МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Отчет по (учебной) практике

Студентов группы 427(0424С1ИБг1)
2 курса специалитета
Скороходов С.А., Степушов Г.С.

Основная образовательная программа подготовки по направлению 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» (направленность «Системы подвижной цифровой защищенной связи»)

Нижний Новгород 2025

Содержание

I. Введение **2**
Цель 2
Задачи 2
Приборы и оборудование 2
II. Теоретическая часть **3**
1. Измерение разности фаз синусоидальных напряжений 7
III. Практическая часть **11**
1. Расчет 11
IV. Вывод **14**
V. Контрольные вопросы **15**
VI. Приложение **16**

I. ВВЕДЕНИЕ

Цель

1

Задачи

2

Приборы и оборудование

1. Дифференцирующий и интегрирующий четырехполюсник;
2. Функциональный генератор с модуляцией сигнала `AG1012F`;
3. Низкочастотный генератор `GW Instek GAG-810`;
4. Осциллограф цифровой `GDS-71022`;

II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

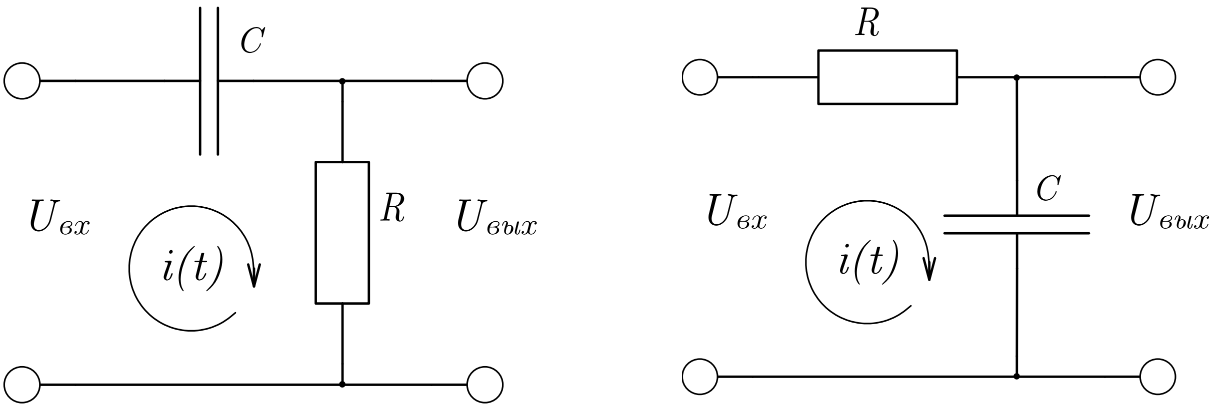
В радиотехнических приборах требуется осуществить преобразование исходного эксцентрического сигнала, носящее характер дифференцирования или интегрирования. Иными словами, если на взод некоего четырехполюсника должен сниматься сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = \tau_0 \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt} \tag{1}$$

а с выхода интегрирующего четырехполюсника – сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int\limits_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(t)\, dt, \tag{2}$$

где τ_0 – константа, имеющая размерность времени, которую в дальнейшем будем называть постоянной времени.



(а) **(б)**

Рис. 1

Поскольку дифференцирование и интегрирование – линейные математические операции, то и на практике они осуществляются с помощью линейных четырехполюсников. Рассмотрим четырехполюсники, изображенные на рис. 1.

Подразумевая под входным сигналом электродвижущую силу, запишем уравнение второго закона Кирхгофа для этих схем:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int\limits_{-\infty}^{t} i(t)\, dt = u_{\text{вх}}(t). \tag{3}$$

Домножив это выржание на C и считая, что произведение RC равно постоянной времени цепи $\tau_0 = RC$, будем иметь:

$$\tau_0 i(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} i(t)\, dt = Cu_{\text{вх}}(t). \tag{4}$$

Рассмотрим два крайних случая: очень малого и очень большого τ_0. Если τ_0 очень мало, то можно пренебречь первым слагаемым в (4). Продифференцировав оставшиеся после отбрасывания этого слагаемого уравнение по t, получим:

$$i(t) \approx C\frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Напряжение на резисторе R, пропорционально току, будет, в свою очередь, пропорционально производной от входного сигнала

$$u_R = Ri(t) \approx RC\frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \tau_0\frac{du_{\text{вх}}}{dt},$$

Таким образом, схема, приведенная на рис. 1а, у которой $u_R = u_{\text{вых}}(t)$, может осуществлять приближенное дифференцирование входного сигнала.

