

Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Учебная практика 4 (научно-исследовательская работа) (семестр 8)

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА»

Выполнил:

Хромов Никита Андреевич

24.М22-мм

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., доцент

Голяндина Н. Э.

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

1.	Введение	3
2.	Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT	5
2.1.	SSA	5
2.2.	MSSA	8
2.3.	ESPRIT	9
3.	Основы теории тензорных разложений	10
3.1.	Ранги тензоров и тензорные разложения	11
3.2.	HOSVD	13
3.3.	Свойства HOSVD	14
3.4.	Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера . .	16
4.	Описание метода HO-SSA	17
4.1.	HO-SSA для разделения компонент сигнала	18
4.2.	HO-SSA для выделения сигнала из ряда	18
4.3.	Свойства HO-SSA	20
5.	Описание метода HO-MSSA	21
5.1.	HO-MSSA для выделения сигнала	21
5.2.	HO-MSSA для разделения компонент сигнала	21
5.3.	Свойства HO-MSSA	22
6.	Описание метода HO-ESPRIT	23
7.	Численные сравнения в задаче оценки параметров	24
7.1.	Одномерный случай	25
7.2.	Многомерный случай	28
8.	Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA	29
8.1.	Выделение вещественного сигнала	32
8.2.	Выделение комплексного сигнала	33
9.	Численные сравнения в задаче выделения многомерных комплексных сигналов	34
10.	Заключение	36
	Список литературы	37

1. Введение

Singular spectrum analysis (SSA) [1] является распространённым методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и разделения аддитивных компонент сигнала из временного ряда. SSA относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала, и заключается в сингулярном разложении особой матрицы, построенной по временному ряду и называемой траекторной.

В работах [2, 3] предлагается тензорная модификация метода SSA для решения задачи выделения сигнала, которая основана на некотором тензорном разложении траекторного тензора, построенного по временному ряду. В работе [4] предлагается похожая тензорная модификация метода ESPRIT [5] для решения задачи оценки частот периодических компонент сигнала в особой модели. Причём, в этих работах утверждается преимущество тензорных модификаций над стандартным SSA.

Существует множество видов тензорных разложений, например каноническое (CPD) [6, 7], и Таккера (Tucker) [8]. Частным случаем разложения Таккера является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD) [9], которое также позволяет искать наилучшее приближение (усечением разложения).

В моей выпускной квалификационной работе бакалавра была реализована тензорная модификация метода SSA с использованием тензорного разложения, в некотором смысле расширяющего SVD, и было проведено сравнение с методом SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала, а также было рассмотрено расширение метода SSA на многомерные ряды — метод MSSA [10], сформулирована и реализована тензорная модификация этого метода и проведено сравнение её с другими методами семейства SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала. В качестве метода разложения тензоров был выбран метод HOSVD, который имеет наибольшее число свойств, справедливых для SVD. В качестве языка программирования для реализаций алгоритмов был выбран язык R.

Способ построения траекторного тензора и его разложение были выбраны из предложенных в статье [4], однако в отличие от этой статьи, в данной работе изучается применение выбранных средств в задаче выделения сигнала из временного ряда и в задаче разделения компонент сигнала.

Все рассматриваемые в моей ВКР сигналы были вещественнозначными. Однако методы семейства SSA допускают и комплекснозначные сигналы. Метод SSA при приме-

нении к комплексным рядам называют CSSA (Complex SSA). Специфика CSSA заключается в замене матричного транспонирования на эрмитово сопряжение. Кроме того, аналогом вещественного гармонического ряда, имеющего ранг 2 в терминах SSA, является экспонента с комплексным аргументом, которая имеет ранг 1 в терминах CSSA.

Целью этой работы является продолжение изучения тензорных модификаций алгоритмов, основанных на подпространстве сигнала. В частности, стояли задачи реализовать тензорную модификацию алгоритма ESPRIT, предложенную в работе [4], провести численное сравнение её с базовым методом ESPRIT на комплекснозначных временных рядах особой модели, провести численное исследование влияния направлений усечения траекторного тензора на точность алгоритма HO-SSA, и провести численные исследования методов HO-SSA и HO-MSSA с точки зрения точности выделения комплекснозначных сигналов.

В разделе 2 приведено описание методов SSA, MSSA и ESPRIT, а также некоторые их известные свойства и важные определения. В разделе 3 приведено описание некоторых тензорных разложений, используемых в работе, а также их свойства, необходимые для доказательства ключевых утверждений о тензорных модификациях методов семейства SSA. В разделе 4 представлено описание тензорных модификаций метода SSA — HOSVD-SSA и HOOI-SSA (оба этих метода в совокупности будем называть High-Order SSA или HO-SSA), и приведены некоторые определения и утверждения, используемые далее в работе. В разделе 5 описывается метод HO-MSSA для выделения сигнала и разделения компонент и некоторые его свойства. В разделе 6 описывается тензорная модификация метода ESPRIT, которую будем называть HO-ESPRIT. Вкладом этой работы являются разделы 7, 8 и 9, в которых приводятся результаты численных исследований точности метода HO-ESPRIT в задаче оценки параметров комплексного сигнала особой модели, влияния выбора направлений усечения в алгоритме HO-SSA на точность выделения сигнала и точности методов HO-SSA и HO-MSSA в задаче выделения комплексных сигналов соответственно.

2. Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

2.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Определение 2.1 (Оператор вложения). Оператором вложения \mathcal{H}_L с длиной окна L будем называть отображение, переводящее временной ряд $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $N \geq L$, в ганкелеву матрицу $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$, $K = N - L + 1$, такую, что $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$. Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

Определение 2.2 (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда \mathbf{X} с длиной окна $L < N$ называют матрицу \mathbf{X} , полученную применением оператора вложения \mathcal{H}_L , к ряду \mathbf{X} .

Пусть временной ряд \mathbf{X} представим в виде суммы временных рядов \mathbf{X}_k и шума \mathbf{E} :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов \mathbf{X}_k . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$. Первые два шага в алгоритме 2 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

Определение 2.3 (SSA-ранг временного ряда). Число d называется SSA-рангом временного ряда \mathbf{X} длины N , если $d \leq (N + 1)/2$ и для любой допустимой длины окна L , то есть такой, что $d \leq \min(L, N - L + 1)$, ранг траекторной матрицы \mathbf{X} этого ряда, построенной по длине окна L , равен d .

Алгоритм 1 SSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , m , $R : m \leq R \leq \min(L, N-L+1)$,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$:

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$ — оценки рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$.

- 1: Вложение: построение траекторной матрицы \mathbf{X} по длине окна L .
- 2: Разложение: проведение SVD траекторной матрицы \mathbf{X} , получение её представления в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H, \quad R \leq d \leq \min(L, N-L+1),$$

где верхний индекс H обозначает эрмитово сопряжение матрицы.

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов $\tilde{\mathbf{X}}_k$ по матрицам \mathbf{X}_k посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей $i + j = \text{const}$:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N-L+1, i+j-1 = n \right\}.$$

Алгоритм 2 SSA для выделения сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R : 1 \leq R \leq \min(L, N-L+1)$.

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}$ — оценка сигнала $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$.

- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H.$$

- 4: Восстановление ряда $\tilde{\mathbf{X}}$ по матрице $\tilde{\mathbf{X}}$ посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей $i + j = \text{const}$.
-

Замечание. В качестве параметра R в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

Пример 2.1. Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-ранги.

- Ранг полиномиального ряда $x_n = Q_d(n)$, где Q_d — многочлен степени d , равен $d+1$.
- Ранг экспоненциального ряда $x_n = Ce^{\alpha n}$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ и $C \neq 0$, равен 1.
- Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^M C_j e^{\alpha_j n},$$

где $\alpha_j \in \mathbb{C}$ и $C_j \neq 0$ при всех j , равен количеству уникальных значений α_j .

- Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где $C \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\omega \in [0, 1/2]$, равен $r(\omega)$, где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

- Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^M C e^{\alpha_j n} \cos(2\pi n\omega_j + \psi_j)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где Ω — множество уникальных пар (ω_i, α_i) , представленных в данном временном ряде.

Определение 2.4 (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ и $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ называют слабо L -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1. $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N-L+1)},$
2. $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}.$

Утверждение 2.1. Пусть $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$, а \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ — траекторные матрицы с длиной окна L рядов \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ соответственно. Тогда сумма SVD матриц $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ является SVD матрицы \mathbf{X} тогда и только тогда, когда ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ слабо L -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 2.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

2.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [11, 12, 10].

Пусть дан P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

Определение 2.5 (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$ — траекторные матрицы рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$ соответственно, построенные по длине окна L . Траекторной матрицей многомерного временного ряда \mathbf{X} называется матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$, $K = N - L + 1$, построенная соединением матриц \mathbf{X}_p по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P].$$

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

Определение 2.6 (MSSA-ранг временного ряда). Число d называется MSSA-рангом P -мерного временного ряда \mathbf{X} длины N , если $d \leq P(N + 1)/(P + 1)$, и для любой допустимой длины окна L , то есть такой, что $d \leq \min(L, P(N - L + 1))$, ранг траекторной матрицы \mathbf{X} этого ряда, построенной по длине окна L , равен d .

