

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика

Учебная практика 2 (проектно-технологическая) (семестр 2)

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА»

Выполнил:

Хромов Никита Андреевич

24.М22-мм

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор

Голяндина Н. Э.

# Оглавление

1.	Введение . . . . .	4
2.	Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT . . . . .	7
2.1.	SSA . . . . .	7
2.2.	MSSA . . . . .	10
2.3.	ESPRIT . . . . .	12
3.	Основы теории тензорных разложений . . . . .	13
3.1.	Ранги тензоров и тензорные разложения . . . . .	13
3.2.	HOSVD . . . . .	15
3.3.	Свойства HOSVD . . . . .	16
3.4.	Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера . .	18
4.	Описание метода HO-SSA . . . . .	20
4.1.	HO-SSA для разделения компонент сигнала . . . . .	20
4.2.	HO-SSA для выделения сигнала из ряда . . . . .	21
4.3.	Свойства HO-SSA . . . . .	22
5.	Описание метода HO-MSSA . . . . .	22
5.1.	HO-MSSA для разделения компонент сигнала . . . . .	23
5.2.	HO-MSSA для выделения сигнала . . . . .	23
5.3.	Свойства HO-MSSA . . . . .	23
6.	Описание метода HO-ESPRIT . . . . .	25
6.1.	Выбор параметра усечения третьего направления в алгоритмах HO-ESPRIT и HO-M-ESPRIT . . . . .	27
7.	Алгоритмы с использованием Dstack . . . . .	28
8.	Численные сравнения в задаче оценки параметров . . . . .	29
8.1.	Одномерный случай . . . . .	30
8.2.	Многомерный случай . . . . .	33
9.	Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA . . . . .	36
9.1.	Выделение вещественного сигнала . . . . .	37
9.2.	Выделение комплексного сигнала . . . . .	38
10.	Численные сравнения в задаче выделения многомерных комплексных сигналов . . . . .	39

11.	Численные сравнения методов Dstack со стандартными . . . . .	40
11.1.	Задача оценки параметров сигнала . . . . .	41
11.2.	Задача выделения сигнала . . . . .	42
12.	Другие варианты применения тензорных разложений в задаче выделения сигнала . . . . .	43
12.1.	Тензорный SSA с использованием $(L_r, L_r, 1)$ -разложения . . . . .	44
12.2.	Тензорный SSA с использованием CPD . . . . .	44
12.3.	Tensor SSA с использованием T-SVD . . . . .	45
13.	Заключение . . . . .	47
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>48</b>

## 1. Введение

Singular spectrum analysis (SSA) [1] является распространённым методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и разделения аддитивных компонент сигнала из временного ряда. SSA относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала, и заключается в сингулярном разложении особой матрицы, построенной по временному ряду и называемой траекторной.

В работах [2, 3] предлагается тензорная модификация метода SSA для решения задачи выделения сигнала, которая основана на некотором тензорном разложении траекторного тензора, построенного по временному ряду. В работе [4] предлагается похожая тензорная модификация метода ESPRIT [5] для решения задачи оценки частот периодических компонент сигнала в особой модели. Те же авторы в работе [6] предлагают тензорную модификацию метода ESPRIT, в которой по одномерному временному ряду строится многомерный, и далее к нему применяется стандартный алгоритм для многомерных рядов. В перечисленных работах утверждается преимущество тензорных модификаций над стандартным SSA.

Существует множество видов тензорных разложений, например каноническое (CPD) [7, 8] и Таккера (Tucker) [9]. Частным случаем разложения Таккера является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD) [10], которое также позволяет искать наилучшее приближение (усечением разложения).

В моей выпускной квалификационной работе бакалавра [11] была реализована тензорная модификация метода SSA с использованием тензорного разложения, в некотором смысле расширяющего SVD, и было проведено сравнение с методом SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала, а также было рассмотрено расширение метода SSA на многомерные ряды — метод MSSA [12], сформулирована и реализована тензорная модификация этого метода и проведено сравнение её с другими методами семейства SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала. В качестве метода разложения тензоров был выбран метод HOSVD, который имеет наибольшее число свойств, справедливых для SVD. В качестве языка программирования для реализаций алгоритмов был выбран язык R.

Способ построения траекторного тензора и его разложение были выбраны из предложенных в статье [4], однако в отличие от этой статьи, в данной работе изучается также применение выбранных средств в задаче выделения сигнала из временного ряда

и в задаче разделения компонент сигнала.

Все рассматриваемые в работе [11] сигналы были вещественнозначными. Однако методы семейства SSA допускают и комплекснозначные сигналы. Метод SSA при применении к комплексным рядам называют CSSA (Complex SSA). Специфика CSSA заключается в замене матричного транспонирования на эрмитово сопряжение. Кроме того, аналогом вещественного гармонического ряда, имеющего ранг 2 в терминах SSA, является экспонента с комплексным аргументом, которая имеет ранг 1 в терминах CSSA.

В работе [11] было показано, что в вещественном случае тензорные методы выделения и разделения компонент одномерных сигналов имеют меньшую точность, чем SSA, а для многомерных сигналов наблюдалось преимущество тензорных методов. Целью этой работы является продолжение изучения тензорных модификаций алгоритмов, основанных на подпространстве сигнала с точки зрения наличия у них преимущества над стандартными методами. В частности, в этой работе рассматриваются точность тензорных методов в задаче выделения вещественных и комплексных сигналов и в задаче оценки параметров сигнала, а также модификация метода HO-SSA с усечением лишь части направлений и модификации методов HO-ESPRIT и HO-SSA с использованием оператора Dstack. В качестве тензорного метода оценки параметров сигнала были выбраны и реализованы модификации алгоритма ESPRIT, предложенные в работах [4, 6].

В разделе 2 приведено описание методов SSA, MSSA и ESPRIT, а также некоторые их известные свойства и важные определения. В разделе 3 приведено описание некоторых тензорных разложений, используемых в работе, а также их свойства, необходимые для доказательства ключевых утверждений о тензорных модификациях методов семейства SSA. В разделе 4 представлено описание тензорной модификации метода SSA — HO-SSA (Higher-Order SSA), и приведены некоторые определения и утверждения, используемые далее в работе. В разделе 5 описывается метод HO-MSSA для выделения сигнала и разделения компонент и некоторые его свойства. В разделе 6 описывается тензорная модификация метода ESPRIT, которую будем называть HO-ESPRIT. В разделе 7 приведено описание и свойства модификаций методов HO-SSA и HO-ESPRIT с использованием оператора Dstack. В разделе 8 исследуется метод HO-ESPRIT с точки зрения наличия преимущества в точности оценки параметров сигнала над методом ESPRIT. Это исследование дополняет результаты работы [4] рассмотрением сигналов с различными вариантами степеней затухания а также рассмотрением различных па-

раметров длин окна. В разделе 9 исследуется влияние выбора направлений усечения в алгоритме HO-SSA на точность выделения сигнала из временного ряда. В разделе 10 методы HO-SSA и HO-MSSA рассматриваются с точки зрения точности в задаче выделения комплексных сигналов. В разделе 11 приведены численные сравнения стандартных методов ESPRIT и SSA с их Dstack модификациями с точки зрения точности в задачах оценки параметров сигнала и выделения сигнала соответственно. Это исследование дополняет результаты работы [6] рассмотрением задачи выделения сигнала и оценки параметров в вещественном случае. В разделе 12 приведён краткий обзор научных работ, в которых предлагаются различные тензорные модификации методов, основанных на подпространстве сигнала. Эти статьи могут оказаться полезны для дальнейшего изучения тензорных модификаций методов семейства SSA.

В результате работы в этом семестре были получены следующие разделы. В разделе 6.1, приводится теорема о выборе параметра  $R_z$  в методах HO-ESPRIT и HO-M-ESPRIT. В разделе 7 приводятся описания Dstack модификаций, а также некоторые их свойства. В разделе 11 проводятся численные сравнения Dstack методов со стандартными.

## 2. Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

### 2.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 2.1** (Оператор вложения). Оператором вложения  $\mathcal{T}_L$  с длиной окна  $L$  будем называть отображение, переводящее временной ряд  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $N \geq L$ , в ганкелеву матрицу  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $K = N - L + 1$ , такую, что  $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$ . Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{T}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

**Определение 2.2** (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L < N$  называют матрицу  $\mathbf{X} = \mathcal{T}_L(\mathbf{X})$ .

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов  $\mathbf{X}_k$ . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ .

**Определение 2.3** (SSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется SSA-рангом временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq (N + 1)/2$  и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание 2.1.* В качестве параметра  $R$  в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

---

**Алгоритм 1** SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ ,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение  $\mathbf{X} = \mathcal{T}_L(\mathbf{X})$ .
- 2: Разложение: применение SVD к  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H, \quad R \leq d \leq \min(L, N - L + 1),$$

где верхний индекс  $H$  обозначает эрмитово сопряжение матрицы.

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по матрицам  $\mathbf{X}_k$  посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N - L + 1, i + j - 1 = n \right\}.$$

---

**Алгоритм 2** SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$  — оценка сигнала  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ .

- 1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 1.
- 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 1.
- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H.$$

- 4: Восстановление ряда  $\tilde{\mathbf{X}}$  по матрице  $\tilde{\mathbf{X}}$  посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ .
-



**Пример 2.1.** Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-ранги.

1. Ранг полиномиального ряда  $x_n = Q_d(n)$ , где  $Q_d$  — многочлен степени  $d$ , равен  $d+1$ .
2. Ранг экспоненциального ряда  $x_n = Ce^{\alpha n}$ , где  $C, \alpha \in \mathbb{C}$  и  $C \neq 0$ , равен 1.
3. Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^M C_j e^{\alpha_j n},$$

где  $C_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$  и  $C_j \neq 0$  при всех  $j$ , равен количеству уникальных значений  $\alpha_j$ .

4. Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где  $C \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\omega \in [0, 1/2]$ , равен  $r(\omega)$ , где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

5. Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^M Ce^{\alpha_j n} \cos(2\pi n\omega_j + \psi_j)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i, \alpha_i)$ , представленных в данном временном ряде.

*Замечание 2.2.* В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi i\omega n + \varphi} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi}}{2},$$

где  $i$  обозначает мнимую единицу, вещественнозначные временные ряды из пунктов 4 и 5 являются частным случаем комплексного ряда из пункта 3.

**Определение 2.4** (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды  $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  и  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$  называют слабо  $L$ -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} (\tilde{x}_{j+k})^H = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)},$
2.  $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} (\tilde{x}_{j+k})^H = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L},$

где верхний индекс  $H$  обозначает комплексное сопряжение.

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 2.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

## 2.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [13, 14, 12].

Пусть дан  $M$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_M),$$

$$\mathbf{X}_m = \left( x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_N^{(m)} \right)^T.$$

**Определение 2.5** (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть  $\mathbf{X}_m = \mathcal{T}_L(\mathbf{X}_m)$ ,  $m \in \overline{1 : M}$ . Траекторной матрицей многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  называется матрица  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KM}$ ,  $K = N - L + 1$ , построенная соединением матриц  $\mathbf{X}_m$  по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_M].$$

**Определение 2.6** (Оператор вложения многомерного временного ряда). Отображение  $\mathbf{X} \xrightarrow{L} \mathbf{X}$  будем обозначать  $\mathcal{T}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$  и называть его оператором вложения многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$ .

*Замечание 2.3.* Оператор вложения из определения 2.1 является частным случаем оператора вложения многомерного временного ряда ( $M = 1$ ).

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

**Определение 2.7** (MSSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется MSSA-рангом  $M$ -мерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq M(N+1)/(M+1)$ , и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, M(N-L+1))$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание 2.4.* Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

**Пример 2.2.** Рассмотрим  $M$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  с элементами  $x_n^{(m)}$ .

1. Если элементы этого ряда имеют вид

$$x_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{R(m)} a_j^{(m)} e^{\alpha_j^{(m)} n}, \quad (2)$$

где  $a_j^{(m)}, \alpha_j^{(m)} \in \mathbb{C}$  и  $a_j^{(m)} \neq 0$ , то MSSA ранг  $\mathbf{X}$  равен количеству уникальных значений  $\alpha_j^{(m)}$  в ряде.

2. Если элементы этого ряда имеют вид

$$x_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{R(m)} a_j^{(m)} e^{\alpha_j^{(m)} n} \cos\left(2\pi\omega_j^{(m)} n + \varphi_j^{(m)}\right), \quad (3)$$

где  $a_j^{(m)}, \alpha_j^{(m)}, \omega_j^{(m)}, \varphi_j^{(m)} \in \mathbb{R}$  и  $a_j^{(0)} \neq 0$ , то MSSA-ранг  $\mathbf{X}$  равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где функция  $r(\omega)$  определена в уравнении (1), а  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)})$ , представленных в данном временном ряде. Стоит заметить, что как и в замечании 2.2, вещественнозначный временной ряд (3) является частным случаем комплексного ряда (2).

*Замечание 2.5.* В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HO-MSSA на многомерных сигналах вида (3) и (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры  $R(m)$ ,  $\omega_i^{(m)}$  и  $\alpha_i^{(m)}$  не зависят от номера ряда  $m$ , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [15]. Кроме того, в работе [4] также рассматривается этот частный случай модели.

