_{\text{вх}}$ увеличивается, но условие интегрирования ухудшается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибова Е. З. Маятник Обербека: Описание к лабораторной работе. — Нижний Новгород, 2005. — 7 с.
2. Фаддеев М. А. Элементарная обработка результатов эксперимента: Учебное пособие. — Нижний Новгород : Издательство Нижегородского государственного университета, 2010. — 122 с.

VI. ПРИЛОЖЕНИЕ