При очень больших τ_0 можно отбросить второе слагаемое в (4). Тогда ток будет пропорционален входному сигналу

$$i(t) \approx \frac{C}{\tau_0}u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{R}u_{\text{вх}}(t),$$

а напряжение на конденсаторе

$$u_c = \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \approx \frac{1}{RC}\int\limits_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(t)\,dt = \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{-\infty}^{t} u_{\text{вх}}(t)\,dt$$

пропорционально интегралу от входного сигнала. Такое преобразование может приближенно осуществлять четырехполюсник, приведенный на рис. 1б.

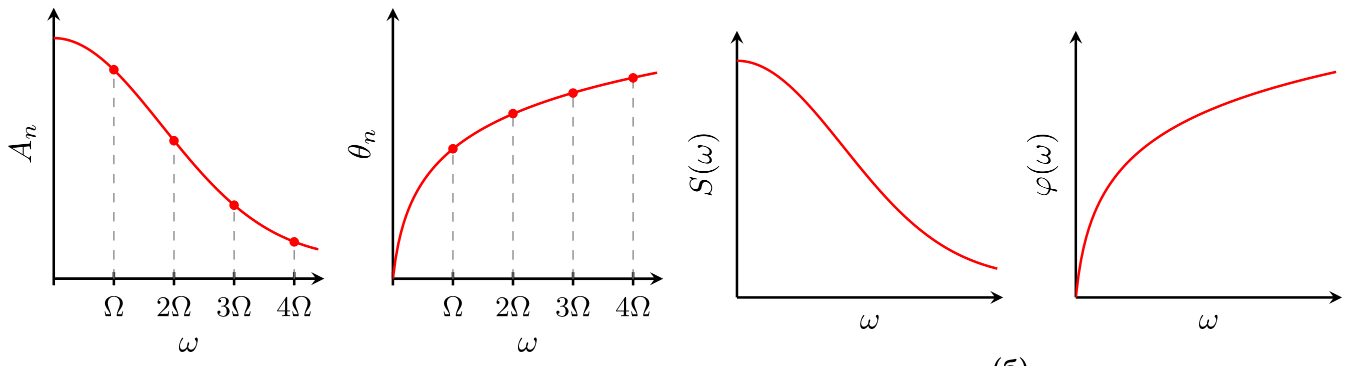
Уточним теперь приведенные выше понятия: малое и большое τ_0.Проще всего это сделать на спектральном языке.

Известно, что практически все радиосигналы могут быть представлены в виде суперпозиции гармонических составляющих, в частности, для периодических сигналов – в виде ряда Фурье:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\Omega t - \theta_n).$$

Этот же ряд , если воспользоваться формулой Эйлера, может быть записан в комплексном виде

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega i},$$



(а) **(б)**

Рис. 2

где комплексная амплитуда n-ой гармоники определяется интегралом.

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\Omega t}\, dt$$

Здесь T – период функции $u(t)$, связанный с угловой частотой соотношением $T = 2\pi/\Omega$.

Для непериодических сигналов аналогичные соотношения имеют вид:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t}\, dt \tag{5}$$

Множитель $S(j\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ называют *спектральной плотностью.*

Связь между коэффициентами Фурье $\dot{A}_n$ и спектральной плотностью $S(j\omega)$ иллюстрируется рисунками рис. 2а и 2б, на первом из которых изображены амплитудная и фазовая спектральные диаграммы произвольной периодической последовательности импульсов, а на втором – спектр одиночного импульса из этой последовательности. Форма огибающей на рис. 2а в некотором масштабе повторяет вид функции на рис. 2б.

Для четырехполюсников вводится также понятие коэффициента передачи — комплексной функции вида

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где $\dot{U}_{\text{вх}}$ и $\dot{U}_{\text{вых}}$ — комплексные амплитуды входного и выходного напряжения. (Напомним, что для сигнала вида $U(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ комплексная амплитуда записывается в виде $\dot{U} = U_0 e^{j\varphi}$). Модуль $K(\omega)$ называют амплитудной характеристикой четырехполюсника, а аргумент $\varphi(\omega)$ — фазовой характеристикой.

