МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет

С. А. Скороходов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Конспект по материалу 1 семестра
Дисциплины – Математический Анализ

Студента группы 417/0424С1ИБг1
1 курса специалитета

Основная образовательная программа
подготовки по направлению
10.05.02 «Информационная безопасность
телекоммуникационных систем»
(направленность «Системы подвижной цифровой
защищенной связи»)

Нижний Новгород
Издательство "Невыспавшийся Студент"
2025

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий конспект представляет собой краткие записи по курсу «Математический анализ» по теме «Дифференциалы», оформленный с использованием LaTeX. Он не претендует на статус полноценного учебного пособия и предназначен исключительно для личного использования при подготовке к занятиям и экзаменам.

Материал изложен с учётом программы курса, однако может содержать некоторые погрешности и упрощения. При использовании конспекта рекомендуется сверяться с дополнительными источниками и учебной литературой. Автор не несёт ответственности за результаты вашей сессии.

Выражаю особую признательность преподавателю дисциплины «Математический анализ» Семериковой Надежде Петровне за помощь в освоении курса и подготовке материалов для конспекта.

Для цитирования данного конспекта в работах, подготовленных в LaTeX, рекомендуется использовать библиографическую запись следующего вида:

```
@book{notediffserkin0,
 title = {Дифференциалы},
 author = {Скороходов, С.А.},
 publisher = {Издательство "Невыспавшийся Студент"},
 year = {2025},
 volume = {1},
 address = {Нижний Новгород},
 edition = {2-е изд., перераб.},
 language = {russian},
 url = {https://github.com/SerKin0/IBTS-math-1k1k-latex-differentials}
}
```

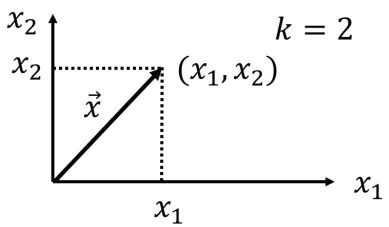
I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие k-мерного Евклидова пространства

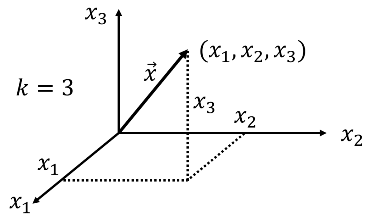
Рассмотрим множество $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \cdot ... \cdot \mathbb{R}$ упорядоченных наборов действительных чисел длины k $(x_1, x_2, ..., x_k)$, где $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, ..., $x_k \in \mathbb{R}$.

Упорядоченный набор $(x_1, x_2, ..., x_k)$ называется **точкой** или **вектором на множестве** $\mathbb{R}^k$ и обозначается $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$, а действительные числа $x_1, x_2, ..., x_k$ называются координатными векторами или точками.

Пусть $k = 2$, тогда множество $\mathbb{R}^k$ определяет плоскость рис. 1а. Координаты любой точки на плоскости — это упорядоченная пара чисел (x_1, x_2), эта пара чисел является координатами вектора, проведенного из начала координат в данную точку.



(а) При $k = 2$



(б) При $k = 3$

Рис. 1. Примеры $\mathbb{R}^k$ пространств

Аналогично, если $k = 3$, то упорядоченный набор (x_1, x_2, x_3) определяет точку или вектор в пространстве (Рис. 1б).

Таким образом, элементами множества $\mathbb{R}^k$ являются векторы. Над векторами вводятся следующие операции:

1. **Сложение векторов**
   Если $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$, то суммой векторов $(\vec{x} + \vec{y})$, будет являться сумма соответствующих координат:
$$(\vec{x} + \vec{y}) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k) \tag{1.1.1}$$

2. **Умножение вектора на скаляр**
   Если $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ - действительное число, то $\alpha\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ – это вектор с координатами:
$$(\alpha\vec{x}) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_k) \tag{1.1.2}$$

3. **Скалярное произведение векторов**
Если $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$, тогда *скалярным произведением векторов* называться скалярная величина, равная сумме произведений одноименных координат:

$$(\vec{x} + \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k = \sum_{i=1}^{k} x_iy_i \tag{1.1.3}$$

4. **Норма или длина вектора**
Длина вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ вычисляется по формуле:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \tag{1.1.4}$$

5. **Расстояние между двумя точками или векторами**
Если $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$, то расстояние между точками $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ определяется длиной вектора $(\vec{x} - \vec{y})$:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_k - y_k)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \tag{1.1.5}$$

Если в множестве $\mathbb{R}^k$ введены рассмотренные выше операции с векторами, то оно называется **k-мерным Евклидовым пространством**.