**Определение 2.8** (Слабая MSSA-разделимость).  $M$ -мерные временные ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  длины  $N$  называются слабо  $L$ -разделимыми, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(m)} \left( \tilde{x}_{j+k}^{(m')} \right)^H = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, m, m' \in \overline{1 : M}, \\ 2. \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(m)} \left( \tilde{x}_{m+i}^{(m)} \right)^H = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}. \end{aligned}$$

**Утверждение 2.2.** Пусть  $X = \hat{X} + \tilde{X}$ , а  $X$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $X$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  является SVD матрицы  $X$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

### 2.3. ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [5, 4].

Пусть элементы многомерного временного ряда  $X$  имеют вид

$$x_n^{(m)} = s_n^{(m)} + \xi_n^{(m)} = \sum_{j=1}^J a_j^{(m)} e^{\alpha_j n} e^{i2\pi\omega_j n} + \xi_n^{(m)}, \quad (4)$$

где  $s_n^{(m)}$  — элементы сигнала,  $\xi_n^{(m)}$  — элементы шума, то есть одинаково распределённые случайные величины с  $E\xi_n^{(m)} = 0$ , а параметрами модели являются амплитуды  $a_j^{(m)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , частоты  $\omega_j \in (-1/2, 1/2]$  и степени затухания  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ . Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания  $\alpha_j$  и частот  $\omega_j$  многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4).

---

**Алгоритм 3** ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 1
- 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 1
- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\uparrow = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где  $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d]$ , запись  $\mathbf{U}^\uparrow$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

- 4: Нахождение первых  $R$  в порядке неубывания собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_{j'}$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , возможно с точностью до некоторой перестановки  $j = S(j')$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$


---

*Замечание 2.6.* Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма  $R$  рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

*Замечание 2.7.* Алгоритм 3 применим и для одномерных временных рядов ( $M = 1$ ).

В дальнейшем в работе ESPRIT будет обозначать одномерный вариант алгоритма 3, а M-ESPRIT — многомерный.

### 3. Основы теории тензорных разложений

Под тензорами в данной работе подразумеваются  $M$ -мерные массивы. Элементы тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  обозначаются  $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$ . Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [16, 10, 17, 18, 19, 20]. Термины на русском языке взяты из работы [21].

#### 3.1. Ранги тензоров и тензорные разложения

Для определения канонического тензорного разложения и разложения Таккера вводятся следующие определения.

**Определение 3.1** (Тензорный ранг).

1. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  имеет тензорный ранг, равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_M,$$

где  $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$ , а символ  $\circ$  обозначает тензорное произведение.

2. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  имеет ранг  $R$ , если он представим в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, и такое  $R$  минимально. Обозначение:  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**Определение 3.2** (CPD). Представление тензора  $\mathcal{A}$  в виде линейной комбинации  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$  тензоров ранга 1 называется каноническим разложением этого тензора (CPD).

*Замечание 3.1.* Ранг тензора может зависеть от того, над каким полем рассматривается этот тензор:  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$  [17].

**Определение 3.3** ( $n$ -ранг тензора).  $n$ -рангом (модовым рангом) тензора  $\mathcal{A}$  называется размерность векторного пространства, порождённого  $n$ -столбцами (векторами  $n$ -го направления) этого тензора. Обозначается  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ .

*Замечание 3.2.* 1. В отличие от матричного случая,  $n$ -ранги тензора с количеством размеров больше 2 могут различаться.

2. В общем случае ранг тензора  $\mathcal{A}$  не равен его  $n$ -рангам, даже если они все равны между собой. Кроме того, всегда справедливо неравенство  $\text{rank}_n(\mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**Определение 3.4** ( $n$ -я матрица развёртки тензора). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , тогда  $n$ -я матрица развёртки этого тензора (матрица сечений) — это матрица  $[\mathbf{A}]_n$  (или  $\mathbf{A}_{(n)}$ ) размера  $I_n \times I_{n+1}I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$ , в которой элемент тензора  $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$  содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером, равным

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[ (i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

**Свойство 3.1** (Связь  $n$ -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению  $n$ ).  $n$ -столбцы тензора  $\mathcal{A}$  являются столбцами его  $n$ -й матрицы развёртки, и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}]_n).$$

**Определение 3.5** (Произведение тензора и матрицы по направлению). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ ,  $\mathbf{U}$  — матрица размера  $J_n \times I_n$  с элементами  $u_{ij}$ , тогда произведением тензора  $\mathcal{A}$  и матрицы  $\mathbf{U}$  по направлению  $n$  ( $\mathcal{A} \times_n \mathbf{U}$ ) называется тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_M$ , который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_M} u_{j_n i_n}.$$

**Определение 3.6** (Разложение Таккера). Пусть тензор  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  имеет  $n$ -ранги  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (5)$$

где тензор  $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$  называется ядром разложения,  $\mathbf{U}^{(k)} \in \mathbb{C}^{I_k \times J_k}$ ,  $J_k \geq R_k$ . Такое представление называется разложением Таккера.

*Замечание 3.3.* Разложение Таккера не единственно. Частным случаем этого разложения является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD), которое и будет рассматриваться в дальнейшем в этой работе по следующим причинам:

- HOSVD имеет наибольшее среди всех тензорных разложений число свойств, схожих со свойствами матричного сингулярного разложения (SVD), применяемого в алгоритмах SSA и MSSA;
- HOSVD позволяет находить наилучшее приближение тензора тензором с фиксированными  $n$ -рангами.

### 3.2. HOSVD

В этом разделе приведены определение разложения HOSVD и некоторые его свойства.

**Теорема 1** (Сингулярное разложение порядка  $M$ ). *Любой комплекснозначный тензор  $\mathcal{A}$  размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (6)$$

в котором

1.  $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)} : U_2^{(n)} : \dots : U_{I_n}^{(n)}]$  — унитарные матрицы,

2.  $\mathcal{Z}$  — комплекснозначный тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , в котором каждое сечение  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ , полученное фиксированием индекса  $i_n = \alpha$ , удовлетворяет следующим свойствам.

а. Полная ортогональность: сечения  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  и  $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$  ортогональны для всех возможных значений  $n, \alpha, \beta : \alpha \neq \beta$ :

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение.

б. Упорядоченность: сечения расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \quad (7)$$

для всех  $n \in \overline{1:M}$ .

**Определение 3.7** (Сингулярное разложение тензора). Разложение вида (6) называется сингулярным разложением тензора  $\mathcal{A}$  порядка  $M$  или HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .

**Определение 3.8** (Сингулярное число тензора). Обозначим  $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$  и будем называть  $\sigma_i^{(n)}$   $i$ -м сингулярным числом тензора  $\mathcal{A}$  по направлению  $n$ .

**Определение 3.9** (Сингулярный вектор тензора). Векторы  $U_i^{(n)}$  будем называть  $i$ -м сингулярным вектором тензора  $\mathcal{A}$  по направлению  $n$ .

*Замечание 3.4.* Представление (6) можно переписать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \quad (8)$$

Такое представление удобно для описания тензорных алгоритмов HO-SSA и HO-MSSA.

### 3.3. Свойства HOSVD

Многие свойства методов SSA и MSSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность некоторых свойств SSA и MSSA со свойствами HO-SSA и HO-MSSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.



Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ . Применением SVD ко всем матрицам сечений этого тензора вычисляются  $M$  матриц  $\mathbf{U}^{(n)}$ , составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Определим тензор  $\mathcal{Z}$  следующим образом

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 (\mathbf{U}^{(1)})^H \times_2 (\mathbf{U}^{(2)})^H \dots \times_M (\mathbf{U}^{(M)})^H,$$

Тогда исходный тензор  $\mathcal{A}$  можно представить в виде (6)

**Утверждение 3.1.** *Процедура, описанная выше, даёт HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .*

Из-за этой связи HOSVD с SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

**Свойство 3.2** (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому направлению определяются однозначно.
2. Если сингулярные числа по направлению  $n$  различны, то сингулярные векторы по направлению  $n$  определены с точностью до умножения на коэффициент единичной нормы. Другими словами, если вектор  $U_\alpha^{(n)}$  умножается на  $e^{i\theta}$ , то сечение  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должно быть умножено на обратный коэффициент  $e^{-i\theta}$ .
3. Сингулярные векторы по направлению  $n$ , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по направлению  $n$ , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией этих векторов. Соответствующие сечения  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должны быть пересчитаны обратным образом. Другими словами,  $\mathbf{U}^{(n)}$  можно заменить на  $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{Q}$  — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению  $\mathbf{U}^{(n)}$  на наборы сингулярных векторов по направлению  $n$ , соответствующих одинаковым сингулярным значениям по направлению  $n$ . При этом тензор  $\mathcal{Z}$  должен быть заменён на  $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$ .

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется с точностью до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

**Свойство 3.3** (Обобщение). HOSVD тензора является обобщением SVD в том смысле, что результат применения HOSVD к тензору с двумя размерами, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, с точностью до унитарных преобразований сингулярных векторов, отвечающих равным сингулярным числам, и соответствующих преобразований матрицы сингулярных значений.

**Свойство 3.4** (Связь  $n$ -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  вида (6), тогда, по определению, тензор сингулярных чисел  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех  $n \in \overline{1:M}$ . Обозначим  $r_n$  — наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$ . Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (9)$$

**Свойство 3.5** (Норма). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (6), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ ,  $n \in \overline{1:M}$ . Тогда справедливо равенство

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \|\mathcal{Z}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2$$

### 3.4. Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера

HOSVD позволяет получать приближение произвольного тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  некоторым тензором с заданными меньшими  $n$ -рангами  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ .

**Определение 3.10** (Ориентированная энергия). Ориентированной по направлению  $n$  энергией тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  в направлении вектора  $X \in \mathbb{C}^{I_n}$  единичной нормы называют выражение

$$\text{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^H[\mathbf{A}]_n\|^2.$$

**Свойство 3.6** (Оптимальность в терминах ориентированной энергии). Направления экстремальной ориентированной энергии по направлению  $n$  соответствуют сингулярным векторам по направлению  $n$ , причём значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по направлению  $n$ .

Это означает, что  $n$ -столбцы тензора  $\mathcal{A}$  содержат наибольшие вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ , и на это направление приходится  $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2$  энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по направлению  $n$  достигает экстремума в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U_1^{(n)}$ , с величиной  $\left(\sigma_2^{(n)}\right)^2$ , и так далее.

**Свойство 3.7** (Приближение). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (6), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ . Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших

сингулярных значений  $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$  для заданных  $I'_n$ ,  $n \in \overline{1:M}$ , то есть заменяя нулями соответствующие сечения тензора  $\mathcal{Z}$ . Тогда верно

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} (\sigma_{i_1}^{(1)})^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} (\sigma_{i_2}^{(2)})^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} (\sigma_{i_M}^{(M)})^2. \quad (10)$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Для тензоров эта связь принимает другой вид. Тензор, получаемый отбрасыванием наименьших сингулярных значений по направлению  $n$  будет иметь  $n$ -ранги  $(I'_1, I'_2, \dots, I'_M)$ , но в общем случае не будет наилучшим приближением при заданных ограничениях на  $n$ -ранги. Тем не менее, условие упорядоченности (7) подразумевает, что «энергия»  $\mathcal{A}$  в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям индексов направлений. Следовательно, если  $\sigma_{I'_n}^{(n)} \gg \sigma_{I'_n+1}^{(n)}$  (например, если  $I'_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ , то меньшие сингулярные значения по измерению  $n$  не существенны), то  $\hat{\mathcal{A}}$  всё ещё можно считать хорошим приближением  $\mathcal{A}$ . Ошибка ограничена выражением (10).

Одним из методов получения оптимального приближения тензора тензором малых рангов является алгоритм Higher-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [22, 23]. При заданных тензоре  $\mathcal{A}$  и наборе  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$  алгоритм решает задачу минимизации

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\| \rightarrow \min$$

относительно тензора  $\hat{\mathcal{A}}$  с заданными  $n$ -рангами  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ . Алгоритм HOOI является итерационным, в качестве начального приближения  $\mathcal{A}_0$  обычно используется усечение с нужными рангами HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ . Критерий остановки алгоритма на шаге  $k$ :  $\|\hat{\mathcal{A}}_{k-1} - \hat{\mathcal{A}}_k\| < \varepsilon$  для некоторого заданного  $\varepsilon$ , либо  $k \geq N$  для некоторого заданного  $N$ .

### Свойство 3.8.

1. Алгоритм HOOI не гарантирует сходимости к глобальному минимуму выражения  $\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}_k\|$ .
2. На практике алгоритм HOOI обычно демонстрирует линейную скорость сходимости, но его теоретическая скорость сходимости может быть и нелинейной в зависимости от конкретных условий [24].

## 4. Описание метода HO-SSA

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 4.1** (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $L, K : 1 < L, K < N, L + K < N + 1$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размера  $L \times K \times M, M = N - L - K + 2$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkm} = x_{l+k+m-2} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, m \in \overline{1:M}.$$

Оператор построения траекторного тензора по одномерному ряду с параметрами  $L, K$  будем обозначать  $\mathcal{T}_{\text{T-SSA}}^{(L,K)}(\mathbf{X}) = \mathcal{X}$

*Замечание 4.1.* Траекторный тензор  $\mathcal{X}$  является ганкелевым [25].

Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}_{j..} = \mathcal{A}_{i_1=j}, \quad \mathcal{A}_{.j.} = \mathcal{A}_{i_2=j}, \quad \mathcal{A}_{..j} = \mathcal{A}_{i_3=j}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 2.1 сечения траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $L, K$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{..m} &= \mathcal{T}_L((x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+L+K-2})), \\ \mathcal{X}_{.k.} &= \mathcal{T}_L((x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+K+M-2})), \\ \mathcal{X}_{l..} &= \mathcal{T}_K((x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+K+M-2})). \end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд  $\mathbf{X}$  и параметры  $L, K : 1 < L, K < N, L+K < N+1$ . Так как при замене одного из этих параметров на  $M = N - L - K + 2$  или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки  $(L, K, M)$  без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

### 4.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_g$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{g=1}^G \mathbf{X}_g + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов  $\mathbf{X}_g$ . Метод HO-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 4.

---

**Алгоритм 4** HO-SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L, K : 1 < L, K < N$ ,  $L + K < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $G$ ,  $R_1, R_2, R_3 : G \leq R_p \leq I_p$ , где  $I_1 = L$ ,  $I_2 = K$ ,  $I_3 = N - L - K + 2$ ,  $\mathfrak{S}_1^{(p)}, \dots, \mathfrak{S}_G^{(p)}$ :

$$\{1, 2, \dots, R_p\} = \bigcup_{g=1}^G \mathfrak{S}_g^{(p)} \quad \mathfrak{S}_g^{(p)} \cap \mathfrak{S}_l^{(p)} = \emptyset, \quad g \neq l, \quad p \in \{1, 2, 3\}.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_G$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_G$ .

- 1: Вложение: построение траекторного тензора  $\mathcal{X} = \mathcal{T}_{\text{T-SSA}}^{(L,K)}(\mathbf{X})$ .
- 2: Разложение: применение HOSVD или HOOI к  $\mathcal{X}$

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{m=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}. \quad (11)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(g)} = \sum_{l \in \mathfrak{S}_g^{(1)}} \sum_{k \in \mathfrak{S}_g^{(2)}} \sum_{m \in \mathfrak{S}_g^{(3)}} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_g$  по тензорам  $\mathcal{X}^{(g)}$  посредством их усреднения вдоль плоскостей  $l + k + m = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(g)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(l,k,m) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{lkm}^{(g)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (l, k, m) \mid 1 \leq l \leq L, 1 \leq k \leq K, 1 \leq m \leq M, l + k + m - 2 = n \right\}.$$


---

**Определение 4.2.** Направлениями усечения траекторного тензора в алгоритме 4 будем называть множество  $\mathfrak{P} \subseteq \{1, 2, 3\}$  такое, что  $R_p < I_p$ , при  $p$  из  $\mathfrak{P}$ , и  $R_p = I_p$  иначе.

#### 4.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших

$n$ -рангов, заданных пользователем. Метод HO-SSA для выделения сигнала представлен в алгоритме 5.

---

**Алгоритм 5** HO-SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L, K : 1 < L, K < N$ ,  $L + K < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : K}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : M}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 4.
  - 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 4.
  - 3: Усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $l + k + m = \text{const}$ , в результате чего получается оценка сигнала  $\hat{\mathbf{X}}$ .
- 

*Замечание 4.2.* Направления усечения определены и для алгоритма 5.

### 4.3. Свойства HO-SSA

В этом разделе приведены некоторые свойства метода HO-MSSA и вспомогательные определения.

**Теорема 2.** Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет конечный ранг  $d$  в терминах SSA (определение 2.3). Тогда для любых значений  $L$  и  $K$  таких, что

$$d \leq \min(L, K, N - L - K + 2), \quad (12)$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому направлению в HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по этому ряду с длинами окна  $L$  и  $K$ , будет равно  $d$ .

**Следствие.** Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HO-SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

## 5. Описание метода HO-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HO-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

### 5.1. HO-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два  $M$ -мерных временных ряда  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  длины  $N$  и  $X = \hat{X} + \tilde{X}$ .

**Определение 5.1** (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда  $X$  с длиной окна  $L : 1 < L < N$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $L \times K \times M$ ,  $K = N - L + 1$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkm} = x_{l+k-1}^{(m)} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, m \in \overline{1:M}.$$

Оператор построения траекторного тензора многомерного ряда с длиной окна  $L$  будем обозначать  $\mathcal{T}_{\text{T-MSSA}}^{(L)} = \mathcal{X}$

Из определения следует, что сечение  $\mathcal{X}_{..m}$  траекторного тензора с длиной окна  $L$  является траекторной матрицей ряда  $X^{(m)}$ , построенной по длине окна  $L$ . Пользуясь определением 2.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{..m} = \mathcal{T}_L(X^{(m)}).$$

Обозначим траекторные тензоры рядов  $\hat{X}$ ,  $\tilde{X}$  и  $X$  с длиной окна  $L$   $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{X}$  соответственно. Метод HO-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала  $X$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров компонент  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$ . Описание метода приведено в алгоритме 6.

### 5.2. HO-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан  $M$ -мерный временной ряд  $X$  длины  $N$ . Метод HO-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HO-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем,  $n$ -рангов. Описание метода приведено в алгоритме 7.

### 5.3. Свойства HO-MSSA

В этом разделе приведены некоторые свойства метода HO-MSSA и вспомогательные определения.

**Теорема 3.** Пусть  $X$  —  $M$ -мерный временной ряд длины  $N$ , тогда справедливы следующие утверждения.

---

**Алгоритм 6** HO-MSSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ ,  $K = N - L + 1$ ,  $R_1, R_2, R_3 : R_p \leq I_m$ , где  $I_1 = L$ ,  $I_2 = K$ ,  $I_3 = M$ ,  $\widehat{\mathfrak{S}}_p, \widetilde{\mathfrak{S}}_p \subseteq \overline{1 : R_p} : \widehat{\mathfrak{S}}_p \cap \widetilde{\mathfrak{S}}_p = \emptyset$ ,  $p \in \{1, 2\}$ ,  $\widehat{\mathfrak{P}}, \widetilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : R_3}$

**Результат:**  $\overset{\circ}{\hat{\mathbf{X}}}, \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{X}}}$  — оценки  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно.

- 1: Вложение: построение по ряду  $\mathbf{X}$  траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$ .
- 2: Разложение: применение HOSVD или HOOI к  $\mathcal{X}$

$$\overset{\circ}{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{m=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}.$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{l \in \widehat{\mathfrak{S}}_1} \sum_{k \in \widehat{\mathfrak{S}}_2} \sum_{m \in \widehat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)},$$

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l \in \widetilde{\mathfrak{S}}_1} \sum_{k \in \widetilde{\mathfrak{S}}_2} \sum_{m \in \widetilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: оценки рядов  $\hat{\mathbf{X}}^{(m)}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}^{(m)}$  получаются усреднением сечений  $\hat{\mathcal{X}}_{..m}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}_{..m}$  соответствующих тензоров вдоль побочных диагоналей  $l + k = \text{const}$ .
- 

**Алгоритм 7** HO-MSSA для выделения сигнала

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(M)})^T$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : K}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : M}$ , где  $K = N - L + 1$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$ .

- 1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 6.
  - 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 6.
  - 3: Восстановление: сечения  $\hat{\mathcal{X}}_{..m}$  усредняются вдоль побочных диагоналей  $l + k = \text{const}$  для получения оценок  $\tilde{\mathbf{X}}^{(m)}$ .
- 

1.  $\mathbf{X}$  имеет ранг  $d$  в терминах теории MSSA (определение 2.7) тогда и только тогда, когда для траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по любой длине окна  $L < N$  такой, что  $d \leq \min(L, K)$  выполняется

$$\text{rank}_1(\mathcal{X}) = \text{rank}_2(\mathcal{X}) = d.$$

2. 3-ранг  $\mathcal{X}$  равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.

**Определение 5.2** (3-ранг многомерного ряда). 3-рангом многомерного ряда будем



назвать 3-ранг траекторного тензора этого ряда.

*Замечание 5.1.* Определение корректно, так как по построению траекторного тензора набор 3-столбцов этого тензора не зависит от выбора длины окна  $L$ , поэтому и 3-ранг траекторного тензора не зависит от выбора длины окна.

**Утверждение 5.1.** (О симметричности относительно замены длины окна) *Пусть дан  $M$ -мерный временной ряд  $X$  длины  $N$  и выбрана некоторая длина окна  $L$ ,  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор этого ряда, построенный по длине окна  $L$ , а  $\mathcal{Y}$  — по длине окна  $K = N - L + 1$ , и пусть  $R_1, R_2, R_3$  — параметры, выбранные в третьем шаге алгоритма HO-MSSA, соответствующие  $\mathcal{X}$ , а  $R'_1, R'_2, R'_3$  — соответствующие  $\mathcal{Y}$ . Тогда если  $R_1 = R'_1, R_2 = R'_2, R_3 = R'_3$ , то оценки сигнала  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ , построенные по  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  соответственно, совпадут.*

*Замечание 5.2.* В отличие от метода HO-SSA, в методе HO-MSSA усечение траекторного тензора лишь по части направлений не имеет обоснования. Третье направление траекторного тензора имеет смысл, отличный от первых двух, и при отсутствии усечения по третьему направлению в восстановленный сигнал войдёт множество шумовых компонент этого направления. Так как матрицы сечения третьего направления траекторного тензора являются траекторными матрицами одномерных рядов, то усечение первых двух направлений имеет смысл схожий, с усечением матрицы сингулярных чисел в методе SSA. В силу диагональности матрицы сингулярных чисел, в SSA нет разницы в усечении этой матрицы по столбцам, строкам или в обоих направлениях. Однако в отличие от матрицы сингулярных чисел, тензор сингулярных чисел не обязан быть диагональным, из-за чего при отсутствии усечения по одному из направлений, в восстановленный сигнал войдёт множество шумовых компонент этого направления.

## 6. Описание метода HO-ESPRIT

Пусть  $X$  — одномерный ( $M = 1$ ) или многомерный ( $M > 1$ ) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\bar{L} = \begin{cases} (L, K), & M = 1, \\ L, & M > 1, \end{cases}$$

а  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор ряда  $\mathbf{X}$ , построенный с длиной (длинами) окна из  $\bar{L}$ . Также определим область допустимых параметров  $\bar{L}$ :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(L, K) : 1 < L, K < N, L + K < N + 1\}, & M = 1, \\ \{L : 1 < L < N\}, & M > 1. \end{cases}$$

Описание метода HO-ESPRIT приведено в алгоритме 8. Обоснование метода можно найти в работе [4].

---

**Алгоритм 8** HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $\bar{L} \in \mathcal{D}$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$  — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров,  $R_1, R_2, R_3 : R_p \leq I_p$ , где  $I_1 = L$ ,  $I_2 = K$ ,  $I_3 = N - L - K + 2$  при  $M = 1$ , и  $I_1 = L$ ,  $I_2 = N - L + 1$ ,  $I_3 = M$  при  $M > 1$ ,  $R : R \leq R_d$ .

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  по ряду  $\mathbf{X}$  с параметрами из  $\bar{L}$ .
- 2: Применение HOSVD или HOOI к  $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X} = \sum_{i_1=1}^{R_1} \sum_{i_2=1}^{R_2} \sum_{i_3=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы  $\mathbf{U} = [U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \dots : U_{R_d}^{(d)}]$ .

- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\uparrow = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где запись  $\mathbf{U}^\uparrow$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

- 4: Нахождение первых  $R$  в порядке неубывания собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_{j'}$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , возможно с точностью до некоторой перестановки  $j = S(j')$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$


---

По аналогии с обозначениями для алгоритма 3, в дальнейшем HO-ESPRIT будет обозначать одномерный вариант алгоритма 8, а HO-M-ESPRIT — многомерный.

### 6.1. Выбор параметра усечения третьего направления в алгоритмах НО-ESPRIT и НО-M-ESPRIT

**Теорема 4.** Пусть элементы многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$  имеют вид

$$x_n^{(m)} = s_n^{(m)} + \xi_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{J^{(m)}} a_j^{(m)} e^{-\alpha_j^{(m)} n} e^{i2\pi n \omega_j^{(m)}} + \xi_n^{(m)},$$

где  $s_n^{(m)}$  — элементы сигнала,  $\xi_n^{(m)}$  — элементы шума,  $a_j^{(m)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha_j^{(m)} \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_j^{(m)} \in (-1/2, 1/2]$ . Пусть в алгоритме 8  $d \neq 3$ , а  $N$  и  $L$  такие, что  $\min(L, KM) > \text{rank}(\mathbf{X})$  при  $d = 1$  или  $\min(K, LM) > \text{rank}(\mathbf{X})$  при  $d = 2$ . Тогда алгоритм 8 даёт несмещённые оценки параметров при любом выборе  $R_3$ , если  $R_1, R_2 > \text{rank}(\mathbf{X})$ .

