

Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Учебная практика 4 (научно-исследовательская работа) (семестр 8)

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА»

Выполнил:

Хромов Никита Андреевич

24.М22-мм

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., доцент

Голяндина Н. Э.

Санкт-Петербург

2024

# Оглавление

1.	Введение . . . . .	3
2.	Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT . . . . .	4
2.1.	SSA . . . . .	4
2.2.	MSSA . . . . .	7
2.3.	ESPRIT . . . . .	8
3.	Основы теории тензорных разложений . . . . .	9
3.1.	Ранги тензоров и тензорные разложения . . . . .	10
3.2.	HOSVD . . . . .	12
3.3.	Свойства HOSVD . . . . .	13
3.4.	Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера . . . . .	15
4.	Описание метода HO-SSA . . . . .	16
4.1.	HO-SSA для разделения компонент сигнала . . . . .	17
4.2.	HO-SSA для выделения сигнала из ряда . . . . .	17
5.	Описание метода HOSVD-MSSA . . . . .	19
5.1.	HOSVD-MSSA для выделения сигнала . . . . .	19
5.2.	HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала . . . . .	20
6.	Описание метода HO-ESPRIT . . . . .	21
7.	Численные сравнения в задаче оценки параметров . . . . .	22
7.1.	Одномерный случай . . . . .	23
7.2.	Многомерный случай . . . . .	26
8.	Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA . . . . .	29
8.1.	Выделение вещественного сигнала . . . . .	30
8.2.	Выделение комплексного сигнала . . . . .	31
9.	Заключение . . . . .	33
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>34</b>

## 1. Введение

TODO

## 2. Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

### 2.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 2.1** (Оператор вложения). Оператором вложения  $\mathcal{H}_L$  с длиной окна  $L$  будем называть отображение, переводящее временной ряд  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $N \geq L$ , в ганкелеву матрицу  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $K = N - L + 1$ , такую, что  $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$ . Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

**Определение 2.2** (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L < N$  называют матрицу  $\mathbf{X}$ , полученную применением оператора вложения  $\mathcal{H}_L$ , к ряду  $\mathbf{X}$ .

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов  $\mathbf{X}_k$ . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ . Первые два шага в алгоритме 2 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

**Определение 2.3** (SSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется SSA-рангом временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq (N + 1)/2$  и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

---

**Алгоритм 1** SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(L, N-L+1)$ ,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  по длине окна  $L$ .
- 2: Разложение: проведение SVD траекторной матрицы  $\mathbf{X}$ , получение её представления в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d \leq \min(L, N-L+1).$$

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по матрицам  $\mathbf{X}_k$  посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N-L+1, i+j-1 = n \right\}.$$


---

**Алгоритм 2** SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N-L+1)$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$  — оценка сигнала  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ .

- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление ряда  $\tilde{\mathbf{X}}$  по матрице  $\tilde{\mathbf{X}}$  посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ .
- 

*Замечание.* В качестве параметра  $R$  в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

**Пример 2.1.** Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-

ранги.

- Ранг полиномиального ряда  $x_n = Q_d(n)$ , где  $Q_d$  — многочлен степени  $d$ , равен  $d+1$ .

- Ранг экспоненциального ряда  $x_n = Ce^{\alpha n}$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$  и  $C \neq 0$ , равен 1.

- Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^M C_j e^{\alpha_j n},$$

где  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  и  $C_j \neq 0$  при всех  $j$ , равен количеству уникальных значений  $\alpha_j$ .

- Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где  $C \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\omega \in [0, 1/2]$ , равен  $r(\omega)$ , где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

- Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^M Ce^{\alpha_j n} \cos(2\pi n\omega_j + \psi_j)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i, \alpha_i)$ , представленных в данном временном ряду.

**Определение 2.4** (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  и  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$  называют слабо  $L$ -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)},$
2.  $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 2.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

## 2.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [2, 3, 4].

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left( x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

**Определение 2.5** (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  — траекторные матрицы рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  соответственно, построенные по длине окна  $L$ . Траекторной матрицей многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  называется матрица  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$ ,  $K = N - L + 1$ , построенная соединением матриц  $\mathbf{X}_p$  по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P].$$

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

**Определение 2.6** (MSSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется MSSA-рангом  $P$ -мерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq P(N + 1)/(P + 1)$ , и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, P(N - L + 1))$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание.* Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

**Пример 2.2.** Рассмотрим  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  с элементами вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{R(p)} a_i^{(p)} e^{-\alpha_i^{(p)} n} \cos \left( 2\pi \omega_i^{(p)} n + \varphi_i^{(p)} \right). \quad (2)$$

MSSA-ранг такого ряда равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad (3)$$

где функция  $r(\omega)$  определена в уравнении (1), а  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)})$ , представленных в данном временном ряде.

*Замечание.* В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HOSVD-MSSA на многомерных сигналах вида (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры  $R(p)$ ,  $\omega_i^{(p)}$  и  $\alpha_i^{(p)}$  не зависят от номера ряда  $p$ , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [5]. Кроме того, в работе [6] также рассматривается этот частный случай модели.

**Определение 2.7** (Слабая MSSA-разделимость).  $P$ -мерные временные ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  называются слабо  $L$ -разделимыми, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P}, \\ 2. \quad & \sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}. \end{aligned}$$

**Утверждение 2.2.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

## 2.3. ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [7, 6].

Пусть элементы многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{\alpha_j n} e^{i(2\pi \omega_j n + \varphi_j^{(p)})}, \quad (4)$$



где  $i$  обозначает мнимую единицу, а параметрами модели являются амплитуды  $a_j^{(p)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , фазы  $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$ , частоты  $\omega_j \in [0, 1/2]$  и степени затухания  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ .

*Замечание.* В статье [7] приводится алгоритм ESPRIT для модели временного ряда вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R s_j(n) e^{i\omega_0 \Delta \sin \theta_j / c} a_j^{(p)}(\theta_j),$$

где оцениваемые параметры обозначены  $\theta_j$ , но в работе будет рассматриваться модель вида (4) по причине, указанной в замечании к примеру 2.2.

*Замечание.* В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi i\omega n + \varphi_n} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi_n}}{2},$$

вещественнозначный временной ряд из примера 2.2 при  $R(p) = R$ ,  $\omega_j^{(p)} = \omega_j$  и  $\alpha_j^{(p)} = \alpha_j$  является частным случаем ряда (4).

Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания  $\alpha_j$  и частот  $\omega_j$  многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4). Первые два шага в алгоритме 3 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

*Замечание.* Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма  $R$  рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

*Замечание.* Алгоритм 3 применим и для одномерных временных рядов ( $P = 1$ ).

### 3. Основы теории тензорных разложений

Под тензорами в данной работе подразумеваются  $M$ -мерные массивы. Элементы тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  обозначаются  $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$ . Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [8, 9, 10, 11]. Термины на русском языке взяты из работы [12].

---

**Алгоритм 3** ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где  $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d]$ , запись  $\mathbf{U}^\dagger$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

4: Нахождение первых  $R$  в порядке неубывания собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_{j'}$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , возможно с точностью до некоторой перестановки  $j = S(j')$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$


---

### 3.1. Ранги тензоров и тензорные разложения

Для определения канонического тензорного разложения и разложения Таккера вводятся следующие определения.

**Определение 3.1** (Тензорный ранг).

1. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  имеет тензорный ранг, равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_M,$$

где  $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$ , а символ  $\circ$  обозначает тензорное произведение.

2. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  имеет ранг  $R$ , если он представим в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, и такое  $R$  минимально. Обозначение:  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* 1. Представление тензора  $\mathcal{A}$  в виде линейной комбинации  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$  тензоров ранга 1 называется каноническим разложением этого тензора (CPD).

2. Ранг тензора может зависеть от того, над каким полем рассматривается этот тензор:  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$  [9].

**Определение 3.2** ( $n$ -ранг тензора).  $n$ -рангом (модовым рангом) тензора  $\mathcal{A}$  называется размерность векторного пространства, порождённого  $n$ -столбцами (векторами  $n$ -го направления) этого тензора. Обозначается  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* 1. В отличие от матричного случая,  $n$ -ранги тензора с количеством размеров больше 2 могут различаться.

2. В общем случае ранг тензора  $\mathcal{A}$  не равен его  $n$ -рангам, даже если они все равны между собой. Кроме того, всегда справедливо неравенство  $\text{rank}_n(\mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**Определение 3.3** ( $n$ -я матрица развёртки тензора). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , тогда  $n$ -я матрица развёртки этого тензора (матрица сечений) — это матрица  $[\mathbf{A}]_n$  (или  $\mathbf{A}_{(n)}$ ) размера  $I_n \times I_{n+1}I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$ , в которой элемент тензора  $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$  содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером, равным

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[ (i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

**Свойство 3.1** (Связь  $n$ -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению  $n$ ).  $n$ -столбцы тензора  $\mathcal{A}$  являются столбцами его  $n$ -й матрицы развёртки, и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}]_n).$$

**Определение 3.4** (Произведение тензора и матрицы по направлению). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ ,  $\mathbf{U}$  — матрица размера  $J_n \times I_n$  с элементами  $u_{ij}$ , тогда произведением тензора  $\mathcal{A}$  и матрицы  $\mathbf{U}$  по направлению  $n$  ( $\mathcal{A} \times_n \mathbf{U}$ ) называется тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_M$ , который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_M} u_{j_n i_n}.$$

**Определение 3.5** (Разложение Таккера). Пусть тензор  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  имеет  $n$ -ранги  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (5)$$

где тензор  $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$  называется ядром разложения,  $\mathbf{U}^{(k)} \in \mathbb{C}^{I_k \times J_k}$ ,  $J_k \geq R_k$ .

Такое представление называется разложением Таккера.

*Замечание.* Разложение Таккера не единственно. Частным случаем этого разложения является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD), которое и будет рассматриваться в дальнейшем в этой работе по следующим причинам:

- HOSVD имеет наибольшее среди всех тензорных разложений число свойств, схожих со свойствами матричного сингулярного разложения (SVD), применяемого в алгоритмах SSA и MSSA;
- HOSVD позволяет находить наилучшее приближение тензора тензором с фиксированными  $n$ -рангами.

### 3.2. HOSVD

В этом разделе приведены определение разложения HOSVD и некоторые его свойства.

**Теорема 1** (Сингулярное разложение порядка  $M$ ). *Любой комплекснозначный тензор  $\mathcal{A}$  размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (6)$$

в котором

1.  $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)} : U_2^{(n)} : \dots : U_{I_n}^{(n)}]$  — унитарные матрицы,
2.  $\mathcal{Z}$  — комплекснозначный тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , в котором каждое сечение  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ , полученное фиксированием индекса  $i_n = \alpha$ , удовлетворяет следующим свойствам.

- а. *Полная ортогональность:* сечения  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  и  $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$  ортогональны для всех возможных значений  $n$ ,  $\alpha, \beta : \alpha \neq \beta$ :

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение.

- б. *Упорядоченность:* сечения расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \quad (7)$$

для всех  $n \in \overline{1 : M}$ .

**Определение 3.6** (Сингулярное разложение тензора). Разложение вида (6) называется сингулярным разложением тензора  $\mathcal{A}$  порядка  $M$  или HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .

**Определение 3.7** (Сингулярное число тензора). Обозначим  $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$  и будем называть  $\sigma_i^{(n)}$   $i$ -м сингулярным числом тензора  $\mathcal{A}$  по направлению  $n$ .

**Определение 3.8** (Сингулярный вектор тензора). Векторы  $U_i^{(n)}$  будем называть  $i$ -м сингулярным вектором тензора  $\mathcal{A}$  по направлению  $n$ .

*Замечание.* Представление (6) можно переписать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \quad (8)$$

Такое представление удобно для описания тензорных алгоритмов HO-SSA и HOSVD-MSSA.

### 3.3. Свойства HOSVD

Многие свойства методов SSA и MSSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность некоторых свойств SSA и MSSA со свойствами HO-SSA и HOSVD-MSSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ . Применением SVD ко всем матрицам сечений этого тензора вычисляются  $M$  матриц  $\mathbf{U}^{(n)}$ , составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Определим тензор  $\mathcal{Z}$  следующим образом

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 (\mathbf{U}^{(1)})^H \times_2 (\mathbf{U}^{(2)})^H \dots \times_M (\mathbf{U}^{(M)})^H,$$

где верхний индекс  $H$  обозначает эрмитово сопряжение матрицы. Тогда исходный тензор  $\mathcal{A}$  можно представить в виде (6)

**Утверждение 3.1.** Процедура, описанная выше, даёт HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .

Из-за этой связи HOSVD с SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

**Свойство 3.2** (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому направлению определяются однозначно.

2. Если сингулярные числа по направлению  $n$  различны, то сингулярные векторы по направлению  $n$  определены с точностью до умножения на коэффициент единичной нормы. Другими словами, если вектор  $U_\alpha^{(n)}$  умножается на  $e^{i\theta}$ , то сечение  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должно быть умножено на обратный коэффициент  $e^{-i\theta}$ .
3. Сингулярные векторы по направлению  $n$ , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по направлению  $n$ , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией этих векторов. Соответствующие сечения  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должны быть пересчитаны обратным образом. Другими словами,  $\mathbf{U}^{(n)}$  можно заменить на  $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{Q}$  — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению  $\mathbf{U}^{(n)}$  на наборы сингулярных векторов по направлению  $n$ , соответствующих одинаковым сингулярным значениям по направлению  $n$ . При этом тензор  $\mathcal{Z}$  должен быть заменён на  $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$ .

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется с точностью до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

**Свойство 3.3** (Обобщение). HOSVD тензора является обобщением SVD в том смысле, что результат применения HOSVD к тензору с двумя размерами, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, с точностью до унитарных преобразований сингулярных векторов, отвечающих равным сингулярным числам, и соответствующих преобразований матрицы сингулярных значений.

**Свойство 3.4** (Связь  $n$ -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  вида (6), тогда, по определению, тензор сингулярных чисел  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех  $n \in \overline{1:M}$ . Обозначим  $r_n$  — наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$ . Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (9)$$

**Свойство 3.5** (Норма). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (6), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ ,  $n \in \overline{1:M}$ . Тогда справедливо равенство

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \|\mathcal{Z}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2$$

### 3.4. Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера

HOSVD позволяет получать приближение произвольного тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  некоторым тензором с заданными меньшими  $n$ -рангами  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ .

**Определение 3.9** (Ориентированная энергия). Ориентированной по направлению  $n$  энергией тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  в направлении вектора  $X \in \mathbb{C}^{I_n}$  единичной нормы называют выражение

$$\text{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^H[\mathbf{A}]_n\|^2.$$

**Свойство 3.6** (Об ориентированной энергии). Направления экстремальной ориентированной энергии по направлению  $n$  соответствуют сингулярным векторам по направлению  $n$ , причём значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по направлению  $n$ .