Замечание. Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

Пример 2.2. Рассмотрим P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N с элементами вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{R(p)} a_i^{(p)} e^{-\alpha_i^{(p)} n} \cos \left(2\pi \omega_i^{(p)} n + \varphi_i^{(p)} \right). \quad (2)$$

MSSA-ранг такого ряда равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad (3)$$

где функция $r(\omega)$ определена в уравнении (1), а Ω — множество уникальных пар $(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)})$, представленных в данном временном ряде.

Замечание. В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HO-MSSA на многомерных сигналах вида (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры $R(p)$, $\omega_i^{(p)}$ и $\alpha_i^{(p)}$ не зависят от номера ряда p , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [13]. Кроме того, в работе [4] также рассматривается этот частный случай модели.

Определение 2.7 (Слабая MSSA-разделимость). P -мерные временные ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ длины N называются слабо L -разделимыми, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P}, \\ 2. \quad & \sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}. \end{aligned}$$

Утверждение 2.2. Пусть $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$, а \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ — траекторные матрицы с длиной окна L рядов \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ соответственно. Тогда сумма SVD матриц $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ является SVD матрицы \mathbf{X} тогда и только тогда, когда ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ слабо L -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

2.3. ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [5, 4].

Пусть элементы многомерного временного ряда \mathbf{X} имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{\alpha_j n} e^{i(2\pi \omega_j n + \varphi_j^{(p)})}, \quad (4)$$

где i обозначает мнимую единицу, а параметрами модели являются амплитуды $a_j^{(p)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, фазы $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$, частоты $\omega_j \in [0, 1/2]$ и степени затухания $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Замечание. В статье [5] приводится алгоритм ESPRIT для модели временного ряда вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R s_j(n) e^{i\omega_0 \Delta \sin \theta_j / c} a^{(p)}(\theta_j),$$

где оцениваемые параметры обозначены θ_j , но в работе будет рассматриваться модель вида (4) по причине, указанной в замечании к примеру 2.2.

Замечание. В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi i\omega n + \varphi_n} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi_n}}{2},$$

вещественнозначный временной ряд из примера 2.2 при $R(p) = R$, $\omega_j^{(p)} = \omega_j$ и $\alpha_j^{(p)} = \alpha_j$ является частным случаем ряда (4).

Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания α_j и частот ω_j многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4). Первые два шага в алгоритме 3 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

Замечание. Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма R рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

Замечание. Алгоритм 3 применим и для одномерных временных рядов ($P = 1$).

3. Основы теории тензорных разложений

Под тензорами в данной работе подразумеваются M -мерные массивы. Элементы тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ обозначаются $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$. Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [9, 14, 15, 16]. Термины на русском языке взяты из работы [17].

Алгоритм 3 ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$.

Результат: $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$ — оценки параметров сигнала (4).

3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы \mathbf{Z} , где $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d]$, запись \mathbf{U}^\dagger обозначает матрицу \mathbf{U} без первой строки, а запись \mathbf{U}_\downarrow — без последней.

4: Нахождение первых R в порядке неубывания собственных чисел λ_j матрицы \mathbf{Z} . Полученные собственные числа $\lambda_{j'}$ считаются оценками экспонент $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$, возможно с точностью до некоторой перестановки $j = S(j')$, через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$

3.1. Ранги тензоров и тензорные разложения

Для определения канонического тензорного разложения и разложения Таккера вводятся следующие определения.

Определение 3.1 (Тензорный ранг).

1. Говорят, что тензор \mathcal{A} размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ имеет тензорный ранг, равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_M,$$

где $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$, а символ \circ обозначает тензорное произведение.

2. Говорят, что тензор \mathcal{A} имеет ранг R , если он представим в виде линейной комбинации R тензоров ранга 1, и такое R минимально. Обозначение: $R = \text{rank}(\mathcal{A})$.

Замечание. 1. Представление тензора \mathcal{A} в виде линейной комбинации $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ тензоров ранга 1 называется каноническим разложением этого тензора (CPD).

2. Ранг тензора может зависеть от того, над каким полем рассматривается этот тензор: \mathbb{C} или \mathbb{R} [14].

Определение 3.2 (n -ранг тензора). n -рангом (модовым рангом) тензора \mathcal{A} называется размерность векторного пространства, порождённого n -столбцами (векторами n -го направления) этого тензора. Обозначается $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$.

Замечание. 1. В отличие от матричного случая, n -ранги тензора с количеством размеров больше 2 могут различаться.

2. В общем случае ранг тензора \mathcal{A} не равен его n -рангам, даже если они все равны между собой. Кроме того, всегда справедливо неравенство $\text{rank}_n(\mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A})$.

Определение 3.3 (n -я матрица развёртки тензора). Пусть \mathcal{A} — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$, тогда n -я матрица развёртки этого тензора (матрица сечений) — это матрица $[\mathbf{A}]_n$ (или $\mathbf{A}_{(n)}$) размера $I_n \times I_{n+1}I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$, в которой элемент тензора $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$ содержится в строке i_n и столбце с номером, равным

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[(i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

Свойство 3.1 (Связь n -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению n). n -столбцы тензора \mathcal{A} являются столбцами его n -й матрицы развёртки, и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}]_n).$$

Определение 3.4 (Произведение тензора и матрицы по направлению). Пусть \mathcal{A} — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$, \mathbf{U} — матрица размера $J_n \times I_n$ с элементами u_{ij} , тогда произведением тензора \mathcal{A} и матрицы \mathbf{U} по направлению n ($\mathcal{A} \times_n \mathbf{U}$) называется тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_M$, который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_M} u_{j_n i_n}.$$

Определение 3.5 (Разложение Таккера). Пусть тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ имеет n -ранги (R_1, R_2, \dots, R_M) . Тогда \mathcal{A} может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (5)$$

где тензор $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$ называется ядром разложения, $\mathbf{U}^{(k)} \in \mathbb{C}^{I_k \times J_k}$, $J_k \geq R_k$.

Такое представление называется разложением Таккера.

Замечание. Разложение Таккера не единственно. Частным случаем этого разложения является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD), которое и будет рассматриваться в дальнейшем в этой работе по следующим причинам:

- HOSVD имеет наибольшее среди всех тензорных разложений число свойств, схожих со свойствами матричного сингулярного разложения (SVD), применяемого в алгоритмах SSA и MSSA;
- HOSVD позволяет находить наилучшее приближение тензора тензором с фиксированными n -рангами.

3.2. HOSVD

В этом разделе приведены определение разложения HOSVD и некоторые его свойства.

Теорема 1 (Сингулярное разложение порядка M). *Любой комплекснозначный тензор \mathcal{A} размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (6)$$

в котором

1. $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)} : U_2^{(n)} : \dots : U_{I_n}^{(n)}]$ — унитарные матрицы,
2. \mathcal{Z} — комплекснозначный тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$, в котором каждое сечение $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$, полученное фиксированием индекса $i_n = \alpha$, удовлетворяет следующим свойствам.
 - а. *Полная ортогональность:* сечения $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ и $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$ ортогональны для всех возможных значений n , $\alpha, \beta : \alpha \neq \beta$:

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение.

- б. *Упорядоченность:* сечения расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \quad (7)$$

для всех $n \in \overline{1 : M}$.

Определение 3.6 (Сингулярное разложение тензора). Разложение вида (6) называется сингулярным разложением тензора \mathcal{A} порядка M или HOSVD тензора \mathcal{A} .

Определение 3.7 (Сингулярное число тензора). Обозначим $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$ и будем называть $\sigma_i^{(n)}$ i -м сингулярным числом тензора \mathcal{A} по направлению n .

Определение 3.8 (Сингулярный вектор тензора). Векторы $U_i^{(n)}$ будем называть i -м сингулярным вектором тензора \mathcal{A} по направлению n .

Замечание. Представление (6) можно переписать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \quad (8)$$

Такое представление удобно для описания тензорных алгоритмов HO-SSA и HO-MSSA.

3.3. Свойства HOSVD

Многие свойства методов SSA и MSSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность некоторых свойств SSA и MSSA со свойствами HO-SSA и HO-MSSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

Пусть \mathcal{A} — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$. Применением SVD ко всем матрицам сечений этого тензора вычисляются M матриц $\mathbf{U}^{(n)}$, составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Определим тензор \mathcal{Z} следующим образом

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 (\mathbf{U}^{(1)})^H \times_2 (\mathbf{U}^{(2)})^H \dots \times_M (\mathbf{U}^{(M)})^H,$$

Тогда исходный тензор \mathcal{A} можно представить в виде (6)

Утверждение 3.1. Процедура, описанная выше, даёт HOSVD тензора \mathcal{A} .

Из-за этой связи HOSVD с SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

Свойство 3.2 (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому направлению определяются однозначно.