*Доказательство.* Пусть  $d = 1$  (для  $d = 2$  доказательство аналогичное). Достаточно доказать, что в случае отсутствия шума в пространстве, порождённом столбцами матрицы  $\mathbf{U}$  из 2-го шага алгоритма содержатся все векторы вида

$$\left\{ a_j^{(m)} e^{-\alpha_j^{(m)} n} e^{i2\pi n \omega_j^{(m)}} \right\}_{n=l}^{l+L-1}.$$

По построению траекторного тензора многомерного ряда, и по свойствам HOSVD, это следует из того, что все векторы первого направления траекторного тензора имеют вид

$$\left\{ \sum_{j=1}^{J^{(m)}} a_j^{(m)} e^{-\alpha_j^{(m)} n} e^{i2\pi n \omega_j^{(m)}} \right\}_{n=l}^{l+L-1},$$

и для любого  $m$  среди них найдётся вектор с соответствующим набором параметров  $\alpha_j^{(m)}$  и  $\omega_j^{(m)}$ .  $\square$

**Теорема 5.** Пусть элементы одномерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$  имеют вид

$$x_n = \sum_{j=1}^J a_j e^{-\alpha_j n} e^{i2\pi n \omega_j} + \xi_n^{(m)},$$

где  $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_j \in (-1/2, 1/2]$ ,  $\xi_n^{(m)}$  — шум, и пусть  $N$ ,  $L$  и  $K$  такие, что  $\min(I_d, I_{d'} I_{d''}) > \text{rank}(\mathbf{X})$ , где  $\{d', d''\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{d\}$ , а  $I_p$  имеют тот же смысл, что в алгоритме 8. Тогда алгоритм 8 даёт несмещённые оценки параметров при любом выборе  $R_d$ , если и  $R_{d'}, R_{d''} > \text{rank}(\mathbf{X})$ .

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4.

**Следствие.** Для получения несмещённых оценок параметров методами HO-ESPRIT и HO-M-ESPRIT необязательно знать 3-ранг рассматриваемого сигнала. Более того, численно было получено, что выбор  $R_3 < \text{rank}_3(\mathbf{X})$  может дать прирост точности оценок.

Это свойство отличает задачу выделения сигнала от задачи оценки параметров, так как в задаче выделения сигнала при выборе параметра  $R_3 < \text{rank}_3(\mathbf{X})$  оценка сигнала всегда имеет смещение.

## 7. Алгоритмы с использованием Dstack

Пусть  $\mathbf{X}$  — одномерный временной ряд.

**Определение 7.1** (Dstack). Оператор, отображающий одномерный временной ряд  $\mathbf{X}$  в  $D$ -мерный ряд  $\mathbf{X}_D$  по принципу  $x_n^{(d)} = x_{(n-1)D+d}$  будем называть Dstack и обозначать  $\mathcal{D}_D(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_D$ .

В работе [6] авторы рассматривают задачу оценки параметров одномерного сигнала и предлагают преобразовывать одномерный временной ряд в многомерный при помощи оператора Dstack, и затем применять к полученному ряду алгоритм HO-M-ESPRIT. Авторы утверждают, что полученный метод имеет преимущество в точности над методом HTLSDstack, который заключается в применении M-ESPRIT к результату применения Dstack, а также имеет преимущество в производительности над стандартным алгоритмом ESPRIT.

В данной работе будут рассмотрены Dstack модификации методов оценки параметров ESPRIT и HO-ESPRIT, а также методов выделения сигнала SSA и HO-SSA. Описания методов HO-ESPRIT и HO-SSA с использованием Dstack приведены в алгоритмах 9 и 10 соответственно.

*Замечание 7.1.* По теореме Котельникова [26] и по определению оператора  $\mathcal{D}_D$  алгоритм 9 способен оценить параметры сигнала только если выполнено неравенство

$$\max_{\omega \in \Omega} |\omega| \leq \frac{1}{2D},$$

где  $\Omega$  — множество всех частот, представленных в сигнале.

*Замечание 7.2.* Выбор  $D = 1$  в обоих алгоритмах приведёт к стандартным методам ESPRIT и SSA соответственно.

---

**Алгоритм 9** Dstack HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $D, L_D : 1 \leq D \leq N, 1 < L_D < N_D = \lfloor N/D \rfloor$ ,  $d \in \{1, 2\}$  —

номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров,  $R_1$ ,

$R_2, R_3 : R_p \leq I_p$ , где  $I_1 = L_D$ ,  $I_2 = K_D = N_D - L_D + 1$ ,  $I_3 = D$ ,  $R : R \leq R_d$ .

**Результат:**  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\omega}_1), (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\omega}_2), \dots, (\tilde{\alpha}_R, \tilde{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4) ( $M = 1$ ).

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} = \left( \mathcal{T}_{\text{T-MSSA}}^{(L)} \circ \mathcal{D}_D \right) (\mathbf{X})$ .
  - 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 8.
  - 3: Совпадает с шагом 3 алгоритма 8.
  - 4: Совпадает с шагом 4 алгоритма 8.
  - 5: В качестве итоговых оценок параметров используются  $\tilde{\alpha}_j = \hat{\alpha}_j$ ,  $\tilde{\omega}_j = \hat{\omega}_j/D$ , где  $\hat{\alpha}_j, \hat{\omega}_j$  — оценки, полученные на шаге 4.
- 

---

**Алгоритм 10** Dstack HO-SSA для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $D, L_D : 1 \leq D \leq N, 1 < L_D < N_D = \lfloor N/D \rfloor$ ,  $R_1 \in \overline{1:L}$ ,

$R_2 \in \overline{1:K}$ ,  $R_3 \in \overline{1:M}$ , где  $K = N - L + 1$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$  — оценка сигнала.

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} = \left( \mathcal{T}_{\text{T-MSSA}}^{(L)} \circ \mathcal{D}_D \right) (\mathbf{X})$ .
- 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 6.
- 3: Совпадает с шагом 3 алгоритма 7.
- 4: Преобразование полученной оценки  $D$ -мерного временного ряда  $\hat{\mathbf{X}}_D$  в одномерный ряд

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathcal{D}_D^{-1}(\hat{\mathbf{X}}_D).$$


---

*Замечание 7.3.* Таким же образом можно определить алгоритмы Dstack ESPRIT и Dstack SSA, если применить оператор Dstack к одномерному ряду, и использовать соответствующий метод анализа многомерных рядов.

*Замечание 7.4.* Теорема 5 о выборе параметра  $R_3$  применима и для Dstack варианта ESPRIT.

## 8. Численные сравнения в задаче оценки параметров

В этом разделе приведены сравнения методов ESPRIT и HO-ESPRIT по точности оценки параметров сигнала вида (4) в случае одномерных и многомерных рядов.

В качестве показателя точности оценки была выбрана метрика относительного средне-квадратичного отклонения (RRMSE)

$$\text{RRMSE} = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\gamma - \hat{\gamma}_j|^2} \cdot 100\%, \quad (13)$$

где  $m$  — количество реализаций шума,  $\gamma$  — оцениваемый параметр,  $\hat{\gamma}_j$  — оценка параметра  $\gamma$  по ряду с  $j$ -й реализацией шума. Такой выбор был сделан для того, чтобы в дальнейшем сравнить результаты с результатами работы [4], в которой использовалась именно такая метрика для определения точности оценивания параметров. Стоит заметить, что алгоритму, который всегда оценивает  $\hat{\gamma} = 0$  соответствует значение  $\text{RRMSE} = 100\%$ .

### 8.1. Одномерный случай

Пусть  $M = 1$  и  $R = 2$ , то есть одномерный временной ряд  $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{24})$  состоит из элементов вида

$$x_n = e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n, \quad (14)$$

где  $n \in \overline{0:24}$ ,  $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ , а  $\xi_n$  и  $\eta_n$  — последовательность независимых случайных величин из распределения  $N(0, \sigma^2/2)$ ,  $\sigma = 0.04$ . Случайные величины  $\zeta_n$  являются независимыми и их распределение называется кругосимметричным комплексным нормальным распределением (circularly-symmetric complex normal distribution) [27] с дисперсией  $\sigma^2$  и обозначается  $\text{CN}(0, \sigma^2)$ .

Пусть  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 0.22$ . Ниже приведены рассматриваемые варианты степеней затухания.

1.  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .
2.  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.01$ .
3.  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02$ .
4.  $\alpha_1 = -0.01$ ,  $\alpha_2 = -0.02$ .

Такие параметры были выбраны, так как в статье [4] рассматривалась модель с такими частотами и степенями затухания из варианта 4. Во всех случаях ранг сигнала с такими параметрами будет равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы  $\mathbf{Z}$  из алгоритмов 3 и 8. В качестве способа

разложения траекторного тензора был выбран метод HOOI, так как он даёт наиболее точное приближение тензора. В этом разделе RRMSE считалось по 500 реализациям шума.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок частот и степеней затухания, полученных методом HO-ESPRIT, от размеров траекторного тензора (ось  $x$ ) и выбора направления оценивания (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на рисунках изображены наименьшие по выбору длины окна  $L$  значения RRMSE соответствующего параметра, полученные методом ESPRIT.

Рисунки 1 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено (деление на  $|\gamma| = 0$  в формуле (13)). Рисунки 2, 3 и 4 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

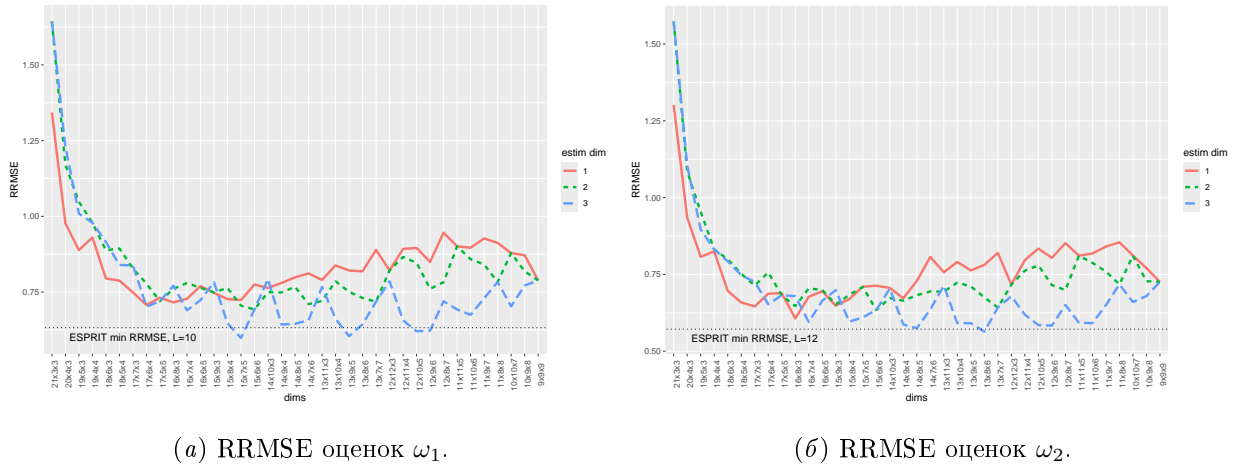


Рис. 1. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 1.

**Выводы из численных сравнений** В случае одномерных сигналов оценки методом HO-ESPRIT при оптимальном подборе параметров оказались не менее точными, чем оптимальные оценки стандартным методом ESPRIT. Кроме того, в некоторых ситуациях оптимальные оценки методом HO-ESPRIT оказываются точнее оптимальных оценок методом ESPRIT. Это соответствует результатам работы [4], в которой методы сравнивались только при оптимальных размерах длины окна. Однако множество длин окна в алгоритме HO-ESPRIT, при которых точность оценок параметров сигнала близка к оптимальной, очень мало, и нам пока неизвестны способы их выбора кроме перебора. С другой стороны, для стандартного алгоритма ESPRIT требуется меньший набор па-

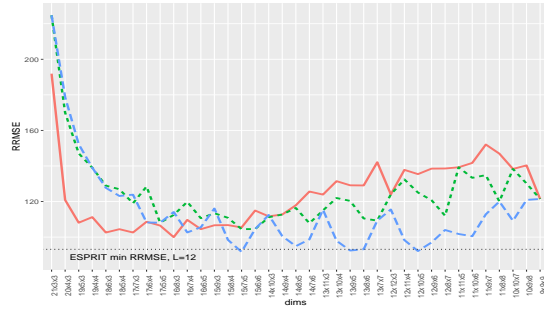
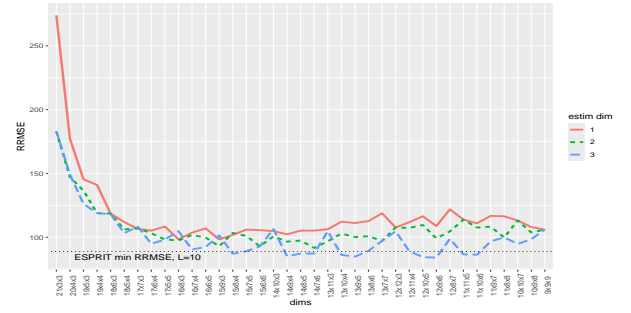
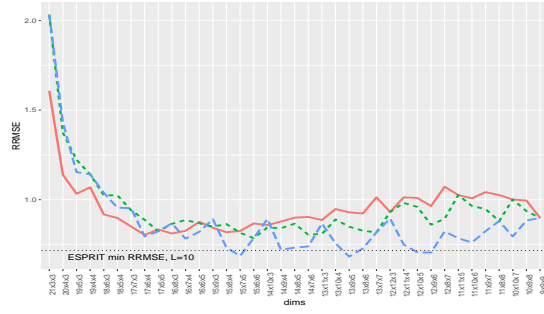
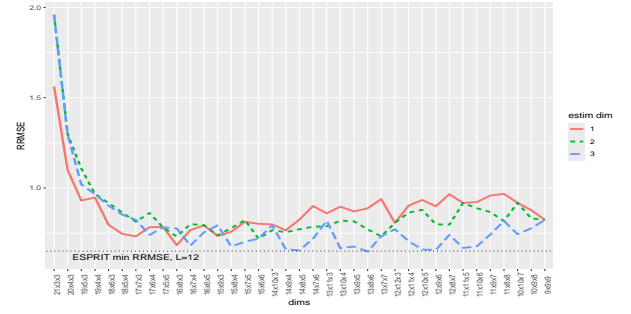
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 2. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 2.