Это означает, что  $n$ -столбцы тензора  $\mathcal{A}$  содержат наибольшие вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ , и на это направление приходится  $(\sigma_1^{(n)})^2$  энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по направлению  $n$  достигает экстремума в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U_1^{(n)}$ , с величиной  $(\sigma_2^{(n)})^2$ , и так далее.

**Свойство 3.7** (Приближение). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (6), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ . Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших сингулярных значений  $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$  для заданных  $I'_n, n \in \overline{1:M}$ , то есть заменяя нулями соответствующие сечения тензора  $\mathcal{Z}$ . Тогда верно

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} (\sigma_{i_1}^{(1)})^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} (\sigma_{i_2}^{(2)})^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} (\sigma_{i_M}^{(M)})^2. \quad (10)$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Для тензоров эта связь принимает другой вид. Тензор, получаемый отбрасыванием наименьших сингулярных значений по направлению  $n$  будет иметь  $n$ -ранги  $(I'_1, I'_2, \dots, I'_M)$ , но в общем случае не будет наилучшим приближением при заданных ограничениях на  $n$ -ранги. Тем не менее, условие упорядоченности (7) подразумевает, что «энергия»  $\mathcal{A}$  в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям индексов направлений. Следовательно, если  $\sigma_{I'_n}^{(n)} \gg \sigma_{I'_n+1}^{(n)}$  (например, если

$I'_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ , то меньшие сингулярные значения по измерению  $n$  не существенны), то  $\hat{\mathcal{A}}$  всё ещё можно считать хорошим приближением  $\mathcal{A}$ . Ошибка ограничена выражением (10).

Одним из методов получения оптимального приближения тензора тензором малых рангов является алгоритм High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [13, 14]. При заданных тензоре  $\mathcal{A}$  и наборе  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$  алгоритм решает задачу минимизации

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\| \rightarrow \min$$

относительно тензора  $\hat{\mathcal{A}}$  с заданными  $n$ -рангами  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ . Алгоритм HOOI является итерационным, в качестве начального приближения  $\mathcal{A}_0$  обычно используется усечение с нужными рангами HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ . Критерий остановки алгоритма на шаге  $k$ :  $\|\hat{\mathcal{A}}_{k-1} - \hat{\mathcal{A}}_k\| < \varepsilon$  для некоторого заданного  $\varepsilon$ , либо  $k \geq N$  для некоторого заданного  $N$ .

### Свойство 3.8.

1. Алгоритм HOOI не гарантирует сходимости к глобальному минимуму выражения  $\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}_k\|$ .
2. На практике алгоритм HOOI обычно демонстрирует линейную скорость сходимости, но его теоретическая скорость сходимости может быть и нелинейной в зависимости от конкретных условий [15].

## 4. Описание метода HO-SSA

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 4.1** (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размера  $I \times L \times J, J = N - I - L + 2$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

*Замечание.* Траекторный тензор  $\mathcal{X}$  является ганкелевым [16].



Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}_{k..} = \mathcal{A}_{i_1=k}, \quad \mathcal{A}_{.k.} = \mathcal{A}_{i_2=k}, \quad \mathcal{A}_{..k} = \mathcal{A}_{i_3=k}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 2.1 сечения траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{..j} &= \mathcal{H}_I \left( (x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+I+L-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{.l.} &= \mathcal{H}_I \left( (x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+L+J-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{i..} &= \mathcal{H}_L \left( (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L+J-2}) \right). \end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд  $\mathbf{X}$  и параметры  $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$ . Так как при замене одного из этих параметров на  $J = N - I - L + 2$  или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки  $(I, L, J)$  без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

#### 4.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов  $\mathbf{X}_k$ . Метод HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 4.

#### 4.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших  $n$ -рангов, заданных пользователем, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD (HOSVD-SSA). Благодаря свойству 3.7 такое приближение можно считать

---

**Алгоритм 4** HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(I, L, N - I - L + 2)$ ,  $\mathfrak{S}_1^{(p)}, \dots, \mathfrak{S}_m^{(p)}$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k^{(p)} \quad \mathfrak{S}_k^{(p)} \cap \mathfrak{S}_l^{(p)} = \emptyset, k \neq l, p \in \{1, 2, 3\}.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторного тензора  $\mathcal{X}$  по параметрам  $I, L$ .
- 2: Разложение: проведение HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (11)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k^{(1)}} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k^{(2)}} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k^{(3)}} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по тензорам  $\mathcal{X}^{(k)}$  посредством их усреднения вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{ilj}^{(k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, l, j) \mid 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n \right\}.$$


---

достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом 4, поэтому опишем его, начиная с третьего шага. Описание приведено в алгоритме 5.

Второй способ использует алгоритм HOOI для приближения траекторного тензора ряда некоторым тензором меньших  $n$ -рангов, причём результатом выполнения HOOI будет HOSVD этого приближения (HOOI-SSA). Первый шаг этого алгоритма совпадает с первым шагом алгоритма 4, поэтому опишем его начиная со второго шага. Описание приведено в алгоритме 6.

---

**Алгоритм 5** HOSVD-SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 3: По параметрам  $R_1, R_2, R_3$  и разложению траекторного тензора  $\mathcal{X}$  в виде (11), в тензоре  $\mathcal{Z}$  проводится замена сечений  $\mathcal{Z}_{i_m=k}$  при  $k > R_m$  на нулевые, и по полученному тензору  $\hat{\mathcal{Z}}$  строится приближение траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ .
  - 4: Усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ , в результате чего получается оценка сигнала  $\hat{\mathbf{X}}$ .
- 

---

**Алгоритм 6** HOOI-SSA

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 2: Применение к построенному на первом шаге траекторному тензору  $\mathcal{X}$  метода HOOI с набором  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, R_3)$ . Результат применения HOOI: тензор  $\hat{\mathcal{X}}$ , имеющий заданные  $n$ -ранги.
  - 3: Восстановление сигнала, совпадает с шагом 4 алгоритма 5.
- 

## 5. Описание метода HOSVD-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HOSVD-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

### 5.1. HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left( x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

**Определение 5.1** (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L : 1 < L < N$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $L \times K \times P$ ,  $K = N - L + 1$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1 : L}, k \in \overline{1 : K}, p \in \overline{1 : P}.$$

Из определения следует, что сечение  $\mathcal{X}_{..p}$  траекторного тензора с длиной окна  $L$  является траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}^{(p)}$ , построенной по длине окна  $L$ . Пользуясь определением 2.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{..p} = \mathcal{H}_L(\mathbf{X}^{(p)}).$$

Метод HOSVD-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HOSVD-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем,  $n$ -рангов. Для получения такого приближения используется усечение HOSVD траекторного тензора. Описание метода приведено в алгоритме 7.

---

**Алгоритм 7** HOSVD-MSSA для выделения сигнала

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : K}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : P}$ , где  $K = N - L + 1$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$ .

- 1: Построение по ряду  $\mathbf{X}$  траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$ .
- 2: Вычисление HOSVD  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (12)$$

- 3: Построение по параметрам  $R_1, R_2, R_3$  усечения HOSVD

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

- 4: Восстановление многомерного ряда  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(P)})$  по тензору  $\tilde{\mathcal{X}}$ , которое происходит следующим образом: ряды  $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$  получают усреднением сечений  $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$  вдоль побочных диагоналей  $l + k = \text{const}$ .
- 

## 5.2. HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два  $P$ -мерных временных ряда  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  и  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ . Их траекторные тензоры с длиной окна  $L$  обозначим  $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{X}$  соответственно.

