

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика

Учебная практика 2 (проектно-технологическая) (семестр 3)

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА»

Выполнил:

Хромов Никита Андреевич

24.М22-мм

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор

Голяндина Н. Э.

# Оглавление

1.	Введение . . . . .	4
2.	Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT . . . . .	7
2.1.	SSA . . . . .	7
2.2.	MSSA . . . . .	10
2.3.	ESPRIT . . . . .	12
3.	Основы теории тензорных разложений . . . . .	13
3.1.	Ранги тензоров и тензорные разложения . . . . .	13
3.2.	HOSVD . . . . .	15
3.3.	Свойства HOSVD . . . . .	16
3.4.	Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера . . . . .	18
4.	Описание метода HO-SSA . . . . .	20
4.1.	HO-SSA для разделения компонент сигнала . . . . .	20
4.2.	HO-SSA для выделения сигнала из ряда . . . . .	22
4.3.	Свойства HO-SSA . . . . .	22
5.	Описание метода HO-MSSA . . . . .	23
5.1.	HO-MSSA для разделения компонент сигнала . . . . .	23
5.2.	HO-MSSA для выделения сигнала . . . . .	24
5.3.	Свойства HO-MSSA . . . . .	25
6.	Описание метода HO-ESPRIT . . . . .	26
6.1.	Выбор параметра усечения третьего направления в алгоритмах HO-ESPRIT и HO-M-ESPRIT . . . . .	27
7.	Алгоритмы с использованием Dstack . . . . .	29
8.	Трудоёмкость алгоритмов . . . . .	30
8.1.	Трудоёмкость методов семейства SSA . . . . .	30
8.2.	Трудоёмкость тензорных методов . . . . .	31
9.	Численные сравнения в задаче оценки параметров . . . . .	33
9.1.	Одномерный случай . . . . .	33
9.2.	Многомерный случай . . . . .	36
10.	Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA . . . . .	39
10.1.	Выделение вещественного сигнала . . . . .	40

10.2.	Выделение комплексного сигнала . . . . .	41
11.	Численные сравнения в задаче выделения многомерных комплексных сигналов . . . . .	42
12.	Зависимость точности HO-MSSA от количества каналов . . . . .	43
13.	Численные сравнения методов Dstack со стандартными . . . . .	47
13.1.	Задача оценки параметров сигнала . . . . .	48
13.2.	Задача выделения сигнала . . . . .	48
14.	Другие варианты применения тензорных разложений в задаче выделения сигнала . . . . .	50
14.1.	Тензорный SSA с использованием $(L_r, L_r, 1)$ -разложения . . . . .	50
14.2.	Тензорный SSA с использованием CPD . . . . .	51
14.3.	Tensor SSA с использованием T-SVD . . . . .	52
15.	Заключение . . . . .	53
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>54</b>

## 1. Введение

Singular spectrum analysis (SSA) [1] является распространённым методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и разделения аддитивных компонент сигнала из временного ряда. SSA относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала, и заключается в сингулярном разложении особой матрицы, построенной по временному ряду и называемой траекторной.

В работах [2, 3] предлагается тензорная модификация метода SSA для решения задачи выделения сигнала, которая основана на некотором тензорном разложении траекторного тензора, построенного по временному ряду. В работе [4] предлагается похожая тензорная модификация метода ESPRIT [5] для решения задачи оценки частот периодических компонент сигнала в особой модели. Те же авторы в работе [6] предлагают тензорную модификацию метода ESPRIT, в которой по одномерному временному ряду строится многомерный, и далее к нему применяется стандартный алгоритм для многомерных рядов. В перечисленных работах утверждается преимущество тензорных модификаций над стандартным SSA.

Существует множество видов тензорных разложений, например каноническое (CPD) [7, 8] и Таккера (Tucker) [9]. Частным случаем разложения Таккера является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD) [10], которое также позволяет искать наилучшее приближение (усечением разложения).

В моей выпускной квалификационной работе бакалавра [11] была реализована тензорная модификация метода SSA с использованием тензорного разложения, в некотором смысле расширяющего SVD, и было проведено сравнение с методом SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала, а также было рассмотрено расширение метода SSA на многомерные ряды — метод MSSA [12], сформулирована и реализована тензорная модификация этого метода и проведено сравнение её с другими методами семейства SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала. В качестве метода разложения тензоров был выбран метод HOSVD, который имеет наибольшее число свойств, справедливых для SVD. В качестве языка программирования для реализаций алгоритмов был выбран язык R.