Каждая гармоника входного сигнала даст на выходе линейного четырехполюсника гармонический отклик той же частоты. Для его нахождения нужно эту гармонику умножить на коэффициент передачи четырехполюсника. Просуммировав отклики по всем гармоникам, можно определить выходной сигнал. В частности, для непериодических сигналов выражение для выходного сигнала запишется в интегральной форме:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{6}$$

где $S(j\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала.

Т.к. при дифференцированном напряжении $U_{\text{вых}} = \tau_0\frac{dU_{\text{вх}}}{dt}$, то используя (5) и (6), будем иметь:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$
$$= \tau_0\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] = \tau_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)j\omega e^{j\omega t}d\omega.$$

Из последнего равенства видно, что коэффициент передачи дифференцирующего четырехполюсника

$$K(j\omega) = \tau_0 j\omega = \tau_0\omega e^{\frac{j\pi}{2}}. \tag{7}$$

Например, при дифференцировании гармонического напряжения типа $e^{j\omega t}$ выражение для выходного сигнала имеет вид:

$$u_{\text{вых}}(t) = \tau_0\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = \tau_0 j\omega e^{j\omega t} = \tau_0\omega e^{j\pi/2}e^{j\omega t}.$$

Иными словами, для получения требуемого выходного сигнала каждая гармоника входного сигнала умножается на коэффициент $\tau_0\omega$ и сдвигается по фазе на $\pi/2$.

Аналогичным образом для интегрирующей цепи можно получить

$$K(j\omega) = \frac{1}{\tau_0 j\omega} = \frac{1}{\tau_0\omega}e^{-\frac{j\pi}{2}}. \tag{8}$$

Показанные на рис. 1а, 1б четырехполюсники имеют коэффициенты передачи

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = RC\frac{j\omega}{1 + RCj\omega} = \frac{\tau_0 j\omega}{1 + \tau_0 j\omega}. \tag{9}$$

и

$$K(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + \tau_0 j\omega}. \tag{10}$$

соответственно.

Из сравнения выражений (7) и (9) следует, что для удовлетворительного дифференцирования необходимо выполнение условия:

$$\tau_0\omega \ll 1, \tag{11}$$

а сравнивая выражения (8) и (10), приходим к выводу, что удовлетворительное интегрирование возможно, если

$$\tau_0 \omega \gg 1. \tag{12}$$

Причем, эти условия должны выполняться для всех частот в существенной части спектра входного сигнала (говоря о существенной части спектра входного сигнала, имеется в виду, что теоретически спектр любого сигнала бесконечен).

Из этих неравенств вытекает также следующее принципиальное положение: чем точнее дифференцирование или интегрирование, тем меньше (по модулю) коэффициент передачи четырехполюсника, осуществляющего это преобразование. В пределе при идеальном преобразовании $K(\omega) \to 0$.

Собственно говоря, все предыдущие рассуждения о степени точности интегрирования или дифференцирования носили чисто качественный характер. Можно было бы, конечно, попытаться ввести какие-либо количественные критерии, но вряд ли стоит это делать. На практике все выглядит достаточно просто: есть конкретная задача о конкретном спектре, которую нужно продифференцировать или проинтегрировать с заданной степенью точности. Исходя из этого и выбирается параметр соответствующего четырехполюсника.

В заключение отметим, что рассмотренные выше модели дифференцирующих и интегрирующих цепей практически являются элементами более сложных электронных устройств. Как правило, для этих цепей применяются операционные усилители с обратной связью (в качестве элементов обратной связи и используются R, C—цепочки). В этом случае удается сочетать приемлемый коэффициент передачи с достаточно высоким качеством преобразования.

1. Измерение разности фаз синусоидальных напряжений

Фазовые соотношения между напряжениями на отдельных элементах цепи можно измерить при помощи катодного осциллографа.

Рассмотрим подробно двухполюсник, изображенный на рис. 3.

