Пусть элементы одномерного временного ряда X длины N имеют вид

$$x_n = \sum_{i=1}^{M} a_i e^{-\alpha_i n} \cos(2\pi n \omega_i + \varphi_i),$$

где $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\omega_i \in (0, 1/2]$, $\varphi_i \in [0, 2\pi)$.

Теорема 1. *В условиях выше алгоритм ESPRIT способен точно оценить параметры ω_i при отсутствии шума тогда и только тогда, когда $\omega_i \neq \omega_j$ $\forall i \neq j$ и $\min(L, K) > \operatorname{rank}(\mathsf{X})$ [?].*

Замечание 1. Условия предыдущей теоремы равносильны тому, что в пространстве подрядов X длины L существует базис из векторов вида

$$\left\{ \left(e^{-\alpha} \cos(2\pi n\omega)\right)_{n=1}^{L}, \, \omega \in \Omega, \, \alpha \in A \right\},$$
$$\left\{ \left(e^{-\alpha} \sin(2\pi n\omega)\right)_{n=1}^{L}, \, \omega \in \Omega \setminus \{1/2\}, \, \alpha \in A \right\},$$

где Ω и A — множества всех частот ω_i и степеней затухания α_i соответственно, присутствующих в ряде.

Рассмотрим преобразование исходного одномерного ряда X в многомерный ряд X_D, в котором i-й элемент ряда $\mathsf{X}_D^{(d)}$ выбирается как $x_n^{(d)} = x_{(n-1)D+d}$. То есть ряд с номером d строится выбором каждой D-й точки исходного ряда, начиная с элемента x_d и имеет длину $N_D = \lfloor N/D \rfloor$. Это преобразование будем назвать Dstack. Визуализация представлена на рисунке 1.

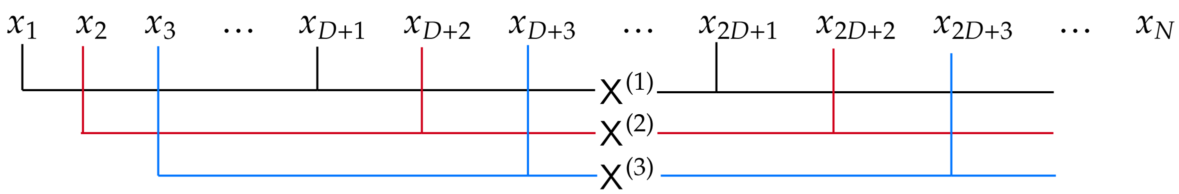

Рис. 1: Визуализация Dstack преобразования одномерного ряда в многомерный.

Теорема 2. *Рассмотрим алгоритмы ESPRIT и HO-ESPRIT для многомерных рядов с выбором длины окна L, применённые к результату преобразования Dstack одномерного ряда X с параметром D. Тогда между частотами ω в исходном ряде и оценками $\widetilde{\omega}$ частот преобразованного ряда существует взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда*

1. $\omega_i \neq \omega_j$ $\forall i \neq j$,
2. $\min(L, N_D - L + 1) > \operatorname{rank}(\mathsf{X})$
3. $$\max_{\omega \in \Omega} \omega \leqslant \frac{1}{2D},$$

причём это соответствие задаётся выражением

$$\omega = \frac{|\widetilde{\omega}|}{D}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что указанные условия равносильны тому, что в пространстве подрядов $\mathsf{X}_D^{(d)}$ длины L существует базис из векторов вида

$$\left\{\left(e^{-\alpha n}\cos(2\pi nD\omega)\right)_{n=1}^{L},\, \omega \in \Omega,\, \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$
$$\left\{\left(e^{-\alpha n}\sin(2\pi nD\omega)\right)_{n=1}^{L},\, \omega \in \Omega \setminus \{1/2\},\, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Элементы ряда $\mathsf{X}_D^{(d)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} x_n^{(d)} &= \sum_{i=1}^{M} a_i e^{-\alpha_i((n-1)D+d)} \cos(2\pi((n-1)D+d)\omega_i + \varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{M} a_i e^{-\alpha_i(d-D)} e^{-\alpha_i nD} \cos(2\pi nD\omega_i + \omega_i(d-D) + \varphi_i). \end{aligned}$$

Тогда существование искомого базиса равносильно тому, что длина L каждого подряда больше размерности этого базиса, то есть больше $\operatorname{rank}(\mathsf{X})$, и количество $K = N_D - L + 1$ таких подрядов тоже больше $\operatorname{rank}(\mathsf{X})$. $\square$

Следствие. Из доказательства следует, что всегда существует взаимно однозначное соответствие между степенями затухания α исходного ряда и оценками степеней затухания $\widetilde{\alpha}$ методами ESPRIT и HO-ESPRIT после применения преобразования Dstack, и это соответствие выражается как $\alpha = \widetilde{\alpha}/D$.

Следствие. Так как в пространствах подрядов каждого ряда $\mathsf{X}_D^{(d)}$ существует нужный базис, то в методе HO-ESPRIT выбор параметра $R_3 < \operatorname{rank}_3(\mathcal{X}_D)$, где $\mathcal{X}$ — траекторный тензор X_D, не даёт смещения в оценке параметров. Это отличительная особенность задачи оценки параметров, в задаче выделения сигнала выбор $R_3 < \operatorname{rank}_3(\mathcal{X})$ даёт смещение всегда.