

# High-order MSA для выделения сигнала

Хромов Никита Андреевич, Голяндина Нина Эдуардовна

Санкт-Петербургский государственный университет  
Кафедра статистического моделирования

Процессы управления и устойчивость  
2 апреля 2024, Санкт-Петербург

# Постановка задачи

$X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  — вещественный временной ряд.

$X = T + P + R$ .

$T$  — тренд,  $P$  — регулярные колебания,  $R$  — шум.

## Возможные задачи:

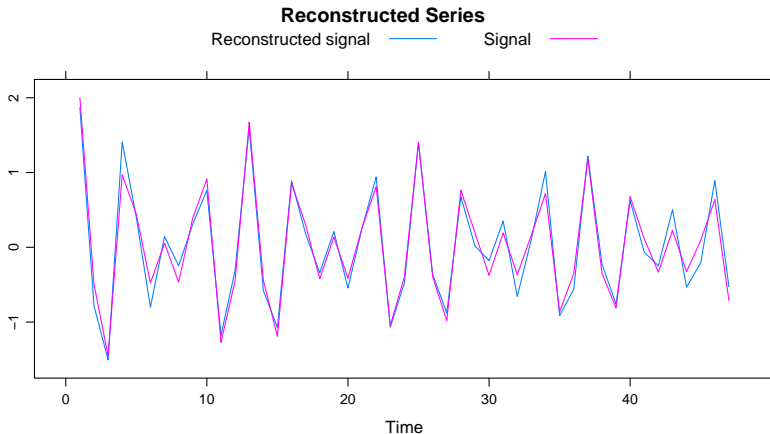
- 1 Выделение сигнала из ряда: нахождение  $S = T + P$ ,
- 2 Отделение компонент сигнала: нахождение  $T$  и  $P$ ,
- 3 Нахождение параметров сигнала в параметрической модели.

Методы, основанные на подпространстве сигнала:

- SSA (задачи 1 и 2)  
(Golyandina et al. (2001), Analysis of time series structure: SSA and related techniques)
- ESPRIT (задача 3)  
(Roy, Kailath (1989), ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques)

# Пример применения SSA и ESPRIT

$$s_n = e^{-0.01n} \cos(2\pi n/3) + e^{-0.02n} \cos(2\pi n/4), \quad n = 0, 1, \dots, 46$$



# Пример применения SSA и ESPRIT

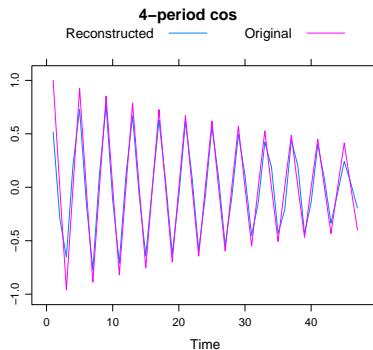
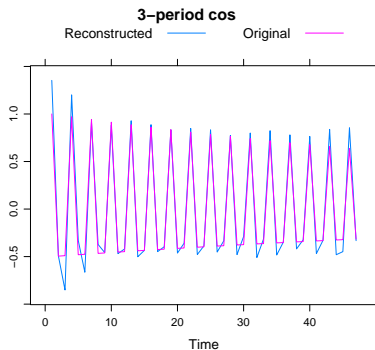


Таблица: Восстановленные ESPRIT параметры

Номер слагаемого	1	2
Период	3	4.06
Степень затухания	-0.008	-0.027

# Постановка задачи

В работе Paru et al. (2005) была предложена тензорная модификация метода ESPRIT и экспериментально показано её преимущество для конкретной модели.

**Цель:** расширение предложенного Paru алгоритма для решения задачи выделения сигнала, исследование свойств тензорных модификаций методов семейства SSA с точки зрения точности выделения сигнала.

В докладе рассмотрена тензорная модификация для выделения сигнала из многомерных временных рядов.

# Модель одномерного сигнала

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = S + R,$$

$S$  — сигнал,  $R$  — шум.

$$s_n = \sum_{j=1}^R a_j e^{-\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n + \varphi_j)$$

Параметры:

$a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  — амплитуды,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  — степени затухания,

$\omega_j \in [0, 1/2]$  — частоты,  $\varphi_j \in [0, 2\pi)$  — фазы.

