УДК 510

Хромов Н. А., Голяндина Н. Э.

Правила оформления статей для ежегодной научной конференции Процессы управления и устойчивость

Введение.

1. Постановка задачи для одномерного сигнала. Пусть дан одномерный временной ряд, состоящий из N комплексных значений s_n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, и пусть этот ряд представим в виде конечной суммы R экспоненциально-модулированных комплексных гармоник

$$s_n = \sum_{j=1}^{R} a_j \exp\{\mathrm{i}\varphi_j\} \exp\{(-\alpha_j + 2\pi\mathrm{i}\omega_j)\, n\}. \tag{1}$$

Параметрами модели являются амплитуды a_j, фазы φ_j, частоты ω_j и степени затухания α_j. Приведём постановки задач выделения сигнала и оценки параметров для случая одномерного сигнала, а также методы их решения.

1.1. Оценка параметров сигнала. Рассматривается задача оценки параметров модели ω_j и α_j в ряде, являющимся суммой сигнала (1) и некоторого шума. Приведём стандартный матричный метод решения этой задачи, основанный на методе ESPRIT [2].

Ряд (1) может быть представлен в виде

$$s_n = \sum_{j=1}^{R} c_j z_j^n, \tag{2}$$

где $c_j = a_j \exp\{\mathrm{i}\varphi_j\}$, $z_j = \exp\{-\alpha_j + 2\pi\mathrm{i}\omega_j\}$. Оценка параметров ω_j и α_j равносильна оценке значений z_j, поэтому в дальнейшем будем находить оценки именно для них.

Хромов Никита Андреевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: hromovn@mail.ru, тел.: +7(981)509-25-94

Голяндина Нина Эдуардовна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: neg99@mail.ru, тел.: +7(000)000-00-00

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-345-6

Определение 1. *Оператором вложения с длиной окна* L будем называть оператор, преобразующий временной ряд $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ в ганкелеву матрицу размерности $L \times K$ $(K = N - L + 1)$ следующим образом:

$$\mathbb{H}_L\left((x_0, x_1, \dots, x_{N-1})\right) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{K-1} \\ x_1 & x_2 & \iddots & \dots & \vdots \\ x_2 & \iddots & \iddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & x_{N-2} \\ x_{L-1} & \dots & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Первый этап алгоритма – вложение, заключается в выборе длины окна $L \geqslant R$ так, чтобы $K = N - L + 1 \geqslant R$, и преобразовании имеющегося временного ряда в ганкелеву матрицу с помощью оператора вложения:

$$\mathbf{H} = \mathbb{H}_L\left((s_0, s_1, \dots, s_{N-1})\right). \quad (4)$$

Полученная матрица называется *траекторной матрицей ряда*. Эта матрица может быть представлена в виде следующего произведения трёх матриц:

$$\mathbf{H} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_R \\ z_1^2 & \dots & z_R^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{L-1} & \dots & z_R^{L-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_R \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & z_R & z_R^2 & \dots & z_R^{K-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^{\mathrm{T}}}. \quad (5)$$

Такое представление называется *разложением Вандермонда* (VDMD). С другой стороны, матрицу $\mathbf{H}$ можно представить в виде её сингулярного разложения (SVD)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{U}} & \mathbf{U}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{\Sigma}} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{V}}^{\mathrm{H}} \\ \mathbf{V}_0^{\mathrm{H}} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\widehat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L\times R}$, $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L\times(L-R)}$, $\widehat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{R\times R}$, $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-R)\times(K-R)}$, $\widehat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{K\times R}$, $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{R\times(K-R)}$. В отсутствие шума матрица $\mathbf{\Sigma}_0$ целиком состоит из нулей и сингулярное разложение $\mathbf{H}$ упрощается до произведения $\mathbf{H} = \widehat{\mathbf{U}}\widehat{\mathbf{\Sigma}}\widehat{\mathbf{V}}^{\mathrm{H}}$. Столбцы матрицы $\mathbf{S}$ порождают то же линейное пространство, что и столбцы матрицы $\widehat{\mathbf{U}}$ (то же самое верно для столбцов матриц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{V}$). В случае, когда сигнал искажён шумом, матрица $\mathbf{\Sigma}_0$ имеет максимальный ранг и тогда определяется наилучшее приближение матрицы $\mathbf{H}$ матрицей ранга R:

$$\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{U}}\widehat{\mathbf{\Sigma}}\widehat{\mathbf{V}}^{\mathrm{H}}. \tag{7}$$

Матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\downarrow} &= \mathbf{Z}\mathbf{S}^{\uparrow}, \\ \mathbf{T}_{\downarrow} &= \mathbf{Z}\mathbf{T}^{\uparrow}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(z_1, z_2, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^{R\times R}$, а стрелка вверх или вниз после матрицы означает удаление верхней или нижней строки этой матрицы соответственно. В случае, когда сигнал искажён белым шумом, матрица $\widehat{\mathbf{U}}$ совпадает с матрицей $\mathbf{S}$ с точностью до умножения на невырожденную матрицу $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{R\times R}$

$$\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{S}\mathbf{Q}, \tag{9}$$

и тогда матрицы $\widehat{\mathbf{U}}_{\downarrow}$ и $\widehat{\mathbf{U}}^{\uparrow}$ связаны с $\mathbf{S}_{\downarrow}$ и $\mathbf{S}^{\uparrow}$ соответственно через равенства

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}}^{\uparrow} &= \mathbf{S}^{\uparrow}\mathbf{Q}, \\ \widehat{\mathbf{U}}_{\downarrow} &= \mathbf{S}_{\downarrow}\mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{10}$$

Объединяя уравнения (8) и (10), получаем уравнение

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\uparrow} = \widehat{\mathbf{U}}_{\downarrow}\overline{\mathbf{Z}}, \tag{11}$$

где матрица $\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Q}$ имеет те же собственные числа, что и матрица $\mathbf{Z}$. Таким образом, оценками параметров z_j можно считать собственные числа решения уравнения (11) относительно $\overline{\mathbf{Z}}$.

1.2. Выделение сигнала. Рассматривается задача нахождения оценки сигнала по временному ряду с шумом. Будем считать, что наблюдаемый ряд является суммой шума и вещественного сигнала, полученного из вещественной части сигнала (1), то есть

$$\begin{aligned} x_n &= s_n + \varepsilon_n \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{R} c_j e^{-\alpha_j n} \cos(2\pi\omega_j n)}_{\text{сигнал}} + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{шум}}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{12}$$

Приведём алгоритм решения этой задачи с помощью метода SSA [3].

Аналогично предыдущему алгоритму, по ряду (12) строится траекторная матрица $\mathbf{H}$ вида (4) с длиной окна $L \geqslant 2R$. Далее рассматривается SVD этой матрицы в виде (6), где $\widehat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L\times 2R}$, $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L\times(L-2R)}$, $\widehat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{2R\times 2R}$, $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-2R)\times(K-2R)}$, $\widehat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{K\times 2R}$, $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{2R\times(K-2R)}$. Если шум отсутствует, то матрица $\widetilde{\mathbf{H}}$, определяемая аналогично (7) совпадёт с траекторной матрицей $\mathbf{H}$, иначе $\widehat{\mathbf{H}}$ является наилучшим приближением ранга $2R$ матрицы $\mathbf{H}$.

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении побочных диагоналей матрицы $\widehat{\mathbf{H}}$, то есть

$$\widetilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,j\in M_n} \widehat{x}_{ij}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{13}$$

где $M_n = \{(i,j):\ i+j-2 = n,\ 1 \leqslant i \leqslant L,\ 1 \leqslant j \leqslant K\}$, а $\widehat{x}_{ij}$ – элементы матрицы $\widehat{\mathbf{H}}$. Результат такого усреднения $\widetilde{s}_n$ считается оценкой сигнала s_n.

2. Постановка задачи для многомерного сигнала. Пусть дан набор из P одномерных комплексных временных рядов длины N каждый, и пусть компоненты этих рядов имеют вид

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R} a_j^{(p)} \exp\left\{\mathrm{i}\varphi_j^{(p)}\right\} \exp\left\{(-\alpha_j + 2\pi\mathrm{i}\omega_j)\, n\right\} = \sum_{j=1}^{R} c_j^{(p)} z_j^n, \tag{14}$$

где $n = 0, 1, \ldots, N-1$, а p $(1 \leqslant p \leqslant P)$ отвечает за номер временного ряда.

