

Пусть элементы одномерного временного ряда \mathbf{X} длины N имеют вид

$$x_n = \sum_{i=1}^M a_i e^{-\alpha_i n} \cos(2\pi n \omega_i + \varphi_i),$$

где $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\omega_i \in (0, 1/2]$, $\varphi_i \in [0, 2\pi)$.

Теорема 1. В условиях выше алгоритм *ESPRIT* способен точно оценить параметры ω_i при отсутствии шума тогда и только тогда, когда $\omega_i \neq \omega_j \forall i \neq j$ и $\min(L, K) > \text{rank}(\mathbf{X})$ [?].

Замечание 1. Условия предыдущей теоремы равносильны тому, что в пространстве подрядов \mathbf{X} длины L существует базис из векторов вида

$$\left\{ (e^{-\alpha} \cos(2\pi n \omega))_{n=1}^L, \omega \in \Omega, \alpha \in A \right\},$$

$$\left\{ (e^{-\alpha} \sin(2\pi n \omega))_{n=1}^L, \omega \in \Omega \setminus \{1/2\}, \alpha \in A \right\},$$

где Ω и A — множества всех частот ω_i и степеней затухания α_i соответственно, присутствующих в ряде.

Рассмотрим преобразование исходного одномерного ряда \mathbf{X} в многомерный ряд \mathbf{X}_D , в котором i -й элемент ряда $\mathbf{X}_D^{(d)}$ выбирается как $x_n^{(d)} = x_{(n-1)D+d}$. То есть ряд с номером d строится выбором каждой D -й точки исходного ряда, начиная с элемента x_d и имеет длину $N_D = \lfloor N/D \rfloor$. Это преобразование будем называть *Dstack*. Визуализация представлена на рисунке 1.

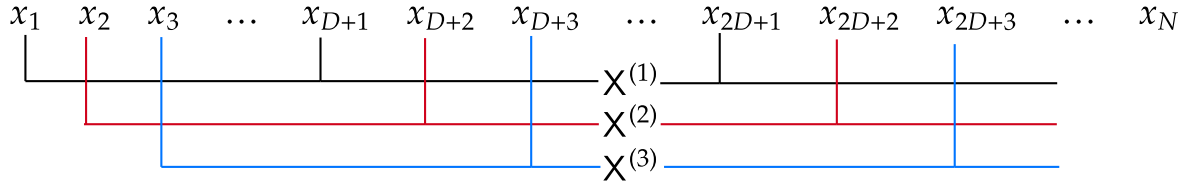


Рис. 1: Визуализация *Dstack* преобразования одномерного ряда в многомерный.

Теорема 2. Рассмотрим алгоритмы *ESPRIT* и *HO-ESPRIT* для многомерных рядов с выбором длины окна L , применённые к результату преобразования *Dstack* одномерного ряда \mathbf{X} с параметром D . Тогда между частотами ω в исходном ряде и оценками $\tilde{\omega}$ частот преобразованного ряда существует взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда

1. $\omega_i \neq \omega_j \forall i \neq j$,
2. $\min(L, N_D - L + 1) > \text{rank}(\mathbf{X})$
- 3.

$$\max_{\omega \in \Omega} \omega \leq \frac{1}{2D},$$

причём это соответствие задаётся выражением

$$\omega = \frac{|\tilde{\omega}|}{D}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что указанные условия равносильны тому, что в пространстве подрядов $\mathbf{X}_D^{(d)}$ длины L существует базис из векторов вида

$$\left\{ \left(e^{-\alpha n} \cos(2\pi n D \omega) \right)_{n=1}^L, \omega \in \Omega, \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \\ \left\{ \left(e^{-\alpha n} \sin(2\pi n D \omega) \right)_{n=1}^L, \omega \in \Omega \setminus \{1/2\}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Элементы ряда $\mathbf{X}_D^{(d)}$ имеют вид

$$x_n^{(d)} = \sum_{i=1}^M a_i e^{-\alpha_i((n-1)D+d)} \cos(2\pi((n-1)D+d)\omega_i + \varphi_i) \\ = \sum_{i=1}^M a_i e^{-\alpha_i(d-D)} e^{-\alpha_i n D} \cos(2\pi n D \omega_i + \omega_i(d-D) + \varphi_i).$$

Тогда существование искомого базиса равносильно тому, что длина L каждого подряда больше размерности этого базиса, то есть больше $\text{rank}(\mathbf{X})$, и количество $K = N_D - L + 1$ таких подрядов тоже больше $\text{rank}(\mathbf{X})$. \square

Следствие. Из доказательства следует, что всегда существует взаимно однозначное соответствие между степенями затухания α исходного ряда и оценками степеней затухания $\tilde{\alpha}$ методами ESPRIT и HO-ESPRIT после применения преобразования Dstack, и это соответствие выражается как $\alpha = \tilde{\alpha}/D$.

Следствие. Так как в пространствах подрядов каждого ряда $\mathbf{X}_D^{(d)}$ существует нужный базис, то в методе HO-ESPRIT выбор параметра $R_3 < \text{rank}_3(\mathcal{X}_D)$, где \mathcal{X}_D — траекторный тензор \mathbf{X}_D , не даёт смещения в оценке параметров. Это отличительная особенность задачи оценки параметров, в задаче выделения сигнала выбор $R_3 < \text{rank}_3(\mathcal{X})$ даёт смещение всегда.