

Тензорный анализ сингулярного спектра

Хромов Никита Андреевич, Голяндина Нина Эдуардовна

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Процессы управления и устойчивость
2 апреля 2024, Санкт-Петербург

Постановка задачи

$X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$ — вещественный временной ряд.

$X = T + P + R$.

T — тренд, P — сезонность, R — шум.

Возможные задачи:

1. Выделение сигнала из ряда: нахождение $S = T + P$,
2. Отделение компонент сигнала: нахождение T и P ,
3. Нахождение параметров сигнала в параметрической модели.

Методы, основанные на подпространстве сигнала:

- SSA (задачи 1 и 2)
(Golyandina et al. (2001), Analysis of time series structure: SSA and related techniques)
- ESPRIT (задача 3)
(Roy, Kailath (1989), ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques)

Имеющиеся результаты

В работе Pary et al. (2005) была предложена тензорная модификация метода ESPRIT и экспериментально показано её преимущество для конкретной модели.

Цель: расширение предложенного Pary алгоритма для решения задачи выделения сигнала, исследование свойств тензорных модификаций методов семейства SSA с точки зрения точности выделения сигнала.

Модель одномерного сигнала

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = S + R,$$

S — сигнал, R — шум.

$$s_n = \sum_{j=1}^R a_j e^{-\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n + \varphi_j)$$

Параметры:

$a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — амплитуды, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ — степени затухания,

$\omega_j \in [0, 1/2]$ — частоты, $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ — фазы.

Модель многомерного сигнала

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_P \end{pmatrix}, \quad X_p = S_p + R_p \text{ — одномерные ряды.}$$

Общий случай:

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R(p)} a_j^{(p)} e^{-\alpha_j^{(p)} n} \cos \left(2\pi \omega_j^{(p)} n + \varphi_j^{(p)} \right)$$

Рассматриваемый случай:

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{-\alpha_j n} \cos \left(2\pi \omega_j n + \varphi_j^{(p)} \right)$$

Описание алгоритма MSSA

X — P -мерный временной ряд длины N с сигналом S , L — длина окна, $K = N - L + 1$.

Оператор вложения:

$$\mathbb{H}_L(X_p) = \begin{pmatrix} x_0^{(p)} & x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & \dots & x_{K-1}^{(p)} \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & \ddots & \dots & \vdots \\ x_2^{(p)} & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & x_{N-2}^{(p)} \\ x_{L-1}^{(p)} & \dots & \dots & x_{N-2}^{(p)} & x_{N-1}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Описание алгоритма MSSA

Параметры алгоритма: $L, R : R \leq L < N, K \geq L$.

R — число компонент, отнесённых к сигналу.

Схема алгоритма MSSA для выделения сигнала

❶ Вложение

$$\mathbf{X} \mapsto \mathbf{H} = [\mathbb{H}(\mathbf{X}_1) : \mathbb{H}(\mathbf{X}_2) : \cdots : \mathbb{H}(\mathbf{X}_P)] \in \mathbb{R}^{L \times KP},$$

❷ Разложение $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad d \leq L$

❸ Группировка $\tilde{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d$

$$\tilde{\mathbf{S}} = [\tilde{\mathbf{S}}_1 : \tilde{\mathbf{S}}_2 : \cdots : \tilde{\mathbf{S}}_P], \quad \tilde{\mathbf{S}}_p \in \mathbb{R}^{L \times K}$$

❹ Восстановление Матрицы $\tilde{\mathbf{S}}_p$ усредняются вдоль побочных диагоналей: $\tilde{s}_n^{(p)} = \text{mean} \left\{ \left(\tilde{\mathbf{S}}_p \right)_{i,j} \mid i + j - 2 = n \right\}.$

SSA для выделения сигнала

$X = (x_1, x_2, \dots, x_N) = S + R$, L - длина окна,
 $K = N - L + 1 \geq L$.

Параметры алгоритма: $L, R : R \leq L < N$.

R — число компонент, отнесённых к сигналу.

Схема алгоритма SSA для выделения сигнала

- ❶ Вложение $X \mapsto \mathbf{X} = [X_1 : X_2 : \dots : X_K] \in \mathbb{R}^{L \times K}$,
 $X_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L})^T$
- ❷ Разложение $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$, $d \leq L$
- ❸ Группировка $\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$
- ❹ Восстановление Матрица $\tilde{\mathbf{X}}$ усредняется вдоль побочных диагоналей $\tilde{x}_k = \text{mean} \left\{ (\tilde{\mathbf{X}})_{i,j} \mid i + j - 1 = k \right\}$.

Результат алгоритма $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$.