2.1. Оценка параметров многомерного сигнала. Для оценки параметров α_j и ω_j многомерного ряда используется алгоритм, аналогичный алгоритму для одномерных рядов. На первом шаге каждый из одномерных сигналов $s_n^{(p)}$ преобразуется в траекторную матрицу с длиной окна L

$$\mathbf{H}_p = \mathbb{H}_L\left(\left(s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \ldots, s_{N-1}^{(p)}\right)\right). \tag{15}$$

Полученные матрицы укладываются друг за другом вдоль столбцов в одну блочную матрицу

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \ldots : \mathbf{H}_P], \tag{16}$$

называемую *траекторной матрицей многомерного ряда.* Эта матрица может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}\left[\mathbf{C}_1\mathbf{T}^{\mathrm{T}} : \mathbf{C}_2\mathbf{T}^{\mathrm{T}} : \ldots : \mathbf{C}_P\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\right], \tag{17}$$

где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ – матрицы Вандермонда, определённые в (5), а $\mathbf{C}_p = \mathrm{diag}\left(c_1^{(p)}, c_2^{(p)}, \ldots, c_R^{(p)}\right)$. Пусть $\widehat{\mathbf{U}}$ – матрица, столбцы которой равны первым R сингулярным векторам матрицы $\mathbf{H}$, тогда подпространства, порождаемые столбцами $\widehat{\mathbf{U}}$ и $\mathbf{S}$, совпадают, и для нахождения оценок z_k можно аналогично одномерному случаю повторить процедуру, описанную уравнением (11).

2.2. Выделение многомерного сигнала. Рассматривается многомерный временной ряд, являющийся суммой шума и многомерного сигнала, состоящего из вещественных частей сигнала (14), то есть

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= s_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^{R} c_j^{(p)} e^{-\alpha_j n}\cos(2\pi\omega_j n) + \varepsilon_n^{(p)} \\ n &= 0, 1, \ldots, N-1, \quad 1 \leqslant p \leqslant P. \end{aligned} \tag{18}$$

Приведём алгоритм MSSA [4] для выделения сигнала из многомерного временного ряда.

На первом этапе по заданному временному ряду строится траекторная матрица $\mathbf{H}$ в соответствии с (15) и (16) с $L \geqslant 2R$. Затем рассматривается SVD этой матрицы в виде (6), где $\widehat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L\times 2R}$, $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{L\times(L-2R)}$, $\widehat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{2R\times 2R}$, $\mathbf{\Sigma}_0 \in \mathbb{C}^{(L-2R)\times(KP-2R)}$, $\widehat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{KP\times 2R}$, $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{C}^{2R\times(KP-2R)}$, после чего строится матрица $\widetilde{\mathbf{H}}$ аналогично (7), эта матрица является наилучшим приближением ранга $2R$ траекторной матрицы $\mathbf{H}$. Последний шаг алгоритма – восстановление, совпадает с последним шагом алгоритма SSA (13).

3. Тензорные модификации алгоритмов выделения сигнала из временного ряда. В работе [1] были предложены тензорные модификации алгоритма ESPRIT для оценки параметров одномерных и многомерных сигналов. В этом разделе мы приведём расширение этих алгоритмов для решения задачи выделения сигнала из одномерных и многомерных рядов.

3.1. High-Order SSA. Пусть дан одномерный временной ряд вида (12). Вместо траекторной матрицы предлагается строить по ряду *траекторный тензор* $\mathcal{H}$ следующим образом: выбираются два параметра $I, L \geqslant 2R$ такие, что $J \geqslant 2R$ ($J = N-I-L+2$), и тогда элемент тензора h_{ilj} берётся равным $s_{i+l+j-3}$. Другими словами, слой траекторного тензора с номером j получается как траекторная матрица, построенная по части исходного ряда $(s_{j-1}, s_j, \ldots, s_{j+I+L-3})$ с длиной окна I:

$$\mathcal{H}_{\cdot\cdot j} = \mathbb{H}_I\left((s_{j-1}, s_j, \ldots, s_{j+I+L-3})\right). \tag{19}$$

На следующем шаге траекторный тензор представляется в виде своего сингулярного разложения высшего порядка (HOSVD) [5]:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}, \tag{20}$$

где матрицы $\mathbf{U}_k = \left[U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \ldots, U_{I_k}^{(k)}\right]$ ($I_1 = I$, $I_2 = L$, $I_3 = J$) ортонормированные, а $\circ$ обозначает внешнее произведение векторов.