2. Если сингулярные числа по направлению n различны, то сингулярные векторы по направлению n определены с точностью до умножения на коэффициент единичной нормы. Другими словами, если вектор $U_\alpha^{(n)}$ умножается на $e^{i\theta}$, то сечение $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ должно быть умножено на обратный коэффициент $e^{-i\theta}$.
3. Сингулярные векторы по направлению n , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по направлению n , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией этих векторов. Соответствующие сечения $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ должны быть пересчитаны обратным образом. Другими словами, $\mathbf{U}^{(n)}$ можно заменить на $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$, где \mathbf{Q} — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению $\mathbf{U}^{(n)}$ на наборы сингулярных векторов по направлению n , соответствующих одинаковым сингулярным значениям по направлению n . При этом тензор \mathcal{Z} должен быть заменён на $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$.

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется с точностью до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

Свойство 3.3 (Обобщение). HOSVD тензора является обобщением SVD в том смысле, что результат применения HOSVD к тензору с двумя размерами, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, с точностью до унитарных преобразований сингулярных векторов, отвечающих равным сингулярным числам, и соответствующих преобразований матрицы сингулярных значений.

Свойство 3.4 (Связь n -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ вида (6), тогда, по определению, тензор сингулярных чисел \mathcal{Z} удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех $n \in \overline{1:M}$. Обозначим r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$. Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (9)$$

Свойство 3.5 (Норма). Пусть имеется HOSVD тензора \mathcal{A} , представленное в виде (6), и пусть $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$, $n \in \overline{1:M}$. Тогда справедливо равенство

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \|\mathcal{Z}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2$$

3.4. Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера

HOSVD позволяет получать приближение произвольного тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ некоторым тензором с заданными меньшими n -рангами (R_1, R_2, \dots, R_M) .

Определение 3.9 (Ориентированная энергия). Ориентированной по направлению n энергией тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ в направлении вектора $X \in \mathbb{C}^{I_n}$ единичной нормы называют выражение

$$\text{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^H[\mathbf{A}]_n\|^2.$$

Свойство 3.6 (Оптимальность в терминах ориентированной энергии). Направления экстремальной ориентированной энергии по направлению n соответствуют сингулярным векторам по направлению n , причём значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по направлению n .

Это означает, что n -столбцы тензора \mathcal{A} содержат наибольшие вклады в направлении $U_1^{(n)}$, и на это направление приходится $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2$ энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по направлению n достигает экстремума в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной $\left(\sigma_2^{(n)}\right)^2$, и так далее.

Свойство 3.7 (Приближение). Пусть имеется HOSVD тензора \mathcal{A} , представленное в виде (6), и пусть $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$. Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ для заданных $I'_n, n \in \overline{1:M}$, то есть заменяя нулями соответствующие сечения тензора \mathcal{Z} . Тогда верно

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} \left(\sigma_{i_2}^{(2)}\right)^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2. \quad (10)$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Для тензоров эта связь принимает другой вид. Тензор, получаемый отбрасыванием наименьших сингулярных значений по направлению n будет иметь n -ранги $(I'_1, I'_2, \dots, I'_M)$, но в общем случае не будет наилучшим приближением при заданных ограничениях на n -ранги. Тем не менее, условие упорядоченности (7) подразумевает, что «энергия» \mathcal{A} в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям индексов направлений. Следовательно, если $\sigma_{I'_n}^{(n)} \gg \sigma_{I'_n+1}^{(n)}$ (например, если

$I'_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$, то меньшие сингулярные значения по измерению n не существенны), то $\hat{\mathcal{A}}$ всё ещё можно считать хорошим приближением \mathcal{A} . Ошибка ограничена выражением (10).

Одним из методов получения оптимального приближения тензора тензором малых рангов является алгоритм High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [18, 19]. При заданных тензоре \mathcal{A} и наборе n -рангов (R_1, R_2, \dots, R_M) алгоритм решает задачу минимизации

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\| \rightarrow \min$$

относительно тензора $\hat{\mathcal{A}}$ с заданными n -рангами (R_1, R_2, \dots, R_M) . Алгоритм HOOI является итерационным, в качестве начального приближения \mathcal{A}_0 обычно используется усечение с нужными рангами HOSVD тензора \mathcal{A} . Критерий остановки алгоритма на шаге k : $\|\hat{\mathcal{A}}_{k-1} - \hat{\mathcal{A}}_k\| < \varepsilon$ для некоторого заданного ε , либо $k \geq N$ для некоторого заданного N .

Свойство 3.8.

1. Алгоритм HOOI не гарантирует сходимости к глобальному минимуму выражения $\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}_k\|$.
2. На практике алгоритм HOOI обычно демонстрирует линейную скорость сходимости, но его теоретическая скорость сходимости может быть и нелинейной в зависимости от конкретных условий [20].

4. Описание метода HO-SSA

Пусть дан временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Определение 4.1 (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда \mathbf{X} с параметрами $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$ будем называть тензор \mathcal{X} размера $I \times L \times J, J = N - I - L + 2$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

Замечание. Траекторный тензор \mathcal{X} является ганкелевым [21].

Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}_{k..} = \mathcal{A}_{i_1=k}, \quad \mathcal{A}_{.k.} = \mathcal{A}_{i_2=k}, \quad \mathcal{A}_{..k} = \mathcal{A}_{i_3=k}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 2.1 сечения траекторного тензора ряда \mathbf{X} с параметрами I, L имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{..j} &= \mathcal{H}_I \left((x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+I+L-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{.l.} &= \mathcal{H}_I \left((x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+L+J-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{i..} &= \mathcal{H}_L \left((x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L+J-2}) \right). \end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд \mathbf{X} и параметры $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$. Так как при замене одного из этих параметров на $J = N - I - L + 2$ или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки (I, L, J) без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

4.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд \mathbf{X} представим в виде суммы временных рядов \mathbf{X}_k и шума \mathbf{E} :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда \mathbf{X} в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов \mathbf{X}_k . Метод HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 4.

4.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших n -рангов, заданных пользователем, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD (HOSVD-SSA). Благодаря свойству 3.7 такое приближение можно считать

Алгоритм 4 HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , m , $R : m \leq R \leq \min(I, L, N - I - L + 2)$, $\mathfrak{S}_1^{(p)}, \dots, \mathfrak{S}_m^{(p)}$:

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k^{(p)} \quad \mathfrak{S}_k^{(p)} \cap \mathfrak{S}_l^{(p)} = \emptyset, k \neq l, p \in \{1, 2, 3\}.$$

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$ — оценки рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$.

- 1: Вложение: построение траекторного тензора \mathcal{X} по параметрам I, L .
- 2: Разложение: проведение HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (11)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k^{(1)}} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k^{(2)}} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k^{(3)}} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов $\tilde{\mathbf{X}}_k$ по тензорам $\mathcal{X}^{(k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{ilj}^{(k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, l, j) \mid 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n \right\}.$$

достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом 4, поэтому опишем его, начиная с третьего шага. Описание приведено в алгоритме 5.

Второй способ использует алгоритм HOOI для приближения траекторного тензора ряда некоторым тензором меньших n -рангов, причём результатом выполнения HOOI будет HOSVD этого приближения (HOOI-SSA). Первый шаг этого алгоритма совпадает с первым шагом алгоритма 4, поэтому опишем его начиная со второго шага. Описание приведено в алгоритме 6.

Алгоритм 5 HOSVD-SSA для выделения сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : I}$, $R_2 \in \overline{1 : L}$, $R_3 \in \overline{1 : J}$.

Результат: $\hat{\mathbf{X}}$.

- 3: По параметрам R_1, R_2, R_3 и разложению траекторного тензора \mathcal{X} в виде (11), в тензоре \mathcal{Z} проводится замена сечений $\mathcal{Z}_{i_m=k}$ при $k > R_m$ на нулевые, и по полученному тензору $\hat{\mathcal{Z}}$ строится приближение траекторного тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
 - 4: Усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$, в результате чего получается оценка сигнала $\hat{\mathbf{X}}$.
-

Алгоритм 6 HOOI-SSA

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : I}$, $R_2 \in \overline{1 : L}$, $R_3 \in \overline{1 : J}$.

Результат: $\hat{\mathbf{X}}$.

- 2: Применение к построенному на первом шаге траекторному тензору \mathcal{X} метода HOOI с набором n -рангов (R_1, R_2, R_3) . Результат применения HOOI: тензор $\hat{\mathcal{X}}$, имеющий заданные n -ранги.
 - 3: Восстановление сигнала, совпадает с шагом 4 алгоритма 5.
-

4.3. Свойства HO-SSA

В этом разделе приведены некоторые свойства метода HO-MSSA и вспомогательные определения.

Теорема 2. Пусть временной ряд \mathbf{X} имеет конечный ранг d в терминах SSA (определение 2.3). Тогда для любых значений I и L таких, что

$$d \leq \min(I, L, N - I - L + 2), \quad (12)$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому направлению в HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} , построенного по этому ряду с длинами окна I и L , будет равно d .