Метод HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала  $\mathbf{X}$  в виде суммы

HOSVD траекторных тензоров компонент  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$ . Первые два шага этого алгоритма совпадают с первыми двумя шагами алгоритма 7, поэтому описание алгоритма приводится, начиная с 3 шага. Описание метода приведено в алгоритме 8.

---

**Алгоритм 8** HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $X, L : 1 < L < N, K = N - L + 1, \hat{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \overline{1 : \min(L, K)} : \hat{\mathfrak{S}} \cap \tilde{\mathfrak{S}} = \emptyset, \hat{\mathfrak{P}}, \tilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : P}$

**Результат:**  $\hat{\hat{X}}, \hat{\tilde{X}}$  — оценки  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно.

3: Группировка: построение тензоров

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \hat{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \hat{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \hat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \tilde{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \tilde{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \tilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.\end{aligned}$$

4: Восстановление рядов  $\hat{\hat{X}}$  и  $\hat{\tilde{X}}$  по тензорам  $\hat{\mathcal{X}}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}$  соответственно путём применения к каждому из этих тензоров шага 4 алгоритма 7.

---

## 6. Описание метода HO-ESPRIT

Пусть  $X$  — одномерный ( $P = 1$ ) или многомерный ( $P > 1$ ) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\bar{L} = \begin{cases} (I, L), & P = 1, \\ L, & P > 1, \end{cases}$$

а  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор ряда  $X$ , построенный с длиной (длинами) окна из  $\bar{L}$ . Также определим область допустимых параметров  $\bar{L}$ :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(I, L) : 1 < I, L < N, I + L < N + 1\}, & P = 1, \\ \{L : 1 < L < N\}, & P > 1. \end{cases}$$

Описание метода HO-ESPRIT приведено в алгоритме 9. Обоснование метода можно найти в работе [6].

---

**Алгоритм 9** HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}, \bar{L} \in \mathcal{D}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$  — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров.

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  по ряду  $\mathbf{X}$  с параметрами из  $\bar{L}$ . Если  $P = 1$ , то  $I_1 = I$ ,  $I_2 = L$ ,  $I_3 = N - I - L + 2$ , а если  $P > 1$ , то  $I_1 = L$ ,  $I_2 = N - L + 1$ ,  $I_3 = P$ .
- 2: Вычисление HOSVD  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=1}^{I_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы  $\mathbf{U} = [U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \dots : U_{I_D}^{(d)}]$ .

- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где запись  $\mathbf{U}^\dagger$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

- 4: Нахождение первых  $R$  в порядке убывания собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_{j'}$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , возможно с точностью до некоторой перестановки  $j = S(j')$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$


---

## 7. Численные сравнения в задаче оценки параметров

В этом разделе приведены сравнения методов ESPRIT и HO-ESPRIT по точности оценки параметров сигнала вида (4) в случае одномерных и многомерных рядов. В качестве показателя точности оценки была выбрана метрика относительного среднеквадратичного отклонения (RRMSE)

$$\text{RRMSE} = \frac{100}{|\gamma|} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\gamma - \hat{\gamma}_j|^2} (\%), \quad (13)$$

где  $m$  — количество реализаций шума,  $\gamma$  — оцениваемый параметр,  $\hat{\gamma}_j$  — оценка параметра  $\gamma$  по ряду с  $j$ -й реализацией шума. Такой выбор был сделан для того, чтобы в

дальнейшем сравнить результаты с результатами работы [6], в которой использовалась именно такая метрика для определения точности оценивания параметров.

### 7.1. Одномерный случай

Пусть  $P = 1$  и  $R = 2$ , то есть одномерный временной ряд  $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{24})$  состоит из элементов вида

$$x_n = e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n, \quad (14)$$

где  $n \in \overline{0:24}$ ,  $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ , а  $\xi_n$  и  $\eta_n$  — последовательность независимых случайных величин из распределения  $N(0, \sigma^2/2)$ ,  $\sigma = 0.04$ . Случайные величины  $\zeta_n$  являются независимыми и их распределение называется кругосимметричным комплексным нормальным распределением (circularly-symmetric complex normal distribution) [17] с дисперсией  $\sigma^2$  и обозначается  $CN(0, \sigma^2)$ .

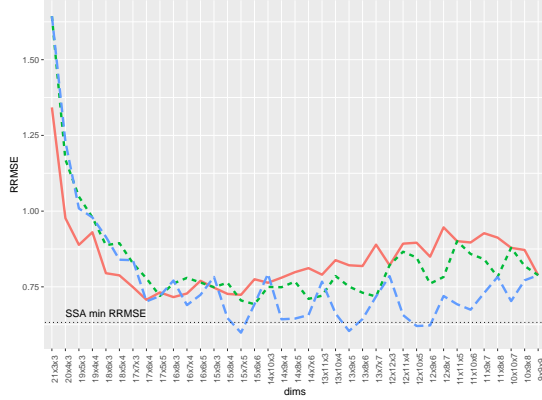
Пусть  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 0.22$ . Ниже приведены рассматриваемые варианты степеней затухания.

1.  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .
2.  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.01$ .
3.  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02$ .
4.  $\alpha_1 = -0.01$ ,  $\alpha_2 = -0.02$ .

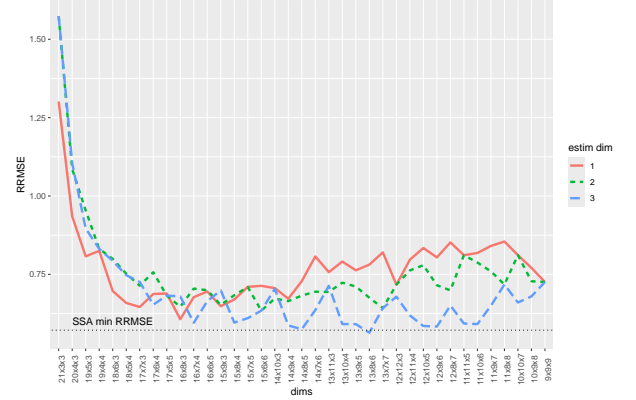
Такие параметры были выбраны, так как в статье [6] рассматривалась модель с такими частотами и степенями затухания из варианта 4. Во всех случаях ранг сигнала с такими параметрами будет равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы  $\mathbf{Z}$  из алгоритмов 3 и 9. В этом разделе RRMSE считалось по 500 реализациям шума.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок частот и степеней затухания, полученных методом HO-ESPRIT, от размеров траекторного тензора (ось  $x$ ) и выбора направления оценивания (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на рисунках изображены наименьшие по выбору длины окна значения RRMSE соответствующего параметра, полученные методом ESPRIT.

Рисунки 1 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 2, 3 и 4 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

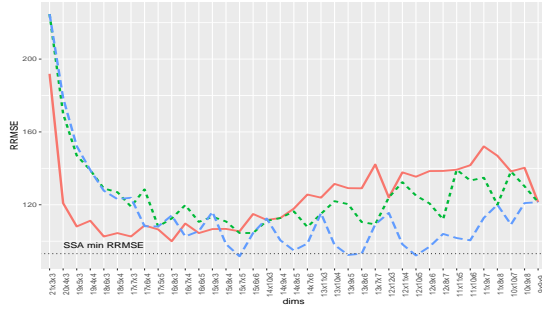


(a) RRMSE оценок  $\omega_1$ .

