

УДК 510

Хромов Н. А., Голяндина Н. Э.

## Тензорные HO-SSA и HO-MSSA для выделения сигнала

**1. Введение.** SSA (Singular Spectrum Analysis) [3] является распространённым методом анализа и прогноза временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и выделения тренда и периодических компонент из временного ряда. Хотя в последнее время получили распространение методы машинного обучения (например, в [6] рассматривается задача прогноза с предобработкой временного ряда методом SSA перед применением нейронных сетей для прогноза), задача анализа одного недлинного временного ряда не теряет своей актуальности. Ряд методов рассматривает при этом конкретные модели для сигнала/тренда (например, в [7] рассматривается полиномиальная регрессия). Метод SSA не требует задания параметрической модели, поэтому он более универсальный. Однако, при этом метод SSA хорошо работает и с моделью в виде суммы комплексных экспонент или в виде суммы экспоненциально-модулированных гармоник в вещественном случае, что позволяет оценивать параметры в этих моделях.

Метод SSA основан на сингулярном разложении особой матрицы построенной по временному ряду, называемой траекторной. Обобщение метода SSA на случай многомерных сигналов называется MSSA [4]. Для оценки параметров временного ряда в параметрической модели метода SSA используется метод ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques) [2], который также основан на сингулярном разложении траекторной матрицы и относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В работе [1] предлагается модификация метода ESPRIT, основанная на переходе от траекторной матрицы и матричного сингулярного разложения к траекторному тензору и тензорному сингулярному разложению, и демонстрируется преимущество такой модификации

---

*Хромов Никита Андреевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: hromovn@mail.ru, тел.: +7(981)509-25-94

*Голяндина Нина Эдуардовна* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: neg99@mail.ru, тел.: +7(000)000-00-00

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-345-6

при оценке параметров, в частности, частот. В данной работе мы рассматриваем аналогичные тензорные модификации методов SSA и MSSA (HO-SSA и HO-MSSA, где HO — сокращение от high order) для выделения сигналов из временных рядов. Целью работы является сравнение методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями на временных рядах, аналогичных тем, что были рассмотрены в [1].

В разделах ... мы коротко опишем методы SSA и MSSA, а в разделах ... их тензорные модификации. Описание будет дано в более общей комплексной форме, хотя применять метод мы будем в вещественном случае.

Так как для выделения сигнала нужно знать его ранг, то в разделе ... обсуждается ранг сигнала в контексте тензорных модификаций HO-SSA и HO-MSSA.

В разделе ... описаны результаты численных сравнений.

**2. Описание модели.** Опишем рассматриваемые одномерные и многомерные комплексные сигналы. Пусть дан одномерный временной ряд, состоящий из  $N$  комплексных значений  $s_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , и пусть этот ряд представим в виде конечной суммы  $R$  экспоненциально-модулированных комплексных гармоник

$$s_n = \sum_{j=1}^R a_j e^{-\alpha_j n} e^{i(2\pi\omega_j n + \varphi_j)}. \quad (1)$$

Параметрами модели являются амплитуды  $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , фазы  $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ , частоты  $\omega_j \in [0, 1/2]$  и степени затухания  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ .

Модель многомерного сигнала имеет вид набора  $P$  одномерных сигналов вида (1), то есть

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R(p)} a_j^{(p)} e^{-\alpha_j^{(p)} n} e^{i(2\pi\omega_j^{(p)} n + \varphi_j^{(p)})}, \quad (2)$$

где  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , а  $p$  ( $1 \leq p \leq P$ ) отвечает за номер одномерного временного ряда. Однако мы будем рассматривать частный случай такой модели, при котором параметры  $R(p)$ ,  $\omega_j^{(p)}$  и  $\alpha_j^{(p)}$  не зависят от номера ряда  $p$ :

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{-\alpha_j n} e^{i(2\pi\omega_j n + \varphi_j^{(p)})}. \quad (3)$$

Это обосновано тем, что такая модель применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [8]. Кроме того, в работе [1] используется именно этот частный случай модели.