2. Понятие функции многих переменных

Начнем с определения функции одной переменной.

Если каждому числу x из множества $\mathbb{E}$, которое является подмножеством действительных чисел $\mathbb{R}$, соответствует число y из множества Y, также являющегося подмножеством $\mathbb{R}$ в соответствии с правилом f, то говорят, что на множестве $\mathbb{E}$ задана функция $y = f(x)$. Множество $\mathbb{E}$ называют областью определения функции, а Y — множеством её значений.

Функция нескольких переменных определяется аналогично, только вместо одного числа используются несколько независимых переменных.

Определение функции k независимых переменных

Если каждому вектору $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ из множества $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^k$ соответствует число y из множества $Y \subset \mathbb{R}$ по правилу f, то на множестве $\mathbb{E}$ задана функция нескольких переменных, которую обозначают как $y = f(\vec{x})$

или $y = f(x_1, x_2, ..., x_k)$.

Здесь $x_1, x_2, ..., x_k$ — независимые переменные (аргументы функции), а y — зависимая переменная.

Множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^k$ называют областью определения функции, а множество $Y \subset \mathbb{R}$ — её множеством значений.

Частные случаи функций многих переменных

Рассмотрим функции двух и трех переменных. Для функции двух переменных:

- Если $k = 2$, то $y = f(x_1, x_2)$, что записывается как $z = f(x, y)$;
- Если $k = 3$, то $y = f(x_1, x_2, x_3)$, что записывается как $w = f(x, y, z)$.

Особенно важна функция двух переменных $z = f(x, y)$, где x и y — независимые переменные. Область определения этой функции — множество точек (x, y), принадлежащих некоторому подмножеству $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2$. Зависимая переменная z принимает значения из множества $Z \subset \mathbb{R}$, которое откладывается по вертикальной оси в пространстве XYZ.

По определению функции, каждой паре $(x, y) \in \mathbb{E}$ ставится в соответствие единственное значение z по закону f. Это означает, что функция двух переменных имеет графическое представление в виде поверхности в пространстве. Эта поверхность состоит из всех значений функции во всех точках области определения $\mathbb{E}$.

Параболоид вращения (Рис. 2)

$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

О.О. $(x, y) \in \mathbb{R}$, $z \geqslant 0$ - множество значений

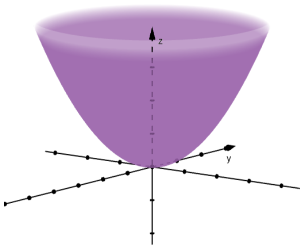


Рис. 2. Параболоид

Коническая поверхность (Рис. 3)

$$\boxed{z^2 = x^2 + y^2}$$

– это неявно заданная функция. Выразим из уравнения z, $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ - получаем две явно заданные функции:

1. $\boxed{z = \sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \geqslant 0$
2. $\boxed{z = -\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \leqslant 0$

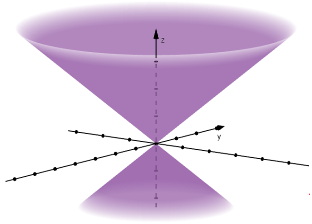


Рис. 3. Коническая поверхность

Сфера с цетром в начале (Рис. 4)

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$$

Функция $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ задает верхнюю половину сферы. Здесь область определения $R^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leqslant R^2$ - круг радиуса R, а множество значений $0 \leqslant z \leqslant R$.

Функция $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ задает нижнюю половину сферы, область определения $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, а множество значений $-R \leqslant z \leqslant 0$.

Замечание: Функции, большего числа переменных, не имеют геометрического изображения.

