

## 1. Известные сведения об алгоритмах SSA и MSSA

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

### 1.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 1.1** (Оператор вложения). Оператором вложения  $\mathcal{H}_L$  с длиной окна  $L$  будем называть отображение, переводящее временной ряд  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $N \geq L$ , в ганкелеву матрицу  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $K = N - L + 1$ , такую, что  $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$ . Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

**Определение 1.2** (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L < N$  называют матрицу  $\mathbf{X}$ , полученную применением оператора вложения  $\mathcal{H}_L$ , к ряду  $\mathbf{X}$ .

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов  $\mathbf{X}_k$ . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ . Первые два шага в алгоритме 2 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

**Определение 1.3** (SSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется SSA-рангом временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq (N + 1)/2$  и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

---

**Алгоритм 1** SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(L, N-L+1)$ ,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  по длине окна  $L$ .
- 2: Разложение: проведение SVD траекторной матрицы  $\mathbf{X}$ , получение её представления в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d \leq \min(L, N-L+1).$$

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по матрицам  $\mathbf{X}_k$  посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N-L+1, i+j-1 = n \right\}.$$


---

**Алгоритм 2** SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N-L+1)$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$  — оценка сигнала  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ .

- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление ряда  $\tilde{\mathbf{X}}$  по матрице  $\tilde{\mathbf{X}}$  посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ .
- 

*Замечание.* В качестве параметра  $R$  в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

**Пример 1.1.** Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-

ранги.

- Ранг полиномиального ряда  $x_n = Q_d(n)$ , где  $Q_d$  — многочлен степени  $d$ , равен  $d+1$ .

- Ранг экспоненциального ряда  $x_n = Ce^{\alpha n}$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$  и  $C \neq 0$ , равен 1.

- Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^M C_j e^{\alpha_j n},$$

где  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  и  $C_j \neq 0$  при всех  $j$ , равен количеству уникальных значений  $\alpha_j$ .

- Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где  $C \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\omega \in [0, 1/2]$ , равен  $r(\omega)$ , где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

- Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^M Ce^{\alpha_j n} \cos(2\pi n\omega_j + \psi_j)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i, \alpha_i)$ , представленных в данном временном ряду.

**Определение 1.4** (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  и  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$  называют слабо  $L$ -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)},$
2.  $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 1.1.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 1.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

## 1.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [2, 3, 4].

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left( x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

**Определение 1.5** (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  — траекторные матрицы рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  соответственно, построенные по длине окна  $L$ . Траекторной матрицей многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  называется матрица  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$ ,  $K = N - L + 1$ , построенная соединением матриц  $\mathbf{X}_p$  по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P].$$

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

**Определение 1.6** (MSSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется MSSA-рангом  $P$ -мерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq P(N + 1)/(P + 1)$ , и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, P(N - L + 1))$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание.* Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

**Пример 1.2.** Рассмотрим  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  с элементами вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{R(p)} a_i^{(p)} e^{-\alpha_i^{(p)} n} \cos \left( 2\pi \omega_i^{(p)} n + \varphi_i^{(p)} \right). \quad (2)$$

MSSA-ранг такого ряда равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad (3)$$

где функция  $r(\omega)$  определена в уравнении (1), а  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)})$ , представленных в данном временном ряде.

*Замечание.* В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HOSVD-MSSA на многомерных сигналах вида (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры  $R(p)$ ,  $\omega_i^{(p)}$  и  $\alpha_i^{(p)}$  не зависят от номера ряда  $p$ , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [5]. Кроме того, в работе [6] также рассматривается этот частный случай модели.

**Определение 1.7** (Слабая MSSA-разделимость).  $P$ -мерные временные ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  называются слабо  $L$ -разделимыми, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P}, \\ 2. \quad & \sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}. \end{aligned}$$

**Утверждение 1.2.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

### 1.3. ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [7, 6].

Пусть элементы многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{\alpha_j n} e^{i(2\pi \omega_j n + \varphi_j^{(p)})}, \quad (4)$$

где  $i$  обозначает мнимую единицу, а параметрами модели являются амплитуды  $a_j^{(p)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , фазы  $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$ , частоты  $\omega_j \in [0, 1/2]$  и степени затухания  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ .

*Замечание.* В статье [7] приводится алгоритм ESPRIT для модели временного ряда вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R s_j(n) e^{i\omega_0 \Delta \sin \theta_j / c} a^{(p)}(\theta_j),$$

где оцениваемые параметры обозначены  $\theta_j$ , но в работе будет рассматриваться модель вида (4) по причине, указанной в замечании к примеру 1.2.

*Замечание.* В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi i\omega n + \varphi_n} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi_n}}{2},$$

вещественнозначный временной ряд из примера 1.2 при  $R(p) = R$ ,  $\omega_j^{(p)} = \omega_j$  и  $\alpha_j^{(p)} = \alpha_j$  является частным случаем ряда (4).

Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания  $\alpha_j$  и частот  $\omega_j$  многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4). Первые два шага в алгоритме 3 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

*Замечание.* Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма  $R$  рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

*Замечание.* Алгоритм 3 применим и для одномерных временных рядов ( $P = 1$ ).

