



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH**

**Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa**

AEROSPACE STRUCTURES

3D bars structure: Glider

Sergi Marsol

Nicolás Cortines

GRETA- GROUP 11

PROFESSOR

Juan Carlos Cante

Thursday 14th March, 2024

Contents

1	Parte 1, Problema Dinámico	2
1.1	Masa total y tensor de inercia:	2
1.2	Standard flight conditions, reacción del piloto:	4
1.3	Ecuaciones del movimiento, con efecto del <i>gust</i> :	6
1.4	Velocidad y aceleración lineal y angular:	8
2	Parte 2: Problema Cuasiestático	12
2.1	Grados de Libertad a Fijar	12
2.2	Simulación y Análisis Estructural del Planeador	12
2.3	Factor de Seguridad a tracción:	13
2.4	Factor de Seguridad de Pandeo:	13
3	Conclusiones	14

1 Parte 1, Problema Dinámico

1.1 Masa total y tensor de inercia:

En primer lugar, se nos plantea encontrar la masa total M_{tot} , y el tensor de inercia con respecto a su centro de masas, I_{cm} .

Para ello, se ha procedido a calcular cada una de las masas de las barras y tela del glider. Los datos para completar dicho cálculo se han obtenido a partir de los siguientes parámetros, donde se dividen según el tipo de material.

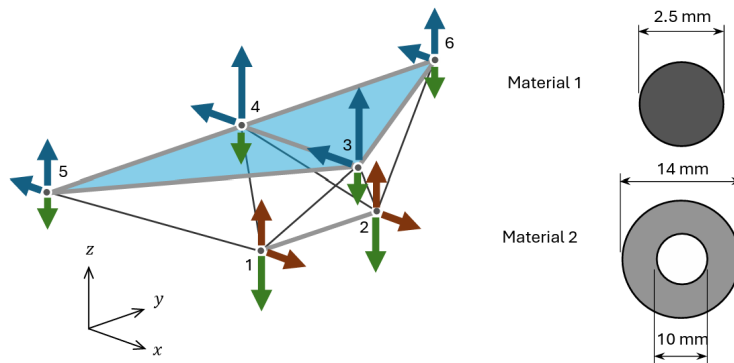


Figure 1: Distribución nodos, tipo de elementos y fuerzas en cada nodo del ala delta.

Upper surface		Cables and bars		
Surface density, ρ_s (kg/m ²)	1.55	Property	Cables	Bars
Surface area, S (m ²)	3.75	Density, ρ_i (kg/m ³)	1500	2600
Lift coefficient, C_L	2.6	Young's modulus, E_i (MPa)	150000	78000
Drag coefficient, C_D	1.45	Yield strength, σ_i^* (MPa)	150	240

Por consiguiente, se ha obtenido un vector con el valor de masa de cada uno de los nodos. Cabe mencionar, que para la tela se ha realizado la modelización de tal forma que los nodos 3 y 4 tengan el doble de peso que el 5 y el 6. Por ende, a partir de dicho vector y la masa total del piloto, se ha calculado el peso de operación de la aeronave.

$$M_{tot} = 93.503 \text{ Kg}$$

Por otro lado, para obtener el tensor de inercia I_{cm} , se ha procedido, en primer lugar, a calcular la posición del centro de masas.

El centro de masas de un conjunto de partículas se calcula como el promedio ponderado de las posiciones de las partículas, donde el peso de cada posición es la masa de la partícula correspondiente. Si se tiene un conjunto de N partículas con masas m_i y posiciones $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, entonces el centro de masas \mathbf{R}_{CM} se puede calcular de la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$$

donde $M = \sum_{i=1}^N m_i$ es la masa total del sistema.

El tensor de inercia de un conjunto de partículas se calcula como el promedio ponderado de los tensores de inercia individuales de las partículas, donde el peso de cada tensor de inercia es la masa de la partícula correspondiente. Para un conjunto de N partículas con masas m_i y posiciones $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, entonces el tensor de inercia I_{ij} se puede calcular de la siguiente manera:

$$I_{ij} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{ij} r_i^2 - r_{i,j} r_{i,j})$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y $r_{i,j}$ son las componentes de la posición de la partícula i (es decir, $r_{i,x} = x_i$, $r_{i,y} = y_i$, $r_{i,z} = z_i$).

El tensor de inercia I_{ij} , por ende, en tres dimensiones queda:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ I_{yy} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ I_{zz} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ I_{xy} &= - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \\ I_{xz} &= - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ I_{yz} &= - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \end{aligned}$$

Como consecuencia, en nuestro caso se obtiene:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44.4131 & 0 & 5.7489 \\ 0 & 16.0967 & 0 \\ 5.7489 & 0 & 52.0303 \end{pmatrix};$$

1.2 Standard flight conditions, reacción del piloto:

A continuación, se procede a calcular la fuerza de reacción que ejerce el piloto en los nodos 1 y 2. Para ello, se aplicarán condiciones de vuelo estándares.