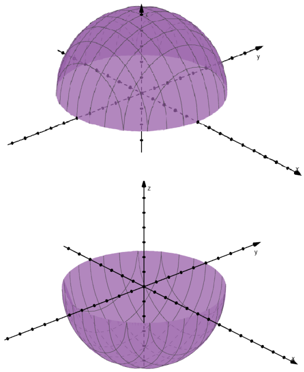


Рис. 4. Сфера с цетром в начале

3. Понятие предела функции многих переменных

Предел функции одной переменной

Вспомним определение предела для функции одной действительной переменной. Пусть $y = f(x)$, где $x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}$. Точка $x = a$ является предельной точкой множества $\mathbb{E}$; она может как принадлежать $\mathbb{E}$, так и не принадлежать ему ($a \in \mathbb{E}$ или $a \notin \mathbb{E}$).

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall x \in \mathbb{E},\, 0 < |x - a| < \delta) : \quad |f(x) - A| < \varepsilon \qquad (1.3.1)$$

В определении предела неравенство $0 < |x - a| < \delta$ означает, что $x \in (a - \delta, a + \delta)$ и $x \neq a$. Геометрический смысл модуля $|x - a| = \rho(x, a)$ — это расстояние между точками x и a на действительной оси, причём $0 < \rho(x, a) < \delta$.

Предел функции многих переменных

Обобщим определение предела на случай функции многих переменных. Пусть $y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ определена на множестве $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^k$. Точка $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ является предельной для $\mathbb{E}$ и может как принадлежать $\mathbb{E}$, так и не принадлежать ему ($\vec{a} \in \mathbb{E}$ или $\vec{a} \notin \mathbb{E}$).

Расстояние между точками в $\mathbb{R}^k$ было введено в Раздел 1.1:

$$\rho(\vec{x}, \vec{a}) = \|\vec{x} - \vec{a}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_k - a_k)^2}. \qquad (1.3.2)$$

Предел функции многих переменных обозначается следующим образом:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \vdots \\ x_k \to a_k}} f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = A. \qquad (1.3.3)$$

На языке «ε-δ» определение аналогично (1.3.1), но вместо чисел x и a используются векторы $\vec{x}$ и $\vec{a}$, а модуль $|x - a|$ заменяется на норму $\|\vec{x} - \vec{a}\|$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall \vec{x} \in \mathbb{E},\, 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta) : |f(\vec{x}) - A| < \varepsilon \qquad (1.3.4)$$

Замечание о пределах

Замечание. Поскольку определение предела (1.3.4) для функции многих переменных совпадает с определением для функции одной переменной, все теоремы о пределах, доказанные для случая одной переменной, переносятся на случай многих переменных.

Двойной предел

Рассмотрим предел функции двух переменных $z = f(x, y)$, называемый двойным пределом. Пусть точка $M(x, y) \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2$ принадлежит области

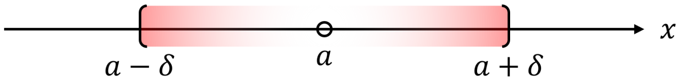


Рис. 5. Интервал $(a-\delta, a+\delta)$ с выколотой точкой

определения функции, а точка $M_0(a,b)$ является предельной для $\mathbb{E}$ ($M_0 \in \mathbb{E}$ или $M_0 \notin \mathbb{E}$). Тогда:

$$A = \lim_{M \to M_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y). \tag{1.3.5}$$

Расстояние между точками M и M_0 вычисляется по формуле:

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

На языке «ε-δ» двойной предел записывается так:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall (x,y) \in \mathbb{E},\ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta): \tag{1.3.6}$$

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon \tag{1.3.7}$$

Геометрический смысл двойного предела

Рассмотрим геометрический смысл неравенства:

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \delta(\varepsilon), \tag{1.3.8}$$

$$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2(\varepsilon). \tag{1.3.9}$$

Это задаёт круг радиуса $\delta(\varepsilon)$ с выколотым центром в точке $M_0(a,b)$. Такой круг называют δ-окрестностью точки M_0 (Рис. 6).

Для сравнения: в случае функции $y = f(x)$ δ-окрестность точки a — это интервал $(a-\delta, a+\delta)$ с выколотой точкой a (Рис. 5).

Независимость предела от пути

Из определения двойного предела следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому точка M приближается к M_0. Число возможных направлений бесконечно, в отличие от функции одной переменной, где таких направлений всего два (слева и справа от точки a).