## 2. Описание метода НО-SSA

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 2.1** (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размера  $I \times L \times J$ ,  $J = N - I - L + 2$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

---

**Алгоритм 3** ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где  $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d]$ , запись  $\mathbf{U}^\dagger$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

4: Нахождение первых  $R$  в порядке неубывания собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_{j'}$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , возможно с точностью до некоторой перестановки  $j = S(j')$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$


---

*Замечание.* Траекторный тензор  $\mathcal{X}$  является ганкелевым [8].

Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}_{k..} = \mathcal{A}_{i_1=k}, \quad \mathcal{A}_{.k.} = \mathcal{A}_{i_2=k}, \quad \mathcal{A}_{..k} = \mathcal{A}_{i_3=k}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 1.1 сечения траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{..j} &= \mathcal{H}_I((x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+I+L-2})), \\ \mathcal{X}_{.l.} &= \mathcal{H}_I((x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+L+J-2})), \\ \mathcal{X}_{i..} &= \mathcal{H}_L((x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L+J-2})). \end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд  $\mathbf{X}$  и параметры  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ . Так как при замене одного из этих параметров на  $J = N - I - L + 2$  или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки  $(I, L, J)$  без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

## 2.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов  $\mathbf{X}_k$ . Метод HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 4.

---

**Алгоритм 4** HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(I, L, N - I - L + 2)$ ,  $\mathfrak{S}_1^{(p)}, \dots, \mathfrak{S}_m^{(p)}$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k^{(p)} \quad \mathfrak{S}_k^{(p)} \cap \mathfrak{S}_l^{(p)} = \emptyset, k \neq l, p \in \{1, 2, 3\}.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторного тензора  $\mathcal{X}$  по параметрам  $I, L$ .
- 2: Разложение: проведение HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (5)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k^{(1)}} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k^{(2)}} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k^{(3)}} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по тензорам  $\mathcal{X}^{(k)}$  посредством их усреднения вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{ilj}^{(k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, l, j) \mid 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n \right\}.$$


---



## 2.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших  $n$ -рангов, заданных пользователем, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD (HOSVD-SSA). Благодаря свойству ?? такое приближение можно считать достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом 4, поэтому опишем его, начиная с третьего шага. Описание приведено в алгоритме 5.

Второй способ использует алгоритм HOOI для приближения траекторного тензора ряда некоторым тензором меньших  $n$ -рангов, причём результатом выполнения HOOI будет HOSVD этого приближения (HOOI-SSA). Первый шаг этого алгоритма совпадает с первым шагом алгоритма 4, поэтому опишем его начиная со второго шага. Описание приведено в алгоритме 6.

---

**Алгоритм 5** HOSVD-SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 3: По параметрам  $R_1, R_2, R_3$  и разложению траекторного тензора  $\mathcal{X}$  в виде (5), в тензоре  $\mathcal{Z}$  проводится замена сечений  $\mathcal{Z}_{i_m=k}$  при  $k > R_m$  на нулевые, и по полученному тензору  $\hat{\mathcal{Z}}$  строится приближение траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ .
  - 4: Усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ , в результате чего получается оценка сигнала  $\hat{\mathbf{X}}$ .
- 

## 3. Описание метода HOSVD-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HOSVD-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

---

**Алгоритм 6 HOOI-SSA**


---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 2: Применение к построенному на первом шаге траекторному тензору  $\mathcal{X}$  метода HOOI с набором  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, R_3)$ . Результат применения HOOI: тензор  $\hat{\mathcal{X}}$ , имеющий заданные  $n$ -ранги.
  - 3: Восстановление сигнала, совпадает с шагом 4 алгоритма 5.
- 

### 3.1. HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left( x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

**Определение 3.1** (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L : 1 < L < N$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $L \times K \times P$ ,  $K = N - L + 1$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1 : L}, k \in \overline{1 : K}, p \in \overline{1 : P}.$$

Из определения следует, что сечение  $\mathcal{X}_{\cdot p}$  траекторного тензора с длиной окна  $L$  является траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}^{(p)}$ , построенной по длине окна  $L$ . Пользуясь определением 1.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{\cdot p} = \mathcal{H}_L \left( \mathbf{X}^{(p)} \right).$$

Метод HOSVD-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HOSVD-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем,  $n$ -рангов. Для получения такого приближения используется усечение HOSVD траекторного тензора. Описание метода приведено в алгоритме 7.

### 3.2. HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два  $P$ -мерных временных ряда  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  и  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ . Их траекторные тензоры с длиной окна  $L$  обозначим  $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{X}$  соответственно.

---

**Алгоритм 7** HOSVD-MSSA для выделения сигнала
 

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : K}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : P}$ , где  $K = N - L + 1$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$ .

