УДК 510

Хромов Н. А., Голяндина Н. Э.

Тензорные HO-SSA и HO-MSSA для выделения сигнала

1. Введение. SSA (Singular Spectrum Analysis) [3] является распространённым методом анализа и прогноза временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и выделения тренда и периодических компонент из временного ряда. Хотя в последнее время получили распространение методы машинного обучения (например, в [6] рассматривается задача прогноза с предобработкой временного ряда методом SSA перед применением нейронных сетей для прогноза), задача анализа одного недлинного временного ряда не теряет своей актуальности. Ряд методов рассматривает при этом конкретные модели для сигнала/тренда (например, в [7] рассматривается полиномиальная регрессия). Метод SSA не требует задания параметрической модели, поэтому он более универсальный. Однако, при этом метод SSA хорошо работает и с моделью в виде суммы комплексных экспонент или в виде суммы экспоненциально-модулированных гармоник в вещественном случае, что позволяет оценивать параметры в этих моделях.

Метод SSA основан на сингулярном разложении особой матрицы построенной по временному ряду, называемой траекторной. Обобщение метода SSA на случай многомерных сигналов называется MSSA [4]. Для оценки параметров временного ряда в параметрической модели метода SSA используется метод ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques) [2], который также основан на сингулярном разложении траекторной матрицы и относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В работе [1] предлагается модификация метода ESPRIT, основанная на переходе от траекторной матрицы и матричного сингулярного разложения к траекторному тензору и тензорному сингулярному разложению, и демонстрируется преимущество такой модификации

Хромов Никита Андреевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: hromovn@mail.ru, тел.: +7(981)509-25-94

Голяндина Нина Эдуардовна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: neg99@mail.ru, тел.: +7(000)000-00-00

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 12-345-6

при оценке параметров, в частности, частот. В данной работе мы рассматриваем аналогичные тензорные модификации методов SSA и MSSA (HO-SSA и HO-MSSA, где HO — сокращение от high order) для выделения сигналов из временных рядов. Целью работы является сравнение методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями на временных рядах, аналогичных тем, что были рассмотрены в [1].

В разделах ... мы коротко опишем методы SSA и MSSA, а в разделах ... их тензорные модификации. Описание будет дано в более общей комплексной форме, хотя применять метод мы будем в вещественном случае.

Так как для выделения сигнала нужно знать его ранг, то в разделе ... обсуждается ранг сигнала в контексте тензорных модификаций HO-SSA и HO-MSSA.

В разделе ... описаны результаты численных сравнений.

2. Описание модели. Опишем рассматриваемые одномерные и многомерные комплексные сигналы. Пусть дан одномерный временной ряд, состоящий из N комплексных значений s_n, $n = 0, 1, \dots, N-1$, и пусть этот ряд представим в виде конечной суммы R экспоненциально-модулированных комплексных гармоник

$$s_n = \sum_{j=1}^{R} a_j e^{-\alpha_j n} e^{\mathrm{i}(2\pi\omega_j n + \varphi_j)}. \tag{1}$$

Параметрами модели являются амплитуды $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, фазы $\varphi_j \in [0, 2\pi)$, частоты $\omega_j \in [0, 1/2]$ и степени затухания $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Модель многомерного сигнала имеет вид набора P одномерных сигналов вида (1), то есть

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R(p)} a_j^{(p)} e^{-\alpha_j^{(p)} n} e^{\mathrm{i}\left(2\pi\omega_j^{(p)} n + \varphi_j^{(p)}\right)}, \tag{2}$$

где $n = 0, 1, \dots, N-1$, а p ($1 \leqslant p \leqslant P$) отвечает за номер одномерного временного ряда. Однако мы будем рассматривать частный случай такой модели, при котором параметры $R(p)$, $\omega_j^{(p)}$ и $\alpha_j^{(p)}$ не зависят от номера ряда p:

$$s_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R} a_j^{(p)} e^{-\alpha_j n} e^{\mathrm{i}\left(2\pi\omega_j n + \varphi_j^{(p)}\right)}. \tag{3}$$

Это обосновано тем, что такая модель применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [8]. Кроме того, в работе [1] используется именно этот частный случай модели.