En las condiciones de vuelo estándar, se constatan las siguientes ecuaciones

1. Equilibrio de fuerzas en el eje vertical, segunda ley de Newton:

$$L + R_z - W = M \frac{dv_z}{dt}$$

2. Equilibrio de fuerzas en el eje horizontal, segunda ley de Newton

$$R_x = D$$

3. Equilibrio de momentos respecto al centro de gravedad (CG):

$$\sum \vec{M}_{CG} = \vec{0}$$

Estas ecuaciones describen el estado del vuelo, donde existe una aceleración vertical, en el eje z de descenso. La suma de momentos alrededor del centro de gravedad es cero y la reacción del PIC¹ es igual a la resistencia. Estas condiciones son características del vuelo en crucero de planeo, donde la aeronave se mueve efectuando un descenso con una cierta aceleración vertical.

En nuestro caso de estudio, se tienen 5 incógnitas, $R_{x1}, R_{x2}, R_{z1}, R_{z2}$, las cuatro reacciones, y v_z la velocidad de descenso de la aeronave. Por consiguiente, son necesarias 5 ecuaciones.

A priori, por simetría, se ha concluido que $R_{x1} = R_{x2}$ y $R_{z1} = R_{z2}$. Estas relaciones vienen dadas del sumatorio de momentos tanto en la dirección del eje z como x . En consecuencia, el problema se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales algebraicas, siendo esta $M_{yCG} = 0$ y $L + R_z - W = M \frac{dv}{dt}$.

Cabe mencionar, que la fuerza de sustentación y resistencia aerodinámica, las cuales se distribuyen de forma uniforme a lo largo del ala, se han tratado como cargas puntuales en cada uno de los nodos en contacto, siguiendo el mismo planteamiento que para el cálculo de la masa total.

Por ende, el sistema diferencial algebraico de ecuaciones resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2R_x - D = 0 \\ 2R_z + L - M_{\text{total}} \cdot g = M_{\text{total}} \frac{dv_z}{dt} \\ 2R_z |x_{1,1} - \bar{x}_1| + 2R_x |x_{1,3} - \bar{z}_1| \\ + \frac{L}{3} (x_{3,1} - \bar{x}_3) + \frac{D}{3} (x_{3,3} - \bar{z}_3) \\ + \frac{L}{3} (x_{4,1} - \bar{x}_4) + \frac{D}{3} (x_{4,3} - \bar{z}_4) \\ + \frac{L}{6} (x_{5,1} - \bar{x}_5) + \frac{D}{6} (x_{5,3} - \bar{z}_5) \\ + \frac{L}{6} (x_{6,1} - \bar{x}_6) + \frac{D}{6} (x_{6,3} - \bar{z}_6) = 0 \end{array} \right.$$

y las reacciones, obtenidas analíticamente al resolver el sistema, son:

$$R_z = 387.73 \tanh(2.0132 \cdot t)^2; \quad R_x = 39.541 \tanh(2.0132 \cdot t)^2;$$

¹Pilot in command

Dichas funciones se pueden observar, a continuación:

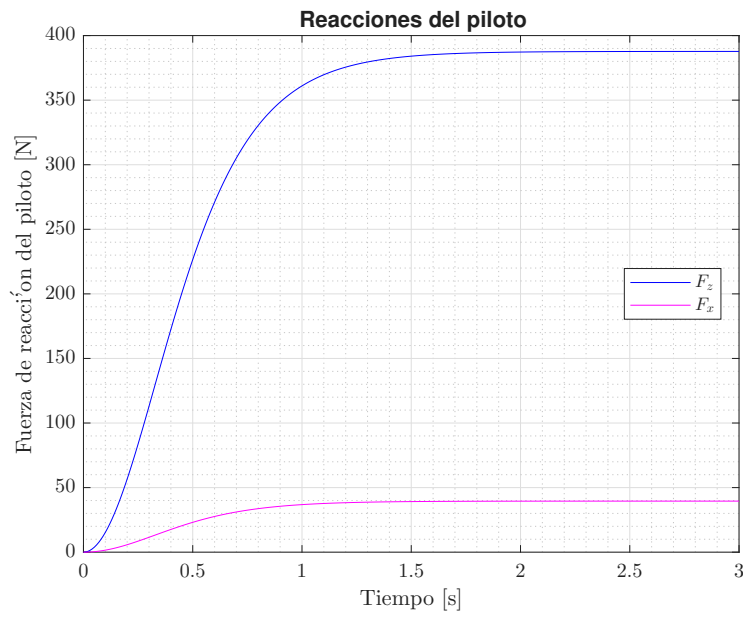


Figure 2: Reacciones del piloto en función del tiempo

El gráfico de la velocidad de descenso, en función del tiempo, es:

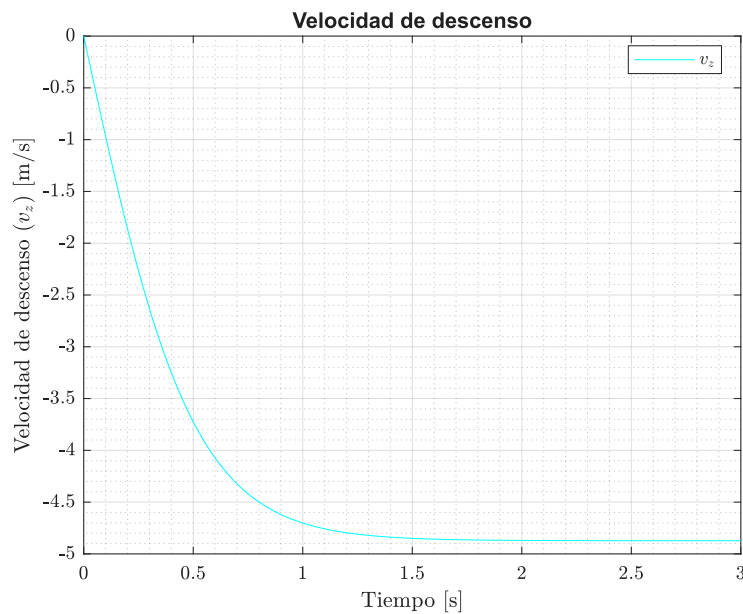


Figure 3: Velocidad de descenso en función del tiempo

1.3 Ecuaciones del movimiento, con efecto del *gust*:

En este apartado se han formulado las ecuaciones del movimiento teniendo en cuenta el efecto de la ráfaga y la reacción del piloto ante ella. Cabe mencionar que la ráfaga produce un momento de cabeceo neto, y se debe considerar qué $\frac{d\Omega_y}{dt} \neq 0$.

En este apartado, en contraposición al anterior, en el tiempo $t_g = 3\text{s}$ del descenso, la ráfaga produce un aumento repentino de la sustentación en el nodo 3, dado por la siguiente expresión:

$$\Delta L = L_g \sin\left(\frac{\pi t - t_g}{\Delta t_g}\right); \quad L_g = \frac{1}{2}\rho AC_L V_g^2$$

para $t_g < t < t_g + \Delta t_g$, con $V_g = 2.4\text{ m/s}$ y $\Delta t_g = 0.7\text{ s}$. Por consiguiente, en el momento $t_r = t_g + 0.5\text{ s}$, el piloto reacciona a esta ráfaga aplicando una fuerza vertical adicional distribuida entre los nodos 1 y 2 para devolver el planeador a sus condiciones de vuelo estándar:

$$\Delta R = -L_g (c_3(t - t_r)^3 - c_2(t - t_r)^2 + c_1(t - t_r))$$

para $t_r < t < t_r + \Delta t_r$, con $c_3 = -1.9218$, $c_2 = 6.0996$, $c_1 = -4.512$ y $\Delta t_r = 2\text{ s}$.

Dicho proceso se esquematiza en la siguiente figura:

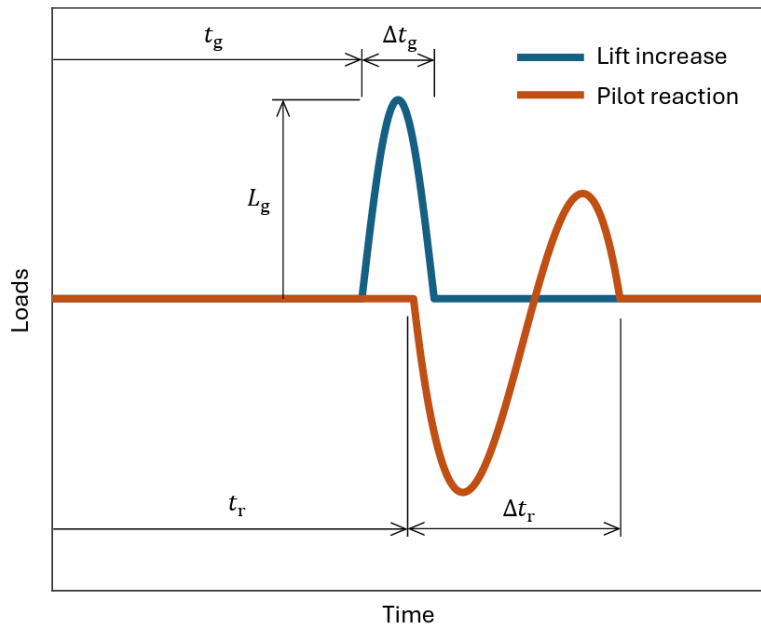


Figure 4: Gust loads evolution over time

Por lo tanto, de acuerdo con las condiciones dadas, se plantean 3 ecuaciones y 4 incógnitas, ya que el efecto de la ráfaga produce una aceleración angular en y . Sin embargo, la ecuación del sumatorio de momentos en y se puede dividir en dos ecuaciones. Es decir, por un lado, una en que la reacción R_z del piloto se considera tal que garantiza el equilibrio de momentos en y para condiciones de vuelo estándar (sin ráfaga), y, por otro lado, otra en que la contribución de los momentos hechos por el incremento de lift (ΔL_g) y la reacción del piloto (ΔR), causan dicha aceleración.

