

УДК 510

Хромов Н. А., Голяндина Н. Э.

**Правила оформления статей
для ежегодной научной конференции
Процессы управления и устойчивость**

Введение.

1. Постановка задачи для одномерного сигнала. Пусть дан одномерный временной ряд, состоящий из N комплексных значений s_n , $n = 0, 1, \dots, N - 1$, и пусть этот ряд представим в виде конечной суммы R экспоненциально-модулированных комплексных гармоник

$$s_n = \sum_{j=1}^R a_j \exp \{i\varphi_j\} \exp \{(-\alpha_j + 2\pi i\omega_j) n\}. \quad (1)$$

Параметрами модели являются амплитуды a_j , фазы φ_j , частоты ω_j и степени затухания α_j . Приведём постановки задач выделения сигнала и оценки параметров для случая одномерного сигнала, а также методы их решения.

1.1. Оценка параметров сигнала. Рассматривается задача оценки параметров модели ω_j и α_j в ряде, являющимся суммой сигнала (1) и некоторого шума. Приведём стандартный матричный метод решения этой задачи, основанный на методе ESPRIT [2].

Ряд (1) может быть представлен в виде

$$s_n = \sum_{j=1}^R c_j z_j^n, \quad (2)$$

где $c_j = a_j \exp \{i\varphi_j\}$, $z_j = \exp \{-\alpha_j + 2\pi i\omega_j\}$. Оценка параметров ω_j и α_j равносильна оценке значений z_j , поэтому в дальнейшем будем находить оценки именно для них.

Хромов Никита Андреевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: hromovn@mail.ru, тел.: +7(981)509-25-94

Голяндина Нина Эдуардовна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: neg99@mail.ru, тел.: +7(000)000-00-00

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-345-6

Определение 1. Оператором вложения с длиной окна L будем называть оператор, преобразующий временной ряд $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ в ганкелеву матрицу размерности $L \times K$ ($K = N - L + 1$) следующим образом:

$$\mathbb{H}_L((x_0, x_1, \dots, x_{N-1})) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{K-1} \\ x_1 & x_2 & \ddots & \dots & \vdots \\ x_2 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & x_{N-2} \\ x_{L-1} & \dots & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Первый этап алгоритма – вложение, заключается в выборе длины окна $L \geq R$ так, чтобы $K = N - L + 1 \geq R$, и преобразовании имеющегося временного ряда в ганкелеву матрицу с помощью оператора вложения:

$$\mathbf{H} = \mathbb{H}_L((s_0, s_1, \dots, s_{N-1})). \quad (4)$$

Полученная матрица называется *траекторной матрицей ряда*. Эта матрица может быть представлена в виде следующего произведения трёх матриц:

$$\mathbf{H} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_R \\ z_1^2 & \dots & z_R^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{L-1} & \dots & z_R^{L-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_R \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & z_R & z_R^2 & \dots & z_R^{K-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T}. \quad (5)$$

Такое представление называется *разложением Вандермонда (VDMD)*. С другой стороны, матрицу \mathbf{H} можно представить в виде её сингулярного разложения (SVD)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \mathbf{U}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Sigma}} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}^H \\ \mathbf{V}_0^H \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L \times R}$, $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L \times (L-R)}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{R \times R}$, $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-R) \times (K-R)}$, $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{K \times R}$, $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{R \times (K-R)}$. В отсутствие шума матрица $\mathbf{\Sigma}_0$ целиком состоит из нулей и сингулярное разложение \mathbf{H} упрощается до

произведения $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^H$. Столбцы матрицы \mathbf{S} порождают то же линейное пространство, что и столбцы матрицы $\hat{\mathbf{U}}$ (то же самое верно для столбцов матриц \mathbf{T} и \mathbf{V}). В случае, когда сигнал искажён шумом, матрица $\mathbf{\Sigma}_0$ имеет максимальный ранг и тогда определяется наилучшее приближение матрицы \mathbf{H} матрицей ранга R :