Следствие. Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HO-SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

5. Описание метода HO-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HO-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

5.1. HO-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

Определение 5.1 (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда \mathbf{X} с длиной окна $L : 1 < L < N$ будем называть тензор \mathcal{X} размерности $L \times K \times P$, $K = N - L + 1$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, p \in \overline{1:P}.$$

Из определения следует, что сечение $\mathcal{X}_{\cdot p}$ траекторного тензора с длиной окна L является траекторной матрицей ряда $\mathbf{X}^{(p)}$, построенной по длине окна L . Пользуясь определением 2.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{\cdot p} = \mathcal{H}_L(\mathbf{X}^{(p)}).$$

Метод HO-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HOSVD-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем, n -рангов. Для получения такого приближения используется усечение HOSVD траекторного тензора. Описание метода приведено в алгоритме 7.

5.2. HO-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два P -мерных временных ряда $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ длины N и $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$. Их траекторные тензоры с длиной окна L обозначим $\hat{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{X}$ соответственно.

Метод HO-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала \mathbf{X} в виде суммы HOSVD траекторных тензоров компонент $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$. Первые два шага этого алгоритма совпадают с первыми двумя шагами алгоритма 7, поэтому описание алгоритма приводится, начиная с 3 шага. Описание метода приведено в алгоритме 8.

Алгоритм 7 HO-MSSA для выделения сигнала

Входные данные: $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$, $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : L}$, $R_2 \in \overline{1 : K}$, $R_3 \in \overline{1 : P}$, где $K = N - L + 1$.

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}$.

- 1: Построение по ряду \mathbf{X} траекторного тензора \mathcal{X} с длиной окна L .
- 2: Вычисление HOSVD \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (13)$$

- 3: Построение по параметрам R_1, R_2, R_3 усечения HOSVD

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

- 4: Восстановление многомерного ряда $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(P)})$ по тензору $\tilde{\mathcal{X}}$, которое происходит следующим образом: ряды $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$ получаются усреднением сечений $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$ вдоль побочных диагоналей $l + k = \text{const}$.
-

Алгоритм 8 HO-MSSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, $K = N - L + 1$, $\hat{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \overline{1 : \min(L, K)} : \hat{\mathfrak{S}} \cap \tilde{\mathfrak{S}} = \emptyset$, $\hat{\mathfrak{P}}, \tilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : P}$

Результат: $\hat{\hat{\mathbf{X}}}, \hat{\tilde{\mathbf{X}}}$ — оценки $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ соответственно.

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \hat{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \hat{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \hat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \tilde{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \tilde{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \tilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \end{aligned}$$

- 4: Восстановление рядов $\hat{\hat{\mathbf{X}}}$ и $\hat{\tilde{\mathbf{X}}}$ по тензорам $\hat{\mathcal{X}}$ и $\tilde{\mathcal{X}}$ соответственно путём применения к каждому из этих тензоров шага 4 алгоритма 7.
-

5.3. Свойства HO-MSSA

В этом разделе приведены некоторые свойства метода HO-MSSA и вспомогательные определения.

Теорема 3. Пусть \mathbf{X} — P -мерный временной ряд длины N , тогда справедливы следу-

ющие утверждения.

1. \mathbf{X} имеет ранг d в терминах теории MSSA (определение 2.6) тогда и только тогда, когда для траекторного тензора \mathcal{X} , построенного по любой длине окна $L < N$ такой, что $d \leq \min(L, K)$ выполняется

$$\text{rank}_1(\mathcal{X}) = \text{rank}_2(\mathcal{X}) = d.$$

2. 3-ранг \mathcal{X} равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.

Определение 5.2 (3-ранг многомерного ряда). 3-рангом многомерного ряда будем называть 3-ранг траекторного тензора этого ряда.

Замечание. Определение корректно, так как по построению траекторного тензора набор 3-столбцов этого тензора не зависит от выбора длины окна L , поэтому и 3-ранг траекторного тензора не зависит от выбора длины окна.

Утверждение 5.1. (О симметричности относительно замены длины окна) Пусть дан P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N и выбрана некоторая длина окна L , \mathcal{X} — траекторный тензор этого ряда, построенный по длине окна L , а \mathcal{Y} — по длине окна $K = N - L + 1$, и пусть R_1, R_2, R_3 — параметры, выбранные в третьем шаге алгоритма HO-MSSA, соответствующие \mathcal{X} , а R'_1, R'_2, R'_3 — соответствующие \mathcal{Y} . Тогда если $R_1 = R'_1, R_2 = R'_2, R_3 = R'_3$, то оценки сигнала $\tilde{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{Y}}$, построенные по \mathcal{X} и \mathcal{Y} соответственно, совпадут.

6. Описание метода HO-ESPRIT

Пусть \mathbf{X} — одномерный ($P = 1$) или многомерный ($P > 1$) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\bar{L} = \begin{cases} (I, L), & P = 1, \\ L, & P > 1, \end{cases}$$

а \mathcal{X} — траекторный тензор ряда \mathbf{X} , построенный с длиной (длинами) окна из \bar{L} . Также определим область допустимых параметров \bar{L} :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(I, L) : 1 < I, L < N, I + L < N + 1\}, & P = 1, \\ \{L : 1 < L < N\}, & P > 1. \end{cases}$$

Описание метода HO-ESPRIT приведено в алгоритме 9. Обоснование метода можно найти в работе [4].

Алгоритм 9 HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

Входные данные: $\mathbf{X}, \bar{L} \in \mathcal{D}$, $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$, $d \in \{1, 2, 3\}$ — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров.

Результат: $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$ — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Построение траекторного тензора $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ по ряду \mathbf{X} с параметрами из \bar{L} . Если $P = 1$, то $I_1 = I$, $I_2 = L$, $I_3 = N - I - L + 2$, а если $P > 1$, то $I_1 = L$, $I_2 = N - L + 1$, $I_3 = P$.
- 2: Вычисление HOSVD \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=1}^{I_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы $\mathbf{U} = [U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \dots : U_{I_D}^{(d)}]$.

- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\uparrow = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы \mathbf{Z} , где запись \mathbf{U}^\uparrow обозначает матрицу \mathbf{U} без первой строки, а запись \mathbf{U}_\downarrow — без последней.

- 4: Нахождение первых R в порядке неубывания собственных чисел λ_j матрицы \mathbf{Z} . Полученные собственные числа $\lambda_{j'}$ считаются оценками экспонент $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$, возможно с точностью до некоторой перестановки $j = S(j')$, через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$

7. Численные сравнения в задаче оценки параметров

В этом разделе приведены сравнения методов ESPRIT и HO-ESPRIT по точности оценки параметров сигнала вида (4) в случае одномерных и многомерных рядов. В качестве показателя точности оценки была выбрана метрика относительного средне-

квадратичного отклонения (RRMSE)

$$\text{RRMSE} = \frac{100}{|\gamma|} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\gamma - \hat{\gamma}_j|^2} (\%), \quad (14)$$

где m — количество реализаций шума, γ — оцениваемый параметр, $\hat{\gamma}_j$ — оценка параметра γ по ряду с j -й реализацией шума. Такой выбор был сделан для того, чтобы в дальнейшем сравнить результаты с результатами работы [4], в которой использовалась именно такая метрика для определения точности оценивания параметров.

7.1. Одномерный случай

Пусть $P = 1$ и $R = 2$, то есть одномерный временной ряд $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{24})$ состоит из элементов вида

$$x_n = e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n, \quad (15)$$

где $n \in \overline{0 : 24}$, $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, а ξ_n и η_n — последовательность независимых случайных величин из распределения $N(0, \sigma^2/2)$, $\sigma = 0.04$. Случайные величины ζ_n являются независимыми и их распределение называется кругосимметричным комплексным нормальным распределением (circularly-symmetric complex normal distribution) [22] с дисперсией σ^2 и обозначается $\text{CN}(0, \sigma^2)$.

Пусть $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.22$. Ниже приведены рассматриваемые варианты степеней затухания.

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
2. $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.01$.
3. $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02$.
4. $\alpha_1 = -0.01$, $\alpha_2 = -0.02$.

Такие параметры были выбраны, так как в статье [4] рассматривалась модель с такими частотами и степенями затухания из варианта 4. Во всех случаях ранг сигнала с такими параметрами будет равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы \mathbf{Z} из алгоритмов 3 и 9. В этом разделе RRMSE считалось по 500 реализациям шума.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок частот и степеней затухания, полученных методом HO-ESPRIT, от размеров траекторного тензора (ось x) и выбора направления оценивания (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на рисунках изображены наименьшие по выбору длины окна значения RRMSE соответствующего параметра, полученные методом ESPRIT.