- 1: Построение по ряду  $\mathbf{X}$  траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$ .
- 2: Вычисление HOSVD  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (6)$$

- 3: Построение по параметрам  $R_1, R_2, R_3$  усечения HOSVD

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

- 4: Восстановление многомерного ряда  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(P)})$  по тензору  $\tilde{\mathcal{X}}$ , которое происходит следующим образом: ряды  $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$  получаются усреднением сечений  $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$  вдоль побочных диагоналей  $l + k = \text{const}$ .
- 

Метод HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров компонент  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$ . Первые два шага этого алгоритма совпадают с первыми двумя шагами алгоритма 7, поэтому описание алгоритма приводится, начиная с 3 шага. Описание метода приведено в алгоритме 8.

#### 4. Описание метода HO-ESPRIT

Пусть  $\mathbf{X}$  — одномерный ( $P = 1$ ) или многомерный ( $P > 1$ ) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\bar{L} = \begin{cases} (I, L), & P = 1, \\ L, & P > 1, \end{cases}$$

---

**Алгоритм 8** HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ ,  $K = N - L + 1$ ,  $\widehat{\mathfrak{S}}, \widetilde{\mathfrak{S}} \subseteq \overline{1 : \min(L, K)} : \widehat{\mathfrak{S}} \cap \widetilde{\mathfrak{S}} = \emptyset$ ,  
 $\widehat{\mathfrak{P}}, \widetilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : P}$

**Результат:**  $\hat{\mathring{\mathbf{X}}}, \tilde{\mathring{\mathbf{X}}}$  — оценки  $\widehat{\mathbf{X}}$  и  $\widetilde{\mathbf{X}}$  соответственно.

3: Группировка: построение тензоров

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \widehat{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \widehat{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \widehat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}, \\ \widetilde{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \widetilde{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \widetilde{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \widetilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.\end{aligned}$$

4: Восстановление рядов  $\hat{\mathring{\mathbf{X}}}$  и  $\tilde{\mathring{\mathbf{X}}}$  по тензорам  $\widehat{\mathcal{X}}$  и  $\widetilde{\mathcal{X}}$  соответственно путём применения к каждому из этих тензоров шага 4 алгоритма 7.

---

а  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор ряда  $\mathbf{X}$ , построенный с длиной (длинами) окна из  $\overline{L}$ . Также определим область допустимых параметров  $\overline{L}$ :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(I, L) : 1 < I, L < N, I + L < N + 1\}, & P = 1, \\ \{L : 1 < L < N\}, & P > 1. \end{cases}$$

Описание метода HO-ESPRIT приведено в алгоритме 9.

## 5. Численные сравнения в задаче оценки параметров

В этом разделе приведены сравнения методов ESPRIT и HO-ESPRIT по точности оценки параметров сигнала вида (4) в случае одномерных и многомерных рядов. В качестве показателя точности оценки была выбрана метрика относительного средне-квадратичного отклонения (RRMSE)

$$\text{RRMSE} = \frac{100}{|\gamma|} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\gamma - \hat{\gamma}_j|^2} (\%), \quad (7)$$

где  $m$  — количество реализаций шума,  $\gamma$  — оцениваемый параметр,  $\hat{\gamma}_j$  — оценка параметра  $\gamma$  по ряду с  $j$ -й реализацией шума. Такой выбор был сделан для того, чтобы в дальнейшем сравнить результаты с результатами работы [6], в которой использовалась именно такая метрика для определения точности оценивания параметров.

---

**Алгоритм 9** HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}, \bar{L} \in \mathcal{D}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$  — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров.

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  по ряду  $\mathbf{X}$  с параметрами из  $\bar{L}$ . Если  $P = 1$ , то  $I_1 = I$ ,  $I_2 = L$ ,  $I_3 = N - I - L + 2$ , а если  $P > 1$ , то  $I_1 = L$ ,  $I_2 = N - L + 1$ ,  $I_3 = P$ .
- 2: Вычисление HOSVD  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=1}^{I_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы  $\mathbf{U} = [U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \dots : U_{I_D}^{(d)}]$ .

- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где запись  $\mathbf{U}^\dagger$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

- 4: Нахождение первых  $R$  в порядке неубывания собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_{j'}$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , возможно с точностью до некоторой перестановки  $j = S(j')$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$


---

### 5.1. Одномерный случай

Пусть  $P = 1$  и  $R = 2$ , то есть одномерный временной ряд  $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{24})$  состоит из элементов вида

$$x_n = e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \varepsilon_n,$$

где  $n \in \overline{0 : 24}$ , а  $\varepsilon_n$  — последовательность независимых случайных величин из распределения  $N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma = 0.04$ . Также пусть  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 0.22$ . Ниже приведены рассматриваемые варианты степеней затухания.

1.  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

2.  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.01$ .
3.  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02$ .
4.  $\alpha_1 = -0.01, \alpha_2 = -0.02$ .

Во всех случаях ранг сигнала с такими параметрами будет равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы  $\mathbf{Z}$  из алгоритмов 3 и 9. В этом разделе RRMSE считалось по 500 реализациям шума.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок частот и степеней затухания, полученных методом HO-ESPRIT, от размеров траекторного тензора (ось  $x$ ) и выбора направления оценивания (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на рисунках изображены наименьшие по выбору длины окна значения RRMSE соответствующего параметра, полученные методом ESPRIT.