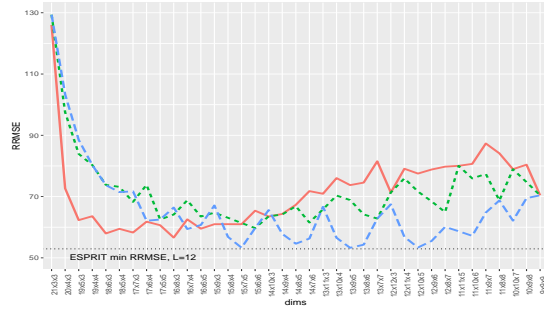
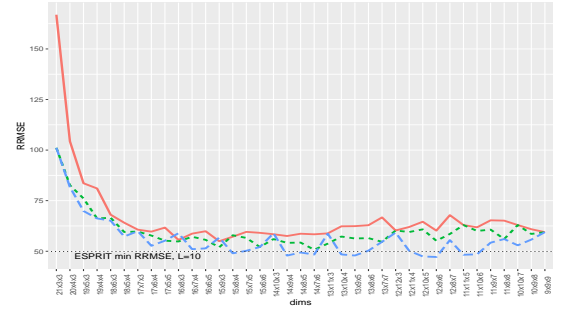
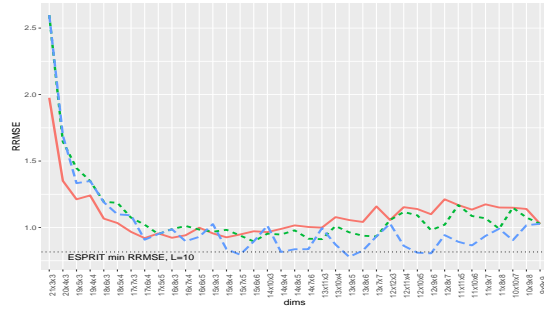
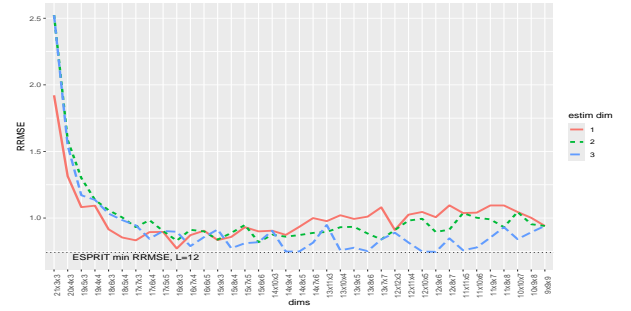
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 3. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 3.



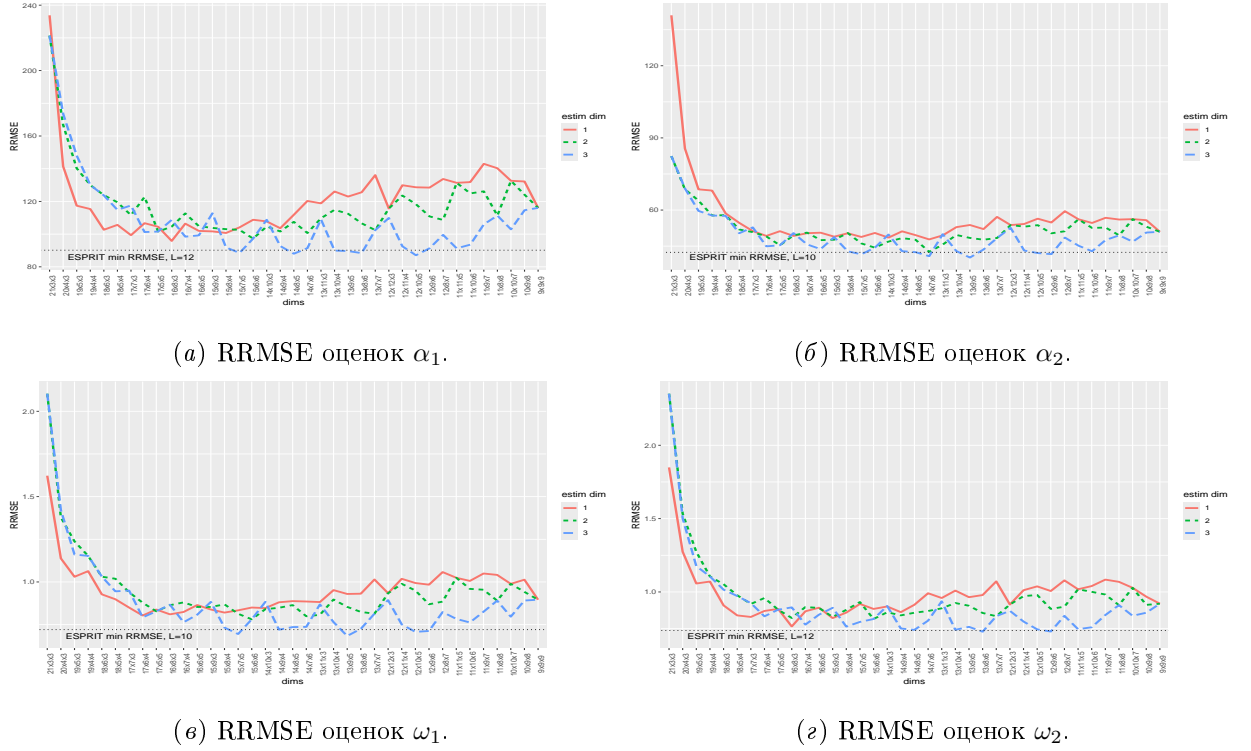


Рис. 4. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 4.

параметров, а разница между методами в точности оценки при оптимальных параметрах невелика. В связи с этим, использование метода HO-ESPRIT для оценки параметров одномерных сигналов в текущем виде не обосновано.

Стоит заметить, что во всех случаях выбор номера направления  $d$  из алгоритма 8, соответствующего направлению наименьшего размера траекторного тензора, давал наиболее точные результаты.

## 8.2. Многомерный случай

Пусть  $M = 12$  и  $R = 2$ , то есть многомерный временной ряд

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(12)}),$$

$$\mathbf{X}^{(m)} = (x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \dots, x_{24}^{(m)})$$

состоит из элементов вида

$$x_n^{(m)} = a_1^{(m)} e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + a_2^{(m)} e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n^{(m)},$$

где  $n \in \overline{0:24}$ , а  $\zeta_n^{(m)}$  — независимые случайные величины из распределения  $\text{CN}(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma = 0.2$ . Значения частот и варианты степеней затухания были взяты такими же, как

в одномерном случае в разделе 8.1. В качестве амплитуд  $a_k^{(m)}$  были взяты независимые реализации случайных величин из распределения  $CN(0, 1)$ , их приблизительные значения приведены в выражении (15).

$$\begin{aligned} \text{Re}(a_1) &\approx (0, -0.1, -1, -0.4, 0.2, 0.3, -0.9, -0.3, -1.2, -0.2, 0.8, 0.5)^T, \\ \text{Im}(a_1) &\approx (-0.9, -0.3, -0.5, -0.6, -0.1, -0.2, -1.3, -0.1, 0.7, 0.1, -1, -1)^T, \\ \text{Re}(a_2) &\approx (-0.2, 0.7, 0.5, 0.1, -0.7, -0.1, 0.7, 0.3, -0.4, -1.5, -0.5, -1.5)^T, \\ \text{Im}(a_2) &\approx (0.3, -1.2, -0.2, -0.5, 0.8, -0.5, -0.6, 0.6, -0.7, 0, 0.2, -0.2)^T. \end{aligned} \quad (15)$$

Как и в одномерном случае, ранг сигналов с каждым набором параметров равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы  $\mathbf{Z}$  из алгоритмов 3 и 8. В качестве способа разложения траекторного тензора был выбран метод HOOI.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок параметров, полученных методами M-ESPRIT и HO-M-ESPRIT, от значения длины окна  $L$ .

Рисунки 5 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 6, 7 и 8 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

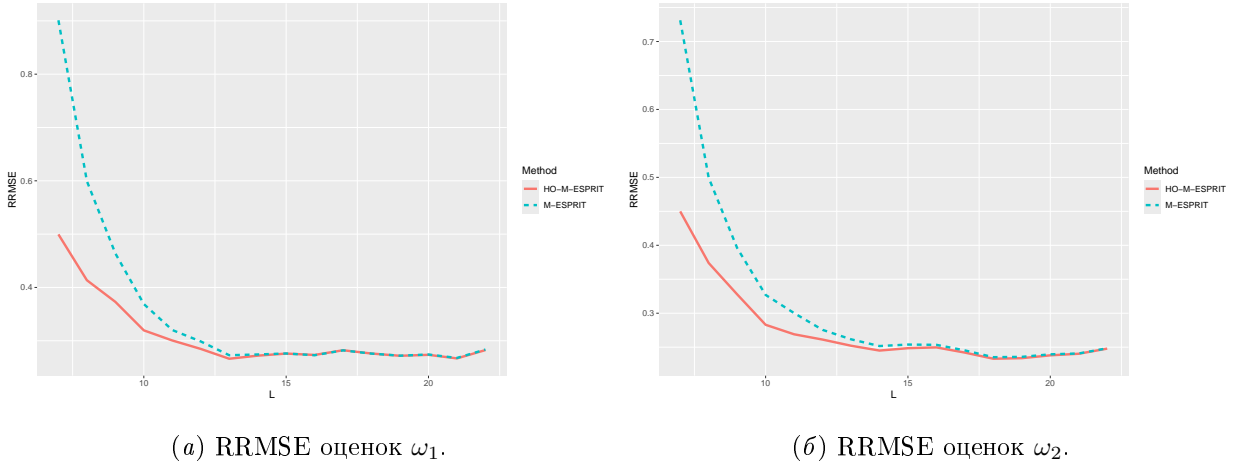


Рис. 5. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 1.

**Выводы из численных сравнений** Метод HO-M-ESPRIT оказался точнее стандартного метода M-ESPRIT в задаче оценки параметров многомерного ряда для любого выбора параметров длины окна во всех случаях, не считая двух: оценки методом HO-M-ESPRIT параметра  $\alpha_1$  оказались менее точными, чем методом M-ESPRIT, в случаях 2

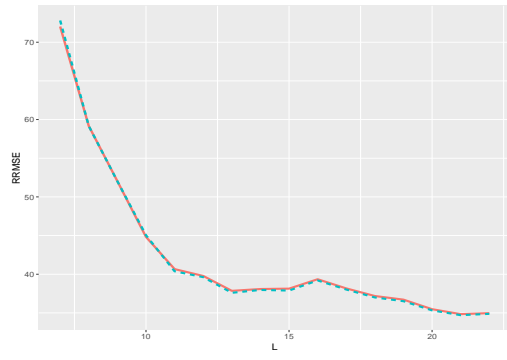
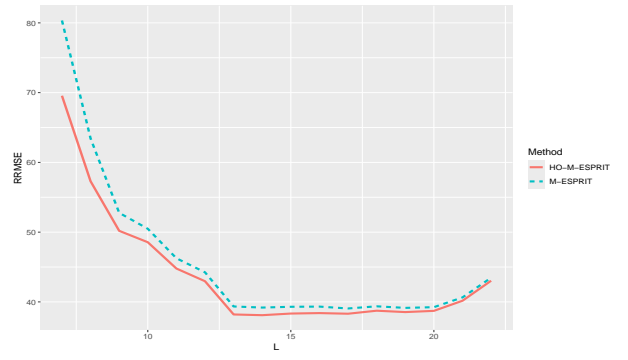
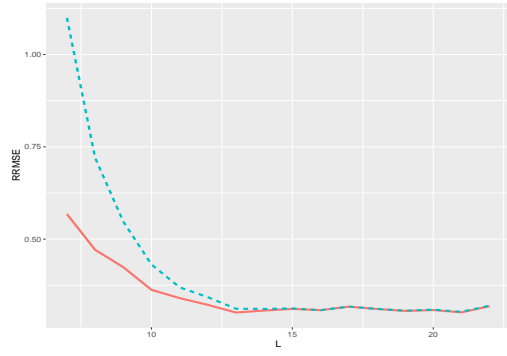
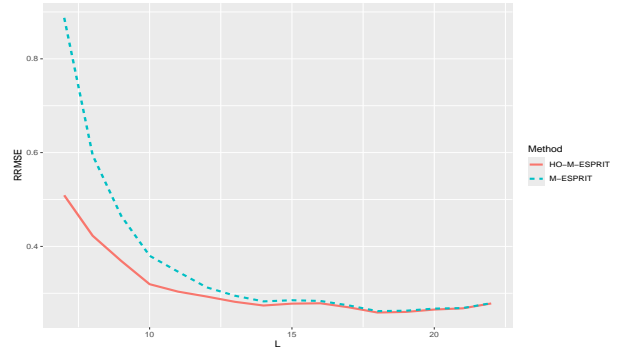
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(c) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 6. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 2.

