

УДК 510

Хромов Н. А., Голяндина Н. Э.

## Правила оформления статей для ежегодной научной конференции Процессы управления и устойчивость

### Введение.

**1. Постановка задачи для одномерного сигнала.** Пусть дан одномерный временной ряд, состоящий из  $N$  комплексных значений  $s_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , и пусть этот ряд представим в виде конечной суммы  $R$  экспоненциально-модулированных комплексных гармоник

$$s_n = \sum_{j=1}^R a_j \exp \{i\varphi_j\} \exp \{(-\alpha_j + 2\pi i\omega_j) n\}. \quad (1)$$

Параметрами модели являются амплитуды  $a_j$ , фазы  $\varphi_j$ , частоты  $\omega_j$  и степени затухания  $\alpha_j$ . Приведём постановки задач выделения сигнала и оценки параметров для случая одномерного сигнала, а также методы их решения.

**1.1. Оценка параметров сигнала.** Рассматривается задача оценки параметров модели  $\omega_j$  и  $\alpha_j$  в ряде, являющимся суммой сигнала (1) и некоторого шума. Приведём стандартный матричный метод решения этой задачи, основанный на методе ESPRIT [2].

Ряд (1) может быть представлен в виде

$$s_n = \sum_{j=1}^R c_j z_j^n, \quad (2)$$

где  $c_j = a_j \exp \{i\varphi_j\}$ ,  $z_j = \exp \{-\alpha_j + 2\pi i\omega_j\}$ . Оценка параметров  $\omega_j$  и  $\alpha_j$  равносильна оценке значений  $z_j$ , поэтому в дальнейшем будем находить оценки именно для них.

---

*Хромов Никита Андреевич* – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: hromovn@mail.ru, тел.: +7(981)509-25-94

*Голяндина Нина Эдуардовна* – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: neg99@mail.ru, тел.: +7(000)000-00-00

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-345-6

**Определение 1.** Оператором вложения с длиной окна  $L$  будем называть оператор, преобразующий временной ряд  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  в ганкелеву матрицу размерности  $L \times K$  ( $K = N - L + 1$ ) следующим образом:

$$\mathbb{H}_L((x_0, x_1, \dots, x_{N-1})) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{K-1} \\ x_1 & x_2 & \ddots & \dots & \vdots \\ x_2 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & x_{N-2} \\ x_{L-1} & \dots & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Первый этап алгоритма – вложение, заключается в выборе длины окна  $L \geq R$  так, чтобы  $K = N - L + 1 \geq R$ , и преобразовании имеющегося временного ряда в ганкелеву матрицу с помощью оператора вложения:

$$\mathbf{H} = \mathbb{H}_L((s_0, s_1, \dots, s_{N-1})). \quad (4)$$

Полученная матрица называется *траекторной матрицей ряда*. Эта матрица может быть представлена в виде следующего произведения трёх матриц:

$$\mathbf{H} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_R \\ z_1^2 & \dots & z_R^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{L-1} & \dots & z_R^{L-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_R \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & z_R & z_R^2 & \dots & z_R^{K-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T}. \quad (5)$$

Такое представление называется *разложением Вандермонда (VDM)*. С другой стороны, матрицу  $\mathbf{H}$  можно представить в виде её сингулярного разложения (SVD)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \mathbf{U}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Sigma}} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}^H \\ \mathbf{V}_0^H \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L \times R}$ ,  $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L \times (L-R)}$ ,  $\hat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ ,  $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-R) \times (K-R)}$ ,  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{K \times R}$ ,  $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{R \times (K-R)}$ . В отсутствие шума матрица  $\mathbf{\Sigma}_0$  целиком состоит из нулей и сингулярное разложение  $\mathbf{H}$  упрощается до

произведения  $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^H$ . Столбцы матрицы  $\mathbf{S}$  порождают то же линейное пространство, что и столбцы матрицы  $\hat{\mathbf{U}}$  (то же самое верно для столбцов матриц  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{V}$ ). В случае, когда сигнал искажён шумом, матрица  $\mathbf{\Sigma}_0$  имеет максимальный ранг и тогда определяется наилучшее приближение матрицы  $\mathbf{H}$  матрицей ранга  $R$ :