# Модель многомерного сигнала

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_P \end{pmatrix}, \quad X_p = S_p + R_p \text{ — одномерные ряды.}$$

Общий случай:

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R(p)} a_j^{(p)} e^{-\alpha_j^{(p)} n} \cos \left( 2\pi \omega_j^{(p)} n + \varphi_j^{(p)} \right)$$

Рассматриваемый случай:

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{-\alpha_j n} \cos \left( 2\pi \omega_j n + \varphi_j^{(p)} \right)$$

# Описание алгоритма MSSA

$X$  —  $P$ -мерный временной ряд длины  $N$  с сигналом  $S$ ,  
 $L < N$  — длина окна,  $K = N - L + 1$ .

Оператор вложения одномерного ряда:

$$\mathbb{H}_L(X_p) = \begin{pmatrix} x_0^{(p)} & x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & \dots & x_{K-1}^{(p)} \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & \ddots & \dots & \vdots \\ x_2^{(p)} & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & x_{N-2}^{(p)} \\ x_{L-1}^{(p)} & \dots & \dots & x_{N-2}^{(p)} & x_{N-1}^{(p)} \end{pmatrix}$$



# Описание алгоритма MSSA

**Параметры алгоритма:**  $L, R : R \leq L < N, K \geq L$ .

$R$  — число компонент, отнесённых к сигналу.

**Схема алгоритма MSSA для выделения сигнала**

**❶ Вложение**

$$\mathbf{X} \xrightarrow{L} \mathbf{H} = [\mathbb{H}_L(\mathbf{X}_1) : \mathbb{H}_L(\mathbf{X}_2) : \cdots : \mathbb{H}_L(\mathbf{X}_P)] \in \mathbb{R}^{L \times KP},$$

**❷ Разложение**  $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad d \leq L$

**❸ Группировка**  $\tilde{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d$

$$\tilde{\mathbf{S}} = [\tilde{\mathbf{S}}_1 : \tilde{\mathbf{S}}_2 : \cdots : \tilde{\mathbf{S}}_P], \quad \tilde{\mathbf{S}}_p \in \mathbb{R}^{L \times K}$$

**❹ Восстановление** Матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}_p$  усредняются вдоль побочных диагоналей:  $\tilde{s}_n^{(p)} = \text{mean} \left\{ \left( \tilde{\mathbf{S}}_p \right)_{i,j} \mid i + j - 2 = n \right\}.$

# Ранг сигнала

$S$  имеет ранг  $r$ , если  $\forall L : r \leq \min(L, K) \quad \text{rank } \mathbb{H}_L(S) = r$ .

Рекомендуемый выбор параметра  $R$  в алгоритме:  $R = r$ .

## Примеры

- $s_n = Ae^{\alpha n} \cos(2\pi\omega n + \varphi),$   
 $A \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, \omega \in [0, 1/2], \varphi \in [0, 2\pi)$

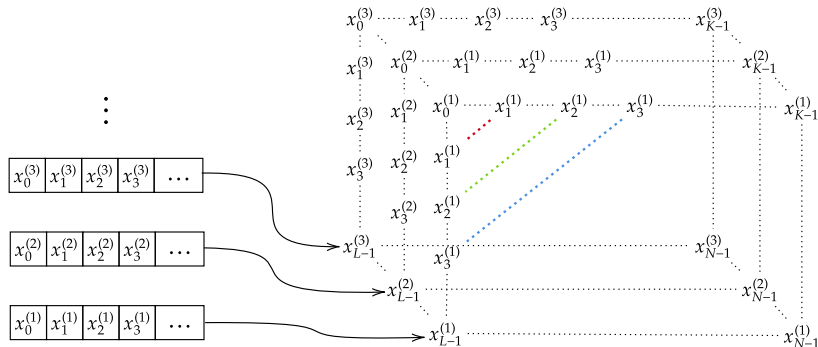
$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases}$$

- 

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{-\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n + \varphi_j^{(p)})$$

$$r = \sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad \Omega — \text{все уникальные пары } (\omega_j, \alpha_j).$$

# Построение траекторного тензора



$$L < N, \quad K = N - L + 1 \geq L$$

# Разложение и группировка

- High-Order SVD траекторного тензора  $\mathcal{H}$  имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P c_{lkp} \mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)}.$$

- Этап группировки в алгоритме HO-MSSA имеет вид

$$\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} c_{lkp} \mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)},$$

$R_1 \leq L, R_2 \leq K, R_3 \leq P$  — параметры алгоритма.