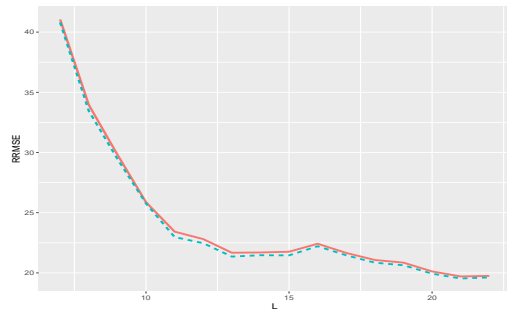
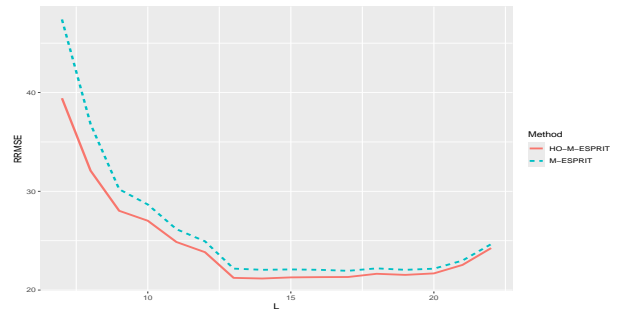
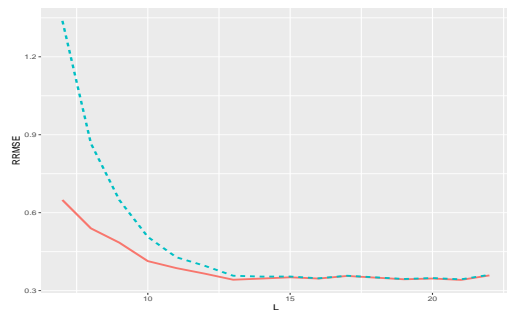
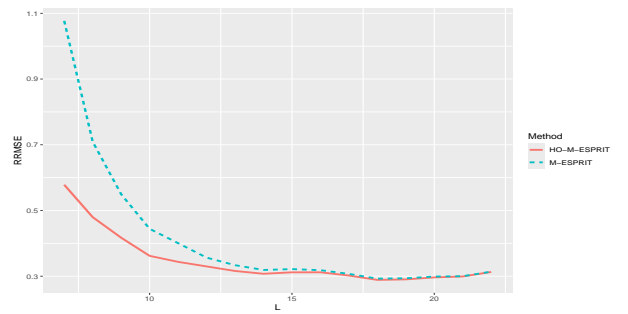
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(c) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 7. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 3.

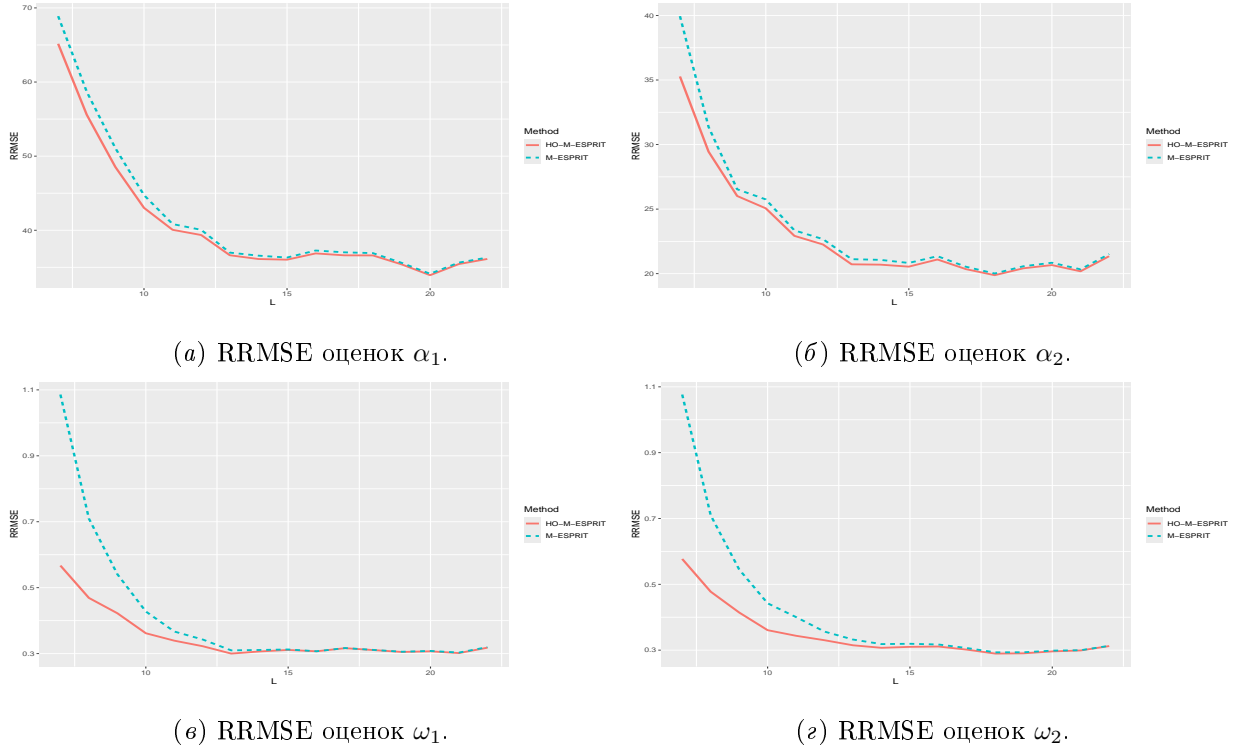


Рис. 8. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 4.

и 3. Стоит заметить, что значения точности методов во всех случаях практически не отличимы при больших значениях длины окна.

## 9. Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA

В этом разделе рассматривается влияние выбора направлений усечения в методе HO-SSA на точность в задаче выделения сигнала.

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет вид

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

$$x_n = s_n + \varepsilon_n, \quad n \in \overline{1 : N},$$

где  $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$  — сигнал,  $\mathbf{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  — шум. Точность выделения сигнала будет оцениваться с помощью среднеквадратичного отклонения (RMSE) оценённого сигнала от исходного. В данной работе RMSE высчитывается по следующей формуле

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}_i)}, \quad \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |s_j - \tilde{s}_j|^2,$$

где  $m$  — количество реализаций шума,  $\tilde{\mathbf{s}}_i$  — оценка сигнала, восстановленная по ряду

с  $i$ -й реализацией шума. В качестве способа разложения траекторного тензора был выбран метод НООІ.

### 9.1. Выделение вещественного сигнала

Пусть  $N = 71$  и временной ряд состоит из элементов вида

$$x_n = 30 \cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_n$  — независимые случайные величины из распределения  $N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2 = 25$ . Во всех алгоритмах для восстановления бралось количество компонент разложения равное рангу сигнала, который в данном случае равен 2. В таблице 1 приведены значения RMSE оценки сигнала, восстановленного методом SSA при различных выборах длины окна. RMSE здесь и далее в этом разделе высчитывается по  $m = 500$  реализациям шума. Кро-

Таблица 1. SSA: RMSE оценки сигнала (16).

$L$	12	24	30	36
RMSE	1.82	1.42	<b>1.40</b>	1.42

ме того, здесь и далее жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения RMSE, причём отличие этих минимальных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

В таблице 2 представлены значения RMSE оценок сигнала, восстановленного методом НО-SSA при выборе различных направлений усечения. Параметры в таблице 2 представлены в порядке уменьшения третьего размера траекторного тензора, причём выполняется неравенство  $I \leq J \leq L$ . Большие параметры длин окна не рассматриваются, так как построенные по ним траекторные матрицы и траекторные тензоры будут совпадать с рассмотренными с точностью до перестановки размерностей.

Из таблицы 2 видно, что усечение только по направлению наибольшей размерности даёт результаты точнее, чем усечение по всем направлениям, при почти любом выборе длин окна. Но этого увеличения точности недостаточно, чтобы алгоритм НО-SSA был точнее базового SSA.

Таблица 2. HO-SSA: RMSE оценки сигнала (16) при выборе разных направлений усечения.

Направления усечения \ $I \times L$	12×49	12×37	7×36	12×31	19×30	24×25
3	1.85	1.52	<b>1.48</b>	1.54	1.57	1.59
2, 3	1.63	1.53	<b>1.49</b>	1.56	1.62	1.65
$\overline{1:3}$	1.63	1.53	<b>1.49</b>	1.56	1.62	1.65

## 9.2. Выделение комплексного сигнала

Рассмотрим задачу выделения комплекснозначного сигнала из ряда  $X$  с элементами вида (14) с частотами  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 0.22$  и со степенями затухания  $\alpha_1 = -0.01$ ,  $\alpha_2 = -0.02$ .

На рисунке 9 представлен график зависимости RMSE от размеров траекторного тензора (ось  $x$ ) и направлений усечения (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на графике изображено минимальное по выбору длины окна значение RMSE для сигналов, восстановленных методом SSA. Как и в случае вещественного сигнала, метод

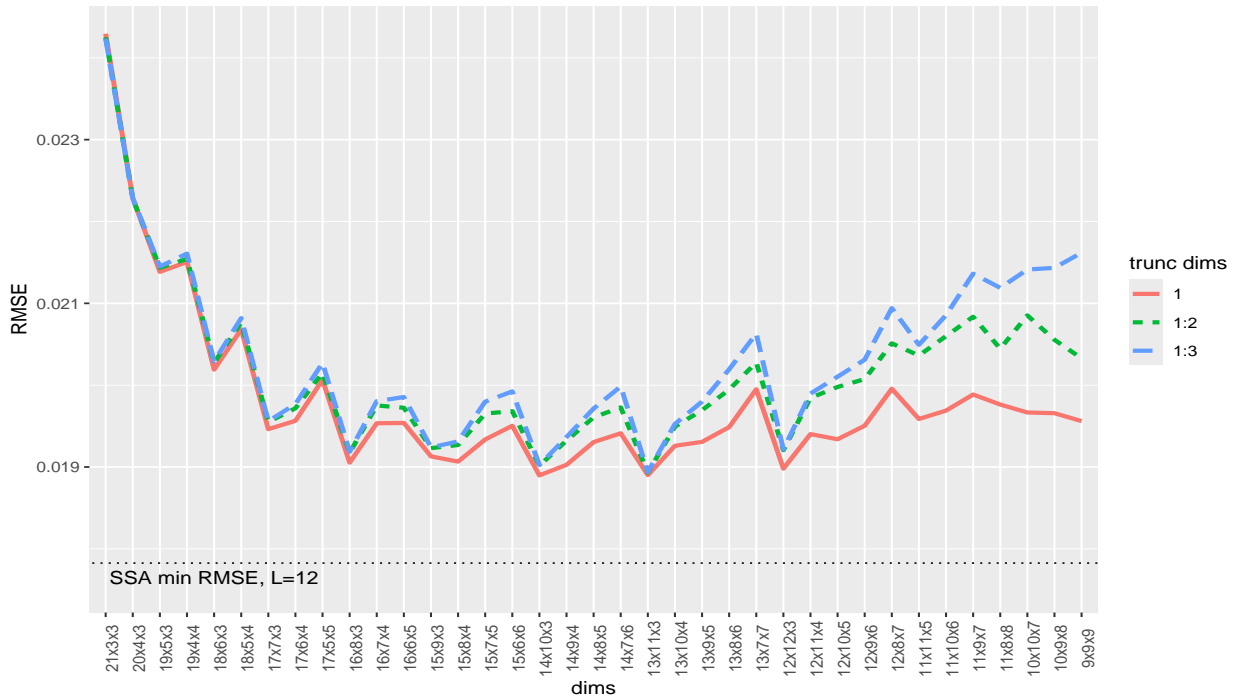


Рис. 9. Зависимость RMSE восстановленного сигнала от размеров траекторного тензора и направлений усечений.

HO-SSA оказывается существенно менее точным при любом выборе длин окна и направ-

лений усечения, чем метод SSA. Также наиболее точные оценки сигнала получаются при выборе в качестве направления усечения направления минимальной размерности траекторного тензора ряда.

**Выводы численных сравнений** В отличие от задачи оценки параметров, где при выборе оптимальных длин окна тензорные методы могут давать оценки точнее, чем базовый ESPRIT, в задаче выделения сигнала при любом выборе длин окна точность восстановленных тензорными методами оценок сигналов всегда существенно меньше точности оценок, восстановленных базовым SSA.

## 10. Численные сравнения в задаче выделения многомерных комплексных сигналов

Пусть многомерный временной ряд  $X$  имеет тот же вид, что и ряд, рассматриваемый в разделе 8.2. Рассмотрим задачу выделения сигнала из этого временного ряда.

Ранг этого сигнала в терминах MSSA при всех рассматриваемых вариантах параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  равен 2, поэтому параметр  $R$  в алгоритме MSSA и параметры  $R_1$  и  $R_2$  в алгоритме 7 были взяты равными 2. 3-ранг этого сигнала в терминах HO-MSSA равен 2, поэтому параметр  $R_3$  в алгоритме 7 был взят равным 2. Случаи усечения по части направлений не рассматривались в силу замечания 5.2.