Замечание. В общем случае можно рассматривать модели временных рядов вида (1) и (3), в которых амплитуды являются ненулевыми многочленами, однако этот случай выходит за рамки этой работы.

3. Ряды конечного ранга и тензорные ранги. Одними из ключевых объектов в теории SSA являются *ряды конечного ранга.* В данном разделе мы изложим теорию, касающуюся рядов конечного ранга, а затем рассмотрим теорию тензорных рангов, и приведём утверждения, связывающие ранги рядов с рангами определенных тензоров.

3.1. Ряды конечного ранга. Введём несколько вспомогательных определений.

Определение 1. *Оператором вложения с длиной окна* L будем называть отображение, преобразующее временной ряд $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ в ганкелеву матрицу размерности $L \times K$ $(K = N - L + 1)$ следующим образом:

$$\mathbb{H}_L\left((x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})\right) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_{K-1} \\ x_1 & x_2 & \iddots & \ldots & \vdots \\ x_2 & \iddots & \iddots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & x_{N-2} \\ x_{L-1} & \ldots & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Определение 2. *Траекторной матрицей одномерного временного ряда* $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ *с длиной окна* L называется матрица $\mathbf{H}$, полученная применением оператора вложения с длиной окна L к данному временному ряду.

Определение 3. Ряд $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ называется *рядом конечного ранга* d $(d < N/2)$, если для любой длины окна $L < N$ такой, что $\min(L, K) \geqslant d$, траекторная матрица этого ряда, построенная по данной длине окна, имеет ранг d.

Пример 1. Временной ряд вида (1) имеет ранг равный количеству уникальных пар (α_j, ω_j) по всем j [9].

Определение 4. Рассмотрим многомерный временной ряд

$$\left(s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \ldots, s_{N-1}^{(p)}\right), \quad p = 1, 2, \ldots, P.$$

Построим для каждого одномерного ряда $\left(s_n^{(p)}\right)_{n=0}^{N-1}$ траекторную матрицу с длиной окна L:

$$\mathbf{H}_p = \mathbb{H}_L\left(s_0^{(p)}, s_1^{(p)}, \ldots, s_{N-1}^{(p)}\right).$$

Тогда *траекторной матрицей данного многомерного ряда с длиной окна* L называется матрица $\mathbf{H}$, полученная приписыванием матриц $\mathbf{H}_p$ друг за другом по столбцам:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \ldots : \mathbf{H}_P]. \tag{5}$$

Замечание. Ранг многомерного ряда определяется аналогично рангу одномерного ряда с заменой траекторной матрицы одномерного ряда на траекторную матрицу многомерного ряда.

Пример 2. Многомерный временной ряд вида (2) имеет ранг равный количеству уникальных пар $(\alpha_j^{(p)}, \omega_j^{(p)})$ по всем j и p [9].

Пример 3. Так как $\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \left(e^{2\pi \mathrm{i}\omega n + \varphi_n} + e^{-2\pi \mathrm{i}\omega n - \varphi_n}\right)/2$, то ранг ряда

$$s_n = Ae^{\alpha n}\cos(2\pi\omega n + \varphi) \tag{6}$$

с $A \neq 0$ равен 2, если $\omega \in (0, 1/2)$ и равен 1, если $\omega \in \{0, 1/2\}$.

Пример 4. Пусть ряд представляется в виде суммы M экспоненциально-модулированных гармоник

$$s_n = \sum_{j=1}^{M} A_j e^{\alpha_j n}\cos(2\pi\omega_j n + \varphi_j), \tag{7}$$

где $A_j \neq 0$. Обозначим

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \text{иначе}, \end{cases}$$

тогда ранг ряда (7) равен сумме $\sum_{(\omega,\alpha)\in\Omega} r(\omega)$, где Ω – множество уникальных пар (ω_j, α_j) по всем j.

3.2. Тензорные ранги. Введём вспомогательные определения.