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^H. \quad (7)$$

Матрицы \mathbf{S} и \mathbf{T} обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\downarrow} &= \mathbf{Z}\mathbf{S}^{\uparrow}, \\ \mathbf{T}_{\downarrow} &= \mathbf{Z}\mathbf{T}^{\uparrow}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{Z} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{R \times R}$, а стрелка вверх или вниз после матрицы означает удаление верхней или нижней строки этой матрицы соответственно. В случае, когда сигнал искажён белым шумом, матрица $\hat{\mathbf{U}}$ совпадает с матрицей \mathbf{S} с точностью до умножения на невырожденную матрицу $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{R \times R}$

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{S}\mathbf{Q}, \quad (9)$$

и тогда матрицы $\hat{\mathbf{U}}_{\downarrow}$ и $\hat{\mathbf{U}}^{\uparrow}$ связаны с \mathbf{S}_{\downarrow} и \mathbf{S}^{\uparrow} соответственно через равенства

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}^{\uparrow} &= \mathbf{S}^{\uparrow}\mathbf{Q}, \\ \hat{\mathbf{U}}_{\downarrow} &= \mathbf{S}_{\downarrow}\mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (10)$$

Объединяя уравнения (8) и (10), получаем уравнение

$$\hat{\mathbf{U}}^{\uparrow} = \hat{\mathbf{U}}_{\downarrow}\bar{\mathbf{Z}}, \quad (11)$$

где матрица $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Q}$ имеет те же собственные числа, что и матрица \mathbf{Z} . Таким образом, оценками параметров z_j можно считать собственные числа решения уравнения (11) относительно $\bar{\mathbf{Z}}$.

1.2. Выделение сигнала. Рассматривается задача нахождения оценки сигнала по временному ряду с шумом. Будем считать, что наблюдаемый ряд является суммой шума и вещественного сигнала, полученного из вещественной части сигнала (1), то есть

$$\begin{aligned} x_n &= s_n + \varepsilon_n \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^R c_j e^{-\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n)}_{\text{сигнал}} + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{шум}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Приведём алгоритм решения этой задачи с помощью метода SSA [3].

Аналогично предыдущему алгоритму, по ряду (12) строится траекторная матрица \mathbf{H} вида (4) с длиной окна $L \geq 2R$. Далее рассматривается SVD этой матрицы в виде (6), где $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L \times 2R}$, $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L \times (L-2R)}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{2R \times 2R}$, $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-2R) \times (K-2R)}$, $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{K \times 2R}$, $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{2R \times (K-2R)}$. Если шум отсутствует, то матрица $\hat{\mathbf{H}}$, определяемая аналогично (7) совпадёт с траекторной матрицей \mathbf{H} , иначе $\hat{\mathbf{H}}$ является наилучшим приближением ранга $2R$ матрицы \mathbf{H} .

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении побочных диагоналей матрицы $\hat{\mathbf{H}}$, то есть

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,j \in M_n} \hat{x}_{ij}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (13)$$

где $M_n = \{(i, j) : i + j - 2 = n, 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K\}$, а \hat{x}_{ij} – элементы матрицы $\hat{\mathbf{H}}$. Результат такого усреднения \tilde{s}_n считается оценкой сигнала s_n .

2. Постановка задачи для многомерного сигнала. Пусть дан набор из P одномерных комплексных временных рядов длины N каждый, и пусть компоненты этих рядов имеют вид

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} \exp \{i\varphi_j^{(p)}\} \exp \{(-\alpha_j + 2\pi i\omega_j)n\} = \sum_{j=1}^R c_j^{(p)} z_j^n, \quad (14)$$

где $n = 0, 1, \dots, N-1$, а p ($1 \leq p \leq P$) отвечает за номер временного ряда.