На рисунках 10 приведены графики зависимости RMSE оценок сигнала методами MSSA и HO-MSSA от выбора длины окна  $L$  для различных параметров степеней затухания  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Из графиков видно, что во всех случаях метод HO-MSSA выделяет комплексный сигнал более точно, чем метод MSSA, причём преимущество велико для большинства значений длины окна  $L$ . Однако RMSE обоих методов при оптимальном выборе  $L$  довольно близки. Этот результат совпадает с результатами численного сравнения методов MSSA и HO-MSSA в задаче выделения вещественных сигналов.

Метод MSSA имеет асимптотическую трудоёмкость  $O(LKPr)$ , где  $r$  — количество компонент SVD, по которым оценивается сигнал. Из рисунков видно, что наибольшей точности метод достигает при  $L \approx N - r$ . Тогда, учитывая, что  $K = N - L + 1$  и  $r \ll N$ , трудоёмкость MSSA можно переписать в виде  $O(NPr^2)$ . Метод HO-MSSA с использованием HOOI имеет асимптотическую трудоёмкость  $O(LKP(2r + r_3))$ , где  $r$  — количество

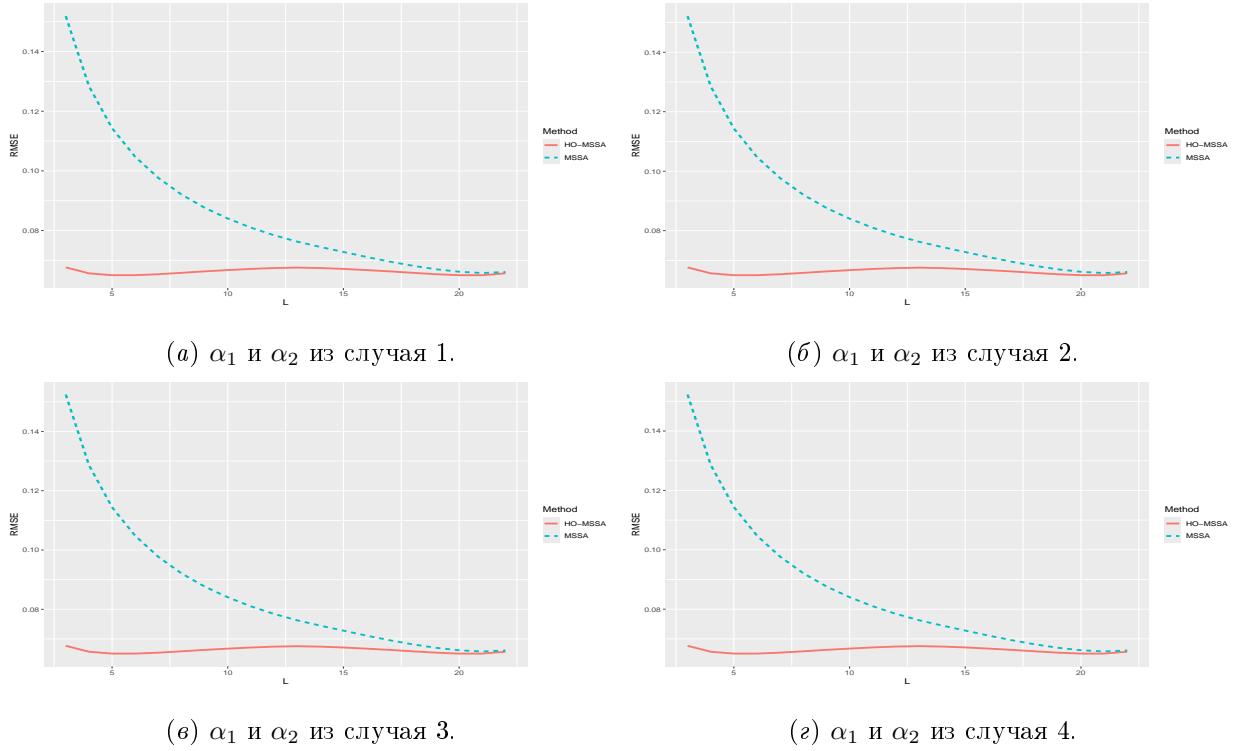


Рис. 10. Зависимость RMSE оценок многомерного сигнала от длины окна.

компонент первых двух направлений HOSVD, по которым оценивается сигнал, а  $r_3$  — количество компонент третьего направления. Метод HO-MSSA обладает свойством симметричности относительно замены  $L$  на  $K = N - L + 1$  в том смысле, что применение алгоритма с параметром длины окна  $L$  или  $K$  даёт одинаковые оценки, поэтому графики RMSE, соответствующие методу HO-MSSA на рисунке 10 симметричны относительно  $N/2$ . Трудоёмкость алгоритма HO-MSSA также симметрична относительно замены  $L$  на  $K$ . Наибольшей точности алгоритм достигает также при  $L \approx N - r$ , поэтому трудоёмкость HO-MSSA в этом случае можно переписать как  $O(NPr(2r + r_3))$ . Таким образом, хоть метод HO-MSSA более точен, он также более трудоёмкий, чем MSSA.

## 11. Численные сравнения методов Dstack со стандартными

Пусть одномерный временной ряд  $X$  состоит из элементов вида

$$x_n = \cos(2\pi n\omega_1) + \cos(2\pi n\omega_2) + \xi_n,$$

где  $\omega_1 = 0.02$ ,  $\omega_2 = 0.0205$ ,  $\xi_n$  — независимые случайные величины из распределения  $N(0, \sigma^2)$ ,  $n \in \overline{0 : 989}$ . Ранг этого ряда в терминах SSA равен 4, поэтому в задаче оценки параметров выбирается  $R = 4$  в алгоритмах 2, 3, 9, и  $R_1 = R_2 = 4$  в алгоритме 10.



Во всех случаях для Dstack методов был выбран параметр  $D = 10$ . Ряд был выбран аналогично тому, что рассматривался в работе [6].

В этом разделе точность выделения частот и оценки сигнала оценивается с помощью RMSE, посчитанного по 100 реализациям шума. RMSE оценки частоты сигнала считается следующим образом

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^m |\omega_k - \hat{\omega}_{kj}|^2}, \quad (17)$$

где  $\hat{\omega}_{kj}$  — оценка частоты  $\omega_k$ , полученная по ряду с  $j$ -й реализацией шума.

### 11.1. Задача оценки параметров сигнала

Сравниваются методы ESPRIT, Dstack ESPRIT и два варианта Dstack HO-ESPRIT: с выбором  $R_3 = 4$  и  $R_3 = 1$ . Выбор  $R_3 = 4$  обусловлен тем, что 3-ранг ряда  $X_D = \mathcal{D}_D(X)$  равен 4, а выбор  $R_3 = 1$  обусловлен теоремой 4.

Рассматриваются два варианта шума: малый — со стандартным отклонением  $\sigma = 0.2$ , и большой — с  $\sigma = 0.6$ . На рисунках 11 приведены графики зависимости RMSE оценки методом ESPRIT (слева) и Dstack модификациями (справа) от длины окна для малого шума, а на рисунках 12 — для большого. Для удобства сравнения на каждом из графиков пунктирной линией обозначено минимальное значение с соседнего графика.

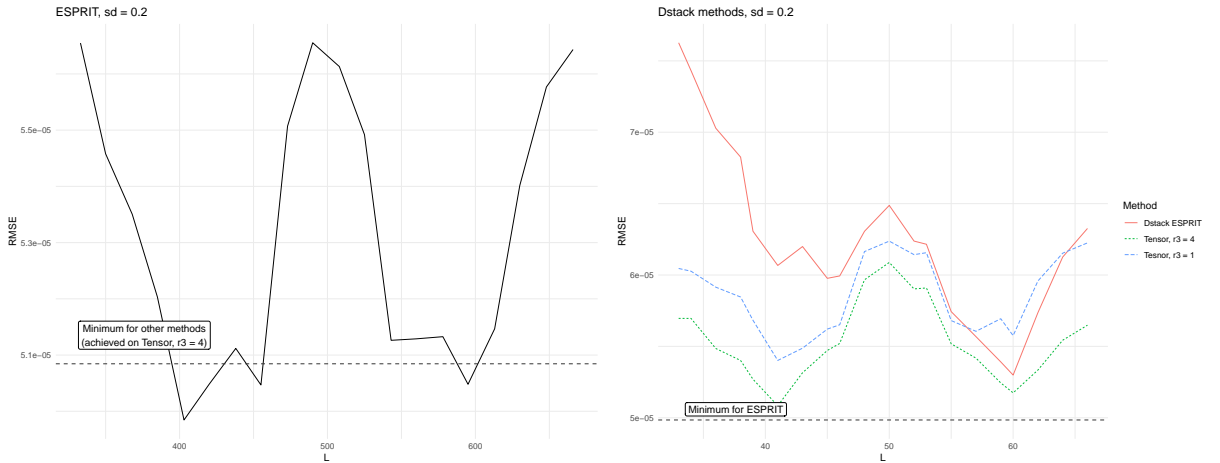


Рис. 11. Зависимость RMSE оценки частот методами ESPRIT и модификациями Dstack от длины окна. Случай  $\sigma = 0.2$ .

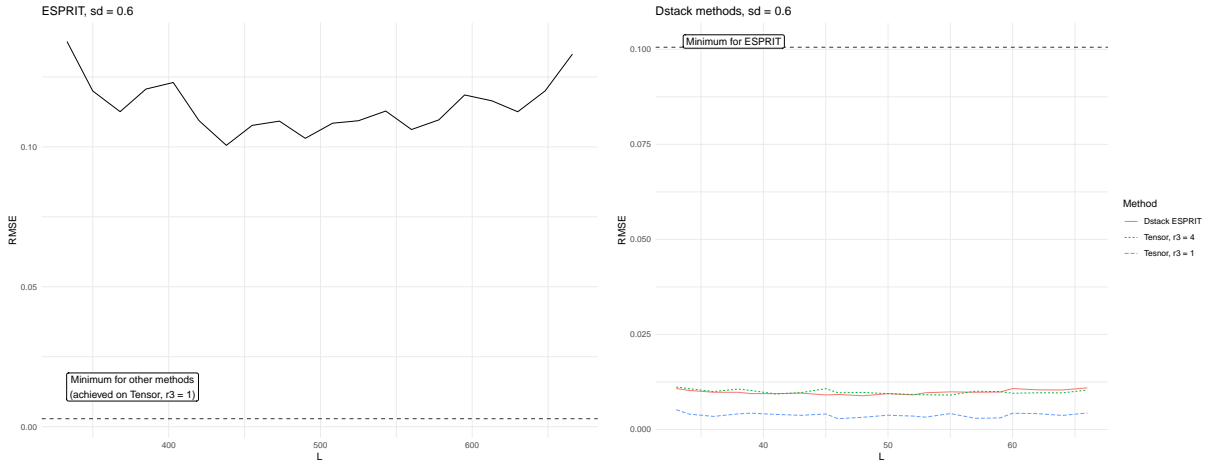


Рис. 12. Зависимость RMSE оценки частот методами ESPRIT и модификациями Dstack от длины окна. Случай  $\sigma = 0.6$ .

Из графиков видно, что при малом уровне шума все методы близки по точности, и минимальная ошибка достигается методом ESPRIT, а среди Dstack методов наименьшую ошибку имеет Dstack HO-ESPRIT с выбором  $R_3 = 4$ . Однако в случае высокого уровня шума точность метода ESPRIT заметно снижается. Это происходит по той причине, что из-за близости частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ESPRIT перестаёт их различать, и оценивает как одну частоту. Наиболее точным методом в случае большого уровня шума является Dstack HO-ESPRIT с выбором  $R_3 = 1$ .

## 11.2. Задача выделения сигнала

Сравниваются методы SSA, Dstack SSA и Dstack HO-SSA с выбором  $R_3 = 4$ . Вариант  $R_3 = 1$  не рассматривается, так как в этом случае, в отличие от задачи оценки параметров, у оценки сигнала возникает большое смещение.

Как и в разделе 11.1, рассматриваются два уровня шума:  $\sigma = 0.2$  и  $\sigma = 0.6$ . На рисунках 13 приведены графики зависимости RMSE оценки методом SSA (слева) и Dstack модификациями (справа) от длины окна для малого шума, а на рисунках 14 — для большого. Для удобства сравнения на каждом из графиков пунктирной линией обозначено минимальное значение с соседнего графика.

Из графиков видно, что при любом уровне шума SSA выделяет сигнал значительно точнее, чем Dstack методы. При выборе оптимальных длин окна методы Dstack SSA и Dstack HO-SSA близки по точности, с небольшим преимуществом тензорного метода.