Определение 5. *Траекторным тензором одномерного временного ряда* $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ *с длинами окна* I *и* L называется тензор $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I \times L \times J}$ $(J = N - I - L + 2)$, элемент h_{ilj} которого равен $x_{i+l+j-3}$. Другими словами, слой траекторного тензора с номером j получается как траекторная матрица, построенная по части исходного ряда $(x_{j-1}, x_j, \ldots, x_{j+I+L-3})$ с длиной окна I:

$$\mathcal{H}_{\cdot\cdot j} = \mathbb{H}_I \left((x_{j-1}, x_j, \ldots, x_{j+I+L-3}) \right). \tag{8}$$

Определение 6. *Развёрткой* тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ по измерению n называют матрицу $\mathbb{A}_{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times I_{n+1} I_{n+2} \ldots I_M I_1 I_2 \ldots I_{n-1}}$, в которой элемент исходного тензора $a_{i_1 i_2 \ldots i_M}$ содержится в строке i_n и столбце с номером

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{M} \left[(i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

Определение 7. *n-рангом* тензора $\mathcal{A}$ называют ранг развёртки этого тензора по измерению n. Обозначение: $\operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$.

Основываясь на виде траекторного тензора, можно доказать следующее утверждение, позволяющее перенести понятие одномерного ряда конечного ранга на язык траекторных тензоров этого ряда.

Утверждение 1. *(Об n-рангах траекторного тензора одномерного ряда конечного ранга)* Пусть временной ряд $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ имеет ранг d $(d < N/2)$ в терминах SSA, тогда для любых значений параметров I и L таких, что

$$I, L < N,$$
$$d \leqslant \min(I, L, J),$$

все n-ранги траекторного тензора $\mathcal{H}$, построенного по этому ряду с параметрами I и L, будут равны d.

Определение 8. *Траекторным тензором многомерного временного ряда*

$$\left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots, x_{N-1}^{(P)} \right), \quad p = 1, 2, \ldots, P$$

с длиной окна L называется тензор $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{L\times K\times P}$ $(K = N - L + 1)$, элемент h_{lkp} которого равен $x^{(p)}_{l+k-2}$. То есть слой траекторного тензора с номером p получается как траекторная матрица, построенная по ряду с номером p с длиной окна L:

$$\mathcal{H}_{\cdot\cdot p} = \mathbb{H}_L\left(\left(x^{(p)}_0, x^{(p)}_1, \ldots x^{(p)}_{N-1}\right)\right). \tag{9}$$

Основываясь на виде траекторного тензора многомерного ряда, можно доказать следующее утверждение, связывающее понятие многомерного ряда конечного ранга и понятие n-рангов траекторного тензора этого ряда.

Утверждение 2. *(Об n-рангах траекторного тензора многомерного ряда конечного ранга)* Пусть временной ряд

$$\left(x^{(p)}_0, x^{(p)}_1, \ldots, x^{(p)}_{N-1}\right), \quad p = 1, 2, \ldots, P$$

имеет ранг d в терминах SSA, тогда для траекторного тензора $\mathcal{H}$, построенного по любой длине окна $L < N$ такой, что $\min(L, K) \geqslant d$, выполняется $\operatorname{rank}_1(\mathcal{H}) = \operatorname{rank}_2(\mathcal{H}) = d$, а 3-ранг этого тензора равен рангу матрицы

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} x^{(1)}_0 & x^{(1)}_1 & \ldots & x^{(1)}_{N-1} \\ x^{(2)}_0 & x^{(2)}_1 & \ldots & x^{(2)}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x^{(P)}_0 & x^{(P)}_1 & \ldots & x^{(P)}_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

4. Постановка задачи. Пусть дан некоторый временной ряд вида (1) или (3). В работе [1] рассматривается задача оценки параметров ω_j и α_j такого ряда, мы же будем рассматривать задачу оценки значения самого сигнала по временному ряду с шумом.

4.1. Случай одномерного сигнала. Рассматривается сигнал вида (1). Приведём алгоритм SSA для решения задачи оценки одномерного сигнала по зашумлённому ряду.