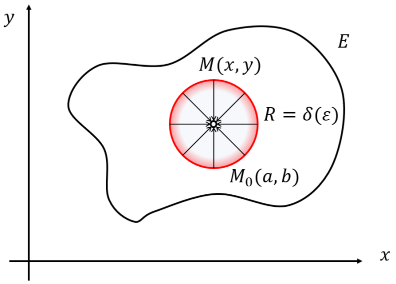


Рис. 6

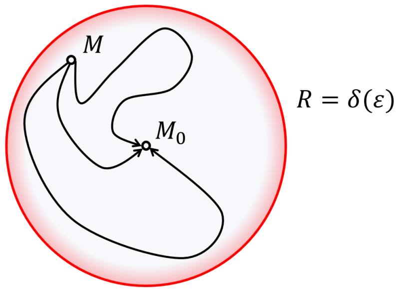


Рис. 7

Примеры решения двойных пределов

1. Вместо x и y подставляем предельные значения:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{1\cdot 2}{1^2+2^2} = \frac{2}{5}$$

2. По теореме и произведении бесконечно малых на ограниченную:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + y\cdot\sin\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} x + \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$$

3. Используя первый замечательный предел:

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} \left(x\cdot\sin\frac{1}{xy}\right)[\infty\cdot 0] = \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} \left(\frac{\sin\frac{1}{xy}}{\frac{1}{x}}\right)\left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} \left(\frac{\sin\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy}\cdot y}\right) = \lim_{y\to 2}\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

4. Покажем что предел не существует. Для этого выберем окрестность предельной точки $M_0(0{,}0)$ и предположим, что точка $M(x,y)\to M_0(0,0)$ по различным путям (выше уже было сказано, что число таких направлений бесконечно). Для простоты выберем две прямые: $y = x$ и $y = -x$

$$\lim_{\substack{x\\ y}\rightrightarrows\substack{0\\ 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left|\begin{array}{l} y = x\\ x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\\ y}\rightrightarrows\substack{0\\ 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left|\begin{array}{l} y = -x\\ x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(-x)}{x^2+(-x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, рассмотрели 2 частных предела, они не равны между собой, следовательно двойной предел не существует.

4. Понятие непрерывности функции многих переменных

Непрерывность функции одной переменной

Вспомним определение непрерывной функции одного действительного переменного. Функция $y = f(x)$, где $x \in E \subset \mathbb{R}$, называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то есть предел $f(x)$ при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0.

В этом случае предельная точка $x_0 \in E$, поэтому на языке $\varepsilon - \delta$-определение принимает вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in E \subset \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1.4.1)$$

Приращение функции одной переменной

Если в определении (1.4.1) ($x - x_0 = \Delta x$) приращение аргумента, $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ – приращение функции, то определение (1.4.1) можно записать в виде:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in E \subset \mathbb{R}, |\Delta x| < \delta) : |\Delta f(x_0)| < \varepsilon \qquad (1.4.2)$$

Поэтому из непрерывной функции малым приращением аргумента соответствуют малые приращения функции.

Непрерывность функции многих переменных

Обобщим определения непрерывности функции одной переменной на случай функции многих переменных. Пусть на множестве $E \subset \mathbb{R}^k$ задана функция $y = f(\vec{x})$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in E \subset \mathbb{R}^k$ и пусть $\vec{x}_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_k}) \in E \subset \mathbb{R}^k$ - предельная точка множества E.

Функция $y = f(\vec{x})$ называется непрерывной в точке $\vec{x}_0$, если:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) \qquad \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_1 \\ \cdots \\ x_k \to a_k}} f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_k}) \quad (1.4.3)$$

Непрерывность на языке $\varepsilon - \delta$

На языке «$\varepsilon - \delta$» это определение получается из определения (1.4.1) при замене $x \to \vec{x}$, $x_0 \to \vec{x}_0$ и $|x - x_0| \to ||\vec{x} - \vec{x}_0||$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall \vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^k,\ ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < \delta) : |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon \tag{1.4.4}$$

Приращение аргументов и функции

В определении (1.4.4) обозначим:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 = (x_1 - x_{0_1}, x_2 - x_{0_2}, ..., x_k - x_{0_k}) = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_k) \tag{1.4.5}$$

— вектор приращения аргументов.

$$\Delta f(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \tag{1.4.6}$$

— приращение функции, аналогичное (1.4.2), только здесь Δx заменяем на вектор $\Delta\vec{x}$, и соответственно $|\Delta x|$ заменяем на $||\Delta\vec{x}||$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall \vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^k,\ ||\Delta\vec{x}|| < \delta) : |\Delta f(\vec{x}_0)| < \varepsilon \tag{1.4.7}$$

— здесь $||\Delta\vec{x}|| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_k)^2}$.