Ранг сигнала

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}.$$

\mathbf{S} имеет ранг r , если $\forall L : r \leq \min(L, K) \quad \text{rank } \mathbf{X} = r$.

Рекомендуемый выбор параметра R в алгоритме: $R = r$.

Примеры

- $s_n = \cos(2\pi n\omega + \psi), \quad n \in \overline{1:N},$
 $0 < \omega < \frac{1}{2}, \psi \in [0; 2\pi)$

$$r = 2.$$

- $s_n = a^n, \quad n \in \overline{1:N}, \quad a \neq 0$

$$r = 1.$$

Переход к тензорам

SSA: ряд $X \Rightarrow$ матрица $\mathbf{X} \Rightarrow$ SVD \mathbf{X}

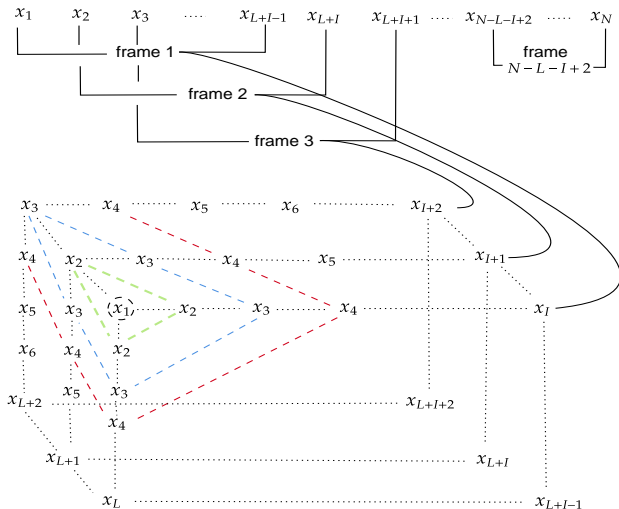
Tensor SSA: ряд $X \Rightarrow$ тензор $\mathcal{X} \Rightarrow$ тензорное разложение \mathcal{X}

Но существует несколько тензорных разложений, расширяющих SVD, среди них:

- High-order singular value decomposition (**HOSVD**)
- Canonical polyadic decomposition (CPD)

Описания этих и других тензорных разложений, а также примеры их применения в задачах обработки сигналов и машинного обучения, представлены в обзорной работе Sidiropoulos, De Lathauwer et al. (2016)

Построение тензора



L, I — параметры

Разложение и группировка

- HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} имеет вид

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^{N-I-L+2} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$

- Тогда этап группировки в алгоритме HOSVD SSA имеет вид

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^R \sum_{l=1}^R \sum_{j=1}^R \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)},$$

$R \leq \min(I, L, N - I - L + 2)$ — параметр алгоритма.

Ранг в тензорном варианте

- **n -ранг тензора:** размерность пространства, порождённого векторами вдоль n -го измерения.
- В отличие от матричного случая, n -ранги тензора произвольной размерности могут в общем случае не совпадать.

Утверждение

Пусть сигнал S имеет конечный ранг r в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что

$$r \leq \min(I, L, N - I - L + 2),$$

все n -ранги траекторного тензора \mathcal{X} этого сигнала с параметрами I и L будут равны r .

Численное сравнение

Сигнал $s_n = 30 \cos(2\pi n/12)$, $n \in \overline{1:71}$. Шум гауссовский, белый с $\sigma = 5$ и красный с $\delta = \sqrt{5}$, $\varphi_1 = 0.5$ или $\varphi_2 = 0.9$.

Таблица: RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала.

$\begin{matrix} \text{вид шума} \\ L \end{matrix}$	12	24	30	36
белый, $\sigma = 5$	1.82	1.42	1.40	1.42
красный, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	1.01	1.03
красный, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	1.34	1.36

Таблица: RMSE восстановленного с помощью HOSVD SSA сигнала.

$\begin{matrix} \text{вид шума} \\ I \times L \end{matrix}$	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый шум, $\sigma = 5$	1.64	1.53	1.57	1.66	1.62	1.49
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.18	1.12	1.14	1.21	1.19	1.08
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.58	1.44	1.47	1.57	1.54	1.46

MSSA

Многомерный временной ряд:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(p)})^T, \quad \mathbf{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}).$$

Траекторная матрица этого ряда:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} : \mathbf{X}^{(2)} : \dots : \mathbf{X}^{(p)}],$$