Первый этап алгоритма – вложение, заключается в выборе длины окна $1 < L < N$ и построении по выбранной длине окна траекторной матрицы $\mathbf{H}$ (4) данного ряда. Эту матрицу можно представить в виде её сингулярного разложения (SVD)

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j U_j V_j^{(\mathrm{H})}, \tag{11}$$

где $d = \mathrm{rank}(\mathbf{H}) \geqslant \min(L, K)$, λ_j – сингулярные числа матрицы $\mathbf{H}$, а матрицы $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \ldots : U_d] \in \mathbb{C}^{L\times d}$ и $\mathbf{V} = [V_1 : V_2 : \ldots : V_d] \in \mathbb{C}^{K\times d}$ ортонормированные. Из примера 1 следует, что при некоторых условиях на N и L число d равно количеству уникальных пар параметров (α_j, ω_j). В частности, если все эти пары разные, то $d = R$. Если на данный сигнал воздействует шум, то ранг траекторной матрицы будет максимальным, и тогда определяется наилучшее приближение траекторной матрицы матрицей некоторого ранга $r \leqslant d$, задаваемого пользователем:

$$\widehat{\mathbf{H}} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j U_j V_j^{(\mathrm{H})}. \tag{12}$$

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении побочных диагоналей матрицы $\widehat{\mathbf{H}}$, то есть

$$\widetilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,j\in M_n} \widehat{h}_{ij}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{13}$$

где $M_n = \{(i, j) :\ i + j - 2 = n,\ 1 \leqslant i \leqslant L,\ 1 \leqslant j \leqslant K\}$, а $\widehat{h}_{ij}$ – элементы матрицы $\widehat{\mathbf{H}}$. Результат такого усреднения $\widetilde{s}_n$ считается оценкой сигнала s_n.

4.2. Случай многомерного сигнала. Пусть дан многомерный временной ряд вида (3). Приведём алгоритм MSSA для решения задачи оценки многомерного сигнала по зашумлённому ряду.

На первом шаге выбирается длина окна L и по ней строится траекторная матрица $\mathbf{H}$ (5) данного многомерного ряда. Дальнейшие шаги алгоритма идентичны одномерному случаю: траекторная матрица $\mathbf{H}$ представляется в виде своего сингулярного разложения (11), затем определяется наилучшее приближение этой матрицы матрицей $\widehat{\mathbf{H}}$ ранга r (12), после чего находятся усреднённые значения побочных диагоналей этой матрицы (13), которые и считаются оценками искомого сигнала.

5. Тензорные модификации алгоритмов выделения сигнала из временного ряда. В работе [1] были предложены тензорные модификации алгоритма ESPRIT для оценки параметров одномерных и многомерных сигналов. В этом разделе мы приведём расширение этих алгоритмов для решения задачи выделения сигнала из одномерных и многомерных рядов.

5.1. High-Order SSA. Пусть дан одномерный временной ряд вида (1). На первом шаге алгоритма выбираются два параметра $I, L > 1$, $I + L < N + 1$ и по этим длинам окна строится траекторный тензор $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I \times L \times J}$ $(J = N - I - L + 2)$ (8). На следующем шаге траекторный тензор представляется в виде своего сингулярного разложения высшего порядка (HOSVD) [5]:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{l=1}^{d_2} \sum_{j=1}^{d_3} c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}, \tag{14}$$

где $d_k = \mathrm{rank}_k(\mathcal{H})$, матрицы $\mathbf{U}_k = \left[U_1^{(k)} : U_2^{(k)} : \ldots : U_{d_k}^{(k)} \right] \in \mathbb{C}^{I_k \times d_k}$ $(I_1 = I,\ I_2 = L,\ I_3 = J)$ ортонормированные, а $\circ$ обозначает внешнее произведение векторов.

Из примера 1 и утверждения 1 следует, что при некоторых условиях на N, I и L все n-ранги траекторного тензора $\mathcal{H}$ будут равны количеству уникальных пар параметров (α_j, ω_j). В случае, если во временном ряде присутствует шум, то у траекторного тензора будут максимальные n-ранги, и тогда строится приближение тензора $\mathcal{H}$ тензором n-рангов $r \leqslant \min(d_k)$:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} c_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}, \tag{15}$$

где r задаётся пользователем. В работе [5] показано, что хоть такое приближение и не является оптимальным приближением по множеству тензоров с n-рангами, равными r, оно является довольно точным, так как ошибка приближения ограничена сверху.

