МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет

С. А. Скороходов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Конспект по материалу 1 семестра
Дисциплины – Математический Анализ

Студента группы 417/0424С1ИБг1
1 курса специалитета

Основная образовательная программа подготовки по направлению 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» (направленность «Системы подвижной цифровой защищенной связи»)

Нижний Новгород
Издательство "Невыспавшийся Студент"
2025

Содержание

1 Основные понятия теории пределов и непрерывности функций многих переменных . . . 3
1.1 Понятие k-мерного Евклидова пространства . . . 3
1.2 Понятие функции многих переменных . . . 4
Частные случаи функций многих переменных . . . 5
1.3 Понятие предела функции многих переменных . . . 6
Предел функции многих переменных . . . 7
Двойной предел . . . 7
Геометрический смысл двойного предела . . . 8
Независимость предела от пути . . . 8
Примеры решения двойных пределов . . . 9
1.4 Понятие непрерывности функции многих переменных . . . 10

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий конспект представляет собой краткие записи по курсу «Математический анализ» по теме «Дифференциалы», оформленный с использованием LaTeX. Он не претендует на статус полноценного учебного пособия и предназначен исключительно для личного использования при подготовке к занятиям и экзаменам.

Материал изложен с учётом программы курса, однако может содержать некоторые погрешности и упрощения. При использовании конспекта рекомендуется сверяться с дополнительными источниками и учебной литературой. Автор не несёт ответственности за результаты вашей сессии.

Выражаю особую признательность преподавателю дисциплины «Математический анализ» Семериковой Надежде Петровне за помощь в освоении курса и подготовке материалов для конспекта.

Для цитирования данного конспекта в работах, подготовленных в LaTeX, рекомендуется использовать библиографическую запись следующего вида:

```
@book{notediffserkin0,
 title = {Дифференциалы},
 author = {Скороходов, С.А.},
 publisher = {Издательство "Невыспавшийся Студент"},
 year = {2025},
 volume = {1},
 address = {Нижний Новгород},
 edition = {2-е изд., перераб.},
 language = {russian},
 url = {https://github.com/SerKin0/IBTS-math-1k1k-latex-differentials}
}
```

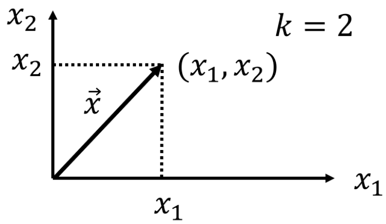
I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие k-мерного Евклидова пространства

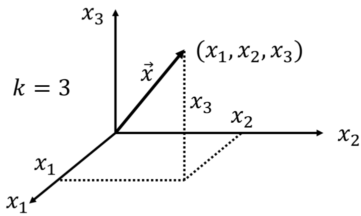
Рассмотрим множество $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \cdot ... \cdot \mathbb{R}$ упорядоченных наборов действительных чисел длины k $(x_1, x_2, ..., x_k)$, где $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, ..., $x_k \in \mathbb{R}$.

Упорядоченный набор $(x_1, x_2, ..., x_k)$ называется **точкой** или **вектором на множестве** $\mathbb{R}^k$ и обозначается $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$, а действительные числа $x_1, x_2, ..., x_k$ называются координатными векторами или точками.

Пусть $k = 2$, тогда множество $\mathbb{R}^k$ определяет плоскость рис. 1а. Координаты любой точки на плоскости — это упорядоченная пара чисел (x_1, x_2), эта пара чисел является координатами вектора, проведенного из начала координат в данную точку.



(а) При $k = 2$



(б) При $k = 3$

Рис. 1. Примеры $\mathbb{R}^k$ пространств

Аналогично, если $k = 3$, то упорядоченный набор (x_1, x_2, x_3) определяет точку или вектор в пространстве (Рис. 1б).

Таким образом, элементами множества $\mathbb{R}^k$ являются векторы. Над векторами вводятся следующие операции:

1. **Сложение векторов**
Если $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$, то суммой векторов $(\vec{x} + \vec{y})$, будет являться сумма соответствующих координат:
$$(\vec{x} + \vec{y}) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k) \quad (1.1.1)$$

2. **Умножение вектора на скаляр**
Если $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ - действительное число, то $\alpha\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ – это вектор с координатами:
$$(\alpha\vec{x}) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_k) \quad (1.1.2)$$

3. **Скалярное произведение векторов**
Если $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$, тогда *скалярным произведением векторов* называться скалярная величина, равная сумме произведений одноименных координат:

$$(\vec{x} + \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k = \sum_{i=1}^{k} x_iy_i \qquad (1.1.3)$$

4. **Норма или длина вектора**
Длина вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ вычисляется по формуле:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \qquad (1.1.4)$$

5. **Расстояние между двумя точками или векторами**
Если $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$, то расстояние между точками $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ определяется длиной вектора $(\vec{x} - \vec{y})$:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_k - y_k)^2} = \\ = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \qquad (1.1.5)$$

Если в множестве $\mathbb{R}^k$ введены рассмотренные выше операции с векторами, то оно называется **k-мерным Евклидовым пространством**.