**Замечание.** В общем случае можно рассматривать модели временных рядов вида (1) и (3), в которых амплитуды являются ненулевыми многочленами, однако этот случай выходит за рамки этой работы.

**3. Ряды конечного ранга и тензорные ранги.** Одними из ключевых объектов в теории SSA являются *ряды конечного ранга*. В данном разделе мы изложим теорию, касающуюся рядов конечного ранга, а затем рассмотрим теорию тензорных рангов, и приведём утверждения, связывающие ранги рядов с рангами определенных тензоров.

**3.1. Ряды конечного ранга.** Введём несколько вспомогательных определений.

**Определение 1.** *Оператором вложения с длиной окна  $L$*  будем называть отображение, преобразующее временной ряд  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  в ганкелеву матрицу размерности  $L \times K$  ( $K = N - L + 1$ ) следующим образом:

$$\mathbb{H}_L((x_0, x_1, \dots, x_{N-1})) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{K-1} \\ x_1 & x_2 & \ddots & \dots & \vdots \\ x_2 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & x_{N-2} \\ x_{L-1} & \dots & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

**Определение 2.** *Траекторной матрицей одномерного временного ряда  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  с длиной окна  $L$*  называется матрица  $\mathbf{H}$ , полученная применением оператора вложения с длиной окна  $L$  к данному временному ряду.

**Определение 3.** Ряд  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  называется *рядом конечного ранга  $d$*  ( $d < N/2$ ), если для любой длины окна  $L < N$  такой, что  $\min(L, K) \geq d$ , траекторная матрица этого ряда, построенная по данной длине окна, имеет ранг  $d$ .

**Пример 1.** Временной ряд вида (1) имеет ранг равный количеству уникальных пар  $(\alpha_j, \omega_j)$  по всем  $j$  [9].

**Определение 4.** Рассмотрим многомерный временной ряд

$$\left(s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \dots, s_{N-1}^{(p)}\right), \quad p = 1, 2, \dots, P.$$

Построим для каждого одномерного ряда  $\left(s_n^{(p)}\right)_{n=0}^{N-1}$  траекторную матрицу с длиной окна  $L$ :

$$\mathbf{H}_p = \mathbb{H}_L \left(s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \dots, s_{N-1}^{(p)}\right).$$

Тогда *траекторной матрицей* данного многомерного ряда с длиной окна  $L$  называется матрица  $\mathbf{H}$ , полученная приписыванием матриц  $\mathbf{H}_p$  друг за другом по столбцам:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P]. \quad (5)$$

**Замечание.** Ранг многомерного ряда определяется аналогично рангу одномерного ряда с заменой траекторной матрицы одномерного ряда на траекторную матрицу многомерного ряда.

**Пример 2.** Многомерный временной ряд вида (2) имеет ранг равный количеству уникальных пар  $(\alpha_j^{(p)}, \omega_j^{(p)})$  по всем  $j$  и  $p$  [9].

**Пример 3.** Так как  $\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = (e^{2\pi i\omega n + \varphi_n} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi_n})/2$ , то ранг ряда

$$s_n = Ae^{\alpha n} \cos(2\pi\omega n + \varphi) \quad (6)$$

с  $A \neq 0$  равен 2, если  $\omega \in (0, 1/2)$  и равен 1, если  $\omega \in \{0, 1/2\}$ .

**Пример 4.** Пусть ряд представляется в виде суммы  $M$  экспоненциально-модулированных гармоник

$$s_n = \sum_{j=1}^M A_j e^{\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n + \varphi_j), \quad (7)$$

где  $A_j \neq 0$ . Обозначим

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \text{иначе,} \end{cases}$$

тогда ранг ряда (7) равен сумме  $\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega)$ , где  $\Omega$  – множество уникальных пар  $(\omega_j, \alpha_j)$  по всем  $j$ .