Последний шаг алгоритма – восстановление, заключается в усреднении полученного тензора $\widehat{\mathcal{H}}$ вдоль побочных «плоскостей» $i + l + j = \mathrm{const}$:

$$\widetilde{s}_n = \frac{1}{|M_n|} \sum_{i,l,j \in M_n} \widehat{h}_{ilj}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{16}$$

где $M_n = \{(i,l,j) :\ i + l + j - 3 = n,\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ 1 \leqslant j \leqslant J\}$, а $\widehat{h}_{ilj}$ – элементы тензора $\widehat{\mathcal{H}}$. Результат такого усреднения $\widetilde{s}_n$ считается оценкой сигнала s_n.

5.2. High-Order MSSA. Пусть дан многомерный временной ряд вида (3). На первом шаге выбирается длина окна $1 < L < N$

и по данному ряду строится траекторный тензор многомерного ряда $\mathcal{H}$ (9). Затем траекторный тензор представляется в виде своего HOSVD

$$\mathcal{H} = \sum_{l=1}^{d_1} \sum_{k=1}^{d_2} \sum_{p=1}^{d_3} c_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \tag{17}$$

Из примера 2 и утверждения 2 следует, что при некоторых условиях на N и L 1- и 2-ранги траекторного тензора будут равны количеству уникальных пар $(\alpha_j^{(p)}, \omega_j^{(p)})$ по всем j и p, а 3-ранг будет равен рангу матрицы (10). Если во временном ряде присутствует шум, то у траекторного тензора будут максимальные n-ранги, и тогда выбираются параметры r и r_3 и строится приближение траекторного тензора с 1- и 2-рангами, равными r, и 3-рангом, равным r_3:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \sum_{p=1}^{r_3} c_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \tag{18}$$

Последний шаг алгоритма полностью аналогичен шагу восстановления в алгоритме High-Order SSA и заключается в усреднении полученного приближения $\widehat{\mathcal{H}}$ вдоль побочных «плоскостей» $l + k + p = \mathrm{const}$.

6. Численные сравнения. В данном разделе приведем результаты численных сравнений методов SSA и MSSA с их тензорными аналогами HO-SSA и HO-MSSA соответственно. Точность выделения сигнала сравнивалась с помощью RMSE оценки сигнала по 1000 реализациям шума. Методы сравнивались на одних и тех же реализациях шума, все различия значимы при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

6.1. Одномерный сигнал. Пусть временной ряд имеет вид

$$x_n = e^{-0.01n} \cos(2\pi 0.2n) + e^{-0.02n} \cos(2\pi 0.22n) + \varepsilon_n, \tag{19}$$

где $n = 0, 1, \ldots, 24$, ε_n – последовательность независимых нормальных случайных величин со стандартным отклонением $\sigma = 0.03$.

Сравним точность выделения сигнала при выборе оптимальных для каждого метода длинах окна (для SSA $L = 13$, а для HO-SSA $I = 4$ и $L = 9$).

Из примера 4 следует, что ранг сигнала в обоих случаях равен 4. Соответственно, число компонент для оценки сигнала будем выбирать равным 4.

В таблице 1 приведены значения RMSE оценок одномерного сигнала (19) методами SSA и HO-SSA. Видно, что метод SSA отделил сигнал с бо́льшей точностью, чем метод HO-SSA, что отличается от результатов в [1], где тензорный метод оказался точнее для оценки параметров сигнала.