Рисунки 1 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 2, 3 и 4 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

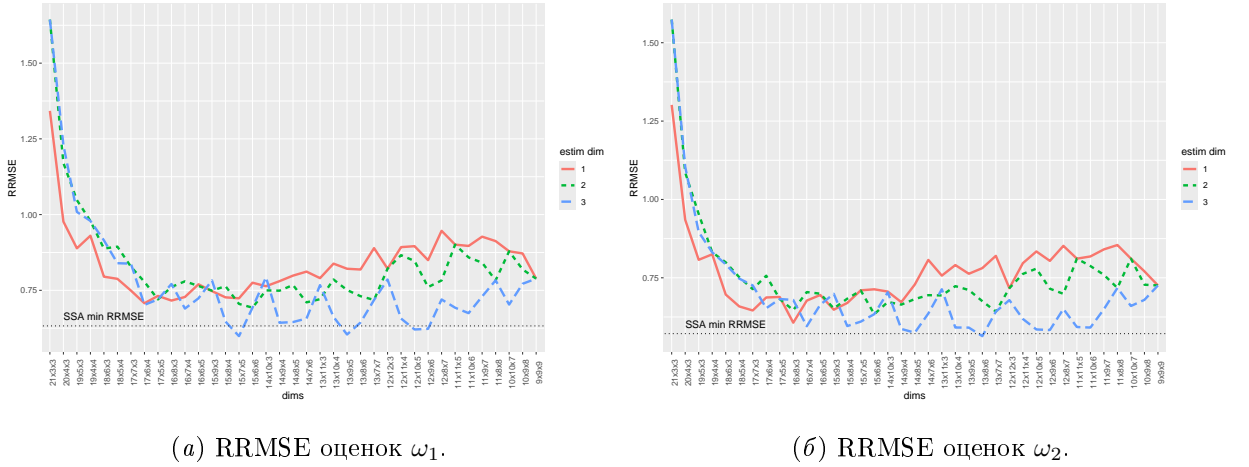


Рис. 1. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления восстановления, случай 1.

**Выводы из численных сравнений** В случае одномерных сигналов оценки методом HO-ESPRIT при оптимальном подборе параметров оказались не менее точными, чем оптимальные оценки стандартным методом ESPRIT. Кроме того, в некоторых ситуациях оптимальные оценки методом HO-ESPRIT оказываются точнее оптимальных оценок методом ESPRIT. Однако множество длин окна в алгоритме HO-ESPRIT, при которых

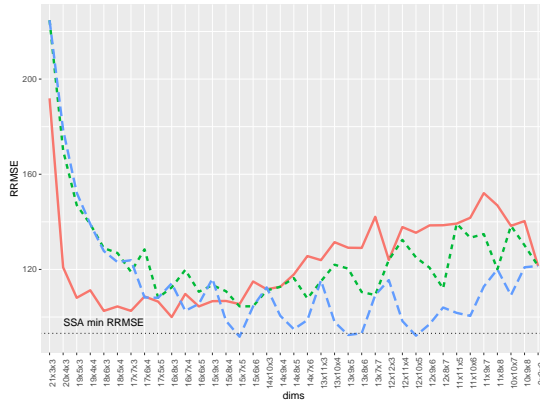
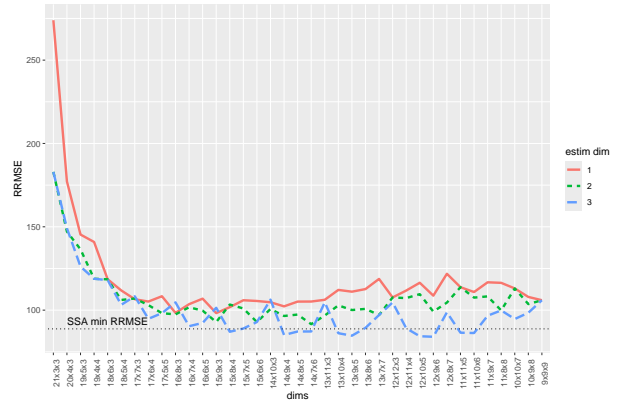
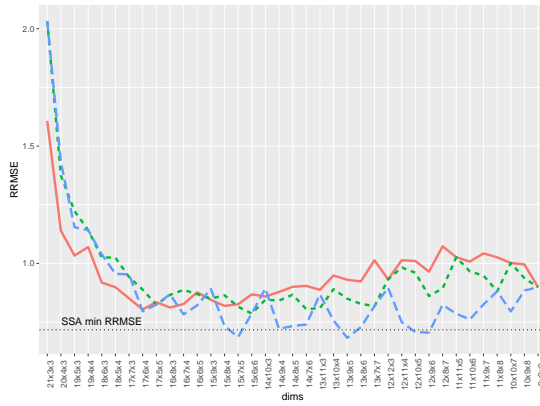
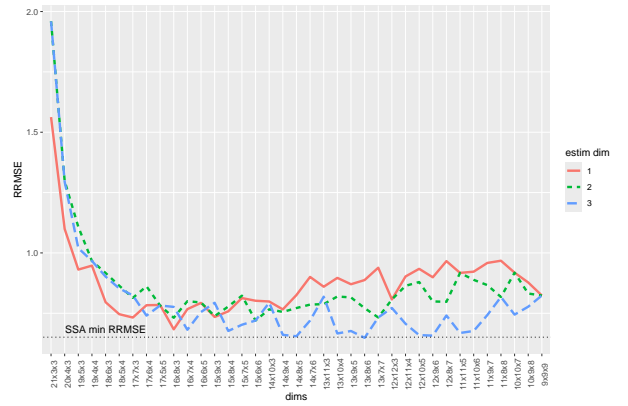
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 2. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления восстановления, случай 2.