**3.2. Тензорные ранги.** Введём вспомогательные определения.

**Определение 5.** *Траекторным тензором одномерного временного ряда  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  с длинами окна  $I$  и  $L$  называется тензор  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I \times L \times J}$  ( $J = N - I - L + 2$ ), элемент  $h_{ilj}$  которого равен  $x_{i+l+j-3}$ . Другими словами, слой траекторного тензора с номером  $j$  получается как траекторная матрица, построенная по части исходного ряда  $(x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+I+L-3})$  с длиной окна  $I$ :*

$$\mathcal{H}_{..j} = \mathbb{H}_I((x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+I+L-3})). \quad (8)$$

**Определение 6.** *Развёрткой тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  по измерению  $n$  называют матрицу  $\mathbb{A}_{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times I_{n+1}I_{n+2}\dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}}$ , в которой элемент исходного тензора  $a_{i_1 i_2 \dots i_M}$  содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером*

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^M \left[ (i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

**Определение 7.**  *$n$ -рангом тензора  $\mathcal{A}$  называют ранг развёртки этого тензора по измерению  $n$ . Обозначение:  $\text{rank}_n(\mathcal{A})$ .*

Основываясь на свойствах сингулярного разложения высшего порядка (HOSVD), можно доказать следующее утверждение, позволяющее перенести понятие одномерного ряда конечного ранга на язык траекторных тензоров этого ряда.

**Утверждение 1.** *(Об  $n$ -рангах траекторного тензора одномерного ряда конечного ранга) Пусть временной ряд  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  имеет ранг  $d$  ( $d < N/2$ ) в терминах SSA, тогда для любых значений параметров  $I$  и  $L$  таких, что*

$$\begin{aligned} I, L &< N, \\ d &\leq \min(I, L, J), \end{aligned}$$

все  $n$ -ранги траекторного тензора  $\mathcal{H}$ , построенного по этому ряду с параметрами  $I$  и  $L$ , будут равны  $d$ .

**Определение 8.** *Траекторным тензором многомерного временного ряда*

$$(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{N-1}^{(p)}), \quad p = 1, 2, \dots, P$$

с длиной окна  $L$  называется тензор  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{L \times K \times P}$  ( $K = N - L + 1$ ), элемент  $h_{lkr}$  которого равен  $x_{l+k-2}^{(p)}$ . То есть слой траекторного тензора с номером  $p$  получается как траекторная матрица, построенная по ряду с номером  $p$  с длиной окна  $L$ :

$$\mathcal{H}_{..p} = \mathbb{H}_L \left( \left( s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \dots, s_{N-1}^{(p)} \right) \right). \quad (9)$$

Основываясь на свойствах HOSVD, можно доказать следующее утверждение, связывающее понятие многомерного ряда конечного ранга и понятие  $n$ -рангов траекторного тензора этого ряда.

**Утверждение 2.** (Об  $n$ -рангах траекторного тензора многомерного ряда конечного ранга) Пусть временной ряд

$$\left( x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{N-1}^{(p)} \right), \quad p = 1, 2, \dots, P$$

имеет ранг  $d$  в терминах SSA, тогда для траекторного тензора  $\mathcal{H}$ , построенного по любой длине окна  $L < N$  такой, что  $\min(L, K) \geq d$ , выполняется  $\text{rank}_1(\mathcal{H}) = \text{rank}_2(\mathcal{H}) = d$ , а 3-ранг этого тензора равен рангу матрицы

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \dots & x_{N-1}^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & \dots & x_{N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_0^{(P)} & x_1^{(P)} & \dots & x_{N-1}^{(P)} \end{pmatrix}.$$

**4. Постановка задачи для одномерного сигнала.** Пусть дан одномерный временной ряд, состоящий из  $N$  комплексных значений  $s_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , и пусть этот ряд представим в виде конечной суммы  $R$  экспоненциально-модулированных комплексных гармоник. Параметрами модели являются амплитуды  $a_j$ , фазы  $\varphi_j$ , частоты  $\omega_j$  и степени затухания  $\alpha_j$ . В работе [1] рассматривается задача оценки параметров  $\omega_j$  и  $\alpha_j$ , мы же будем рассматривать задачу оценки значения самого сигнала по временному ряду с шумом. Приведём алгоритм SSA для решения этой задачи.