2.1. Оценка параметров многомерного сигнала. Для оценки параметров α_j и ω_j многомерного ряда используется алгоритм, аналогичный алгоритму для одномерных рядов. На первом шаге каждый из одномерных сигналов $s_n^{(p)}$ преобразуется в траекторную матрицу с длиной окна L

$$\mathbf{H}_p = \mathbb{H}_L \left(\left(s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \dots, s_{N-1}^{(p)} \right) \right). \quad (15)$$

Полученные матрицы укладываются друг за другом вдоль столбцов в одну блочную матрицу

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P], \quad (16)$$

называемую *траекторной матрицей многомерного ряда*. Эта матрица может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S} [\mathbf{C}_1 \mathbf{T}^T : \mathbf{C}_2 \mathbf{T}^T : \dots : \mathbf{C}_P \mathbf{T}^T], \quad (17)$$

где \mathbf{S} и \mathbf{T} – матрицы Вандермонда, определённые в (5), а $\mathbf{C}_p = \text{diag}(c_1^{(p)}, c_2^{(p)}, \dots, c_R^{(p)})$. Пусть $\hat{\mathbf{U}}$ – матрица, столбцы которой равны первым R сингулярным векторам матрицы \mathbf{H} , тогда подпространства, порождаемые столбцами $\hat{\mathbf{U}}$ и \mathbf{S} , совпадают, и для нахождения оценок z_k можно аналогично одномерному случаю повторить процедуру, описанную уравнением (11).

2.2. Выделение многомерного сигнала. Рассматривается многомерный временной ряд, являющийся суммой шума и многомерного сигнала, состоящего из вещественных частей сигнала (14), то есть

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= s_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^R c_j^{(p)} e^{-\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n) + \varepsilon_n^{(p)} \\ n &= 0, 1, \dots, N-1, \quad 1 \leq p \leq P. \end{aligned} \quad (18)$$

Приведём алгоритм MSSA [4] для выделения сигнала из многомерного временного ряда.

На первом этапе по заданному временному ряду строится траекторная матрица \mathbf{H} в соответствии с (15) и (16) с длиной окна $L \geq 2R$. Затем рассматривается SVD этой матрицы в виде (6), где $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L \times 2R}$, $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L \times (L-2R)}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{2R \times 2R}$, $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-2R) \times (KP-2R)}$, $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{KP \times 2R}$, $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{2R \times (KP-2R)}$, после чего строится матрица $\tilde{\mathbf{H}}$ аналогично (7), эта матрица является наилучшим приближением ранга $2R$ траекторной матрицы \mathbf{H} . Последний шаг алгоритма – восстановление, совпадает с последним шагом алгоритма SSA (13).

3. Тензорные модификации алгоритмов выделения сигнала из временного ряда. В работе [1] были предложены тензорные модификации алгоритма ESPRIT для оценки параметров одномерных и многомерных сигналов. В этом разделе мы приведём расширение этих алгоритмов для решения задачи выделения сигнала из одномерных и многомерных рядов.

3.1. High-Order SSA. Пусть дан одномерный временной ряд вида (12). Вместо траекторной матрицы предлагается строить по ряду *траекторный тензор* \mathcal{H} следующим образом: выбираются два параметра $I, L \geq 2R$ такие, что $J \geq 2R$ ($J = N - I - L + 2$), и тогда элемент тензора h_{ilj} берётся равным $x_{i+l+j-3}$. Другими словами, слой траекторного тензора с номером j получается как траекторная матрица, построенная по части исходного ряда $(x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+I+L-3})$ с длиной окна I :

$$\mathcal{H}_{..j} = \mathbb{H}_I((x_{j-1}, x_j, \dots, x_{j+I+L-3})). \quad (19)$$

На следующем шаге траекторный тензор представляется в виде своего сингулярного разложения высшего порядка (HOSVD) [5]:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}, \quad (20)$$

где матрицы $\mathbf{U}_k = [U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_{I_k}^{(k)}]$ ($I_1 = I, I_2 = L, I_3 = J$) ортонормированные, а \circ обозначает внешнее произведение векторов.