точность оценок параметров сигнала близка к оптимальной, очень мало, и нам пока неизвестны способы их выбора кроме перебора. С другой стороны, для стандартного алгоритма ESPRIT требуется меньший набор параметров, а множество длин окна, при которых точность оценки близка к оптимальной, довольно велико. С учётом этих замечаний, и того, что разница в точности оптимальных параметров между методами невелика, использование метода HO-ESPRIT в текущем виде не обосновано.

Стоит заметить, что во всех случаях выбор номера направления  $d$  из алгоритма 9, соответствующего направлению наименьшего размера траекторного тензора, давал наиболее точные результаты.

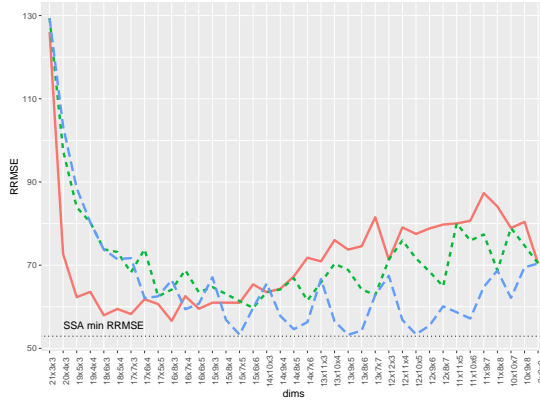
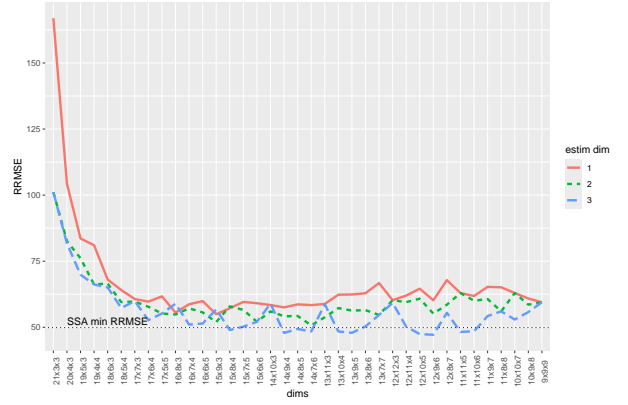
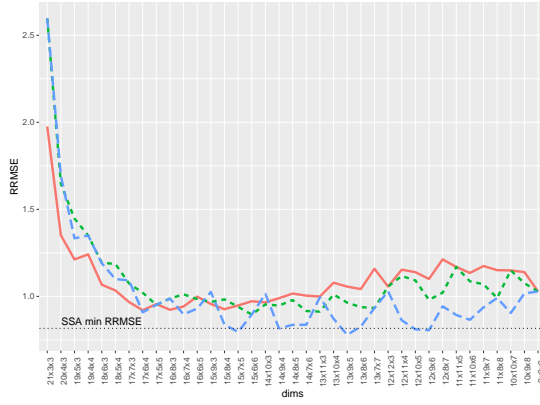
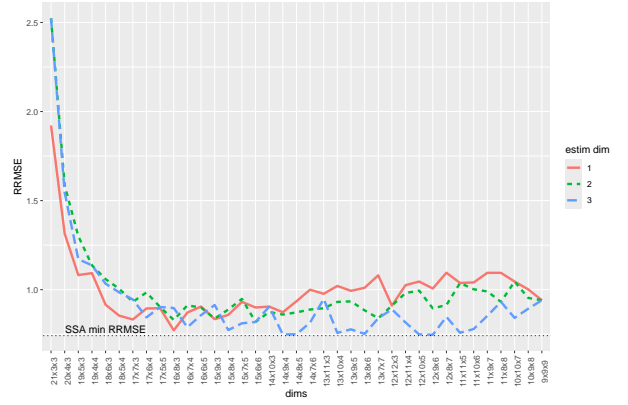
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 3. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления восстановления, случай 3.

## 5.2. Многомерный случай

Пусть  $P = 12$  и  $R = 2$ , то есть многомерный временной ряд

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(12)}),$$

$$\mathbf{X}^{(p)} = (x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{24}^{(p)})$$

состоит из элементов вида

$$x_n^{(p)} = a_1^{(p)} e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + a_2^{(p)} e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \varepsilon_n^{(p)},$$

где  $n \in \overline{0 : 24}$ , а  $\varepsilon_n$  — последовательность независимых случайных величин из распределения  $N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma = 0.2$ . Значения частот и варианты степеней затухания были взяты такими же, как в одномерном случае в разделе 5.1. Как и в одномерном случае, рани сигналов с каждым набором параметров равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы  $\mathbf{Z}$  из алгоритмов 3 и 9.