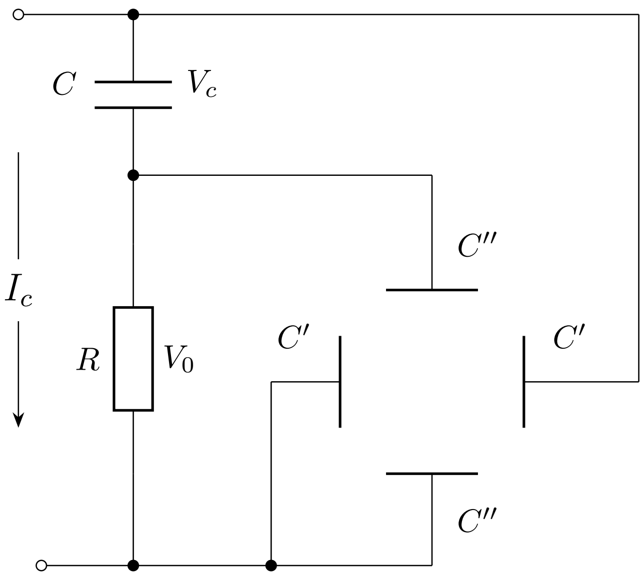


Рис. 3. Схема

У нему подведено переменное синусоидальное напряжение

$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

Векторная диаграмма напряжений на отдельных элементах двухполюсника приведена на рис. 4.

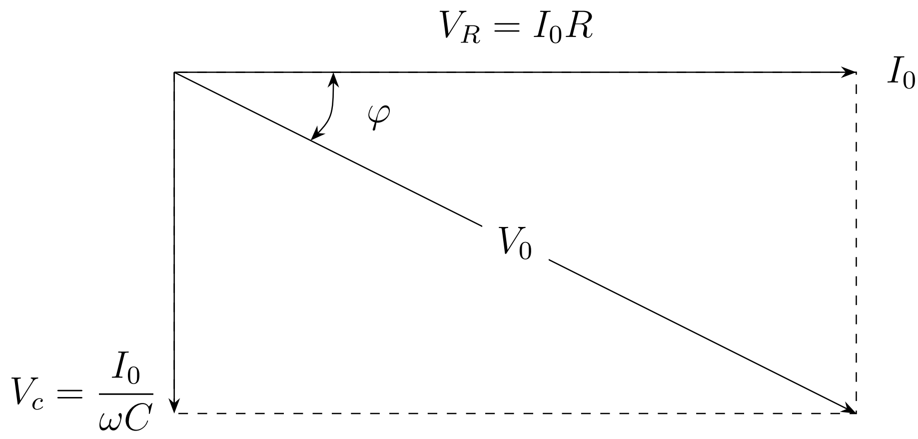


Рис. 4. Векторная диаграмма напряжений

Для определения величины φ следует напряжение со всего двухполюсника подать на горизонтально отклонение пластины $C'C'$ катодного осциллографа, а напряжение с резистора U_a на вертикальное отклонение пластины $C''C''$. На экране осциллографа получается неподвижный эллипс.

Построение эллипса, который получается при сложении двух взаимно перпендикулярных синхронных синусоидальных колебаний

$$x = OG\ \cos\omega t \quad \text{и} \quad y = OF\ \cos\omega t,$$

наглядно показано на рис. 5.

Форма эллипса зависит от величины сдвига фаз и от амплитуд подведённых к пластинам напряжений. При сдвиге фаз, равном нулю или 180°, эллипс вырождается в наклонную прямую; при сдвиге фаз 90° оси эллипса совпадают с осями x и y. Эллипс на экране осциллографа может быть вписан в прямоугольник $ABCD$, стороны которого будут пропорциональны амплитудам подведённых к пластинам напряжений. Масштаб в этом случае определяется чувствительностью вертикального и горизонтального отклонения электронного пучка к подведённому напряжению и измеряется в мм/В. Обычно чувствительность осциллографа по вертикальному и горизонтальному отклонениям различна, т.к. уровни усиления соответствующих напряжений различны, и пластины находятся на разных расстояниях от экрана.

На векторной диаграмме рис. 4 видно, что:

$$\frac{V_R}{V_0} = \cos\varphi,$$

величины амплитуд V_c и V пропорциональны сторонам прямоугольника $ABCD$.