Рисунки 1 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 2, 3 и 4 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

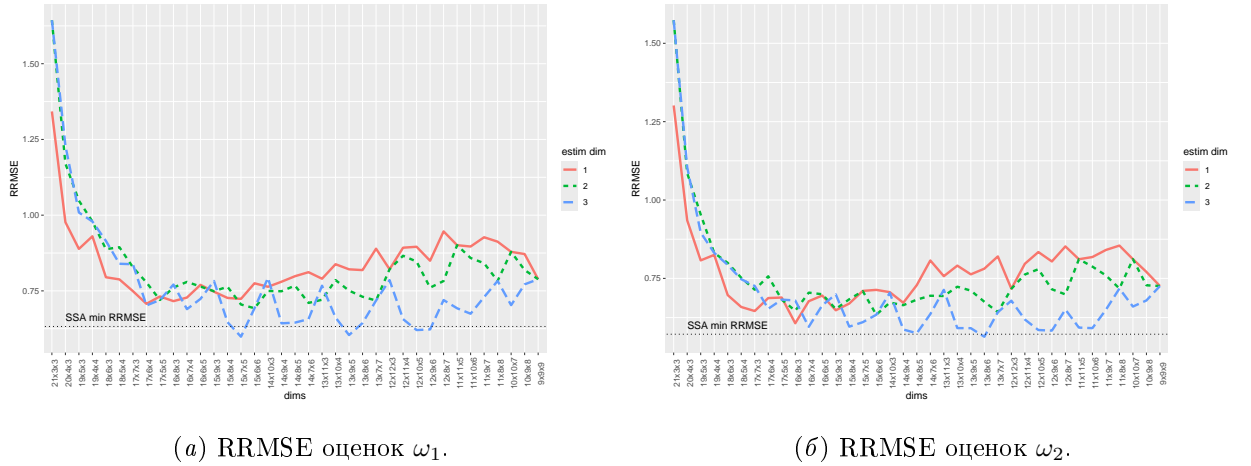


Рис. 1. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 1.

Выводы из численных сравнений В случае одномерных сигналов оценки методом HO-ESPRIT при оптимальном подборе параметров оказались не менее точными, чем оптимальные оценки стандартным методом ESPRIT. Кроме того, в некоторых ситуациях оптимальные оценки методом HO-ESPRIT оказываются точнее оптимальных оценок методом ESPRIT. Это соответствует результатам работы [4], в которой методы сравнивались только при оптимальных размерах длины окна. Однако множество длин окна в алгоритме HO-ESPRIT, при которых точность оценок параметров сигнала близка к оптимальной, очень мало, и нам пока неизвестны способы их выбора кроме перебора. С другой стороны, для стандартного алгоритма ESPRIT требуется меньший набор параметров, а множество длин окна, при которых точность оценки близка к оптимальной, довольно велико. С учётом этих замечаний, и того, что разница в точности оптимальных параметров между методами невелика, использование метода HO-ESPRIT в текущем

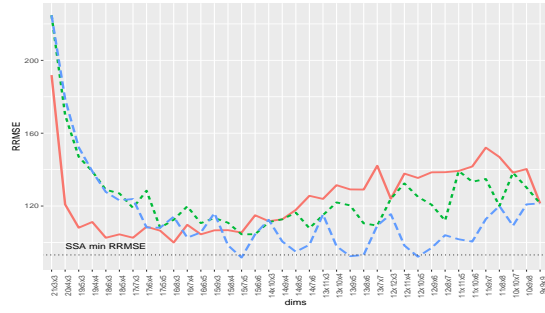
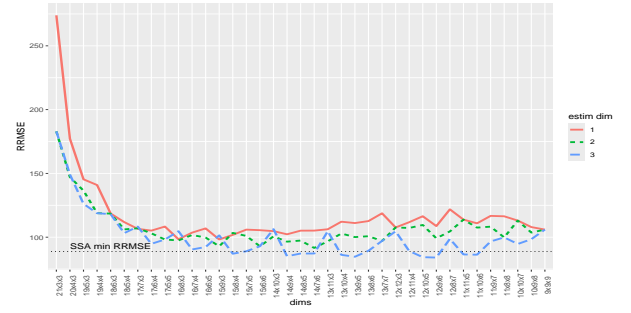
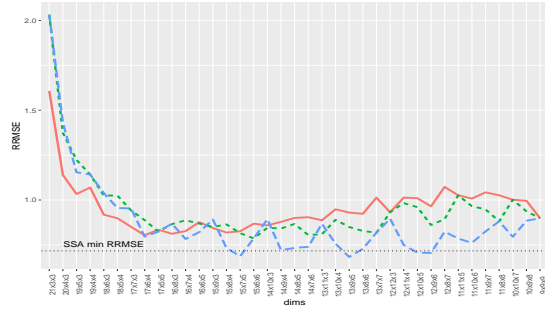
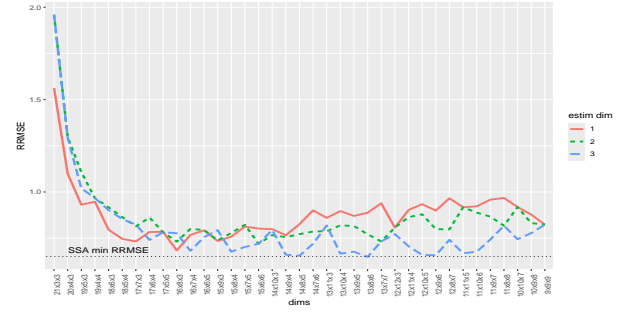
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(e) RRMSE оценок ω_1 .(e) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 2. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 2.

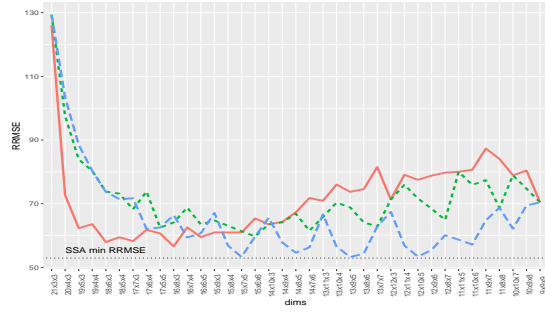
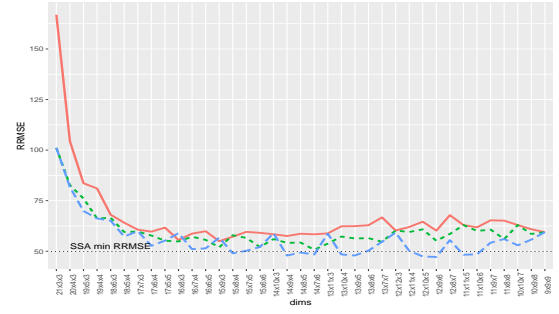
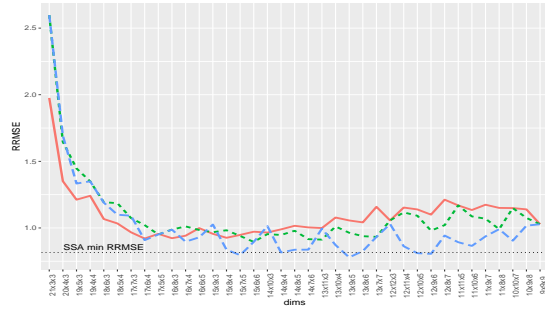
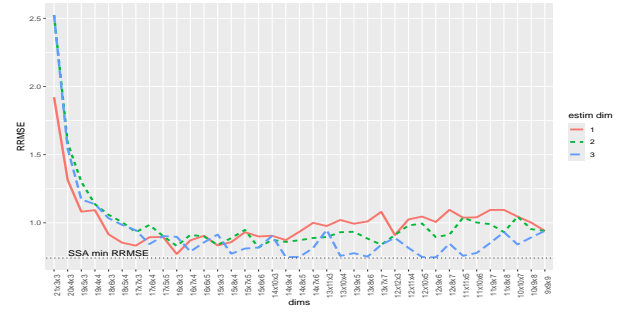
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(e) RRMSE оценок ω_1 .(e) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 3. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 3.