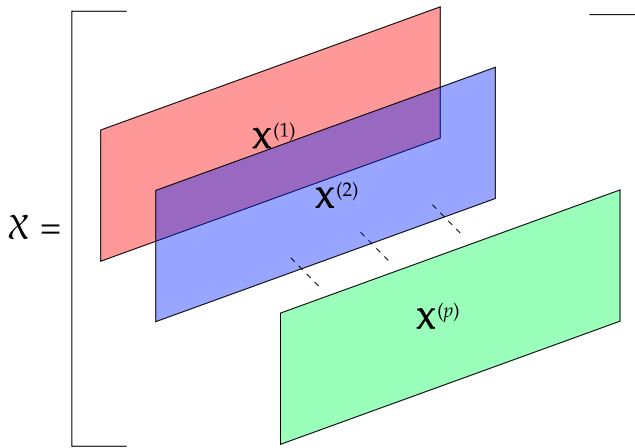
$\mathbf{X}^{(i)}$ — траекторная матрица $\mathbf{X}^{(i)}$.

Дальнейшие шаги алгоритма MSSA (разложение траекторной матрицы и восстановление сигнала) аналогичны стандартному SSA.

- В случаях, когда сигналы $\mathbf{S}^{(i)}$ имеют похожую структуру, использование MSSA даёт лучшие результаты в задаче выделения сигнала, чем применение SSA к каждому ряду отдельно.

Тензорная модификация MSSA

Вместо матрицы $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} : \mathbf{X}^{(2)} : \dots : \mathbf{X}^{(p)}]$
 тензор $\mathcal{X} : \mathcal{X}_{:,i} = \mathbf{X}^{(i)}$



Тензорная модификация MSSA

Утверждение, позволяющее перенести понятие ранга сигнала на тензорный вариант MSSA.

Утверждение

Пусть $\mathbf{A} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_p] \in \mathbb{C}^{L \times K^p}$, её SVD имеет вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V},$$

и пусть $\mathcal{A} : \mathcal{A}_{:,i} = \mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{L \times K \times p}$, его HOSVD имеет вид:

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \hat{\mathbf{U}}_1 \times_2 \hat{\mathbf{U}}_2 \times_3 \hat{\mathbf{U}}_3.$$

Тогда существуют такие SVD матрицы \mathbf{A} и HOSVD тензора \mathcal{A} , что $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}_1$.

Ранги в тензорном MSSA

- Если сигнал S имеет ранг r в терминах SSA, то при $r \leq \min(L, K)$ выполнено $\text{rank}_1(\mathcal{X}) = r$.
- По симметричности построения, в этих предположениях $\text{rank}_2(\mathcal{X}) = r$.
- Однако ранг третьего измерения приобретает иной смысл.

В тензорном варианте алгоритма к параметрам L и R добавляется параметр R_3 .

Примеры

$$s_n^{(m)} = a_m \cos(2\pi n \omega_m + \psi_m), \quad m \in \{1, 2\}, \quad n \in \overline{1:N}, \\ a_m \neq 0, \quad 0 < \omega_m < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \psi < 2\pi$$

- 1 $\psi_1 = \psi_2, \omega_1 = \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 2, r_3 = 1,$
- 2 $\psi_1 \neq \psi_2, \omega_1 = \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 2, r_3 = 2,$
- 3 $\omega_1 \neq \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 4, r_3 = 2.$

Численные сравнения

$$s_n^{(m)} = a_m \cos(2\pi n \omega_m + \psi_m), n \in \overline{1:71}, a_1 = 30, a_2 = 20.$$

Шум — белый гауссовский, с параметром $\sigma = 5$, RMSE было сосчитано по 500 реализациям зашумлённого ряда, сравнение проводилось на одних и тех же реализациях шума.

Численные сравнения

Таблица: RMSE восстановленных различными методами сигналов для каждого набора параметров сигнала.

Условия	Метод \ L	12	24	36	48	60
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = \psi_2 = 0$	MSSA	1.78	1.34	1.24	1.20	1.42
	HOSVD MSSA	1.35	1.10	1.10	1.10	1.35
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	MSSA	1.78	1.34	1.25	1.20	1.41
	HOSVD MSSA	1.41	1.19	1.20	1.19	1.41
$\omega_1 = \frac{1}{12}, \omega_2 = \frac{1}{8}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	MSSA	2.63	1.94	1.74	1.69	1.95
	HOSVD MSSA	1.95	1.67	1.69	1.67	1.95

Выводы

- HOSVD SSA и HOSVD MSSA являются прямыми обобщениями SSA и MSSA, однако устроены существенно сложнее и имеют большую трудоемкость.
- Оба расширения усложняют алгоритм необходимостью подбора дополнительного параметра.
- HOSVD SSA выделяет сигнал менее точно, чем SSA.
- HOSVD MSSA выделяет сигнал точнее, чем MSSA.