

# 1 Известные сведения об алгоритмах SSA и MSSA

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

## 1.1 SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 1.1** (Оператор вложения). Оператором вложения  $\mathcal{H}_L$  с длиной окна  $L$  будем называть отображение, переводящее временной ряд  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $N \geq L$ , в ганкелеву матрицу  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $K = N - L + 1$ , такую, что  $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$ . Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

**Определение 1.2** (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L < N$  называют матрицу  $\mathbf{X}$ , полученную применением оператора вложения  $\mathcal{H}_L$  к ряду  $\mathbf{X}$ .

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов  $\mathbf{X}_k$ . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ . Первые два шага в алгоритме 2 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

**Определение 1.3** (SSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется SSA-рангом временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq (N + 1)/2$  и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание.* В качестве параметра  $R$  в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

**Пример 1.1.** Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-ранги.

- Ранг полиномиального ряда  $x_n = Q_d(n)$ , где  $Q_d$  — многочлен степени  $d$ , равен  $d + 1$ .
- Ранг экспоненциального ряда  $x_n = Ce^{\alpha n}$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$  и  $C \neq 0$ , равен 1.
- Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^M C_j e^{\alpha_j n},$$

где  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  и  $C_j \neq 0$  при всех  $j$ , равен количеству уникальных значений  $\alpha_j$ .

- Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где  $C \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\omega \in [0, 1/2]$ , равен  $r(\omega)$ , где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

---

**Алгоритм 1** SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ ,  $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  по длине окна  $L$ .
- 2: Разложение: проведение SVD траекторной матрицы  $\mathbf{X}$ , получение её представления в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d \leq \min(L, N - L + 1).$$

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по матрицам  $\mathbf{X}_k$  посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ :

$$\hat{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N - L + 1, i + j - 1 = n \right\}.$$

---

**Алгоритм 2** SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$  — оценка сигнала  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ .

- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление ряда  $\tilde{\mathbf{X}}$  по матрице  $\tilde{\mathbf{X}}$  посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ .
- 

- Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^M C e^{\alpha_j n} \cos(2\pi n \omega_j + \psi_j)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i, \alpha_i)$ , представленных в данном временном ряде.

**Определение 1.4** (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  и  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$  называют слабо  $L$ -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)},$
2.  $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 1.1.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 1.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые возможно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

## 1.2 MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [2, 3, 4].

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left( x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

**Определение 1.5** (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  — траекторные матрицы рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  соответственно, построенные по длине окна  $L$ . Траекторной матрицей многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  называется матрица  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$ ,  $K = N - L + 1$ , построенная соединением матриц  $\mathbf{X}_p$  по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P].$$

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

**Определение 1.6** (MSSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется MSSA-рангом  $P$ -мерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq P(N + 1)/(P + 1)$ , и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, P(N - L + 1))$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание.* Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

**Пример 1.2.** Рассмотрим  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  с элементами вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{R(p)} a_i^{(p)} e^{-\alpha_i^{(p)} n} \cos \left( 2\pi \omega_i^{(p)} n + \varphi_i^{(p)} \right). \quad (2)$$

MSSA-ранг такого ряда равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad (3)$$

где функция  $r(\omega)$  определена в уравнении (1), а  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)})$ , представленных в данном временном ряде.

*Замечание.* В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HOSVD-MSSA на многомерных сигналах вида (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры  $R(p)$ ,  $\omega_i^{(p)}$  и  $\alpha_i^{(p)}$  не зависят от номера ряда  $p$ , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [5]. Кроме того, в работе [6] также рассматривается этот частный случай модели.

**Определение 1.7** (Слабая MSSA-разделимость).  $P$ -мерные временные ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  называются слабо  $L$ -разделимыми, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P},$
2.  $\sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 1.2.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

### 1.3 ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [7, 6].

Пусть элементы многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{\alpha_j n} e^{i(2\pi\omega_j n + \varphi_j^{(p)})}, \quad (4)$$

где  $i$  обозначает мнимую единицу, а параметрами модели являются амплитуды  $a_j^{(p)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , фазы  $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$ , частоты  $\omega_j \in [0, 1/2]$  и степени затухания  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ .

*Замечание.* В статье [7] приводится алгоритм ESPRIT для модели временного ряда вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R s_j(n) e^{i\omega_0 \Delta \sin \theta_j / c} a^{(p)}(\theta_j),$$

но в работе будет рассматриваться модель вида (4) по причине, указанной в замечании к примеру 1.2.

*Замечание.* В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi i\omega n + \varphi_n} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi_n}}{2},$$

вещественнозначный временной ряд из примера 1.2 при  $R(p) = R$ ,  $\omega_j^{(p)} = \omega_j$  и  $\alpha_j^{(p)} = \alpha_j$  является частным случаем ряда (4).

Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания  $\alpha_j$  и частот  $\omega_j$  многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4). Первые два шага в алгоритме 3 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

---

**Алгоритм 3** ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где  $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d]$ , запись  $\mathbf{U}^\dagger$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

4: Нахождение первых  $R$  в порядке неубывания собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_j$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i\omega_j}$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_j|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_j)}{2\pi}.$$


---

*Замечание.* Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма  $R$  рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

*Замечание.* Алгоритм 3 применим как для одномерных, так и для многомерных рядов, и отличается для них только способом построения траекторной матрицы ряда.

## 2 Описание метода HO-ESPRIT

Пусть  $\mathbf{X}$  — одномерный ( $P = 1$ ) или многомерный ( $P > 1$ ) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\bar{L} = \begin{cases} (I, L), & P = 1, \\ L, & P > 1, \end{cases}$$

а  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор ряда  $\mathbf{X}$ , построенный с параметрами из  $\bar{L}$ . Также определим область допустимых параметров  $\bar{L}$ :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(I, L) : 1 < I, L < N, I + L < N + 1\}, & P = 1, \\ \{L : 1 < L < N\}, & P > 1. \end{cases}$$

---

**Алгоритм 4** HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $\bar{L} \in \mathcal{D}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ ,  $D \in \{1, 2, 3\}$  — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров.

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  по ряду  $\mathbf{X}$  с параметрами из  $\bar{L}$ . Если  $P = 1$ , то  $I_1 = I$ ,  $I_2 = L$ ,  $I_3 = N - I - L + 2$ , а если  $P > 1$ , то  $I_1 = L$ ,  $I_2 = N - L + 1$ ,  $I_3 = P$ .
- 2: Вычисление HOSVD  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=1}^{I_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы  $\mathbf{U} = [U_1^{(D)} : U_2^{(D)} : \dots : U_{I_D}^{(D)}]$ .

- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\uparrow = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где  $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d]$ , запись  $\mathbf{U}^\uparrow$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

- 4: Нахождение первых  $R$  в порядке неубывания собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_j$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_j|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_j)}{2\pi}.$$


---

## Список литературы

- [1] Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [2] Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
- [3] Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage / Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
- [4] Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin Heidelberg, 2020.
- [5] Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
- [6] Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.

- [7] Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.