Первый этап алгоритма – вложение, заключается в выборе длины окна  $L \geq 2R$  так, чтобы  $K = N - L + 1 \geq 2R$ , и преобразовании имеющегося временного ряда в ганкелеву матрицу с помощью оператора вложения:

$$\mathbf{H} = \mathbb{H}_L \left( (s_0, s_1, \dots, s_{N-1}) \right). \quad (10)$$

Полученная матрица называется *траекторной матрицей ряда*. Эту матрицу можно представить в виде её сингулярного разложения (SVD)

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^d \lambda_j U_j V_j^{(\mathbf{H})}, \quad (11)$$

где  $d = \text{rank}(\mathbf{H}) \geq \min(L, K)$ ,  $\lambda_j$  – сингулярные числа матрицы  $\mathbf{H}$ , а матрицы  $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d] \in \mathbb{C}^{L \times d}$  и  $\mathbf{V} = [V_1 : V_2 : \dots : V_d] \in \mathbb{C}^{K \times d}$  ортонормированные. Из теории SSA [3] известно, что траекторные матрицы, построенные по ряду вида (1) с такой длиной окна  $L$ , что  $\min(L, K) \geq 2R$ , имеют ранг  $d = 2R$ . Если на такой сигнал воздействует шум, то ранг траекторной матрицы будет максимальным, и тогда определяется наилучшее приближение траекторной матрицы матрицей ранга  $2R$ :

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{j=1}^{2R} \lambda_j U_j V_j^{(\mathbf{H})}. \quad (12)$$

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении побочных диагоналей матрицы  $\hat{\mathbf{H}}$ , то есть

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,j \in M_n} \hat{h}_{ij}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (13)$$

где  $M_n = \{(i, j) : i + j - 2 = n, 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K\}$ , а  $\hat{h}_{ij}$  – элементы матрицы  $\hat{\mathbf{H}}$ . Результат такого усреднения  $\tilde{s}_n$  считается оценкой сигнала  $s_n$ .

**5. Постановка задачи для многомерного сигнала.** Пусть дан набор из  $P$  одномерных комплексных временных рядов длины  $N$  каждый, и пусть компоненты этих рядов имеют вид

Приведём алгоритм MSSA для решения задачи оценки многомерного сигнала. На первом шаге каждый из одномерных сигналов  $s_n^{(p)}$  преобразуется в траекторную матрицу с длиной окна  $L$

$$\mathbf{H}_p = \mathbb{H}_L \left( \left( s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \dots, s_{N-1}^{(p)} \right) \right). \quad (14)$$

Полученные матрицы укладываются друг за другом вдоль столбцов в одну блочную матрицу называемую *траекторной матрицей многомерного ряда*. Дальнейшие шаги алгоритма идентичны одномерному случаю: траекторная матрица  $\mathbf{H}$  представляется в виде своего сингулярного разложения (11), затем определяется наилучшее

приближение этой матрицы матрицей  $\hat{\mathbf{H}}$  ранга  $2R$  (12), после чего находятся усреднённые значения побочных диагоналей этой матрицы (13), которые и считаются оценками искомого сигнала.

**6. Тензорные модификации алгоритмов выделения сигнала из временного ряда.** В работе [1] были предложены тензорные модификации алгоритма ESPRIT для оценки параметров одномерных и многомерных сигналов. В этом разделе мы приведём расширение этих алгоритмов для решения задачи выделения сигнала из одномерных и многомерных рядов.