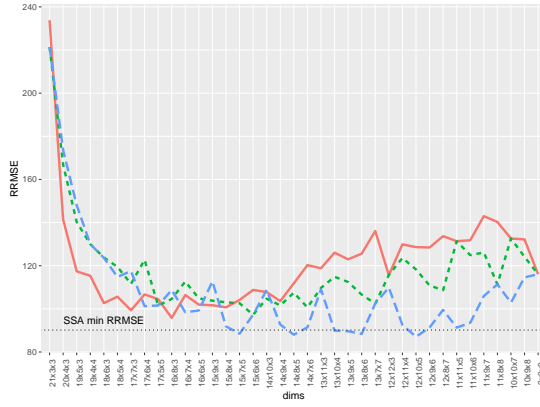
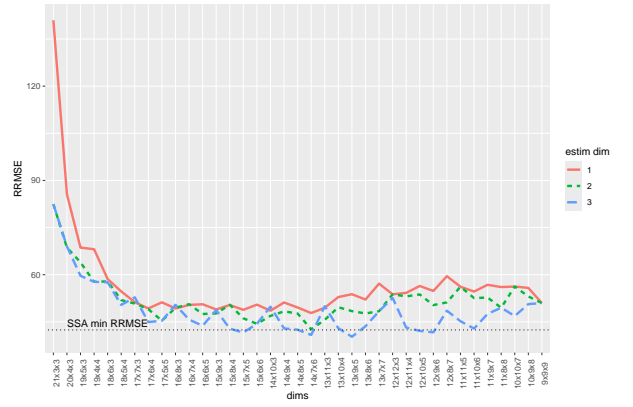
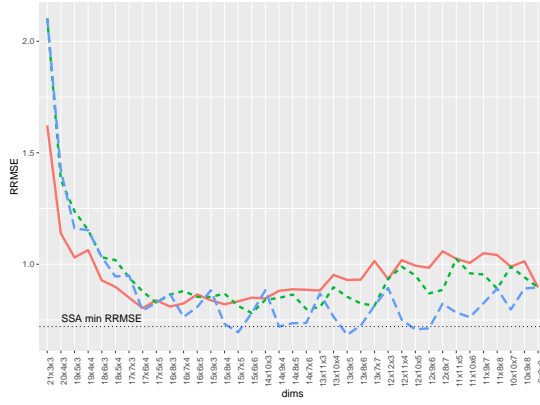
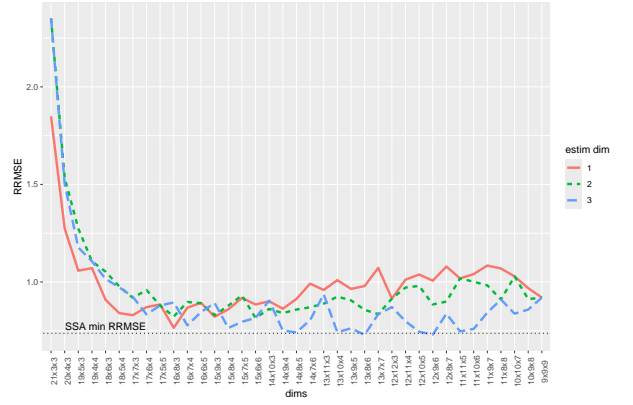
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 4. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления восстановления, случай 4.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок параметров, полученных методами ESPROT и HO-ESPRIT, от значения длины окна  $L$ .

Рисунки 5 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 6, 7 и 8 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

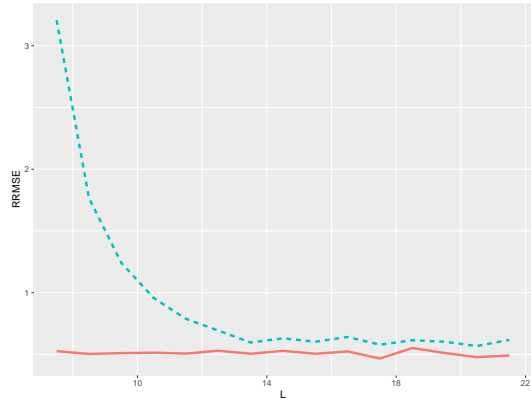
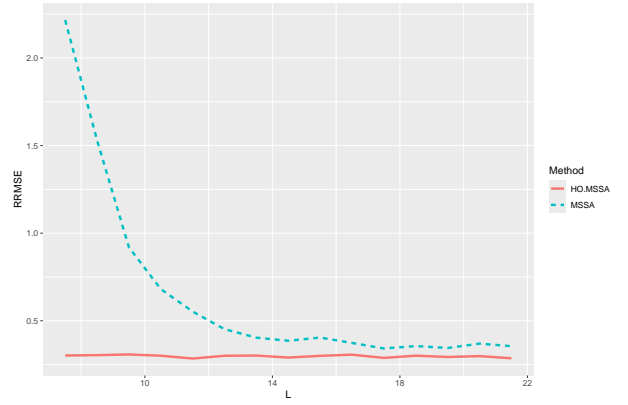
(a) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(б) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 5. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 1.