2. Понятие функции многих переменных

Начнем с определения функции одной переменной.

Если каждому числу x из множества $\mathbb{E}$, которое является подмножеством действительных чисел $\mathbb{R}$, соответствует число y из множества Y, также являющегося подмножеством $\mathbb{R}$ в соответствии с правилом f, то говорят, что на множестве $\mathbb{E}$ задана функция $y = f(x)$. Множество $\mathbb{E}$ называют областью определения функции, а Y — множеством её значений.

Функция нескольких переменных определяется аналогично, только вместо одного числа используются несколько независимых переменных.

Определение функции k независимых переменных

Если каждому вектору $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ из множества $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^k$ соответствует число y из множества $Y \subset \mathbb{R}$ по правилу f, то на множестве $\mathbb{E}$ задана функция нескольких переменных, которую обозначают как $y = f(\vec{x})$

или $y = f(x_1, x_2, ..., x_k)$.

Здесь $x_1, x_2, ..., x_k$ — независимые переменные (аргументы функции), а y — зависимая переменная.

Множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^k$ называют областью определения функции, а множество $Y \subset \mathbb{R}$ — её множеством значений.

Частные случаи функций многих переменных

Рассмотрим функции двух и трех переменных. Для функции двух переменных:

- Если $k = 2$, то $y = f(x_1, x_2)$, что записывается как $z = f(x, y)$;
- Если $k = 3$, то $y = f(x_1, x_2, x_3)$, что записывается как $w = f(x, y, z)$.

Особенно важна функция двух переменных $z = f(x, y)$, где x и y — независимые переменные. Область определения этой функции — множество точек (x, y), принадлежащих некоторому подмножеству $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2$. Зависимая переменная z принимает значения из множества $Z \subset \mathbb{R}$, которое откладывается по вертикальной оси в пространстве XYZ.

По определению функции, каждой паре $(x, y) \in \mathbb{E}$ ставится в соответствие единственное значение z по закону f. Это означает, что функция двух переменных имеет графическое представление в виде поверхности в пространстве. Эта поверхность состоит из всех значений функции во всех точках области определения $\mathbb{E}$.

Параболоид вращения (Рис. 2)

$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

О.О. $(x, y) \in \mathbb{R}$, $z \geqslant 0$ - множество значений

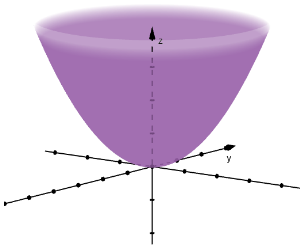


Рис. 2. Параболоид

Коническая поверхность (Рис. 3)

$$\boxed{z^2 = x^2 + y^2}$$

– это неявно заданная функция. Выразим из уравнения z, $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ - получаем две явно заданные функции:

1. $\boxed{z = \sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \geqslant 0$
2. $\boxed{z = -\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \leqslant 0$

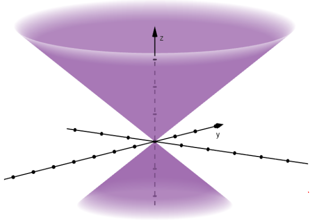


Рис. 3. Коническая поверхность

Сфера с цетром в начале (Рис. 4)

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$$

Функция $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ задает верхнюю половину сферы. Здесь область определения $R^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leqslant R^2$ - круг радиуса R, а множество значений $0 \leqslant z \leqslant R$.

Функция $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ задает нижнюю половину сферы, область определения $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, а множество значений $-R \leqslant z \leqslant 0$.

Замечание: Функции, большего числа переменных, не имеют геометрического изображения.

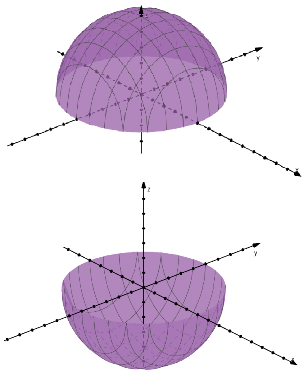


Рис. 4. Сфера с цетром в начале

3. Понятие предела функции многих переменных

Предел функции одной переменной

Вспомним определение предела для функции одной действительной переменной. Пусть $y = f(x)$, где $x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}$. Точка $x = a$ является предельной точкой множества $\mathbb{E}$; она может как принадлежать $\mathbb{E}$, так и не принадлежать ему ($a \in \mathbb{E}$ или $a \notin \mathbb{E}$).

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall x \in \mathbb{E},\, 0 < |x-a| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.3.1)$$

В определении предела неравенство $0 < |x - a| < \delta$ означает, что $x \in (a - \delta, a + \delta)$ и $x \neq a$. Геометрический смысл модуля $|x - a| = \rho(x, a)$ — это расстояние между точками x и a на действительной оси, причём $0 < \rho(x, a) < \delta$.

Предел функции многих переменных

Обобщим определение предела на случай функции многих переменных. Пусть $y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ определена на множестве $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^k$. Точка $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ является предельной для $\mathbb{E}$ и может как принадлежать $\mathbb{E}$, так и не принадлежать ему ($\vec{a} \in \mathbb{E}$ или $\vec{a} \notin \mathbb{E}$).