Por ende, el sistema resulta:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2R_x - D = 0 & \\ \Delta L_g + 2R_z + L - M_{\text{total}}g = M_{\text{total}} \frac{dv_z}{dt} & \text{para } t_g \leq t \leq t_r \\ \Delta L_g + \Delta R + 2R_z + L - M_{\text{total}}g = M_{\text{total}} \frac{dv_z}{dt} & \text{para } t_r < t \leq t_g + \Delta t_g \\ \Delta R + 2R_z + L - M_{\text{total}}g = M_{\text{total}} \frac{dv_z}{dt} & \text{para } t_g + \Delta t_g < t \leq t_r + \Delta t_r \\ 2R_z + L - M_{\text{total}}g = M_{\text{total}} \frac{dv_z}{dt} & \text{para } t_r + \Delta t_r \leq t \leq t_f \\ 2R_z|x_{1,1} - \bar{x}_1| + 2R_x|x_{1,3} - \bar{z}_1| & \\ + \frac{L}{3}(x_{3,1} - \bar{x}_3) + \frac{D}{3}(x_{3,3} - \bar{z}_3) & \\ + \frac{L}{3}(x_{4,1} - \bar{x}_4) + \frac{D}{3}(x_{4,3} - \bar{z}_4) & \\ + \frac{L}{6}(x_{5,1} - \bar{x}_5) + \frac{D}{6}(x_{5,3} - \bar{z}_5) & \\ + \frac{L}{6}(x_{6,1} - \bar{x}_6) + \frac{D}{6}(x_{6,3} - \bar{z}_6) = 0 & \end{array} \right.$$

El sistema de ecuaciones no puede calcularse de forma analítica, por lo que se han empleado métodos numéricos para su resolución. Utilizando un *for loop* y la aproximación de las derivadas como $\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{\Delta t}$, se han obtenido las soluciones para el sistema en cada uno de los tres intervalos, es decir, se ha resuelto el sistema de tres ecuaciones tres veces. Estas soluciones corresponden a las incógnitas R_x , R_z y v_z .

Por consiguiente, los incrementos de reacción y sustentación son:

$$\begin{aligned} \Delta R &= 209.81 \cdot (t - 3.5)^2 - 155.2 \cdot t - 66.106 \cdot (t - 3.5)^3 + 543.21 \\ \Delta L_g &= 34.398 \cdot \sin(4.488t - 13.464) \end{aligned}$$

Dichos incrementos y todas las fuerzas que actúan sobre la aeronave se muestran, a continuación:

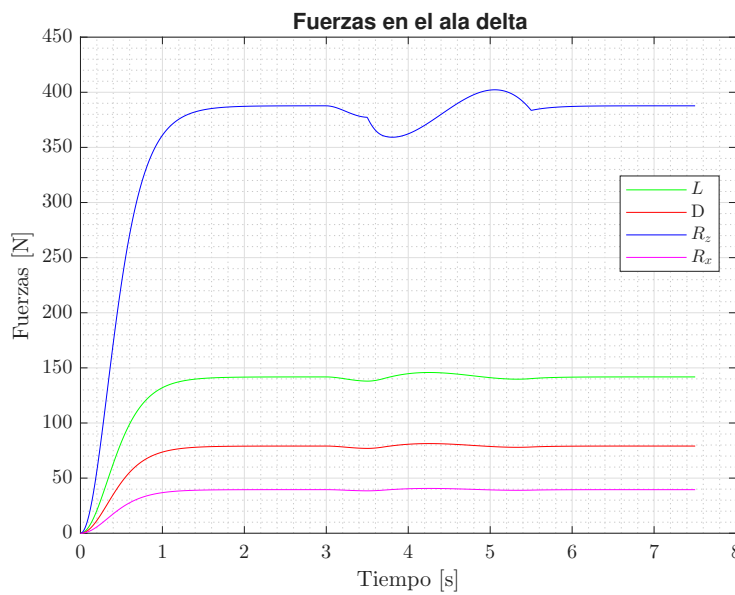


Figure 5: Fuerzas sobre la aeronave

Dicho gráfico también incorpora para las reacciones su incremento según el tiempo.