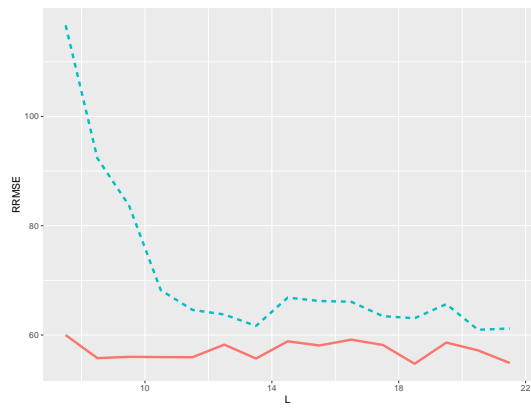
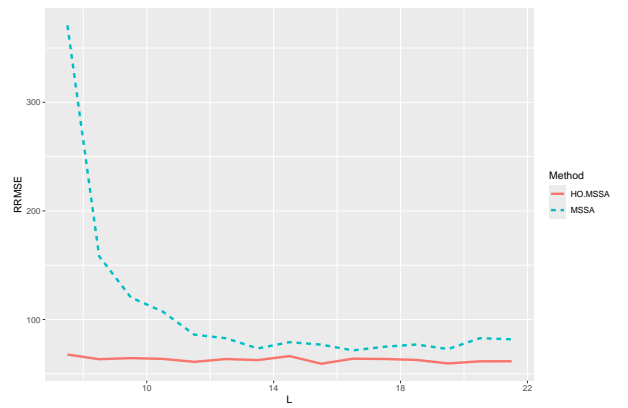
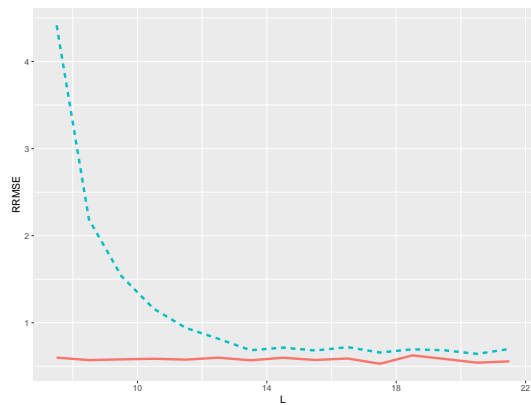
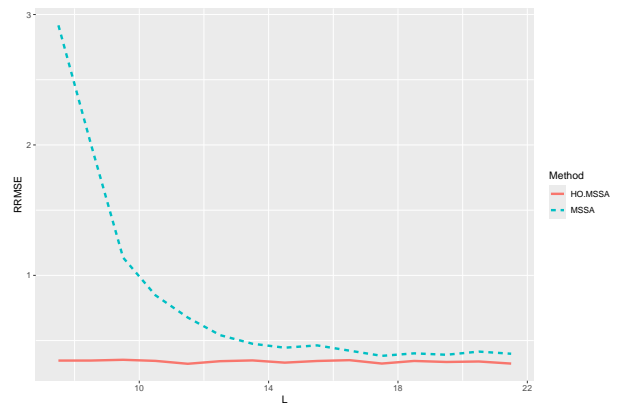
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(в) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 6. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 2.