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^H. \quad (7)$$

Матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\downarrow} &= \mathbf{Z}\mathbf{S}^{\uparrow}, \\ \mathbf{T}_{\downarrow} &= \mathbf{Z}\mathbf{T}^{\uparrow}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mathbf{Z} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{R \times R}$ , а стрелка вверх или вниз после матрицы означает удаление верхней или нижней строки этой матрицы соответственно. В случае, когда сигнал искажён белым шумом, матрица  $\hat{\mathbf{U}}$  совпадает с матрицей  $\mathbf{S}$  с точностью до умножения на невырожденную матрицу  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{R \times R}$

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{S}\mathbf{Q}, \quad (9)$$

и тогда матрицы  $\hat{\mathbf{U}}_{\downarrow}$  и  $\hat{\mathbf{U}}^{\uparrow}$  связаны с  $\mathbf{S}_{\downarrow}$  и  $\mathbf{S}^{\uparrow}$  соответственно через равенства

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}^{\uparrow} &= \mathbf{S}^{\uparrow}\mathbf{Q}, \\ \hat{\mathbf{U}}_{\downarrow} &= \mathbf{S}_{\downarrow}\mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (10)$$

Объединяя уравнения (8) и (10), получаем уравнение

$$\hat{\mathbf{U}}^{\uparrow} = \hat{\mathbf{U}}_{\downarrow}\bar{\mathbf{Z}}, \quad (11)$$

где матрица  $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Q}$  имеет те же собственные числа, что и матрица  $\mathbf{Z}$ . Таким образом, оценками параметров  $z_j$  можно считать собственные числа решения уравнения (11) относительно  $\bar{\mathbf{Z}}$ .

**1.2. Выделение сигнала.** Рассматривается задача нахождения оценки сигнала по временному ряду с шумом. Будем считать, что наблюдаемый ряд является суммой шума и вещественного сигнала, полученного из вещественной части сигнала (1), то есть

$$\begin{aligned} x_n &= s_n + \varepsilon_n \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^R c_j e^{-\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n)}_{\text{сигнал}} + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{шум}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Приведём алгоритм решения этой задачи с помощью метода SSA [3].

Аналогично предыдущему алгоритму, по ряду (12) строится траекторная матрица  $\mathbf{H}$  вида (4) с длиной окна  $L \geq 2R$ . Далее рассматривается SVD этой матрицы в виде (6), где  $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L \times 2R}$ ,  $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L \times (L-2R)}$ ,  $\hat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{2R \times 2R}$ ,  $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-2R) \times (K-2R)}$ ,  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{K \times 2R}$ ,  $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{2R \times (K-2R)}$ . Если шум отсутствует, то матрица  $\hat{\mathbf{H}}$ , определяемая аналогично (7) совпадёт с траекторной матрицей  $\mathbf{H}$ , иначе  $\hat{\mathbf{H}}$  является наилучшим приближением ранга  $2R$  матрицы  $\mathbf{H}$ .

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении побочных диагоналей матрицы  $\hat{\mathbf{H}}$ , то есть

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,j \in M_n} \hat{x}_{ij}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (13)$$

где  $M_n = \{(i, j) : i + j - 2 = n, 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K\}$ , а  $\hat{x}_{ij}$  – элементы матрицы  $\hat{\mathbf{H}}$ . Результат такого усреднения  $\tilde{s}_n$  считается оценкой сигнала  $s_n$ .

**2. Постановка задачи для многомерного сигнала.** Пусть дан набор из  $P$  одномерных комплексных временных рядов длины  $N$  каждый, и пусть компоненты этих рядов имеют вид

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} \exp \{i\varphi_j^{(p)}\} \exp \{(-\alpha_j + 2\pi i\omega_j)n\} = \sum_{j=1}^R c_j^{(p)} z_j^n, \quad (14)$$

где  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , а  $p$  ( $1 \leq p \leq P$ ) отвечает за номер временного ряда.