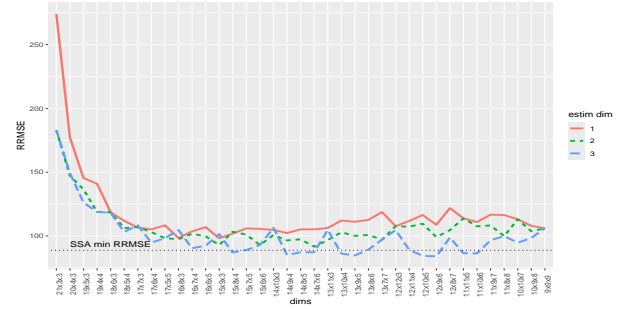


(б) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

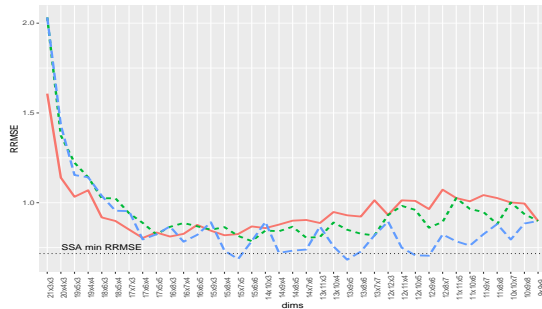
Рис. 1. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 1.



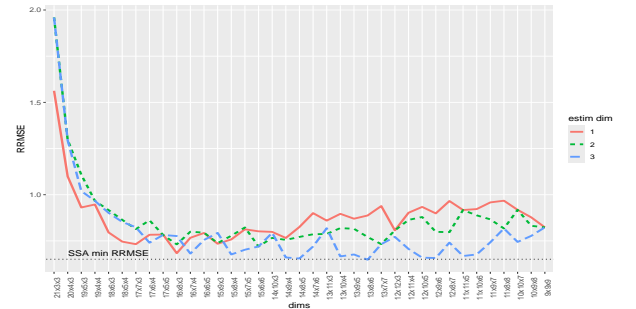
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .



(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .



(a) RRMSE оценок  $\omega_1$ .



(б) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 2. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 2.



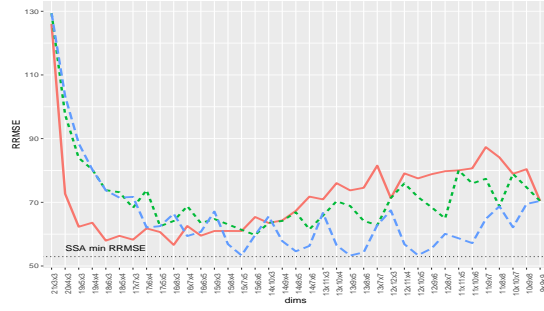
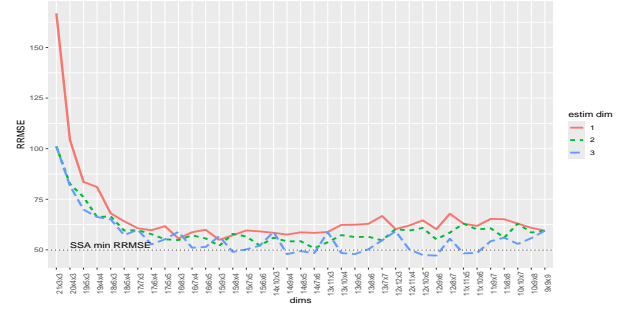
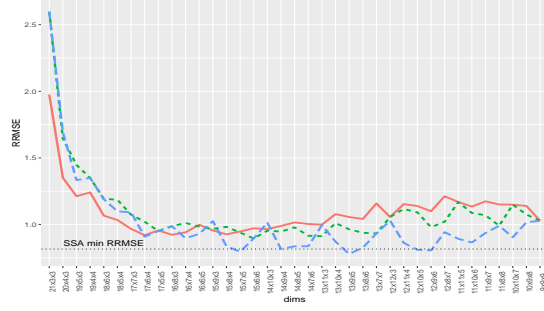
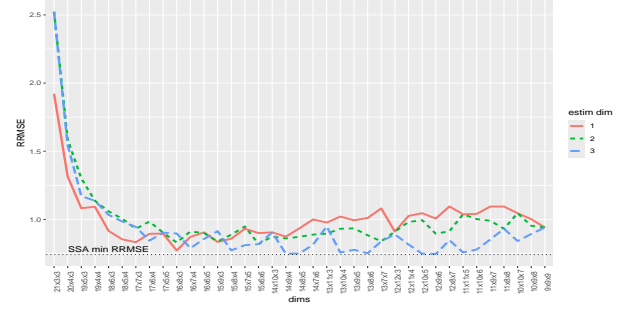
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 3. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 3.

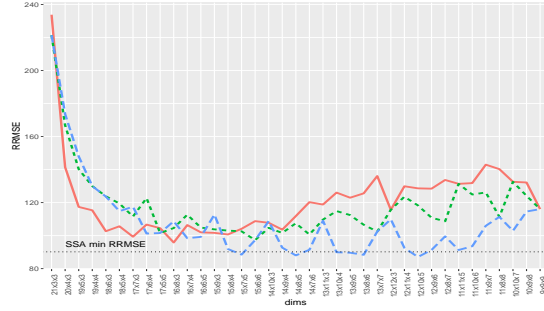
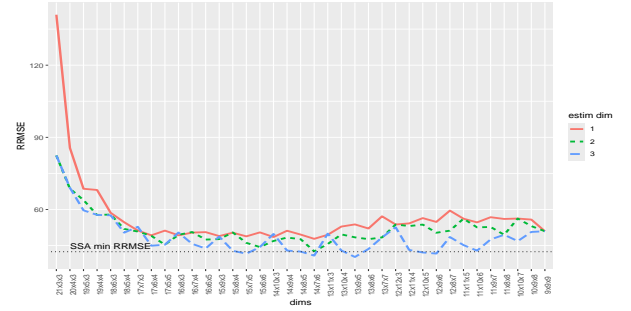
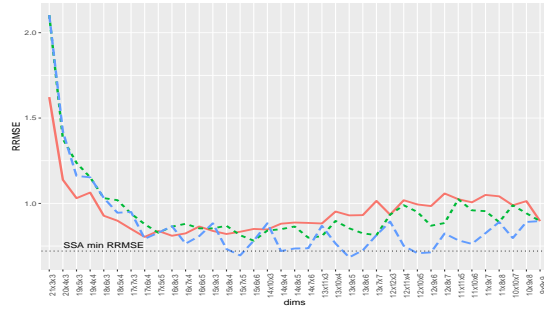
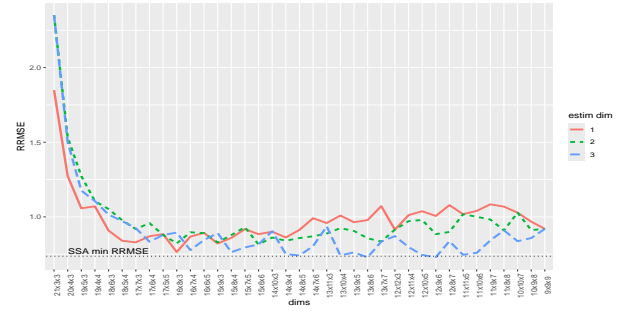
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 4. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 4.