Определение 2. *Развёрткой* тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1\times I_2\times\ldots\times I_M}$ по измерению n называют матрицу $\mathbb{A}_{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n\times I_{n+1}I_{n+2}\ldots I_M I_1 I_2\ldots I_{n-1}}$, в которой элемент исходного тензора $a_{i_1 i_2\ldots i_M}$ содержится в строке i_n и столбце с номером

$$1 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{M}\left[(i_k - 1)\prod_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{k-1} I_m\right].$$

Визуализация развёрток тензора с тремя измерениями приведена на рисунке 1.

Определение 3. *n-рангом* тензора $\mathcal{A}$ называют ранг развёртки этого тензора по измерению n.

Если во временном ряде отсутствует шум, то все n-ранги траекторного тензора $\mathcal{H}$ будут равны $2R$ и верхние пределы суммирования во всех суммах в представлении (20) будут равны $2R$. В случае, если во временном ряде присутствует шум, то у траекторного тензора будут максимальные n-ранги, и тогда строится приближение траекторного тензора

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{2R}\sum_{l=1}^{2R}\sum_{j=1}^{2R} c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \tag{21}$$

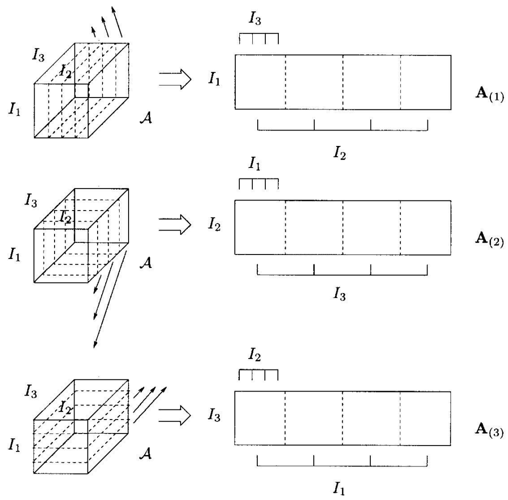

Рис. 1. Развёртка тензора $\mathcal{A}$ размерности $I_1 \times I_2 \times I_3$ в матрицы $\mathbf{A}_{(1)}$, $\mathbf{A}_{(2)}$, $\mathbf{A}_{(3)}$ размерностей $I_1 \times (I_2 I_3)$, $I_2 \times (I_3 I_1)$, $I_3 \times (I_1 I_2)$ соответственно

В работе [5] показано, что хоть такое приближение и не является оптимальным приближением по множеству тензоров с n-рангами, равными $2R$, оно является довольно точным, так как ошибка приближения ограничена сверху.

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении полученного тензора $\widehat{\mathcal{H}}$ вдоль побочных «плоскостей» $i + l + j = \text{const}$:

$$\widetilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,l,j \in M_n} \widehat{h}_{ilj}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{22}$$

где $M_n = \{(i,l,j) : \ i + l + j - 3 = n, \ 1 \leqslant i \leqslant I, \ 1 \leqslant l \leqslant L, \ 1 \leqslant j \leqslant J\}$, а $\widehat{h}_{ilj}$ – элементы тензора $\widehat{\mathcal{H}}$. Результат такого усреднения $\widetilde{s}_n$ считается оценкой сигнала s_n.

Литература

1. Papy J. M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case

// Numerical Linear Algebra with Applications. 2005. № 8. P. 809–826.

2. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1989. №7. P. 984–995.

3. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. Analysis of Time Series Structure - SSA and Related Techniques. Chapman and Hall/CRC, 2001. 320 p.

4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. Springer Berlin, Heidelberg, 2020. 146 p.

5. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2000. №4. P. 1253-1278.