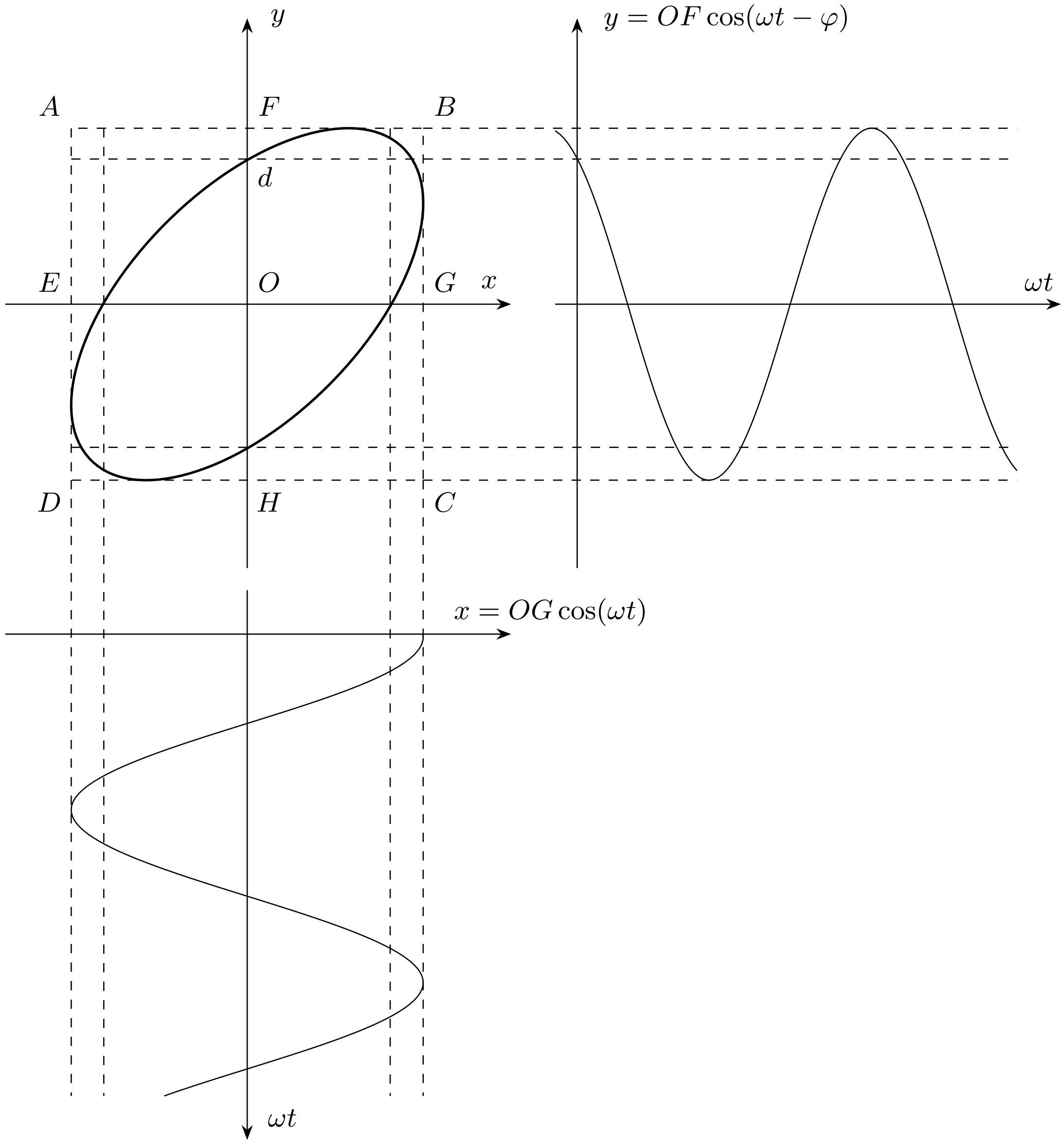


Рис. 5. Построение эллипса

Если обозначить чувствительность осциллографа по горизонтальному отклонению через $m_г$, а по вертикальному – через $m_в$, тогда:

$$AB = m_г \cdot 2V_0$$

$$BC = m_в \cdot 2V_a$$

$$\cos\varphi = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{m_г}{m_в}$$

Определение вертикальной или горизонтальной чувствительности производится путём подачи на соответствующую пару отклоняющих пластин через усилители какого-либо известного напряжения и измерения при помощи миллиметровой бумаги или масштабной сетки величины отклонения.

Описанный способ измерения сдвига фаз φ годится только в тех случаях, когда сдвиг фаз определяется отношением амплитуд подведенных к пластинам осциллографа напряжений.