Способ построения траекторного тензора и его разложение были выбраны из предложенных в статье [4], однако в отличие от этой статьи, в данной работе изучается также применение выбранных средств в задаче выделения сигнала из временного ряда

и в задаче разделения компонент сигнала.

Все рассматриваемые в работе [11] сигналы были вещественнозначными. Однако методы семейства SSA допускают и комплекснозначные сигналы. Метод SSA при применении к комплексным рядам называют CSSA (Complex SSA). Специфика CSSA заключается в замене матричного транспонирования на эрмитово сопряжение. Кроме того, аналогом вещественного гармонического ряда, имеющего ранг 2 в терминах SSA, является экспонента с комплексным аргументом, которая имеет ранг 1 в терминах CSSA.

В работе [11] было показано, что в вещественном случае тензорные методы выделения и разделения компонент одномерных сигналов имеют меньшую точность, чем SSA, а для многомерных сигналов наблюдалось преимущество тензорных методов. Целью этой работы является продолжение изучения тензорных модификаций алгоритмов, основанных на подпространстве сигнала с точки зрения наличия у них преимущества над стандартными матричными методами. В частности, в этой работе рассматриваются точность тензорных методов в задаче выделения вещественных и комплексных сигналов и в задаче оценки параметров сигнала, а также модификация метода HO-SSA с усечением лишь части направлений и модификации методов HO-ESPRIT и HO-SSA с использованием оператора  $D_{\text{stack}}$ . В качестве тензорного метода оценки параметров сигнала были выбраны и реализованы модификации алгоритма ESPRIT, предложенные в работах [4, 6].

В разделе 2 приведено описание методов SSA, MSSA и ESPRIT, а также некоторые их известные свойства и важные определения. В разделе 3 приведено описание некоторых тензорных разложений, используемых в работе, а также их свойства, необходимые для доказательства ключевых утверждений о тензорных модификациях методов семейства SSA. В разделе 4 представлено описание тензорной модификации метода SSA — HO-SSA (Higher-Order SSA), и приведены некоторые определения и утверждения, используемые далее в работе. В разделе 5 описывается метод HO-MSSA для выделения сигнала и разделения компонент и некоторые его свойства. В разделе 6 описывается тензорная модификация метода ESPRIT, которую будем называть HO-ESPRIT. В разделе 7 приведено описание и свойства модификаций методов HO-SSA и HO-ESPRIT с использованием оператора  $D_{\text{stack}}$ . В разделе 8 тензорные модификации рассматриваются с точки зрения вычислительной трудоёмкости и сравниваются со стандартными методами. В разделе 9 исследуется метод HO-ESPRIT с точки зрения наличия преиму-

щества в точности оценки параметров сигнала над методом ESPRIT. Это исследование дополняет результаты работы [4] рассмотрением сигналов с различными вариантами степеней затухания а также рассмотрением различных параметров длин окна. В разделе 10 исследуется влияние выбора направлений усечения в алгоритме HO-SSA на точность выделения сигнала из временного ряда. В разделе 11 методы HO-SSA и HO-MSSA рассматриваются с точки зрения точности в задаче выделения комплексных сигналов. В разделе 12 приведены численные сравнения методов MSSA и HO-MSSA, исследующие зависимость преимущества тензорного метода от количества каналов многомерного ряда. В разделе 13 приведены численные сравнения стандартных методов ESPRIT и SSA с их Dstack модификациями с точки зрения точности в задачах оценки параметров сигнала и выделения сигнала соответственно. Это исследование дополняет результаты работы [6] рассмотрением задачи выделения сигнала и оценки параметров в вещественном случае. В разделе 14 приведён краткий обзор научных работ, в которых предлагаются различные тензорные модификации методов, основанных на подпространстве сигнала. Эти статьи могут оказаться полезны для дальнейшего изучения тензорных модификаций методов семейства SSA.

В результате работы в этом семестре были добавлены разделы 8 и 12.

## 2. Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

### 2.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 2.1** (Оператор вложения). Оператором вложения  $\mathcal{T}_L$  с длиной окна  $L$  будем называть отображение, переводящее временной ряд  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $N \geq L$ , в ганкелеву матрицу  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $K = N - L + 1$ , такую, что  $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$ . Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{T}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

**Определение 2.2** (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L < N$  называют матрицу  $\mathbf{X} = \mathcal{T}_L(\mathbf{X})$ .