Таблица 1. RMSE оценки одномерного сигнала

SSA	HO-SSA
0.0188	0.0197

6.2. Многомерный сигнал с одинаковыми фазами. Пусть временной ряд имеет вид

$$x_n^{(p)} = c_1^{(p)} e^{-0.01n} \cos(2\pi 0.2n) + c_2^{(p)} e^{-0.02n} \cos(2\pi 0.22n) + \varepsilon_n^{(p)}, \quad (20)$$

где $n = 0, 1, \ldots, 24$, $p = 1, 2, \ldots, 12$, $\varepsilon_n^{(p)}$ – последовательность независимых нормальных случайных величин со стандартным отклонением $\sigma = 0.02$.

Будем сравнивать точность выделения сигнала при выборе оптимальных для каждого метода длинах окна (для MSSA $L = 22$, а для HO-MSSA $L = 20$).

Ранг сигнала в обоих случаях равен 4, а 3-ранг траекторного тензора равен 2. Соответственно, число компонент для оценки сигнала в MSSA будем выбирать равным 4, число компонент по первым двум измерениям в HO-MSSA тоже равным 4, а по третьему измерению – 2.

В таблице 2 в первой строке приведены значения RMSE оценок многомерного сигнала (20) методами MSSA и HO-MSSA. Видно, что метод HO-MSSA отделил сигнал с бо́льшей точностью, чем метод MSSA, что аналогично результатам, полученным в работе [1] для точности оценок параметров сигнала.

6.3. Многомерный сигнал с линейно меняющимися фазами. Пусть временной ряд имеет вид

$$x_n^{(p)} = c_1^{(p)} e^{-0.01n} \cos(2\pi 0.2n + p\pi/6) + c_2^{(p)} e^{-0.02n} \cos(2\pi 0.22n + p\pi/9) + \varepsilon_n^{(p)}, \quad (21)$$

где $n = 0, 1, \ldots, 24$, $p = 1, 2, \ldots, 12$, $\varepsilon_n^{(p)}$ – последовательность независимых нормальных случайных величин со стандартным отклонением $\sigma = 0.02$.

Будем сравнивать точность выделения сигнала при выборе оптимальных для каждого метода длинах окна (для обоих методов оптимальное $L = 21$).

Ранг сигнала в обоих случаях равен 4, а 3-ранг траекторного тензора равен 4. Соответственно, число компонент для оценки сигнала в MSSA будем выбирать равным 4 и число компонент по всем измерениям в HO-MSSA тоже равным 4.

Таблица 2. RMSE оценки многомерного сигнала

	MSSA	HO-MSSA
сигнал (20)	0.0107	0.0079
сигнал (21)	0.00924	0.00918

Во второй строке таблицы 2 приведены значения RMSE оценок многомерного сигнала (21) методами MSSA и HO-MSSA. Видно, что метод HO-MSSA отделил сигнал с бо́льшей точностью, чем метод MSSA, однако это преимущество уменьшилось по сравнению со случаем равных фаз.

7. Заключение. В результате работы было показано, что тензорный вариант HO-SSA дал точность хуже, чем обычный SSA. Поэтому не рекомендуется использовать HO-SSA, если нужно оценить сигнал. Однако для многомерного сигнала было выявлено преимущество рассматриваемой тензорной модификации.

Соответственно, в следующих исследованиях имеет смысл развивать теорию метода HO-MSSA для увеличения точности оценивания сигнала и его компонент.

Литература

1. Papy J. M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. 2005. Vol. 12(8). P. 809–826.

2. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1989. Vol. 37(7). P. 984–995.

3. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. Analysis of Time Series Structure - SSA and Related Techniques. Chapman and Hall/CRC, 2001. 320 p.

4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. Springer Berlin, Heidelberg, 2020. 146 p.

5. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2000. Vol. 21(4). P. 1253-1278.

6. Ежов Ф. В. Исследование гибридных моделей нейронных сетей с применением SSA на примере реальных данных // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9, № 1. С. 223–231.

7. Головкина А. Г., Козынченко В. А., Клименко И. С. Метод последовательных приближений для построения модели динамической полиномиальной регрессии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 18, Вып. 4. С. 487–500.

8. Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., Van Hecke P. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares // Journal of Magnetic Resonance. 1994. Vol. 110(2). P. 228–237.

9. Степанов Д. В., Голяндина Н. Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'05. 2005. С. 1831–1848.