Определение 2. Развёрткой тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ по измерению n называют матрицу $\mathbb{A}_{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times I_{n+1} I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}}$, в которой элемент исходного тензора $a_{i_1 i_2 \dots i_M}$ содержится в строке i_n и столбце с номером

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^M \left[(i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

Визуализация развёрток тензора с тремя измерениями приведена на рисунке 1.

Определение 3. n -рангом тензора \mathcal{A} называют ранг развёртки этого тензора по измерению n .

Если во временном ряде отсутствует шум, то все n -ранги траекторного тензора \mathcal{H} будут равны $2R$ и верхние пределы суммирования во всех суммах в представлении (20) будут равны $2R$. В случае, если во временном ряде присутствует шум, то у траекторного тензора будут максимальные n -ранги, и тогда строится приближение траекторного тензора

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{2R} \sum_{l=1}^{2R} \sum_{j=1}^{2R} c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (21)$$

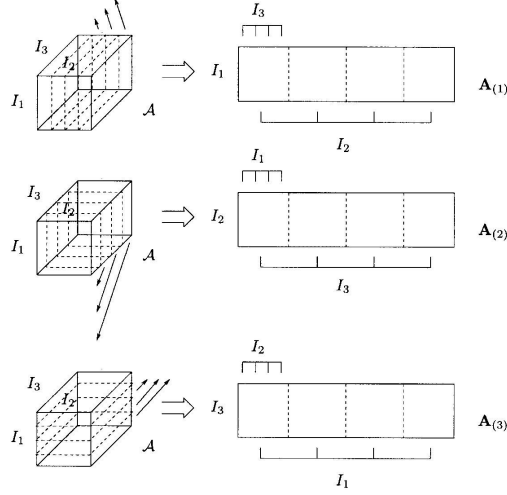


Рис. 1. Развёртка тензора \mathcal{A} размерности $I_1 \times I_2 \times I_3$ в матрицы $\mathbf{A}_{(1)}$, $\mathbf{A}_{(2)}$, $\mathbf{A}_{(3)}$ размерностей $I_1 \times (I_2 I_3)$, $I_2 \times (I_3 I_1)$, $I_3 \times (I_1 I_2)$ соответственно

В работе [5] показано, что хоть такое приближение и не является оптимальным приближением по множеству тензоров с n -рангами, равными $2R$, оно является довольно точным, так как ошибка приближения ограничена сверху.

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении полученного тензора $\hat{\mathcal{H}}$ вдоль побочных «плоскостей» $i + l + j = \text{const}$:

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,l,j \in M_n} \hat{h}_{ilj}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (22)$$

где $M_n = \{(i, l, j) : i + l + j - 3 = n, 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J\}$, а \hat{h}_{ilj} – элементы тензора $\hat{\mathcal{H}}$. Результат такого усреднения \tilde{s}_n считается оценкой сигнала s_n .

3.2. High-Order MSSA. Пусть дан многомерный временной ряд вида (18). На первом шаге выбирается длина окна $L \geq 2R$ такая, что $K = N - L + 1 \geq 2R$, и по этому ряду строится *траекторный тензор* многомерного ряда \mathcal{H} так, что его элемент h_{lkp} равен $x_{l+k-2}^{(p)}$,

где $1 \leq l \leq L$, $1 \leq k \leq K$, $1 \leq p \leq P$. То есть слой траекторного тензора с номером p получается как траекторная матрица, построенная по ряду с номером p с длиной окна L :

$$\mathcal{H}_{..p} = \mathbb{H}_L \left(\left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{N-1}^{(p)} \right) \right). \quad (23)$$

Литература

1. Papy J. M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. 2005. № 8. P. 809–826.
2. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1989. №7. P. 984–995.
3. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. Analysis of Time Series Structure - SSA and Related Techniques. Chapman and Hall/CRC, 2001. 320 p.
4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. Springer Berlin, Heidelberg, 2020. 146 p.
5. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2000. №4. P. 1253-1278.