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы сигнала, состоящего из временных рядов  $\mathbf{X}_k$ , и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{E} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов  $\mathbf{X}_k$ . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения  $\mathbf{S}$ .

**Определение 2.3** (SSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется SSA-рангом временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq (N + 1)/2$  и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

---

**Алгоритм 1** SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ ,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение  $\mathbf{X} = \mathcal{T}_L(\mathbf{X})$ .
- 2: Разложение: применение SVD к  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H, \quad R \leq d \leq \min(L, N - L + 1),$$

где верхний индекс  $H$  обозначает эрмитово сопряжение матрицы.

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по матрицам  $\mathbf{X}_k$  посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1 : N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N - L + 1, i + j - 1 = n \right\}.$$

---

**Алгоритм 2** SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{S}}$  — оценка сигнала  $\mathbf{S} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ .

- 1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 1.
- 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 1.
- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^H.$$

- 4: Восстановление ряда  $\tilde{\mathbf{S}}$  по матрице  $\tilde{\mathbf{S}}$  посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ .
-



*Замечание 2.1.* В качестве параметра  $R$  в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

**Пример 2.1.** Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-ранги.

1. Ранг полиномиального ряда  $x_n = Q_d(n)$ , где  $Q_d$  — многочлен степени  $d$ , равен  $d+1$ .
2. Ранг экспоненциального ряда  $x_n = Ce^{\alpha n}$ , где  $C, \alpha \in \mathbb{C}$  и  $C \neq 0$ , равен 1.
3. Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^M C_j e^{\alpha_j n},$$

где  $C_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$  и  $C_j \neq 0$  при всех  $j$ , равен количеству уникальных значений  $\alpha_j$ .

4. Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где  $C \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\omega \in [0, 1/2]$ , равен  $r(\omega)$ , где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

5. Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^M Ce^{\alpha_j n} \cos(2\pi n\omega_j + \psi_j)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i, \alpha_i)$ , представленных в данном временном ряде.

*Замечание 2.2.* В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi i\omega n + \varphi} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi}}{2},$$

где  $i$  обозначает мнимую единицу, вещественнозначные временные ряды из пунктов 4 и 5 являются частным случаем комплексного ряда из пункта 3.

**Определение 2.4** (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  и  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$  называют слабо  $L$ -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} (\tilde{x}_{j+k})^H = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, \\ 2. \quad & \sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} (\tilde{x}_{j+k})^H = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}, \end{aligned}$$

где верхний индекс  $H$  обозначает комплексное сопряжение.

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 2.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

## 2.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [13, 14, 12].

Пусть дан  $M$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_M), \\ \mathbf{X}_m &= \left( x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_N^{(m)} \right)^T. \end{aligned}$$

**Определение 2.5** (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть  $\mathbf{X}_m = \mathcal{T}_L(\mathbf{X}_m)$ ,  $m \in \overline{1 : M}$ . Траекторной матрицей многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  называется матрица  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KM}$ ,  $K = N - L + 1$ , построенная соединением матриц  $\mathbf{X}_m$  по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_M].$$

**Определение 2.6** (Оператор вложения многомерного временного ряда). Отображение  $\mathbf{X} \xrightarrow{L} \mathbf{X}$  будем обозначать  $\mathcal{T}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$  и называть его оператором вложения многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$ .

*Замечание 2.3.* Оператор вложения из определения 2.1 является частным случаем оператора вложения многомерного временного ряда ( $M = 1$ ).

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

**Определение 2.7** (MSSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется MSSA-рангом  $M$ -мерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq M(N+1)/(M+1)$ , и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, M(N-L+1))$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание 2.4.* Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

**Пример 2.2.** Рассмотрим  $M$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  с элементами  $x_n^{(m)}$ .

1. Если элементы этого ряда имеют вид

$$x_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{R(m)} a_j^{(m)} e^{\alpha_j^{(m)} n}, \quad (2)$$

где  $a_j^{(m)}, \alpha_j^{(m)} \in \mathbb{C}$  и  $a_j^{(m)} \neq 0$ , то MSSA ранг  $\mathbf{X}$  равен количеству уникальных значений  $\alpha_j^{(m)}$  в ряде.