**Выводы из численных сравнений** В случае одномерных сигналов оценки методом HO-ESPRIT при оптимальном подборе параметров оказались не менее точными, чем оптимальные оценки стандартным методом ESPRIT. Кроме того, в некоторых ситуациях оптимальные оценки методом HO-ESPRIT оказываются точнее оптимальных оценок методом ESPRIT. Это соответствует результатам работы [6], в которой методы сравнивались только при оптимальных размерах длины окна. Однако множество длин окна в алгоритме HO-ESPRIT, при которых точность оценок параметров сигнала близка к оптимальной, очень мало, и нам пока неизвестны способы их выбора кроме перебора. С другой стороны, для стандартного алгоритма ESPRIT требуется меньший набор параметров, а множество длин окна, при которых точность оценки близка к оптимальной, довольно велико. С учётом этих замечаний, и того, что разница в точности оптимальных параметров между методами невелика, использование метода HO-ESPRIT в текущем виде не обосновано.

Стоит заметить, что во всех случаях выбор номера направления  $d$  из алгоритма 9, соответствующего направлению наименьшего размера траекторного тензора, давал более точные результаты.

## 7.2. Многомерный случай

Пусть  $P = 12$  и  $R = 2$ , то есть многомерный временной ряд

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(12)}),$$

$$\mathbf{X}^{(p)} = (x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{24}^{(p)})$$

состоит из элементов вида

$$x_n^{(p)} = a_1^{(p)} e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + a_2^{(p)} e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n^{(p)},$$

где  $n \in \overline{0 : 24}$ , а  $\zeta_n$  — последовательность независимых случайных величин из распределения  $\text{CN}(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma = 0.2$ . Значения частот и варианты степеней затухания были взяты такими же, как в одномерном случае в разделе 7.1. В качестве амплитуд  $a_k^{(p)}$  были взяты независимые реализации случайных величин из распределения  $\text{CN}(0, 1)$ , их приблизи-

тельные значения приведены в выражении (15).

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(a_1) &\approx (0, -0.1, -1, -0.4, 0.2, 0.3, -0.9, -0.3, -1.2, -0.2, 0.8, 0.5)^T, \\
 \text{Im}(a_1) &\approx (-0.9, -0.3, -0.5, -0.6, -0.1, -0.2, -1.3, -0.1, 0.7, 0.1, -1, -1)^T, \\
 \text{Re}(a_2) &\approx (-0.2, 0.7, 0.5, 0.1, -0.7, -0.1, 0.7, 0.3, -0.4, -1.5, -0.5, -1.5)^T, \\
 \text{Im}(a_2) &\approx (0.3, -1.2, -0.2, -0.5, 0.8, -0.5, -0.6, 0.6, -0.7, 0, 0.2, -0.2)^T.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Как и в одномерном случае, ранг сигналов с каждым набором параметров равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы  $\mathbf{Z}$  из алгоритмов 3 и 9.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок параметров, полученных методами ESPRIT и HO-ESPRIT, от значения длины окна  $L$ .

Рисунки 5 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 6, 7 и 8 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

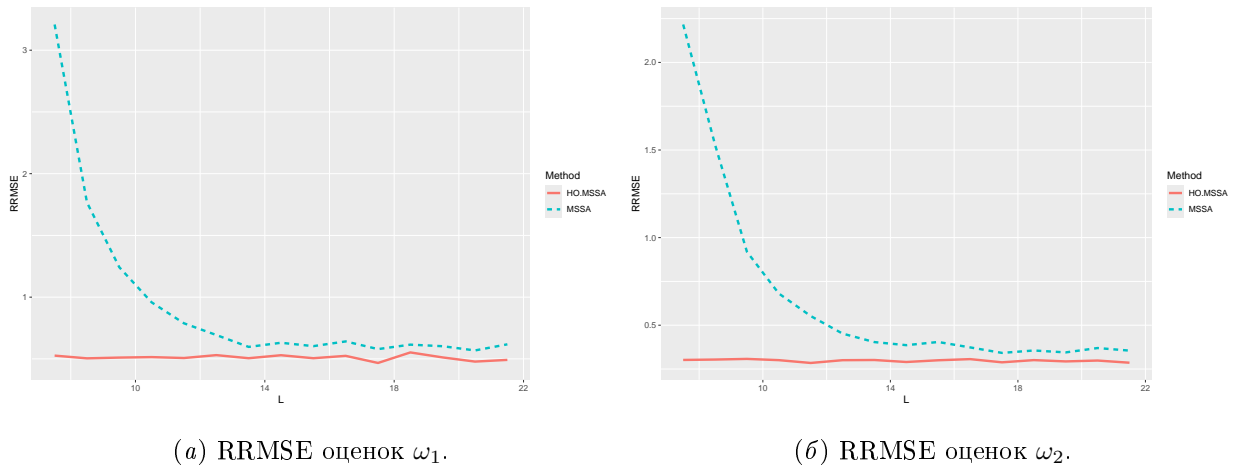


Рис. 5. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 1.

**Выводы из численных сравнений** Метод HO-ESPRIT оказался точнее стандартного метода ESPRIT в задаче оценки параметров многомерного ряда во всех рассмотренных случаях для любого выбора параметров длины окна.

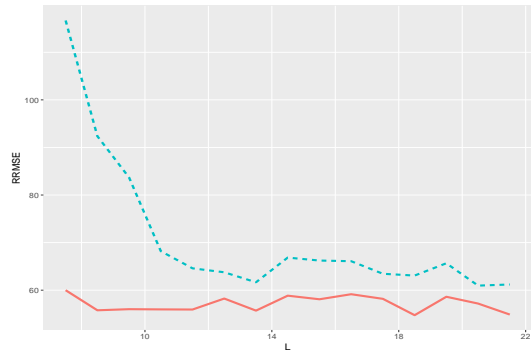
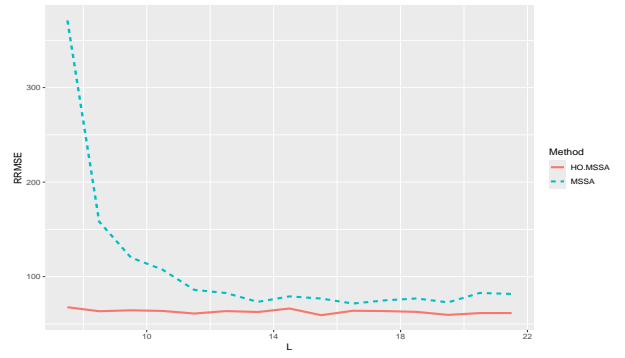
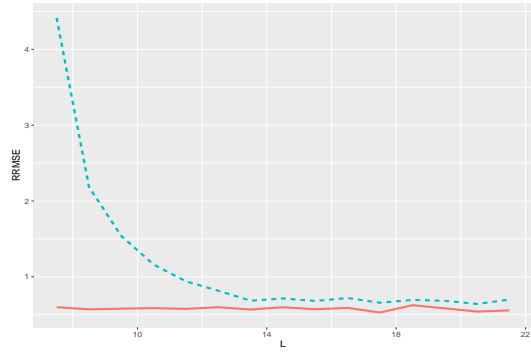
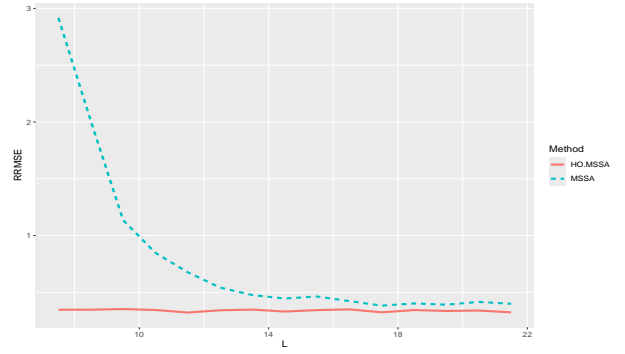
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(с) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 6. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 2.