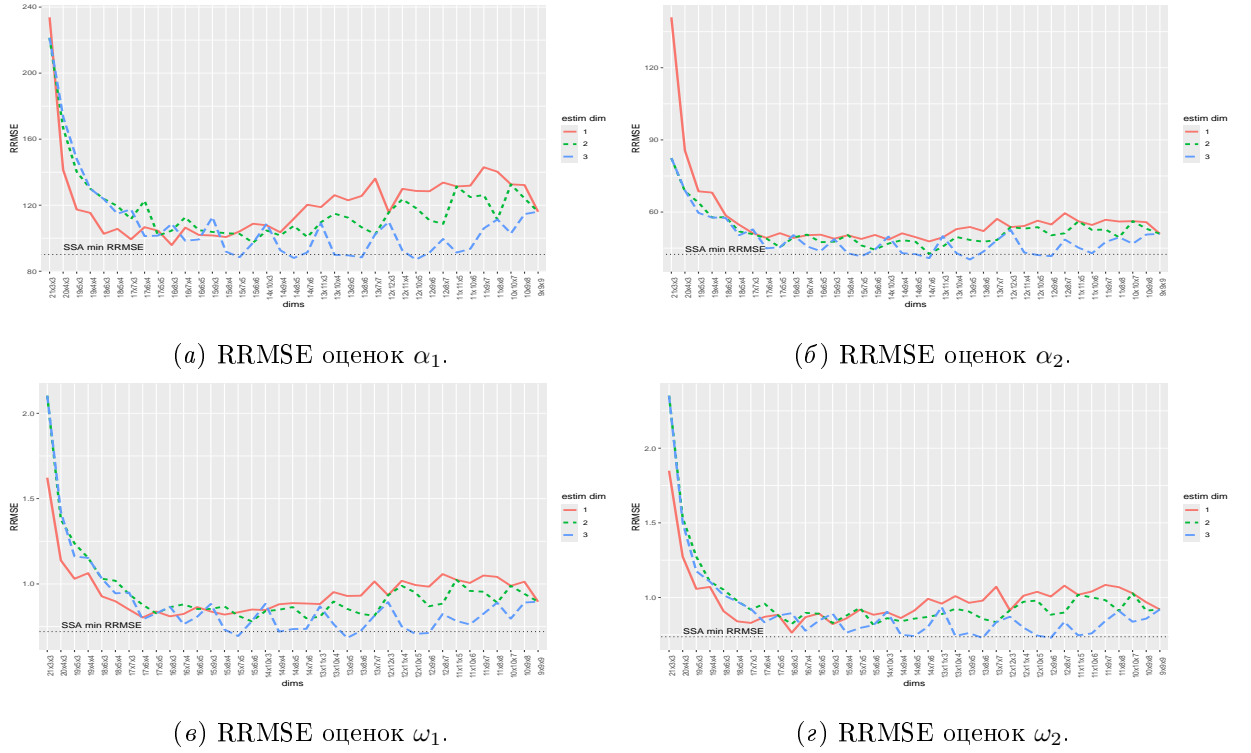


Рис. 4. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 4.

виде не обосновано.

Стоит заметить, что во всех случаях выбор номера направления d из алгоритма 9, соответствующего направлению наименьшего размера траекторного тензора, давал наиболее точные результаты.

7.2. Многомерный случай

Пусть $P = 12$ и $R = 2$, то есть многомерный временной ряд

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(12)}), \\ \mathbf{X}^{(p)} &= (x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{24}^{(p)}) \end{aligned}$$

состоит из элементов вида

$$x_n^{(p)} = a_1^{(p)} e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + a_2^{(p)} e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n^{(p)},$$

где $n \in \overline{0 : 24}$, а $\zeta_n^{(p)}$ — независимые случайные величины из распределения $\text{CN}(0, \sigma^2)$, $\sigma = 0.2$. Значения частот и варианты степеней затухания были взяты такими же, как в одномерном случае в разделе 7.1. В качестве амплитуд $a_k^{(p)}$ были взяты независимые реализации случайных величин из распределения $\text{CN}(0, 1)$, их приближительные значения

приведены в выражении (16).

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(a_1) &\approx (0, -0.1, -1, -0.4, 0.2, 0.3, -0.9, -0.3, -1.2, -0.2, 0.8, 0.5)^T, \\
 \text{Im}(a_1) &\approx (-0.9, -0.3, -0.5, -0.6, -0.1, -0.2, -1.3, -0.1, 0.7, 0.1, -1, -1)^T, \\
 \text{Re}(a_2) &\approx (-0.2, 0.7, 0.5, 0.1, -0.7, -0.1, 0.7, 0.3, -0.4, -1.5, -0.5, -1.5)^T, \\
 \text{Im}(a_2) &\approx (0.3, -1.2, -0.2, -0.5, 0.8, -0.5, -0.6, 0.6, -0.7, 0, 0.2, -0.2)^T.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Как и в одномерном случае, ранг сигналов с каждым набором параметров равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы \mathbf{Z} из алгоритмов 3 и 9.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок параметров, полученных методами ESPRIT и HO-ESPRIT, от значения длины окна L .

Рисунки 5 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 6, 7 и 8 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

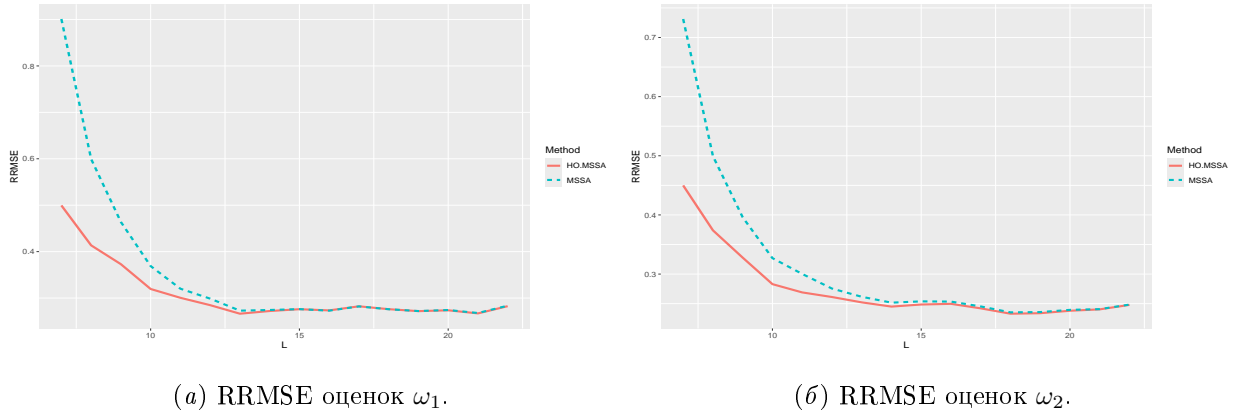


Рис. 5. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 1.

Выводы из численных сравнений Метод HO-ESPRIT оказался точнее стандартного метода ESPRIT в задаче оценки параметров многомерного ряда для любого выбора параметров длины окна во всех случаях, не считая двух: оценки методом HO-ESPRIT параметра α_1 оказались менее точными, чем методом ESPRIT, в случаях 2 и 3.

8. Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA

В этом разделе рассматривается влияние выбора направлений усечения в методе HO-SSA на точность в задаче выделения сигнала. Под направлениями усечения имеют-

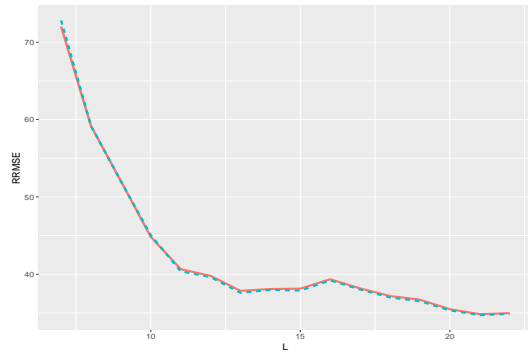
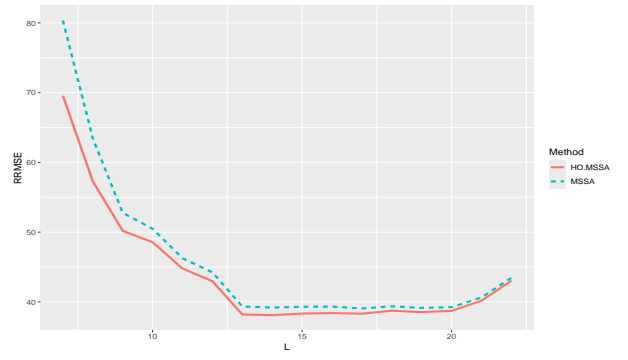
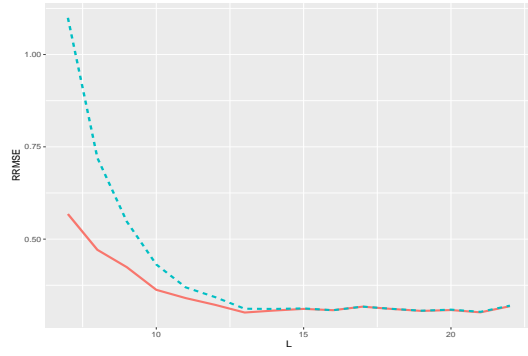
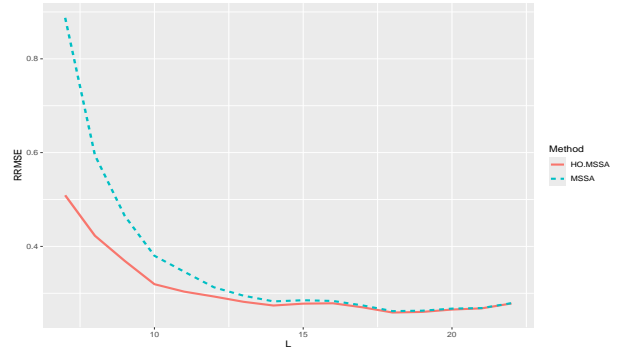
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(с) RRMSE оценок ω_1 .(г) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 6. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 2.