**2.1. Оценка параметров многомерного сигнала.** Для оценки параметров  $\alpha_j$  и  $\omega_j$  многомерного ряда используется алгоритм, аналогичный алгоритму для одномерных рядов. На первом шаге каждый из одномерных сигналов  $s_n^{(p)}$  преобразуется в траекторную матрицу с длиной окна  $L$

$$\mathbf{H}_p = \mathbb{H}_L \left( \left( s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \dots, s_{N-1}^{(p)} \right) \right). \quad (15)$$

Полученные матрицы укладываются друг за другом вдоль столбцов в одну блочную матрицу

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P], \quad (16)$$

называемую *траекторной матрицей многомерного ряда*. Эта матрица может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S} [\mathbf{C}_1 \mathbf{T}^T : \mathbf{C}_2 \mathbf{T}^T : \dots : \mathbf{C}_P \mathbf{T}^T], \quad (17)$$

где  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  – матрицы Вандермонда, определённые в (5), а  $\mathbf{C}_p = \text{diag}(c_1^{(p)}, c_2^{(p)}, \dots, c_R^{(p)})$ . Пусть  $\hat{\mathbf{U}}$  – матрица, столбцы которой равны первым  $R$  сингулярным векторам матрицы  $\mathbf{H}$ , тогда подпространства, порождаемые столбцами  $\hat{\mathbf{U}}$  и  $\mathbf{S}$ , совпадают, и для нахождения оценок  $z_k$  можно аналогично одномерному случаю повторить процедуру, описанную уравнением (11).

**2.2. Выделение многомерного сигнала.** Рассматривается многомерный временной ряд, являющийся суммой шума и многомерного сигнала, состоящего из вещественных частей сигнала (14), то есть

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= s_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^R c_j^{(p)} e^{-\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n) + \varepsilon_n^{(p)} \\ n &= 0, 1, \dots, N-1, \quad 1 \leq p \leq P. \end{aligned} \quad (18)$$

Приведём алгоритм MSSA [4] для выделения сигнала из многомерного временного ряда.

На первом этапе по заданному временному ряду строится траекторная матрица  $\mathbf{H}$  в соответствии с (15) и (16) с длиной окна  $L \geq 2R$ . Затем рассматривается SVD этой матрицы в виде (6), где  $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L \times 2R}$ ,  $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L \times (L-2R)}$ ,  $\hat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{2R \times 2R}$ ,  $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-2R) \times (KP-2R)}$ ,  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{KP \times 2R}$ ,  $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{2R \times (KP-2R)}$ , после чего строится матрица  $\tilde{\mathbf{H}}$  аналогично (7), эта матрица является наилучшим приближением ранга  $2R$  траекторной матрицы  $\mathbf{H}$ . Последний шаг алгоритма – восстановление, совпадает с последним шагом алгоритма SSA (13).

**3. Тензорные модификации алгоритмов выделения сигнала из временного ряда.** В работе [1] были предложены тензорные модификации алгоритма ESPRIT для оценки параметров одномерных и многомерных сигналов. В этом разделе мы приведём расширение этих алгоритмов для решения задачи выделения сигнала из одномерных и многомерных рядов.

**3.1. High-Order SSA.** Пусть дан одномерный временной ряд вида (12). Вместо траекторной матрицы предлагается строить по ряду *траекторный тензор*  $\mathcal{H}$  следующим образом: выбираются два параметра  $I, L \geq 2R$  такие, что  $J \geq 2R$  ( $J = N - I - L + 2$ ), и тогда элемент тензора  $h_{ilj}$  берётся равным  $x_{i+l+j-3}$ . Другими словами, слой траекторного тензора с номером  $j$  получается как траекторная матрица, построенная по части исходного ряда  $(x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+I+L-3})$  с длиной окна  $I$ :

$$\mathcal{H}_{..j} = \mathbb{H}_I((x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+I+L-3})). \quad (19)$$

На следующем шаге траекторный тензор представляется в виде своего сингулярного разложения высшего порядка (HOSVD) [5]:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}, \quad (20)$$

где матрицы  $\mathbf{U}_k = [U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_{I_k}^{(k)}]$  ( $I_1 = I, I_2 = L, I_3 = J$ ) ортонормированные, а  $\circ$  обозначает внешнее произведение векторов.

**Определение 2.** Развёрткой тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  по измерению  $n$  называют матрицу  $\mathbb{A}_{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times I_{n+1} I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}}$ , в которой элемент исходного тензора  $a_{i_1 i_2 \dots i_M}$  содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером

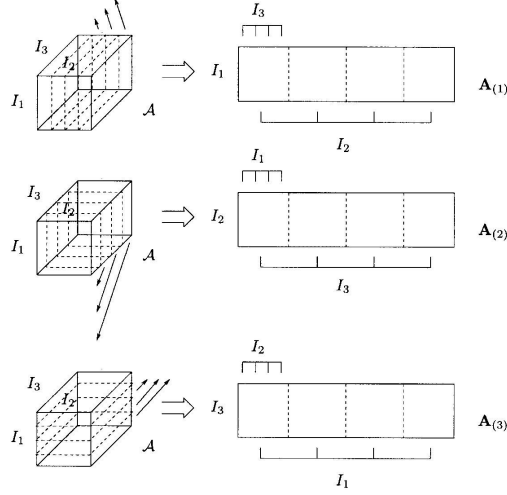
$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^M \left[ (i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

Визуализация развёрток тензора с тремя измерениями приведена на рисунке 1.