Полное приращение функции

Если дать приращение переменной $\vec{x}$ в точке $\vec{x}_0$ по все независимым переменным одновременной т.е. $\vec{x} - \vec{x}_0 = \Delta\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + \Delta\vec{x} = (x_1 + x_{0_1}, x_2 + x_{0_2}, ..., x_k + x_{0_k})$, то приращение, которое получит функция $f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ называется полным приращением функции (1.4.8).

$$\begin{aligned}\Delta f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = \\ = f(x_1 + x_{0_1}, x_2 + x_{0_2}, ..., x_k + x_{0_k}) - f(x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_k})\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Непрерывность по совокупности переменных

Тогда определение непрерывности (1.4.7) словами можно сформулировать так:

Функция $y = f(\vec{x})$ непрерывна в точке $\vec{x}_0$ по совокупности переменные (т.е. по всем переменным $x_1, x_2, ..., x_k$ одновременно), если малым приращениям всех независимых переменных соответствует малое полное приращение функции.

Частное приращение функции

Для функции многих переменных приращение аргумента можно давать также только по отдельности переменной. Обозначим ее x_i, где $i = 1,2,...,\vec{k}$, что означает либо по x_1, либо по x_2, ..., либо по x_k. Вектор приращений аргументов в этом случае принимает вид:

$$\Delta\vec{x} = (0, ..., 0, \Delta x_i, 0, ..., 0)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \Delta\vec{x} = (x_{0_1}, ..., x_{0_{i-1}}, x_{0_i} + \Delta x_i, x_{0_{i+1}}, ..., x_{0_k})$$

Тогда приращение, которое получит функция в этом случае, называется частным приращением функции в точке $\vec{x}_0$ по переменной x_i и обозначается $\Delta_i f(\vec{x}_0)$:

$$\Delta_i f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = f(x_{0_1}, \cdots, x_{0_{i-1}}, x_{0_i} + \Delta x_i, x_{0_{i+1}}, \cdots, x_{0_k}) - \\ - f(x_{0_1}, \cdots, x_{0_{i-1}}, x_{0_i}, x_{0_{i+1}}, \cdots, x_{0_k}) \quad (1.4.9)$$

Непрерывность по отдельной переменной

Функция $y = f(\vec{x})$ называется непрерывной в точке $\vec{x}_0$ по отдельной переменной x_i, если:

$$\lim_{x_i \to x_{0_i}} f(x_{0_1}, ..., x_{0_{i-1}}, x_{0_i}, x_{0_{i+1}}, ..., x_{0_k}) = \\ = f(x_{0_1}, ..., x_{0_{i-1}}, x_{0_i}, x_{0_{i+1}}, ..., x_{0_k}), \quad (1.4.10)$$

здесь $i = \overline{1, k}$, т.е. функция может быть непрерывной, либо по переменной x_1, либо x_2, ..., либо по x_k. В этом случае:

$$||\Delta\vec{x}|| = \sqrt{0 + ... + 0 + (\Delta x_i)^2 + ... + 0} = \sqrt{(\Delta x_i)^2} = |\Delta x_i| \quad (1.4.11)$$

Тогда определение (1.4.7) принимает вид и значит:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall\vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^k, |\Delta x_i| < \delta) : |\Delta_i f(\vec{x}_0)| < \varepsilon \quad (1.4.12)$$

Функция $y = f(\vec{x})$ называется непрерывной в точке $\vec{x}_0$ по переменной x_i, если малым приращением этой переменной Δx_i, соответствует малое частное приращение функции $\Delta_i f(\vec{x}_0)$.

Теорема и замечание

Теорема (без доказательства)
Если функция $y = f(\vec{x})$ непрерывна в точке $\vec{x}_0$ по совокупности переменных,

то она будет непрерывна и по каждой переменной в отдельности. Обратно утверждение не всегда верно.

Замечание

Если функция $y = f(\vec{x})$ непрерывна по совокупности переменных, то для нее будет выполняться все теоремы о непрерывности, доказанные для функции одной переменной.