El gráfico de la velocidad de descenso, en función del tiempo, resulta:

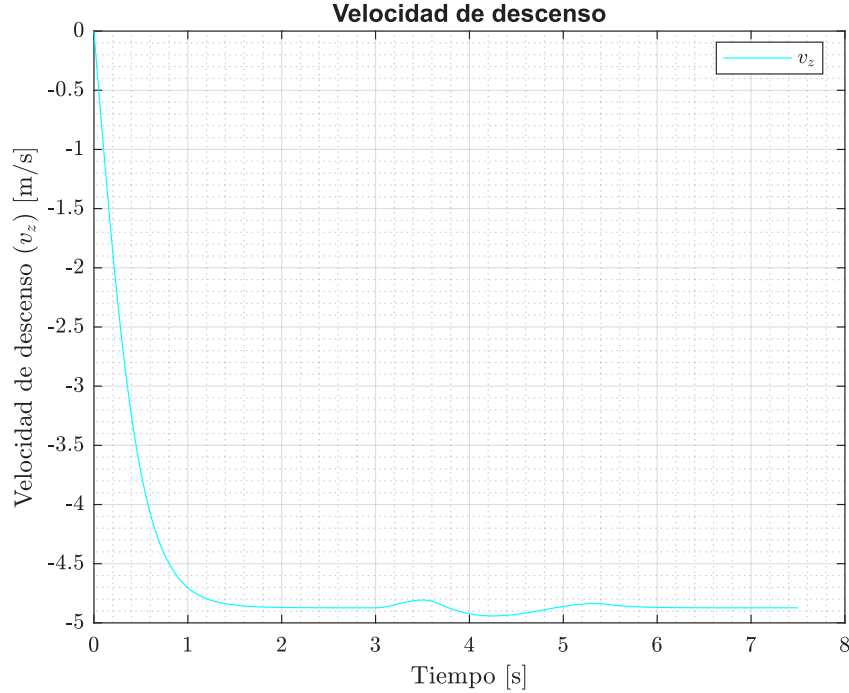


Figure 6: Velocidad de descenso en función del tiempo

Por último, el gráfico y ecuación que rige la velocidad angular de la aeronave durante la ráfaga se detalla en el próximo apartado.

1.4 Velocidad y aceleración lineal y angular:

A continuación, se propone un esquema de integración numérica para obtener la velocidad lineal y angular, \mathbf{V} y $\boldsymbol{\omega}$, y la aceleración lineal y angular, $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ y $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$, del planeador en cada paso de tiempo.

En el apartado anterior se ha obtenido un sistema de ecuaciones algebraico, donde parte de las incógnitas eran la velocidad angular y lineal. Por consiguiente, para resolver las ecuaciones y obtener cada una de las reacciones que actúan sobre la aeronave, se ha tenido que calcular también la velocidad de descenso, Figure 6. Respecto la ecuación que proporciona la velocidad angular, ha quedado desacoplada, y una vez obtenida las otras incógnitas se ha podido calcular.

A continuación, se muestra su ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \Delta_{Lg} \cdot (x_{1,1} - \bar{x}_1) = I_{yy} \cdot \frac{d\omega_y}{dt} & \text{para } t_g \leq t \leq t_r \\ \Delta_R \cdot |x_{1,1} - \bar{x}_1| + \Delta_{Lg} \cdot (x_{1,1} - \bar{x}_1) = I_{yy} \cdot \frac{d\omega_y}{dt} & \text{para } t_r < t \leq t_g + \Delta_{tg} \\ \Delta_R \cdot |x_{1,1} - \bar{x}_1| = I_{yy} \cdot \frac{d\omega_y}{dt} & \text{para } t_g + \Delta_{tg} < t \leq t_r + \Delta_{tr} \\ 0 = I_{yy} \cdot \frac{d\omega_y}{dt} & \text{para } t_r + \Delta_{tr} \leq t < t_f \end{cases}$$

Los gráficos equivalentes resultan:

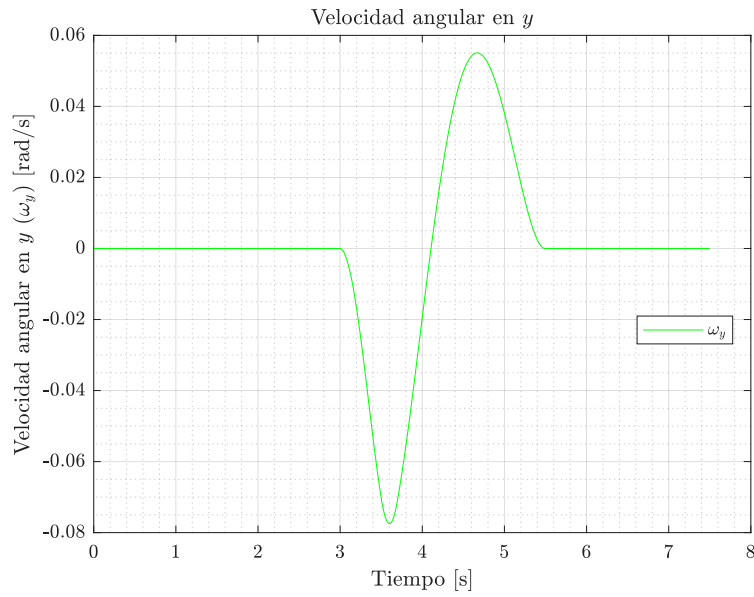


Figure 7: Velocidad angular

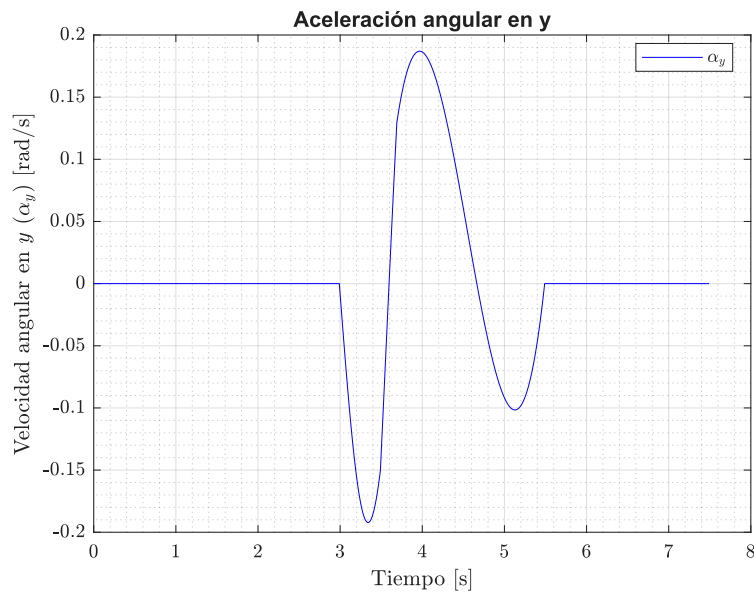


Figure 8: Aceleración angular

A posteriori, se ha calculado la aceleración en cada nodo de acuerdo con la siguiente expresión:

$$a_i = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

Aproximación: Si el *timestep* Δt es suficientemente pequeño se pueden aproximar las derivadas como:

$$\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{\Delta t}$$

Obteniéndose así el siguiente gráfico:

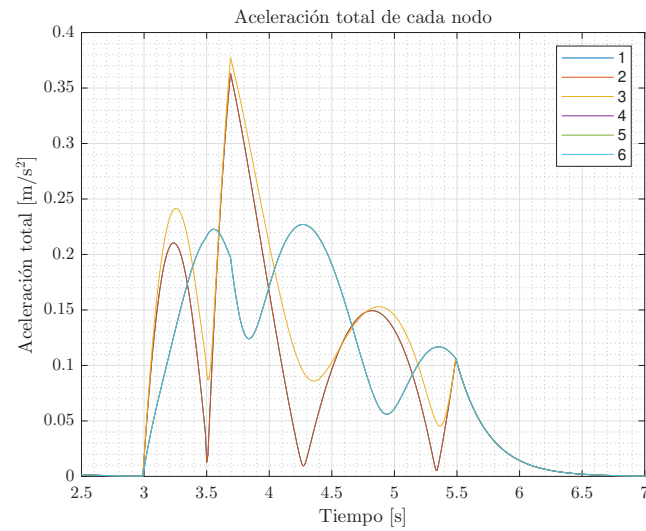


Figure 9: Valor absoluto de la aceleración de cada nodo

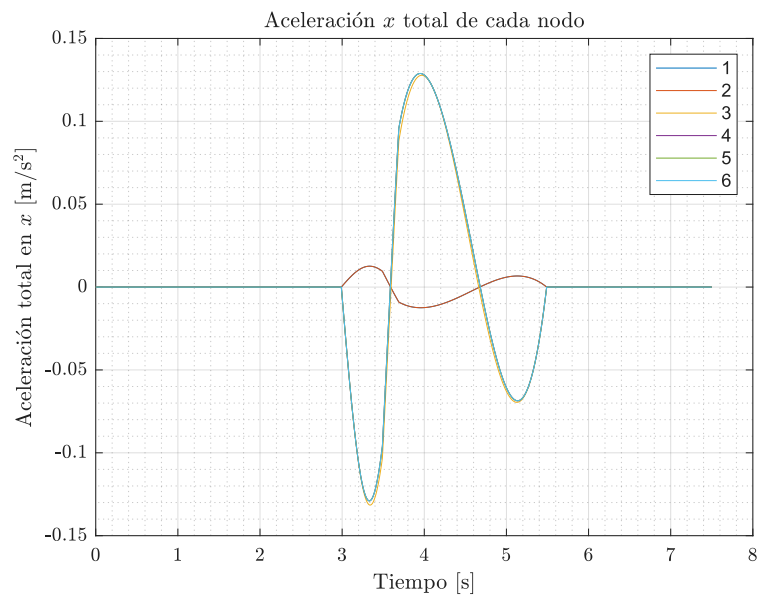
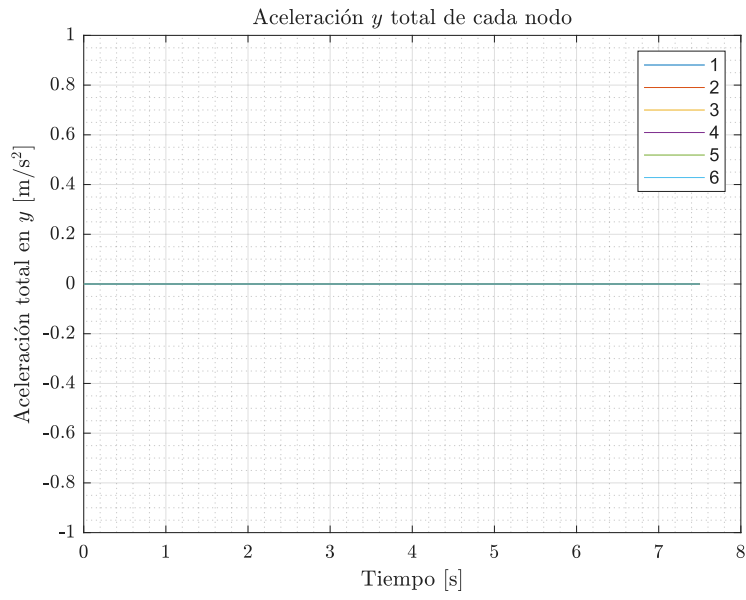
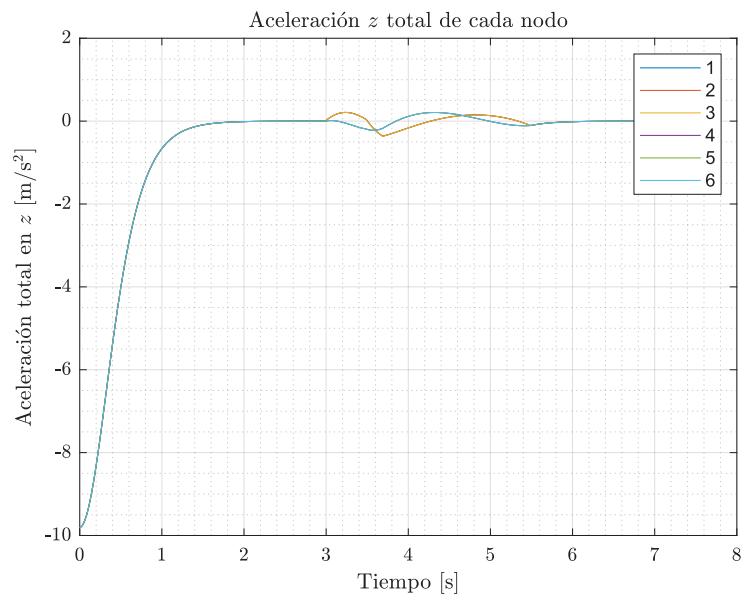


Figure 10: Aceleración nodos en x

Figure 11: Aceleración nodos en y Figure 12: Aceleración nodos en z

2 Parte 2: Problema Cuasiestático

En esta sección del trabajo, se lleva a cabo el análisis estructural del planeador teniendo en cuenta el efecto de las ráfagas de viento.

2.1 Grados de Libertad a Fijar

Dado que se está abordando un problema cuasiestático, es necesario fijar ciertos grados de libertad para eliminar los nodos de movimiento de cuerpo rígido. Estas restricciones se especifican en la matriz p , que muestra qué grados de libertad de cada nodo se han fijado. Dado que estamos trabajando en un entorno tridimensional, se deben fijar 6 grados de libertad.

La matriz p resultante es la siguiente:

$$p = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz muestra el nodo, el grado de libertad según su dirección, y el desplazamiento impuesto (en este caso, 0) de la aeronave.

2.2 Simulación y Análisis Estructural del Planeador

En esta sección, se resuelve el problema estructural cuasiestático. Por un lado, se imponen las fuerzas externas correspondientes a cada intervalo de tiempo, incluyendo el *lift* y el *drag*, así como las reacciones y sus incrementos. Por otro lado, aparecen los términos de *d'Alembert* debido a la propia aceleración de cada uno de los nodos. Todas estas ecuaciones se modelizan como funciones a trozos, dependiendo del intervalo de tiempo.

A continuación, se puede acceder al vídeo de la modelización de la estructura:



Para visualizar el vídeo, escanea el código QR.