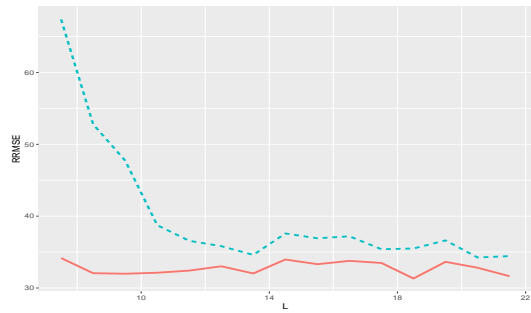
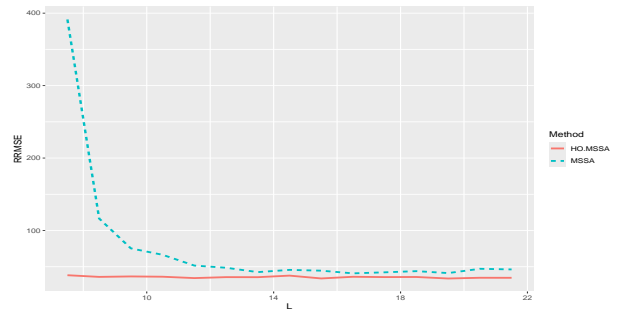
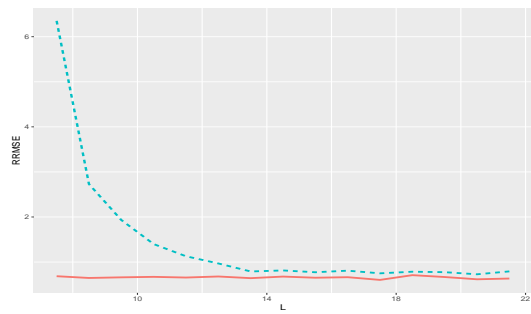
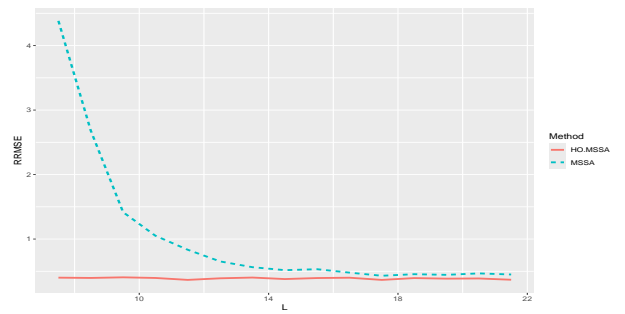
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(с) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 7. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 3.

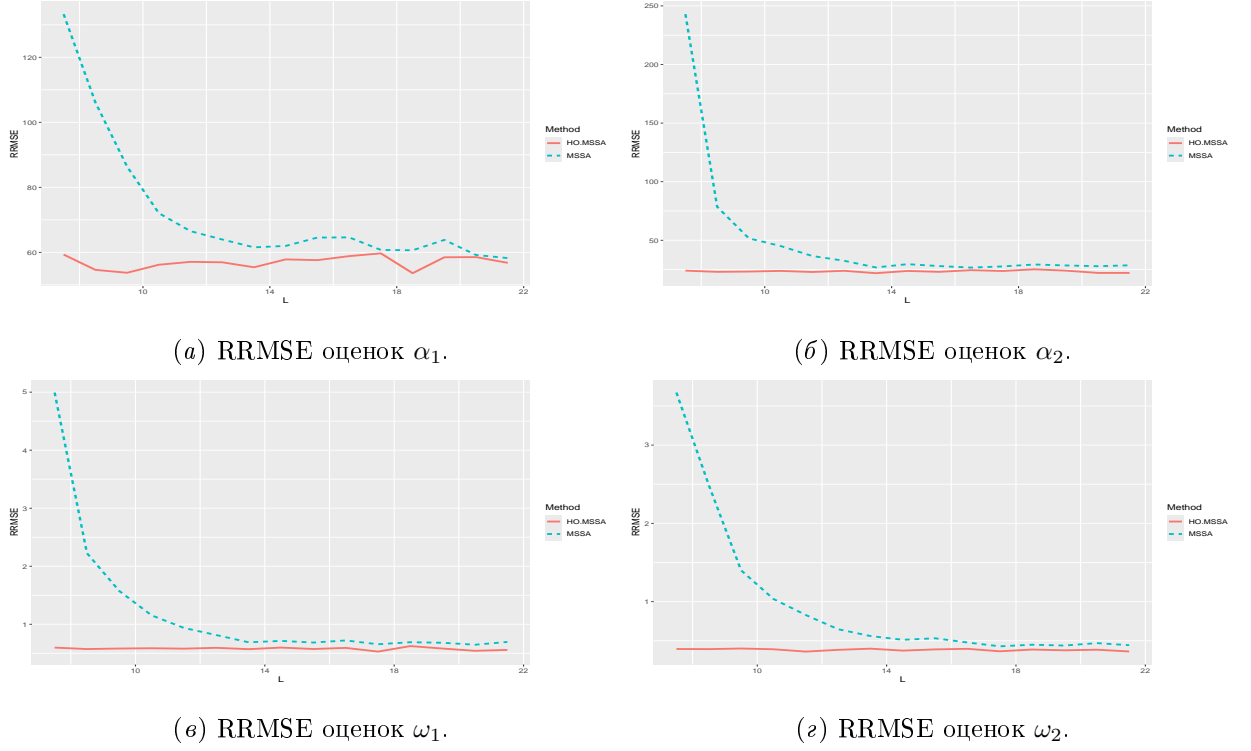


Рис. 8. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 4.

## 8. Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA

В этом разделе рассматривается влияние выбора направлений усечения в методе HO-SSA на точность в задаче выделения сигнала. Под направлениями усечения имеются в виду номера направлений траекторного тензора, к которым применялось усечение. Например, если траекторный тензор имеет размеры  $(I, L, J)$ , а направление усечения равно  $\overline{1:2}$ , то это соответствует выбору  $(R_1, R_2, R_3) = (r, r, J)$  в алгоритмах 5 и 6, где  $r$  — ранг сигнала.

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет вид

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

$$x_n = s_n + \varepsilon_n, \quad n \in \overline{1:N},$$

где  $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$  — сигнал,  $\mathbf{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  — шум. Точность выделения сигнала будет оцениваться с помощью среднеквадратичного отклонения (RMSE) оценённого сигнала от исходного. В данной работе RMSE высчитывается по следующей формуле

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}_i)}, \quad \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |s_j - \tilde{s}_j|^2,$$

где  $m$  — количество реализаций шума,  $\tilde{S}_i$  — оценка сигнала, восстановленная по ряду с  $i$ -й реализацией шума.