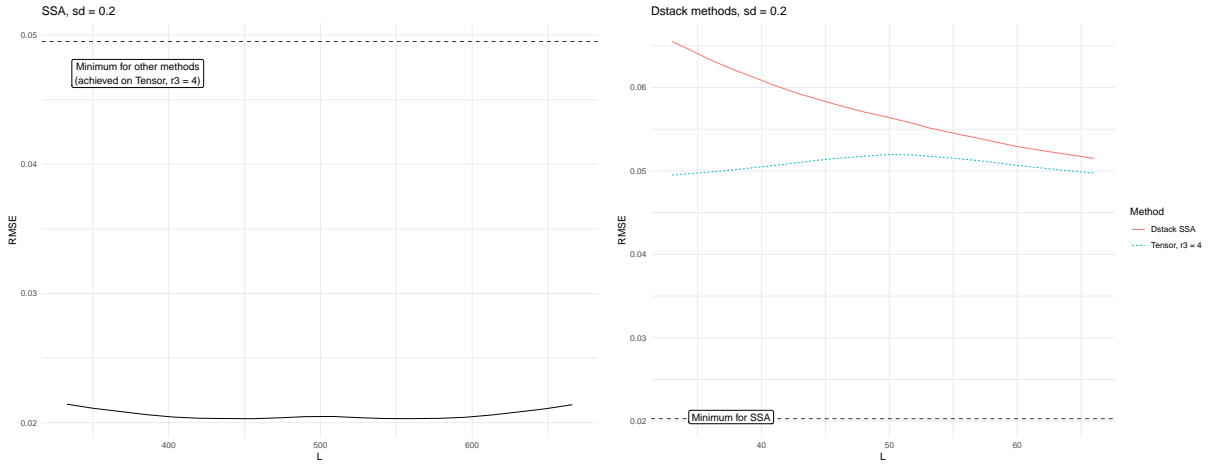


Рис. 13. Зависимость RMSE оценки частот методами ESPRIT и модификациями Dstack от длины окна. Случай  $\sigma = 0.2$ .

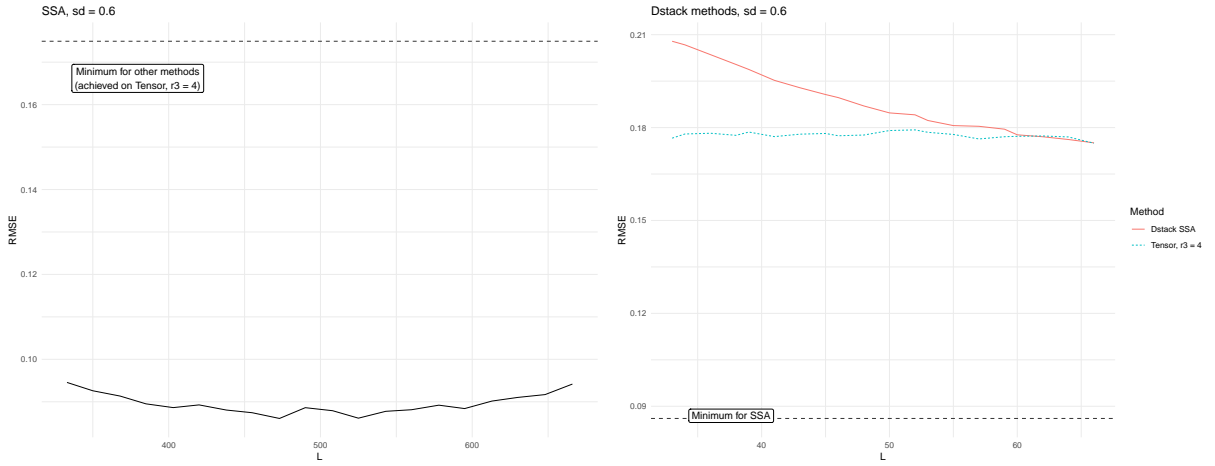


Рис. 14. Зависимость RMSE оценки частот методами ESPRIT и модификациями Dstack от длины окна. Случай  $\sigma = 0.6$ .

## 12. Другие варианты применения тензорных разложений в задаче выделения сигнала

В данном разделе приведён краткий обзор статей, не рассмотренных ранее, в которых предлагается использовать вложение ряда в тензор, и последующее его тензорное разложение в задачах выделения сигнала или оценки параметров. Также описаны возможные перспективы дальнейшего изучения тензорных методов.

### 12.1. Тензорный SSA с использованием $(L_r, L_r, 1)$ -разложения

В статье [28] рассматривается задача выделения сигнала в многомерном ряде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{MS} + \mathbf{N},$$

где  $\mathbf{Y}$  — наблюдаемый ряд,  $\mathbf{S}$  — искомый сигнал,  $\mathbf{M}$  — коэффициенты линейных комбинаций, с которыми сигнал составляет наблюдаемый ряд,  $\mathbf{N}$  — шум. Траекторный тензор ряда определяется так же, как в определении 4.1. Приводится теоретическая информация про разложение в сумму тензоров с  $n$ -рангами  $(L_r, L_r, 1)$ , которое называется  $(L_r, L_r, 1)$ -разложением, в частности приводятся определение и условия единственности.

Для модели, в которой сигнал составляют суммы произведений полиномов и комплексных экспонент, доказаны условия единственности  $(L_r, L_r, 1)$ -разложения траекторного тензора ряда.

Сам метод заключается в построении траекторного тензора по ряду  $\mathbf{Y}$ , аппроксимации этого тензора меньшими  $n$ -рангами (но большими, чем  $n$ -ранги самого сигнала), и применении  $(L_r, L_r, 1)$ -разложения к этой аппроксимации. Далее по этому разложению строится оценка сигнала  $\mathbf{S}$ .

В работе проводятся численные сравнения точности выделения сигнала предложенным методом при различных выборах параметров рангов аппроксимации и  $L_r$ , однако сравнения с другими методами выделения сигнала не проводятся.

В дальнейшем возможно провести численное сравнение предлагаемого метода с SSA, MSSA и HO-MSSA с точки зрения точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала.

### 12.2. Тензорный SSA с использованием CPD

В работе [2] рассматривается задача выделения одномерного вещественного сигнала из ряда с нестационарным шумом.

Вводится понятие траекторного тензора следующим образом: исходный одномерный ряд делится на непересекающиеся подряды длины  $l$ , затем траекторный тензор строится аналогично траекторному тензору многомерного ряда из определения 5.1, как если бы эти подряды были каналами многомерного сигнала. Предлагается алгоритм

Tensor-Based SSA (TSSA), основанный на применении CPD к полученному траекторному тензору ряда.

Кроме того, предлагается алгоритм TSSA-EMD, основанный на использовании метода EMD [?] для адаптивной группировки компонент CPD. Метод заключается в получении CPD траекторного тензора, использовании EMD для выделения сигнала, построении траекторного тензора  $\mathcal{F}$  этой оценки сигнала, и решении оптимизационных задач

$$J(\mathcal{G}_{ijk}) = \left\| \mathcal{F}_{ijk} - \sum_{r=1}^R \mathcal{G}_{ijk} a_{ir} b_{jr} c_{kr} \right\|^2 \rightarrow \min_{\mathcal{G}_{ijk}}$$

для всех  $i, j, k$ , где  $a_{ir}$ ,  $b_{jr}$  и  $c_{kr}$  — элементы компонент CPD. После нахождения тензора адаптивных весов  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_{ijk}\}$  строится оценка траекторного тензора сигнала

$$\mathcal{S}_{ijk} = \sum_{r=1}^R \mathcal{G}_{ijk} a_{ir} b_{jr} c_{kr},$$

по которому восстанавливается оценка сигнала.

Метод TSSA-EMD численно сравнивался с SSA и другими методами выделения сигнала на моделированном ряде с нестационарным шумом, причём явная формула рассматриваемого ряда в статье не приведена. Было показано значимое преимущество TSSA-EMD над остальными рассматриваемыми методами в смысле RMSE, причём для каждого алгоритма рассматривался лишь один набор параметров. Также было рассмотрено применение TSSA-EMD к реальному ряду.

Мной был рассмотрен метод с применением CPD, но без использования EMD и тензора адаптивных весов, и численные сравнения показали значимое преимущество базового SSA над предлагаемым методом. В дальнейшем имеет смысл рассмотреть предлагаемый метод с использованием адаптивных весов с точки зрения точности выделения сигнала, причём можно заменить EMD на другие методы выделения сигнала.

### 12.3. Tensor SSA с использованием T-SVD

В работе [29] рассматривается задача выделения многомерного сигнала. Траекторный тензор сигнала строится аналогично определению 5.1. К тензору применяется разложение T-SVD [16, 20], которое является разложением Таккера с  $f$ -диагональным ядром разложения, то есть сечения 3-го направления этого тензора — диагональные матрицы.

В статье приводится утверждение о «трубном» (tubal) ранге траекторных тензоров рядов, представимых в виде суммы произведений полиномов, экспонент и гармоник. Трубный ранг тензора — это число ненулевых векторов 3-го направления в ядре разложения  $\mathcal{Z}$  этого тензора. Также приводится утверждение о связи T-SVD с кратковременным преобразованием Фурье.

Авторы приводят лишь визуальное сравнение с методом TenSOFO на примере отделения электрокардиограммы плода от электрокардиограммы матери, и не приводят никаких метрик точности выделения сигнала.

Мной был рассмотрен предлагаемый метод, и были проведены численные сравнения с методами MSSA и HO-MSSA на малом наборе рядов. Предлагаемый метод оказался наименее точным. В дальнейшем для полноты возможно провести сравнения на большем классе сигналов.

### 13. Заключение

В результате работы было показано, что тензорные модификации алгоритма ESPRIT в задаче оценки параметров одномерных и многомерных комплексных сигналов при оптимальном выборе параметров длин окна оказываются точнее стандартного метода ESPRIT, что соотносится с результатами работы [4]. Однако преимущество тензорных алгоритмов мало, и множество длин окна, при которых это преимущество есть, также невелико.

Также в работе показано, что в отличие от задачи оценки параметров, тензорные методы в задаче выделения комплексных сигналов имеют преимущество лишь в случае многомерных сигналов. Метод HO-SSA выделяет одномерные комплексные сигналы существенно менее точно, чем базовый SSA, а метод HO-MSSA выделяет многомерные комплексные сигналы точнее метода MSSA, хотя преимущество и не велико а трудоёмкость тензорного метода больше, чем стандартного. Это соотносится с результатами исследования методов HO-SSA и HO-MSSA в задаче выделения вещественных сигналов.

С другой стороны, было показано, что при достаточно близких частотах и высоком уровне шума стандартный методы ESPRIT может перестать идентифицировать все параметры сигнала, в то время как использование Dstack HO-ESPRIT в этих же условиях продолжает оценивать параметры с высокой точностью. Однако применение Dstack модификаций в задаче оценки параметров затруднено необходимостью того, чтобы выполнялось некоторое достаточно строгое условие на частоты, представленные в сигнале. В задаче выделения сигнала, стандартный метод SSA оказался точнее Dstack модификаций при любом уровне шума.

Кроме того, было показано, что точность выделения одномерных сигналов методом HO-SSA можно увеличить, восстанавливая сигнал усечением траекторного тензора лишь по части его направлений. Однако этого увеличения точности всё ещё недостаточно, чтобы тензорный метод был точнее стандартного SSA.

## Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Kouchaki S., Sanei S. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
3. Improved Tensor-Based Singular Spectrum Analysis Based on Single Channel Blind Source Separation Algorithm and Its Application to Fault Diagnosis / Yang D., Yi C., Xu Z., Zhang Y., Ge M., and Liu C. // Applied Sciences. — 2017. — Vol. 7, no. 4.
4. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
5. Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.
6. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the decimative case // Journal of Chemometrics. — 2009. — Vol. 23, no. 7–8. — P. 341–351.
7. Harshman R.A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
8. Carroll J.D., Chang J.-J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35, no. 3. — P. 283–319.
9. Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. — 1966. — Vol. 31, no. 3. — P. 279–311.
10. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
11. Хромов Н.А. Выпускная квалификационная работа «Тензорный анализ сингулярного спектра». — 2024. — научный руководитель Голяндина Н.Э.
12. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. —



- Springer Berlin Heidelberg, 2020.
13. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
  14. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage / Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
  15. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
  16. Kilmer M.E., Martin C.D. Factorization strategies for third-order tensors // Linear Algebra and its Applications. — 2011. — Vol. 435, no. 3. — P. 641–658.
  17. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Rev. — 2009. — Vol. 51, no. 3. — P. 455–500.
  18. Savostyanov D. V., Tyrtysnikov E.E. Approximate multiplication of tensor matrices based on the individual filtering of factors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49, no. 10. — P. 1662–1677.
  19. Kazeev V. A., Tyrtysnikov E.E. Structure of the Hessian matrix and an economical implementation of Newton’s method in the problem of canonical approximation of tensors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, no. 6. — P. 927–945.
  20. Third-Order Tensors as Operators on Matrices: A Theoretical and Computational Framework with Applications in Imaging / Kilmer M.E., Braman K., Hao N., and Hoover R.C. // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2013. — Vol. 34, no. 1. — P. 148–172.
  21. Осинский А.И. Оценки аппроксимации тензорных поездов по норме Чебышёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 211–216.
  22. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. On the Best Rank-1 and Rank- $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
  23. Sheehan B., Saad Y. Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Re-

- lation to PCA and GLRAM // Proceedings of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining. — Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2007.
24. Eldén L., Savas B. A Newton–Grassmann Method for Computing the Best Multilinear Rank- $(r_1, r_2, r_3)$  Approximation of a Tensor // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 31, no. 2. — P. 248–271.
  25. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.
  26. Котельников В. А. О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи // Усп. физ. наук. — 2006. — Т. 176, № 7. — С. 762–770.
  27. Tse David, Viswanath Pramod. Fundamentals of Wireless Communication. — Cambridge University Press, 2005.
  28. De Lathauwer L. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank- $(L_r, L_r, 1)$  Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 32, no. 4. — P. 1451–1474.
  29. Trung Le Thanh, Abed-Meraim Karim, Trung Nguyen Linh. Higher-Order Singular Spectrum Analysis for Multichannel Biomedical Signal Analysis // 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO). — IEEE. — 2024. — P. 1337–1341.