Cabe destacar que, a pesar de llevar a cabo todos los pasos y procedimientos, después de ejecutar el *solver* del sistema, para ciertos intervalos de tiempo (períodos en los que la aeronave se ve afectada por una aceleración variable), las reacciones en los nodos 3 y 4 son del orden de 1 kg. Por consiguiente, este error puede deberse a posibles fallas en el proceso iterativo o en la aplicación de los términos de *d'Alembert* y las fuerzas externas, dado que las funciones del MATLAB están programadas de forma genérica. Por lo tanto, los siguientes valores de coeficientes de seguridad, tanto a tracción como de pandeo, pueden ser incorrectos a pesar de utilizar las fórmulas indicadas en la práctica. Como consecuencia de esta casuística,

se analizarán dichos factores y se llegará a una conclusión sobre si los valores calculados son erróneos o tienen sentido.

2.3 Factor de Seguridad a tracción:

Después de realizar el análisis, utilizando las resistencias a tracción (yield strength), σ_i , se puede calcular el factor de seguridad para cada una de las tensiones máximas de tracción para el cable y la barra, respectivamente.

A continuación, se detalla el factor de seguridad mínimo, es decir, más crítico, para los elementos estructurales.

	Cable	Bar
σ_i (MPa)	150	240
Factor de Seguridad	15.64	664

Para obtener estos valores se ha calculado el factor de seguridad para cada cable y barra de la estructura para todos los instantes de tiempo y se ha seleccionado el valor mínimo de todos los calculados, tanto para los de las barras como para los de los cables.

2.4 Factor de Seguridad de Pandeo:

En este apartado, se calcula el factor que determina el riesgo de pandeo de cada uno de los elementos en cuestión. Para ello, se hace uso de la tensión crítica de pandeo, la cual se detalla a continuación:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2 \cdot A}$$

Por consiguiente, se muestra la siguiente tabla el factor de seguridad mínimo, es decir, el elemento que tiene la mayor capacidad a sufrir pandeo:

	Cable	Bar
σ_{cr} (MPa)	1.6755	0.0680
Factor de Seguridad	0.1840	0.20185

Aquí se evalúa la capacidad de los elementos para soportar cargas compresivas, comparando la tensión crítica con la máxima tensión de compresión permitida.

Por lo tanto, se puede observar que debido a estos factores de seguridad, tanto los cables como las barras, sufrirán pandeo. En consecuencia, los elementos estructurales deberían recibir una pretensión con el fin de evitar este suceso.

Cabe mencionar que estos resultados probablemente no sean los correctos debido a que, como hemos dicho, las reacciones no nos han salido todas cero pese a todo el empeño, esfuerzo y ayuda que hemos brindado a esclarecer este hecho.

3 Conclusiones

En primer lugar, este estudio ha permitido analizar el comportamiento dinámico del planeador frente a un vuelo de descenso, *glide*, con una aceleración vertical. Posteriormente, una ráfaga de viento ha provocado una perturbación en este vuelo simétrico, lo que se ha traducido en una alteración en la respuesta del piloto ante los mandos y ciertos incrementos en las fuerzas de sustentación y resistencia aerodinámica. La primera parte de la práctica nos ha brindado la oportunidad de examinar el comportamiento de la aeronave, así como las fuerzas externas y las aceleraciones que actúan en cada nodo de la estructura. Estos datos serán parte del conjunto de datos de entrada para la segunda parte del trabajo, donde se analiza la evolución estructural de la aeronave compuesta por articulaciones a lo largo de un intervalo de tiempo específico.

En segundo lugar, como se mencionó previamente, a partir de los datos de entrada (*input data*) y las aceleraciones se ha modelado el problema cuasiestático. En esta modelización, dado que la aeronave experimenta una trayectoria de descenso con una cierta aceleración, es necesario restringir ciertos grados de libertad del sólido rígido para poder obtener exclusivamente el desplazamiento de los nodos. Como consecuencia de esta metodología, surgen unas reacciones impuestas en los nodos, las cuales deben ser nulas en todo momento. Estas reacciones se anulan debido al sumatorio de fuerzas externas impuestas y los términos de *d'Alembert* que surgen del propio movimiento acelerado del planeador. Cabe mencionar, que en nuestro caso en los nodos 3 y 4 surgen ciertos picos de valor aproximado de 1Kg que pueden ser consecuencia de ciertas fallas en el proceso. Como consecuencia, se han completado los siguientes apartados a partir de los datos, probablemente erróneos, obtenidos de la resolución de la estructura para cada instante de tiempo. Una vez realizada la simulación y obtenidas las variables de desplazamiento y tensiones en cada uno de los elementos en función del tiempo, es posible evaluar ciertos parámetros críticos en el diseño de aeronaves. Dichos parámetros incluyen los factores de seguridad de los cables y barras tanto a tracción como a compresión. En nuestro caso, si tomáramos como buenos los valores de tensión obtenidos, concluiríamos que se produciría pandeo en la estructura, tanto por parte de las barras como de las cuerdas, lo que implicaría tener que realizar un pretensado con tal de evitar dicho suceso.