### 8.1. Выделение вещественного сигнала

Пусть  $N = 71$  и временной ряд состоит из элементов вида

$$x_n = 30 \cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_n$  — независимые случайные величины из распределения  $N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2 = 25$ . Во всех алгоритмах для восстановления бралось количество компонент разложения равное рангу сигнала, который в данном случае равен 2. В таблице 1 приведены значения RMSE оценки сигнала, восстановленного методом SSA при различных выборах длины окна. RMSE здесь и далее в этом разделе высчитывается по  $m = 500$  реализациям шума. Кро-

Таблица 1. SSA: RMSE оценки сигнала (16).

$L$	12	24	30	36
RMSE	1.82	1.42	<b>1.40</b>	1.42

ме того, здесь и далее жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения RMSE, причём отличие этих минимальных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

В таблице 2 представлены значения RMSE оценок сигнала, восстановленного методом HOOI-SSA при выборе различных направлений усечения. Метод HOSVD-SSA даёт менее точные схожие результаты. Параметры в таблице 2 представлены в порядке уменьшения третьего размера траекторного тензора, причём выполняется неравенство  $I \leq J \leq L$ . Большие параметры длин окна не рассматриваются, так как построенные по ним траекторные матрицы и траекторные тензоры будут совпадать с рассмотренными с точностью до перестановки размерностей.

Из таблицы 2 видно, что усечение только по направлению наибольшей размерности даёт результаты точнее, чем усечение по всем направлениям, при почти любом выборе длин окна. Но этого увеличения точности недостаточно, чтобы алгоритм HO-SSA был точнее базового SSA.

Таблица 2. HOOI-SSA: RMSE оценки сигнала (16) при разных направлениях усечения.

Направления усечения \ $I \times L$	$12 \times 49$	$12 \times 37$	$7 \times 36$	$12 \times 31$	$19 \times 30$	$24 \times 25$
3	1.85	1.52	<b>1.48</b>	1.54	1.57	1.59
2, 3	1.63	1.53	<b>1.49</b>	1.56	1.62	1.65
$\overline{1:3}$	1.63	1.53	<b>1.49</b>	1.56	1.62	1.65

## 8.2. Выделение комплексного сигнала

Рассмотрим задачу выделения комплекснозначного сигнала из ряда  $X$  с элементами вида (14) с частотами  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 0.22$  и со степенями затухания  $\alpha_1 = -0.01$ ,  $\alpha_2 = -0.02$ .

На рисунке 9 представлен график зависимости RMSE от размеров траекторного тензора (ось  $x$ ) и направлений усечения (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на графике изображено минимальное по выбору длины окна значение RMSE для сигналов, восстановленных методом SSA. Как и в случае вещественного сигнала, метод

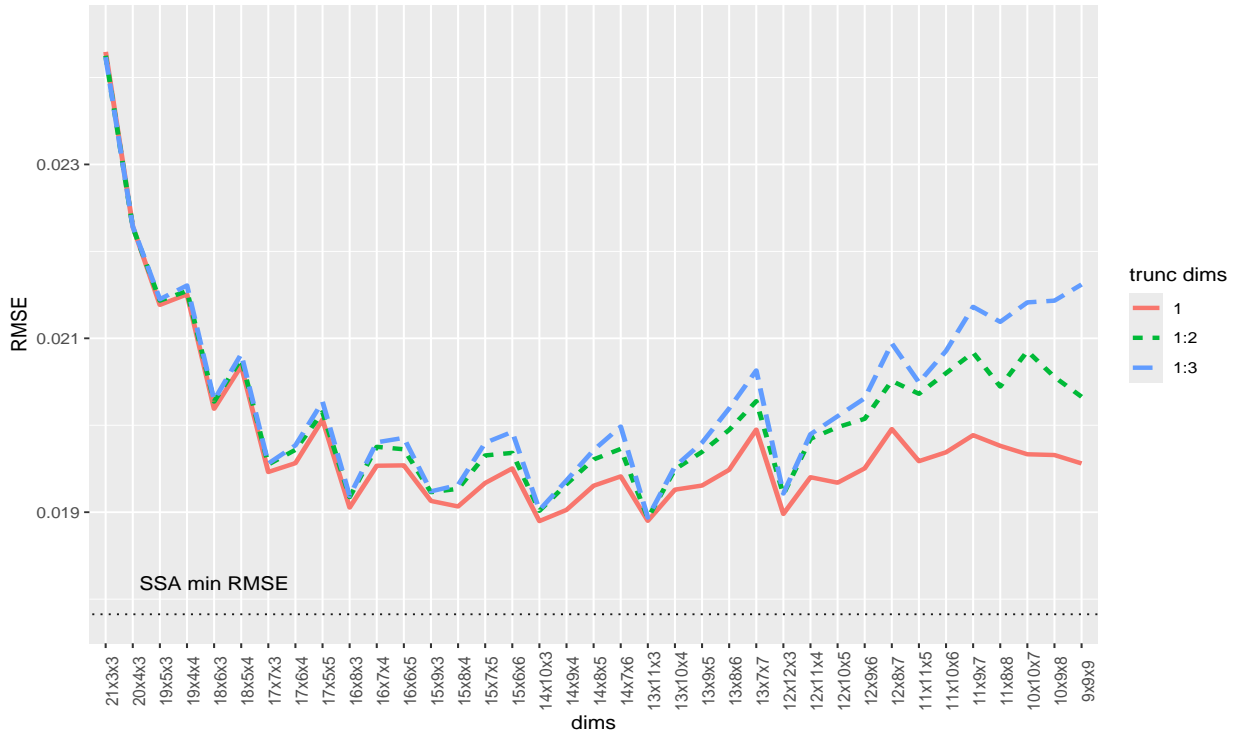


Рис. 9. Зависимость RMSE восстановленного сигнала от размеров траекторного тензора и направлений усечений.

НО-SSA оказывается существенно менее точным при любом выборе длин окна и направлений усечения, чем метод SSA. Также наиболее точные оценки сигнала получаются при выборе в качестве направления усечения направления минимальной размерности траекторного тензора ряда.

**Выводы численных сравнений** В отличие от задачи оценки параметров, где при выборе оптимальных длин окна тензорные методы могут давать оценки точнее, чем базовый ESPRIT, в задаче выделения сигнала при любом выборе длин окна точность восстановленных тензорными методами оценок сигналов всегда существенно меньше точности оценок, восстановленных базовым SSA.



## 9. Заключение

TODO

## Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
3. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage / Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin Heidelberg, 2020.
5. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
6. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
7. Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.
8. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
9. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Rev. — 2009. — Vol. 51, no. 3. — P. 455–500.
10. Savostyanov D. V., Tyrtshnikov E.E. Approximate multiplication of tensor matrices based on the individual filtering of factors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49, no. 10. — P. 1662–1677.
11. Kazeev V. A., Tyrtshnikov E.E. Structure of the Hessian matrix and an economical implementation of Newton's method in the problem of canonical approximation of tensors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50,

- no. 6. — P. 927–945.
12. Осинский А.И. Оценки аппроксимации тензорных поездов по норме Чебышёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 211–216.
  13. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. On the Best Rank-1 and Rank- $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
  14. Sheehan B., Saad Y. Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Relation to PCA and GLRAM // Proceedings of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining. — Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2007.
  15. Eldén L., Savas B. A Newton–Grassmann Method for Computing the Best Multilinear Rank- $(r_1, r_2, r_3)$  Approximation of a Tensor // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 31, no. 2. — P. 248–271.
  16. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.
  17. Tse David, Viswanath Pramod. Fundamentals of Wireless Communication. — Cambridge University Press, 2005.