**6.1. High-Order SSA.** Пусть дан одномерный временной ряд вида (1). Вместо траекторной матрицы предлагается строить по ряду *траекторный тензор*  $\mathcal{H}$  следующим образом: выбираются два параметра  $I, L \geq 2R$  такие, что  $J \geq 2R$  ( $J = N - I - L + 2$ ), и тогда элемент тензора  $h_{ilj}$  берётся равным  $s_{i+l+j-3}$ . Другими словами, слой траекторного тензора с номером  $j$  получается как траекторная матрица, построенная по части исходного ряда  $(s_{j-1}, s_j, \dots, s_{j+I+L-3})$  с длиной окна  $I$ : На следующем шаге траекторный тензор представляется в виде своего сингулярного разложения высшего порядка (HOSVD) [5]:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{l=1}^{d_2} \sum_{j=1}^{d_3} c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}, \quad (15)$$

где матрицы  $\mathbf{U}_k = [U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_{d_k}^{(k)}] \in \mathbb{C}$  ( $I_1 = I, I_2 = L, I_3 = J$ ) ортонормированные, а  $\circ$  обозначает внешнее произведение векторов.

**Определение 9.** *Развёрткой* тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  по измерению  $n$  называют матрицу  $\mathbb{A}_{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times I_{n+1} I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}}$ , в которой элемент исходного тензора  $a_{i_1 i_2 \dots i_M}$  содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^M \left[ (i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

**Определение 10.**  *$n$ -рангом* тензора  $\mathcal{A}$  называют ранг развёртки этого тензора по измерению  $n$ .

Если во временном ряде отсутствует шум, то все  $n$ -ранги траекторного тензора  $\mathcal{H}$  будут равны  $2R$  и верхние пределы суммирования



во всех суммах в представлении (15) будут равны  $2R$ . В случае, если во временном ряде присутствует шум, то у траекторного тензора будут максимальные  $n$ -ранги, и тогда строится приближение траекторного тензора

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{2R} \sum_{l=1}^{2R} \sum_{j=1}^{2R} c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (16)$$

В работе [5] показано, что хоть такое приближение и не является оптимальным приближением по множеству тензоров с  $n$ -рангами, равными  $2R$ , оно является довольно точным, так как ошибка приближения ограничена сверху.

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении полученного тензора  $\hat{\mathcal{H}}$  вдоль побочных «плоскостей»  $i + l + j = \text{const}$ :

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,l,j \in M_n} \hat{h}_{ilj}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (17)$$

где  $M_n = \{(i, l, j) : i + l + j - 3 = n, 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J\}$ , а  $\hat{h}_{ilj}$  – элементы тензора  $\hat{\mathcal{H}}$ . Результат такого усреднения  $\tilde{s}_n$  считается оценкой сигнала  $s_n$ .

**6.2. High-Order MSSA.** Пусть дан многомерный временной ряд вида (3). На первом шаге выбирается длина окна  $L \geq 2R$  такая, что  $K = N - L + 1 \geq 2R$ , и по этому ряду строится *траекторный тензор многомерного ряда*  $\mathcal{H}$  так, что его элемент  $h_{lkp}$  равен  $s_{l+k-2}^{(p)}$ , где  $1 \leq l \leq L, 1 \leq k \leq K, 1 \leq p \leq P$ . То есть слой траекторного тензора с номером  $p$  получается как траекторная матрица, построенная по ряду с номером  $p$  с длиной окна  $L$ : Затем траекторный тензор представляется в виде своего HOSVD

$$\mathcal{H} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P c_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (18)$$

Если во временном ряде отсутствует шум, то 1- и 2-ранги траекторного тензора  $\mathcal{H}$  будут равны  $2R$ , 3-ранг будет равен  $R$ , и верхние пределы суммирования в представлении (18) будут равны соответствующим  $n$ -рангам. В случае, если во временном ряде присутствует шум, то у траекторного тензора будут максимальные  $n$ -ранги, и то-

гда строится приближение траекторного тензора

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{l=1}^{2R} \sum_{k=1}^{2R} \sum_{p=1}^R c_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (19)$$

Последний шаг алгоритма полностью аналогичен шагу восстановления в алгоритме High-Order SSA и заключается в усреднении полученного приближения  $\hat{\mathcal{H}}$  вдоль побочных «плоскостей»  $l + k + p = \text{const}$ .