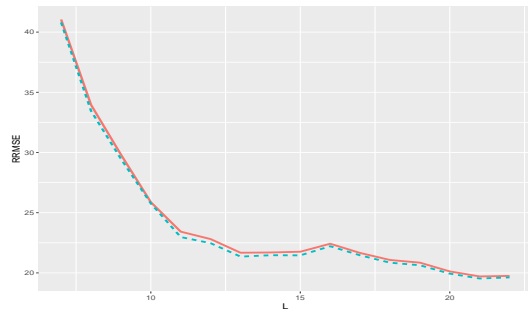
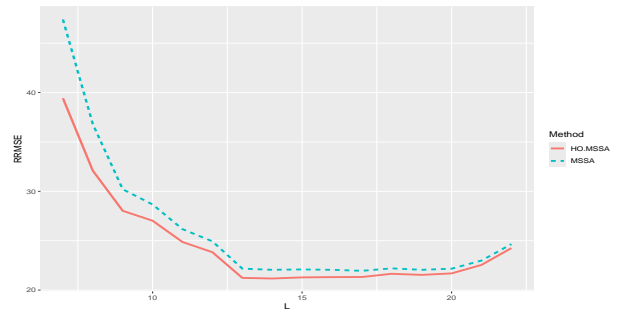
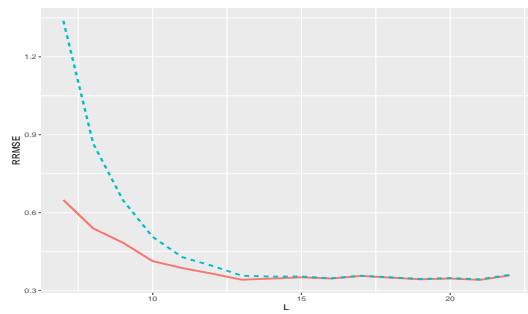
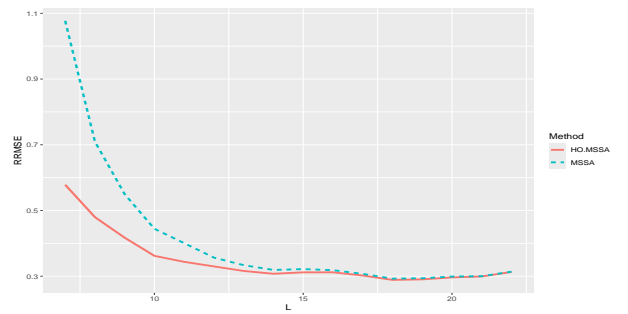
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(с) RRMSE оценок ω_1 .(г) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 7. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 3.

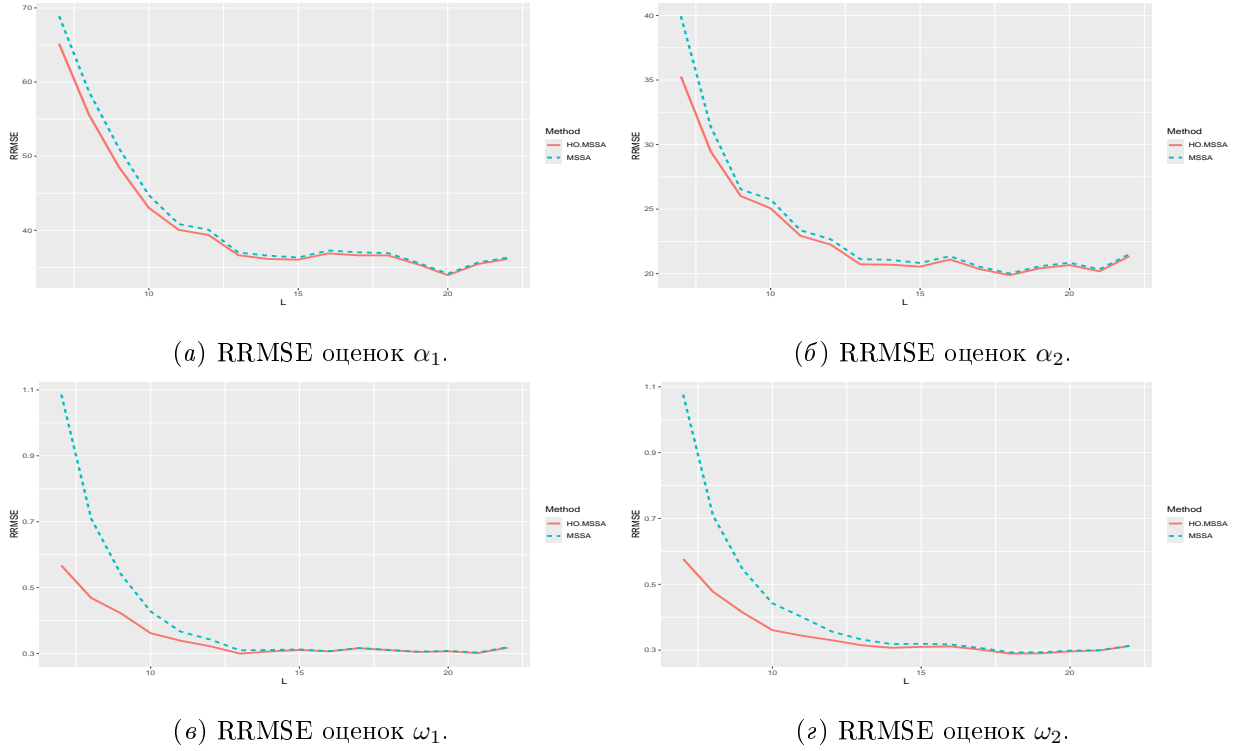


Рис. 8. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 4.

ся в виду номера направлений траекторного тензора, к которым применялось усечение. Например, если траекторный тензор имеет размеры (I, L, J) , а направление усечения равно $\overline{1:2}$, то это соответствует выбору $(R_1, R_2, R_3) = (r, r, J)$ в алгоритмах 5 и 6, где r — ранг сигнала.

Пусть временной ряд \mathbf{X} имеет вид

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

$$x_n = s_n + \varepsilon_n, \quad n \in \overline{1:N},$$

где $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ — сигнал, $\mathbf{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ — шум. Точность выделения сигнала будет оцениваться с помощью среднеквадратичного отклонения (RMSE) оценённого сигнала от исходного. В данной работе RMSE высчитывается по следующей формуле

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}_i)}, \quad \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |s_j - \tilde{s}_j|^2,$$

где m — количество реализаций шума, $\tilde{\mathbf{s}}_i$ — оценка сигнала, восстановленная по ряду с i -й реализацией шума.

8.1. Выделение вещественного сигнала

Пусть $N = 71$ и временной ряд состоит из элементов вида

$$x_n = 30 \cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n, \quad (17)$$

где ε_n — независимые случайные величины из распределения $N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 25$. Во всех алгоритмах для восстановления бралось количество компонент разложения равное рангу сигнала, который в данном случае равен 2. В таблице 1 приведены значения RMSE оценки сигнала, восстановленного методом SSA при различных выборах длины окна. RMSE здесь и далее в этом разделе высчитывается по $m = 500$ реализациям шума. Кро-

Таблица 1. SSA: RMSE оценки сигнала (17).

L	12	24	30	36
RMSE	1.82	1.42	1.40	1.42

ме того, здесь и далее жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения RMSE, причём отличие этих минимальных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

В таблице 2 представлены значения RMSE оценок сигнала, восстановленного методом HOOI-SSA при выборе различных направлений усечения. Метод HOSVD-SSA даёт менее точные схожие результаты. Параметры в таблице 2 представлены в порядке уменьшения третьего размера траекторного тензора, причём выполняется неравенство $I \leq J \leq L$. Большие параметры длин окна не рассматриваются, так как построенные по ним траекторные матрицы и траекторные тензоры будут совпадать с рассмотренными с точностью до перестановки размерностей.

Таблица 2. HOOI-SSA: RMSE оценки сигнала (17) при разных направлениях усечения.

$I \times L$ Направления усечения	12×49	12×37	7×36	12×31	19×30	24×25
3	1.85	1.52	1.48	1.54	1.57	1.59
2, 3	1.63	1.53	1.49	1.56	1.62	1.65
$\overline{1 : 3}$	1.63	1.53	1.49	1.56	1.62	1.65

Из таблицы 2 видно, что усечение только по направлению наибольшей размерности даёт результаты точнее, чем усечение по всем направлениям, при почти любом выборе длин окна. Но этого увеличения точности недостаточно, чтобы алгоритм HO-SSA был точнее базового SSA.

8.2. Выделение комплексного сигнала

Рассмотрим задачу выделения комплекснозначного сигнала из ряда X с элементами вида (15) с частотами $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.22$ и со степенями затухания $\alpha_1 = -0.01$, $\alpha_2 = -0.02$.