В других случаях должен быть применен более точный способ. Основанный на зависимости формы эллипса от сдвига фаз. Отрезок Od на рис. 5 – это вертикальное смещение в момент t_0, когда

$$x = OG \cos \omega t_0 = 0,$$

т.е.

$$Od = OF \cos(\omega t - \varphi) = OF \sin \varphi$$

следовательно

$$\sin \varphi = \frac{Od}{OF}$$

III. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Расчет

для дифференцирования:

$$\tau_0 = 10 \text{ мкс} = 10^{-5} \text{ с} \quad R = 10 \text{ кОм} = 10^4 \text{ Ом}$$

$$C = \frac{\tau_0}{R} = \frac{10^{-5} \text{ с}}{10^4 \text{ Ом}} = 10^3 \text{ пФ} = 1\ 000 \text{ пФ} \tag{13}$$

Для интегрирования:

$$\tau_0 = 5 \text{ мс} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с} \quad R = 500 \text{ кОм} = 5 \cdot 10^5 \text{ Ом}$$

$$C = \frac{\tau_0}{R} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ с}}{5 \cdot 10^5 \text{ Ом}} = 10^4 \text{ пФ} = 10\ 000 \text{ пФ} \tag{14}$$

Таблица 1. Дифференцирование

ν, Гц	$2A_x$, В	$2A_y$, В	$2U_y\|_{U_x=0}$, В	$\sin \approx \frac{2U_y}{2A_y}$	$K = \frac{2A_x}{2A_y}$
100	15,70	0,10	0,10	1,000	157,00
500	19,60	0,58	0,58	1,000	33,79
700	14,20	0,60	0,60	1,000	23,67
800	14,00	0,68	0,68	1,000	20,59
900	11,00	0,61	0,61	1,000	18,03
1000	10,40	0,61	0,61	1,000	17,05
1500	7,20	0,64	0,64	1,000	11,25
2000	5,40	0,62	0,62	1,000	8,71
2500	8,20	1,22	1,19	0,975	6,72
3000	17,60	3,04	3,04	1,000	5,79
3500	30,00	6,04	5,84	0,967	4,97
4000	31,80	7,36	7,12	0,967	4,32
5000	31,80	9,00	8,40	0,933	3,53
6000	31,80	10,60	9,60	0,906	3,00
7000	31,80	12,20	10,80	0,885	2,61
8000	31,40	13,60	11,90	0,875	2,31
9000	31,40	14,60	12,20	0,836	2,15
10000	31,40	15,40	13,00	0,844	2,04
12000	31,40	17,20	13,80	0,802	1,83
14000	33,60	20,20	14,80	0,733	1,66
16000	27,40	17,60	12,20	0,693	1,56
18000	32,00	21,60	14,20	0,657	1,48
20000	31,00	22,00	13,40	0,609	1,41
30000	31,00	24,60	11,20	0,455	1,26
50000	30,40	26,20	7,80	0,298	1,16
100000	30,00	26,60	4,00	0,150	1,13

Таблица 2. Интегрирование

ν, Гц	$2A_x$, В	$2A_y$, В	$2U_y\big\|_{U_x=0}$, В	$\sin \approx \frac{2U_y}{2A_y}$	$K = \frac{2A_x}{2A_y}$
20	19,8	11,80	2,8	0,237	0,60
40	20,0	10,00	5,6	0,560	0,50
60	19,6	8,20	6	0,732	0,42
80	19,6	6,88	5,84	0,849	0,35
100	19,8	5,84	5,28	0,904	0,29
120	20,2	4,96	4,48	0,903	0,25
150	20,2	4,00	3,68	0,920	0,20
200	20,2	3,04	2,88	0,947	0,15
300	20,2	2,08	1,92	0,923	0,10
400	20,2	1,54	1,5	0,974	0,08
500	20,2	1,26	1,22	0,968	0,06
1000	20,2	0,62	0,61	0,984	0,03
2000	20,2	0,31	0,31	1,000	0,02
3000	20,2	0,21	0,21	1,000	0,01

IV. ВЫВОД

Вывод к лабораторной работе

V. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу (8)

2. Почему нельзя неограниченно увеличивать постоянную времени

VI. ПРИЛОЖЕНИЕ