**7. Численные сравнения.** В данном разделе приведем результаты численных сравнений методов SSA и MSSA с их тензорными аналогами HO-SSA и HO-MSSA соответственно. Точность выделения сигнала сравнивалась с помощью RMSE оценки сигнала по 1000 реализациям шума. Методы сравнивались на одних и тех же реализациях шума, все различия значимы при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

**7.1. Одномерный сигнал.** Пусть временной ряд имеет вид

$$x_n = e^{-0.01n} \cos(2\pi 0.2n) + e^{-0.02n} \cos(2\pi 0.22n) + \varepsilon_n, \quad (20)$$

где  $n = 0, 1, \dots, 24$ ,  $\varepsilon_n$  – последовательность независимых нормальных случайных величин со стандартным отклонением  $\sigma = 0.03$ .

Сравним точность выделения сигнала при выборе оптимальных для каждого метода длин окна (для SSA  $L = 13$ , а для HO-SSA  $I = 4$  и  $L = 9$ ).

Ранг сигнала в обоих случаях равен 4. Соответственно, число компонент для оценки сигнала будем выбирать равным 4.

В таблице 1 в первых двух столбцах приведены значения RMSE оценок одномерного сигнала (20) методами SSA и HO-SSA. Видно, что метод SSA отделил сигнал с большей точностью, чем метод HO-SSA, что отличается от результатов в [1], где тензорный метод оказался точнее для оценки параметров сигнала.

**7.2. Многомерный сигнал.** Пусть временной ряд имеет вид

$$x_n^{(p)} = c_1^{(p)} e^{-0.01n} \cos(2\pi 0.2n) + c_2^{(p)} e^{-0.02n} \cos(2\pi 0.22n) + \varepsilon_n, \quad (21)$$

где  $n = 0, 1, \dots, 24$ ,  $p = 1, 2, \dots, 12$ ,  $\varepsilon_n$  – последовательность независимых нормальных случайных величин со стандартным отклонением  $\sigma = 0.02$ .

Будем сравнивать точность выделения сигнала при выборе оптимальных для каждого метода длинах окна (для SSA  $L = 22$ , а для HO-SSA  $L = 20$ ).

Ранг сигнала в обоих случаях равен 4. Соответственно, число компонент для оценки сигнала будем выбирать равным 4.

**Таблица 1.** RMSE оценки сигнала

SSA (20)	HO-SSA (20)	MSSA (21)	HO-MSSA (21)
0.0188	0.0197	0.0107	0.0079

В третьем и четвертом столбцах таблицы 1 приведены значения RMSE оценок многомерного сигнала (21) методами MSSA и HO-MSSA. Видно, что метод HO-MSSA отделил сигнал с большей точностью, чем метод MSSA, что аналогично результатам, полученным в работе [1] для точности оценок параметров сигнала.

**8. Заключение.** В результате работы было показано, что тензорный вариант HO-SSA дал точность хуже, чем обычный SSA. Поэтому не рекомендуется использовать HO-SSA, если нужно оценить сигнал. Однако для многомерного сигнала было выявлено преимущество рассматриваемой тензорной модификации.

Соответственно, в следующих исследованиях имеет смысл развивать теорию метода HO-MSSA для увеличения точность оценивания сигнала и его компонент.

## Литература

1. Papy J. M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. 2005. Vol. 12(8). P. 809–826.
2. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1989. Vol. 37(7). P. 984–995.
3. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. Analysis of Time Series Structure - SSA and Related Techniques. Chapman and Hall/CRC, 2001. 320 p.
4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. Springer Berlin, Heidelberg, 2020. 146 p.

5. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2000. Vol. 21(4). P. 1253-1278.
6. Ежов Ф. В. Исследование гибридных моделей нейронных сетей с применением SSA на примере реальных данных // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9, № 1. С. 223–231.
7. Головкина А. Г., Козынченко В. А., Клименко И. С. Метод последовательных приближений для построения модели динамической полиномиальной регрессии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 18, Вып. 4. С. 487–500.
8. Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., Van Hecke P. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares // Journal of Magnetic Resonance. 1994. Vol. 110(2). P. 228–237.
9. Степанов Д. В., Голяндина Н. Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'05. 2005. С. 1831–1848.