# Ранги тензора

**$n$ -Ранг тензора:** размерность пространства, порождённого векторами вдоль  $n$ -го измерения ( $\text{rank}_n(\mathcal{A})$ ).

## Теорема

*Пусть многомерный временной ряд*

$$\left( x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{N-1}^{(p)} \right), \quad p = 1, 2, \dots, P$$

*имеет ранг  $r$  в терминах MSSA, тогда для траекторного тензора  $\mathcal{H}$ , построенного по любой длине окна  $L < N$  такой, что  $\min(L, K) \geq r$ , выполняется  $\text{rank}_1(\mathcal{H}) = \text{rank}_2(\mathcal{H}) = r$ , а 3-ранг этого тензора равен рангу матрицы, в строках которой записаны заданные одномерные ряды.*

# Ранги сигнала в HO-MSSA

- 1- и 2-ранги траекторного тензора  $\mathcal{H}$  сигнала  $S$  совпадают с рангом этого сигнала в терминах MSSA.
- Однако ранг третьего измерения имеет иной смысл.

На этапе группировки рекомендуется брать  $R_1 = R_2 = r$  и  $R_3 = r_3$ , где  $r$  — MSSA-ранг сигнала,  $r_3$  — ранг матрицы, составленной из  $S_p$ .

## Примеры

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{-\alpha_j n} \cos \left( 2\pi \omega_j n + \varphi_j^{(p)} \right), \quad n \in \overline{0 : N-1},$$

$$p \in \overline{1 : P}, a_j^{(p)} \neq 0, \alpha_j \in \mathbb{R}, \omega_j \in (0, 1/2), \varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$$

$$\textcircled{1} \quad \omega_i \neq \omega_j, \varphi_j^{(p)} = \varphi_j^{(m)} \implies r = 2R, r_3 = R,$$

$$\textcircled{2} \quad \omega_i \neq \omega_j, \varphi_j^{(p)} = b_j p + c_j \implies r = 2R, r_3 = 2R.$$

# Численные сравнения

## ❶ Одинаковые фазы

$$x_n^{(p)} = c_1^{(p)} e^{-0.01n} \cos(2\pi 0.2n) + c_2^{(p)} e^{-0.02n} \cos(2\pi 0.22n) + \varepsilon_n^{(p)},$$

## ❷ Линейно меняющиеся фазы

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} = & c_1^{(p)} e^{-0.01n} \cos(2\pi 0.2n + p\pi/6) \\ & + c_2^{(p)} e^{-0.02n} \cos(2\pi 0.22n + p\pi/9) + \varepsilon_n^{(p)}, \end{aligned}$$

В обоих случаях  $n = 0, 1, \dots, 24$ ,  $p = 1, 2, \dots, 12$ ,  $c_k^{(p)} \sim N(0, 1)$ ,  $\varepsilon_n^{(p)} \sim N(0, 4 \cdot 10^{-4})$  и независимы.

Точность сравнивалась по RMSE по 1000 реализаций шума  $\varepsilon_n^{(p)}$  при фиксированных  $c_k^{(p)}$ , сравнение проводилось на одних и тех же реализациях шума при выборе оптимальных для каждого метода параметров  $L$ ,  $R$  и  $R_3$ .

# Численные сравнения

## 1 Равные фазы

MSSA:  $L = 22, R = 4$

HO-MSSA:  $L = 20, R = 4, R_3 = 2$

## 2 Линейно меняющиеся фазы

MSSA:  $L = 21, R = 4$

HO-MSSA:  $L = 21, R = 4, R_3 = 4$

Таблица: RMSE оценки многомерного сигнала

	MSSA	HO-MSSA
равные фазы	0.0107	0.0079
линейные фазы	0.00924	0.00918

**Вывод:** HO-MSSA выделяет многомерный сигнал с одной частотой точнее, чем MSSA.