Расстояние между точками в $\mathbb{R}^k$ было введено в Раздел 1.1:

$$\rho(\vec{x}, \vec{a}) = \|\vec{x} - \vec{a}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_k - a_k)^2}. \qquad (1.3.2)$$

Предел функции многих переменных обозначается следующим образом:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \vdots\\ x_k\to a_k}} f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = A. \qquad (1.3.3)$$

На языке «ε-δ» определение аналогично (1.3.1), но вместо чисел x и a используются векторы $\vec{x}$ и $\vec{a}$, а модуль $|x - a|$ заменяется на норму $\|\vec{x} - \vec{a}\|$:

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall\vec{x} \in \mathbb{E},\, 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta) : |f(\vec{x}) - A| < \varepsilon \qquad (1.3.4)$$

Замечание о пределах

Замечание. Поскольку определение предела (1.3.4) для функции многих переменных совпадает с определением для функции одной переменной, все теоремы о пределах, доказанные для случая одной переменной, переносятся на случай многих переменных.

Двойной предел

Рассмотрим предел функции двух переменных $z = f(x, y)$, называемый двойным пределом. Пусть точка $M(x, y) \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2$ принадлежит области

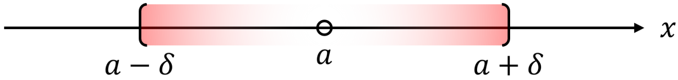


Рис. 5. Интервал $(a-\delta, a+\delta)$ с выколотой точкой

определения функции, а точка $M_0(a, b)$ является предельной для $\mathbb{E}$ ($M_0 \in \mathbb{E}$ или $M_0 \notin \mathbb{E}$). Тогда:

$$A = \lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y). \tag{1.3.5}$$

Расстояние между точками M и M_0 вычисляется по формуле:

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

На языке «ε-δ» двойной предел записывается так:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall (x, y) \in \mathbb{E},\ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta) : \tag{1.3.6}$$

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \tag{1.3.7}$$

Геометрический смысл двойного предела

Рассмотрим геометрический смысл неравенства:

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \delta(\varepsilon), \tag{1.3.8}$$

$$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2(\varepsilon). \tag{1.3.9}$$

Это задаёт круг радиуса $\delta(\varepsilon)$ с выколотым центром в точке $M_0(a, b)$. Такой круг называют δ-окрестностью точки M_0 (Рис. 6).

Для сравнения: в случае функции $y = f(x)$ δ-окрестность точки a — это интервал $(a-\delta, a+\delta)$ с выколотой точкой a (Рис. 5).

Независимость предела от пути

Из определения двойного предела следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому точка M приближается к M_0. Число возможных направлений бесконечно, в отличие от функции одной переменной, где таких направлений всего два (слева и справа от точки a).

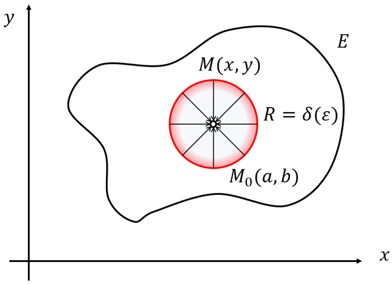


Рис. 6

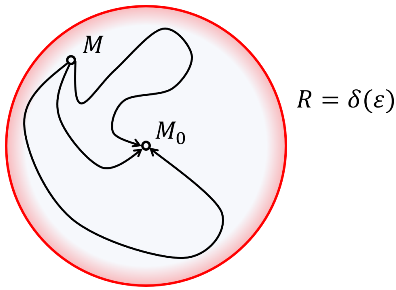


Рис. 7

Примеры решения двойных пределов

1. Вместо x и y подставляем предельные значения:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{1\cdot 2}{1^2+2^2} = \frac{2}{5}$$

2. По теореме и произведении бесконечно малых на ограниченную:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + y\cdot\sin\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} x + \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$$

3. Используя первый замечательный предел:

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} \left(x\cdot\sin\frac{1}{xy}\right) [\infty\cdot 0] = \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} \left(\frac{\sin\frac{1}{xy}}{\frac{1}{x}}\right) \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} \left(\frac{\sin\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}\cdot y}\right) = \lim_{y\to 2}\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

4. Покажем что предел не существует. Для этого выберем окрестность предельной точки $M_0(0{,}0)$ и предположим, что точка $M(x,y)\to M_0(0,0)$ по различным путям (выше уже было сказано, что число таких направлений бесконечно). Для простоты выберем две прямые: $y = x$ и $y = -x$

$$\lim_{\frac{x}{y}\rightrightarrows\frac{0}{0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left|\begin{array}{l} y = x\\ x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\frac{x}{y}\rightrightarrows\frac{0}{0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left|\begin{array}{l} y = -x\\ x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(-x)}{x^2+(-x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, рассмотрели 2 частных предела, они не равны между собой, следовательно двойной предел не существует.

4. Понятие непрерывности функции многих переменных

(1.1.2)