**Определение 3.**  $n$ -рангом тензора  $\mathcal{A}$  называют ранг развёртки этого тензора по измерению  $n$ .

Если во временном ряде отсутствует шум, то все  $n$ -ранги траекторного тензора  $\mathcal{H}$  будут равны  $2R$  и верхние пределы суммирования во всех суммах в представлении (20) будут равны  $2R$ . В случае, если во временном ряде присутствует шум, то у траекторного тензора будут максимальные  $n$ -ранги, и тогда строится приближение траекторного тензора

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{2R} \sum_{l=1}^{2R} \sum_{j=1}^{2R} c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (21)$$



**Рис. 1.** Развёртка тензора  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times I_3$  в матрицы  $\mathbf{A}_{(1)}$ ,  $\mathbf{A}_{(2)}$ ,  $\mathbf{A}_{(3)}$  размерностей  $I_1 \times (I_2 I_3)$ ,  $I_2 \times (I_3 I_1)$ ,  $I_3 \times (I_1 I_2)$  соответственно

В работе [5] показано, что хоть такое приближение и не является оптимальным приближением по множеству тензоров с  $n$ -рангами, равными  $2R$ , оно является довольно точным, так как ошибка приближения ограничена сверху.

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении полученного тензора  $\hat{\mathcal{H}}$  вдоль побочных «плоскостей»  $i + l + j = \text{const}$ :

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,l,j \in M_n} \hat{h}_{ilj}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (22)$$

где  $M_n = \{(i, l, j) : i + l + j - 3 = n, 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J\}$ , а  $\hat{h}_{ilj}$  – элементы тензора  $\hat{\mathcal{H}}$ . Результат такого усреднения  $\tilde{s}_n$  считается оценкой сигнала  $s_n$ .

**3.2. High-Order MSSA.** Пусть дан многомерный временной ряд вида (18). На первом шаге выбирается длина окна  $L \geq 2R$  такая, что  $K = N - L + 1 \geq 2R$ , и по этому ряду строится *траекторный тензор* многомерного ряда  $\mathcal{H}$  так, что его элемент  $h_{lkp}$  равен  $x_{l+k-2}^{(p)}$ ,

где  $1 \leq l \leq L$ ,  $1 \leq k \leq K$ ,  $1 \leq p \leq P$ . То есть слой траекторного тензора с номером  $p$  получается как траекторная матрица, построенная по ряду с номером  $p$  с длиной окна  $L$ :

$$\mathcal{H}_{..p} = \mathbb{H}_L \left( \left( x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{N-1}^{(p)} \right) \right). \quad (23)$$

Затем траекторный тензор представляется в виде своего HOSVD

$$\mathcal{H} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P c_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (24)$$

Если во временном ряде отсутствует шум, то 1- и 2-ранги траекторного тензора  $\mathcal{H}$  будут равны  $2R$ , 3-ранг будет равен  $R$ , и верхние пределы суммирования в представлении (20) будут равны соответствующим  $n$ -рангам. В случае, если во временном ряде присутствует шум, то у траекторного тензора будут максимальные  $n$ -ранги, и тогда строится приближение траекторного тензора

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{l=1}^{2R} \sum_{k=1}^{2R} \sum_{p=1}^R c_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (25)$$

Последний шаг алгоритма полностью аналогичен шагу восстановления в алгоритме High-Order SSA и заключается в усреднении полученного приближения  $\hat{\mathcal{H}}$  вдоль побочных «плоскостей»  $l + k + p = \text{const}$ .

## Литература

1. Papy J. M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. 2005. № 8. P. 809–826.
2. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1989. №7. P. 984–995.
3. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. Analysis of Time Series Structure - SSA and Related Techniques. Chapman and Hall/CRC, 2001. 320 p.



4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. Springer Berlin, Heidelberg, 2020. 146 p.
5. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2000. №4. P. 1253-1278.