На рисунке 9 представлен график зависимости RMSE от размеров траекторного тензора (ось x) и направлений усечения (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на графике изображено минимальное по выбору длины окна значение RMSE для сигналов, восстановленных методом SSA. Как и в случае вещественного сигнала, метод

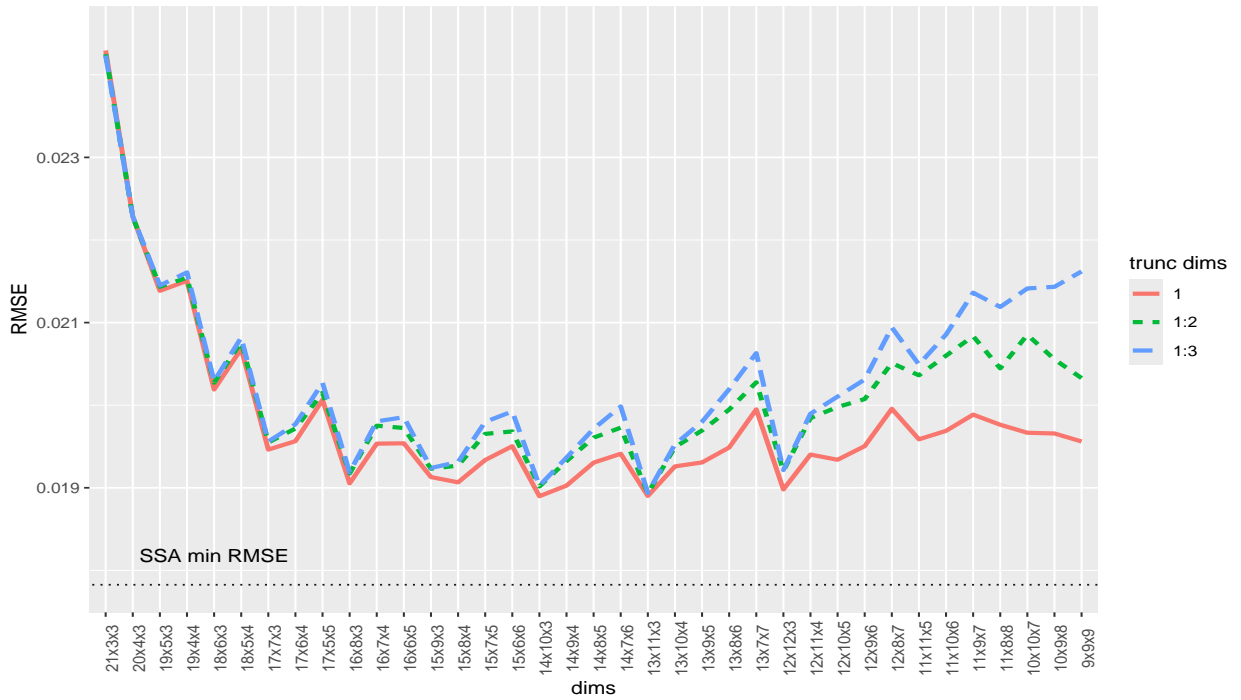


Рис. 9. Зависимость RMSE восстановленного сигнала от размеров траекторного тензора и направлений усечений.

HO-SSA оказывается существенно менее точным при любом выборе длин окна и направлений усечения, чем метод SSA. Также наиболее точные оценки сигнала получаются при выборе в качестве направления усечения направления минимальной размерности траекторного тензора ряда.

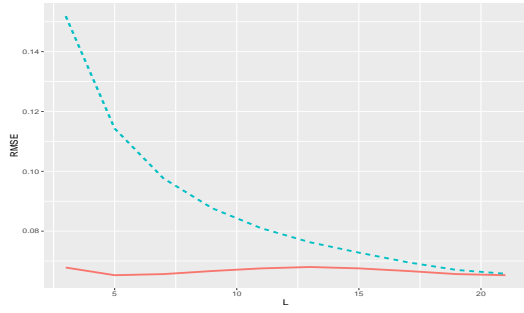
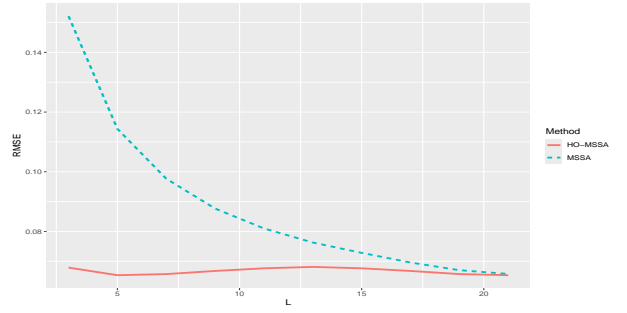
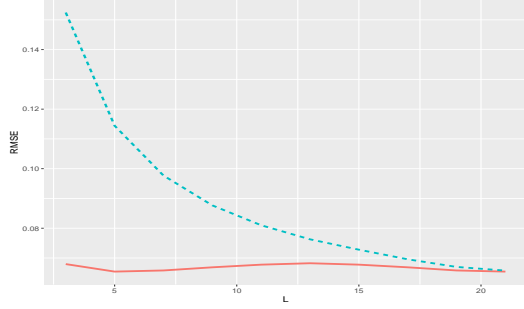
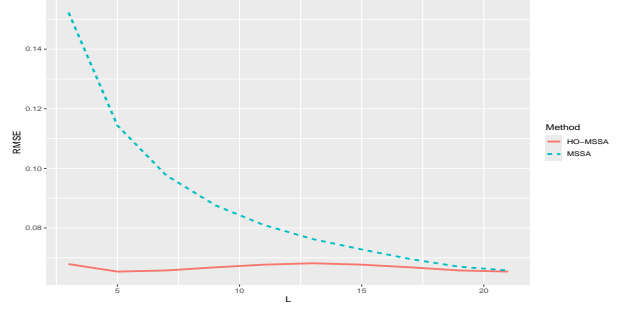
(a) α_1 и α_2 из случая 1.(б) α_1 и α_2 из случая 2.(в) α_1 и α_2 из случая 3.(г) α_1 и α_2 из случая 4.

Рис. 10. Зависимость RMSE оценок многомерного сигнала от длины окна.

Выводы численных сравнений В отличие от задачи оценки параметров, где при выборе оптимальных длин окна тензорные методы могут давать оценки точнее, чем базовый ESPRIT, в задаче выделения сигнала при любом выборе длин окна точность восстановленных тензорными методами оценок сигналов всегда существенно меньше точности оценок, восстановленных базовым SSA.

9. Численные сравнения в задаче выделения многомерных комплексных сигналов

Пусть многомерный временной ряд X имеет тот же вид, что и ряд, рассматриваемый в разделе 7.2. Рассмотрим задачу выделения сигнала из этого временного ряда.

Ранг этого сигнала в терминах MSSA при всех рассматриваемых вариантах параметров α_1 и α_2 равен 2, поэтому параметр R в алгоритме MSSA и параметры R_1 и R_2 в алгоритме 7 были взяты равными 2. 3-ранг этого сигнала в терминах HO-MSSA равен 2, поэтому параметр R_3 в алгоритме 7 был взят равным 2.

На рисунках 10 приведены графики зависимости RMSE оценок сигнала методами MSSA и HO-MSSA от выбора длины окна L для различных параметров степеней

затухания α_1 и α_2 .

Из графиков видно, что во всех случаях метод HO-MSSA выделяет комплексный сигнал более точно, чем метод MSSA, причём преимущество велико для большинства значений длины окна L . Однако RMSE обоих методов при оптимальном выборе L довольно близки. Этот результат совпадает с результатами численного сравнения методов MSSA и HO-MSSA в задаче выделения вещественных сигналов.

10. Заключение

TODO

Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Kouchaki S., Sanei S. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
3. Improved Tensor-Based Singular Spectrum Analysis Based on Single Channel Blind Source Separation Algorithm and Its Application to Fault Diagnosis / Yang D., Yi C., Xu Z., Zhang Y., Ge M., and Liu C. // Applied Sciences. — 2017. — Vol. 7, no. 4.
4. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
5. Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.
6. Harshman R.A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
7. Carroll J.D., Chang J.-J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35, no. 3. — P. 283–319.
8. Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. — 1966. — Vol. 31, no. 3. — P. 279–311.
9. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
10. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin Heidelberg, 2020.
11. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
12. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage /

- Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
13. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
 14. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Rev. — 2009. — Vol. 51, no. 3. — P. 455–500.
 15. Savostyanov D. V., Tyrtysnikov E.E. Approximate multiplication of tensor matrices based on the individual filtering of factors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49, no. 10. — P. 1662–1677.
 16. Kazeev V. A., Tyrtysnikov E.E. Structure of the Hessian matrix and an economical implementation of Newton’s method in the problem of canonical approximation of tensors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, no. 6. — P. 927–945.
 17. Осинский А.И. Оценки аппроксимации тензорных поездов по норме Чебышёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 211–216.
 18. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. On the Best Rank-1 and Rank- (R_1, R_2, \dots, R_N) Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
 19. Sheehan B., Saad Y. Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Relation to PCA and GLRAM // Proceedings of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining. — Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2007.
 20. Eldén L., Savas B. A Newton–Grassmann Method for Computing the Best Multilinear Rank- (r_1, r_2, r_3) Approximation of a Tensor // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 31, no. 2. — P. 248–271.
 21. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.
 22. Tse David, Viswanath Pramod. Fundamentals of Wireless Communication. — Cambridge University Press, 2005.