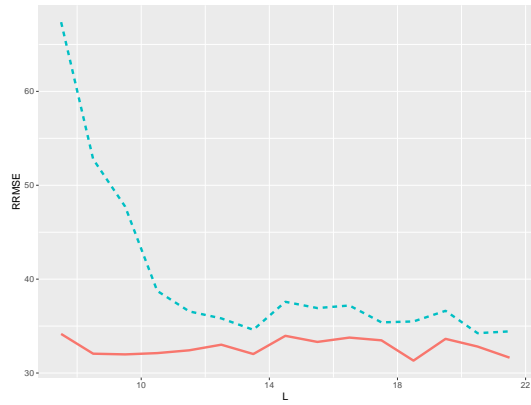
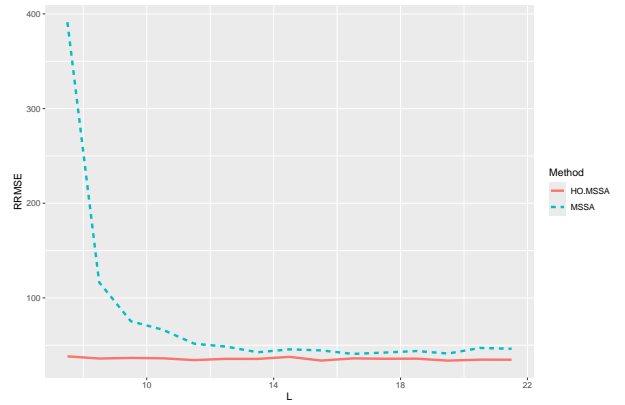
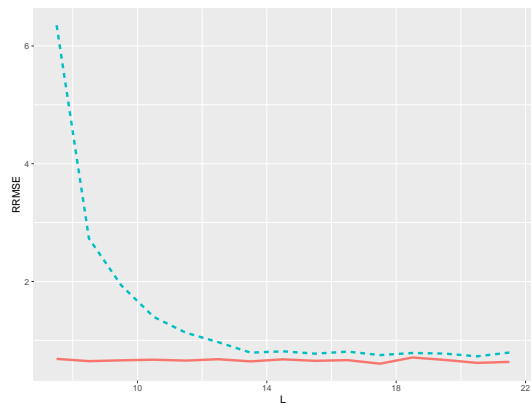
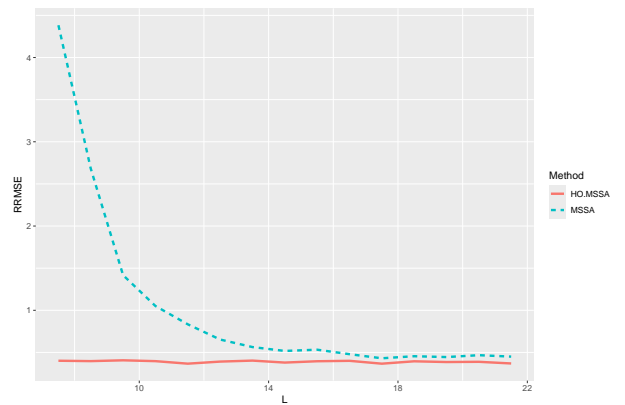
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(в) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 7. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 3.

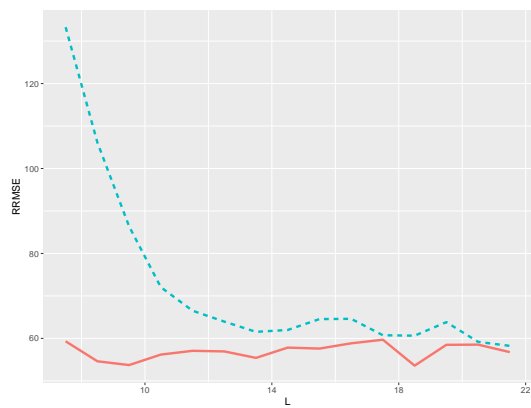
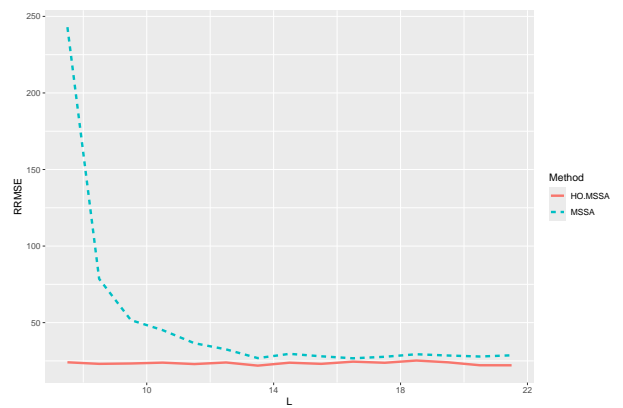
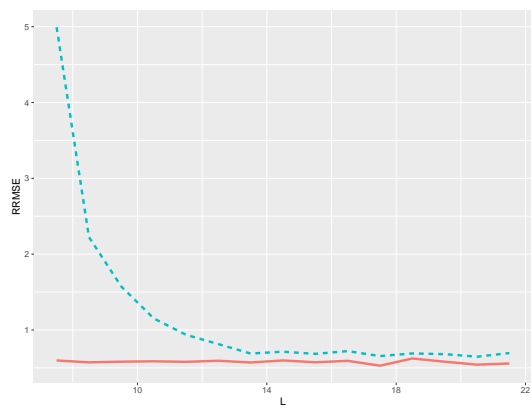
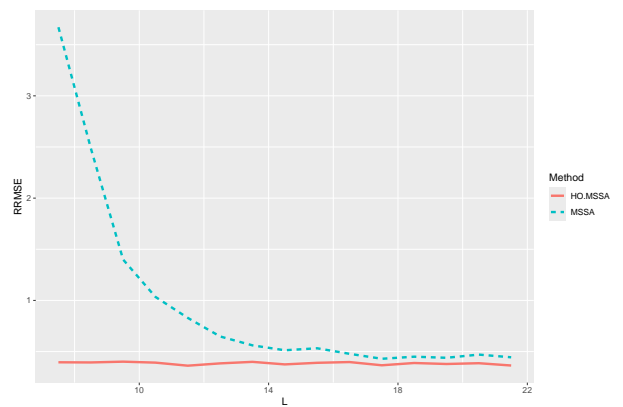
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(в) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 8. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 4.

## Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»–SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
3. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage / Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin Heidelberg, 2020.
5. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
6. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
7. Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.
8. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.