2. Если элементы этого ряда имеют вид

$$x_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{R(m)} a_j^{(m)} e^{\alpha_j^{(m)} n} \cos(2\pi\omega_j^{(m)} n + \varphi_j^{(m)}), \quad (3)$$

где  $a_j^{(m)}, \alpha_j^{(m)}, \omega_j^{(m)}, \varphi_j^{(m)} \in \mathbb{R}$  и  $a_j^{(0)} \neq 0$ , то MSSA-ранг  $\mathbf{X}$  равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где функция  $r(\omega)$  определена в уравнении (1), а  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)})$ , представленных в данном временном ряде. Стоит заметить, что как и в замечании 2.2, вещественнозначный временной ряд (3) является частным случаем комплексного ряда (2).

*Замечание 2.5.* В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HO-MSSA на многомерных сигналах вида (3) и (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры  $R(m)$ ,  $\omega_i^{(m)}$  и  $\alpha_i^{(m)}$  не зависят от номера ряда  $m$ , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [15]. Кроме того, в работе [4] также рассматривается этот частный случай модели.

**Определение 2.8** (Слабая MSSA-разделимость).  $M$ -мерные временные ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  называются слабо  $L$ -разделимыми, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(m)} \left( \tilde{x}_{j+k}^{(m')} \right)^H = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, m, m' \in \overline{1 : M},$
2.  $\sum_{m=1}^M \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(m)} \left( \tilde{x}_{m+i}^{(m)} \right)^H = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 2.2.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

### 2.3. ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [5, 4].

Пусть элементы многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  имеют вид

$$x_n^{(m)} = s_n^{(m)} + \xi_n^{(m)} = \sum_{j=1}^J a_j^{(m)} e^{\alpha_j n} e^{i2\pi\omega_j n} + \xi_n^{(m)}, \quad (4)$$

где  $s_n^{(m)}$  — элементы сигнала,  $\xi_n^{(m)}$  — элементы шума, а параметрами модели являются амплитуды  $a_j^{(m)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , частоты  $\omega_j \in (-1/2, 1/2]$  и степени затухания  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ . Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания  $\alpha_j$  и частот  $\omega_j$  многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4).

---

**Алгоритм 3** ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 1
- 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 1
- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\uparrow = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где  $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_R]$ , запись  $\mathbf{U}^\uparrow$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

- 4: Нахождение собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_{j'}$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , возможно с точностью до некоторой перестановки  $j = S(j')$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$


---

*Замечание 2.6.* Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма  $R$  рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

*Замечание 2.7.* Алгоритм 3 применим и для одномерных временных рядов ( $M = 1$ ).

В дальнейшем в работе ESPRIT будет обозначать одномерный вариант алгоритма 3, а M-ESPRIT — многомерный.

### 3. Основы теории тензорных разложений

Под тензорами в данной работе подразумеваются  $M$ -мерные массивы. Элементы тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  обозначаются  $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$ . Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [16, 10, 17, 18, 19, 20]. Термины на русском языке взяты из работы [21].

#### 3.1. Ранги тензоров и тензорные разложения

Для определения канонического тензорного разложения и разложения Таккера вводятся следующие определения.

**Определение 3.1** (Тензорный ранг).

1. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  имеет тензорный ранг, равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_M,$$

где  $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$ , а символ  $\circ$  обозначает тензорное произведение.

2. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  имеет ранг  $R$ , если он представим в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, и такое  $R$  минимально. Обозначение:  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**Определение 3.2** (CPD). Представление тензора  $\mathcal{A}$  в виде линейной комбинации  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$  тензоров ранга 1 называется каноническим разложением этого тензора (CPD).

*Замечание 3.1.* Ранг тензора может зависеть от того, над каким полем рассматривается этот тензор:  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$  [17].

**Определение 3.3** ( $n$ -ранг тензора).  $n$ -рангом (модовым рангом) тензора  $\mathcal{A}$  называется размерность векторного пространства, порождённого  $n$ -столбцами (векторами  $n$ -го направления) этого тензора. Обозначается  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ .

*Замечание 3.2.* 1. В отличие от матричного случая,  $n$ -ранги тензора с количеством размеров больше 2 могут различаться.

2. В общем случае ранг тензора  $\mathcal{A}$  не равен его  $n$ -рангам, даже если они все равны между собой. Кроме того, всегда справедливо неравенство  $\text{rank}_n(\mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**Определение 3.4** ( $n$ -я матрица развёртки тензора). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , тогда  $n$ -я матрица развёртки этого тензора (матрица сечений) — это матрица  $[\mathbf{A}]_n$  (или  $\mathbf{A}_{(n)}$ ) размера  $I_n \times I_{n+1}I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$ , в которой элемент тензора  $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$  содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером, равным

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[ (i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

**Свойство 3.1** (Связь  $n$ -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению  $n$ ).  $n$ -столбцы тензора  $\mathcal{A}$  являются столбцами его  $n$ -й матрицы развёртки, и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}]_n).$$

**Определение 3.5** (Произведение тензора и матрицы по направлению). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ ,  $\mathbf{U}$  — матрица размера  $J_n \times I_n$  с элементами  $u_{ij}$ , тогда произведением тензора  $\mathcal{A}$  и матрицы  $\mathbf{U}$  по направлению  $n$  ( $\mathcal{A} \times_n \mathbf{U}$ ) называется тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_M$ , который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_M} u_{j_n i_n}.$$

**Определение 3.6** (Разложение Таккера). Пусть тензор  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  имеет  $n$ -ранги  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (5)$$

где тензор  $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$  называется ядром разложения,  $\mathbf{U}^{(k)} \in \mathbb{C}^{I_k \times J_k}$ ,  $J_k \geq R_k$ . Такое представление называется разложением Таккера.

*Замечание 3.3.* Разложение Таккера не единственно. Частным случаем этого разложения является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD), которое и будет рассматриваться в дальнейшем в этой работе по следующим причинам:

- HOSVD имеет наибольшее среди всех тензорных разложений число свойств, схожих со свойствами матричного сингулярного разложения (SVD), применяемого в алгоритмах SSA и MSSA;
- HOSVD позволяет находить наилучшее приближение тензора тензором с фиксированными  $n$ -рангами.

### 3.2. HOSVD

В этом разделе приведены определение разложения HOSVD и некоторые его свойства.

**Теорема 1** (Сингулярное разложение порядка  $M$ ). *Любой комплекснозначный тензор  $\mathcal{A}$  размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (6)$$

в котором

1.  $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)} : U_2^{(n)} : \dots : U_{I_n}^{(n)}]$  — унитарные матрицы,

2.  $\mathcal{Z}$  — комплекснозначный тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , в котором каждое сечение  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ , полученное фиксированием индекса  $i_n = \alpha$ , удовлетворяет следующим свойствам.

а. Полная ортогональность: сечения  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  и  $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$  ортогональны для всех возможных значений  $n, \alpha, \beta : \alpha \neq \beta$ :

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение.

б. Упорядоченность: сечения расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \quad (7)$$

для всех  $n \in \overline{1:M}$ .

**Определение 3.7** (Сингулярное разложение тензора). Разложение вида (6) называется сингулярным разложением тензора  $\mathcal{A}$  порядка  $M$  или HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .

**Определение 3.8** (Сингулярное число тензора). Обозначим  $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$  и будем называть  $\sigma_i^{(n)}$   $i$ -м сингулярным числом тензора  $\mathcal{A}$  по направлению  $n$ .

**Определение 3.9** (Сингулярный вектор тензора). Векторы  $U_i^{(n)}$  будем называть  $i$ -м сингулярным вектором тензора  $\mathcal{A}$  по направлению  $n$ .

*Замечание 3.4.* Представление (6) можно переписать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \quad (8)$$

Такое представление удобно для описания тензорных алгоритмов HO-SSA и HO-MSSA.

### 3.3. Свойства HOSVD

Многие свойства методов SSA и MSSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность некоторых свойств SSA и MSSA со свойствами HO-SSA и HO-MSSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.



Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ . Применением SVD ко всем матрицам сечений этого тензора вычисляются  $M$  матриц  $\mathbf{U}^{(n)}$ , составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Определим тензор  $\mathcal{Z}$  следующим образом

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 (\mathbf{U}^{(1)})^H \times_2 (\mathbf{U}^{(2)})^H \dots \times_M (\mathbf{U}^{(M)})^H,$$

Тогда исходный тензор  $\mathcal{A}$  можно представить в виде (6)

**Утверждение 3.1.** *Процедура, описанная выше, даёт HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .*

Из-за этой связи HOSVD с SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

**Свойство 3.2** (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому направлению определяются однозначно.
2. Если сингулярные числа по направлению  $n$  различны, то сингулярные векторы по направлению  $n$  определены с точностью до умножения на коэффициент единичной нормы. Другими словами, если вектор  $U_\alpha^{(n)}$  умножается на  $e^{i\theta}$ , то сечение  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должно быть умножено на обратный коэффициент  $e^{-i\theta}$ .
3. Сингулярные векторы по направлению  $n$ , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по направлению  $n$ , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией этих векторов. Соответствующие сечения  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должны быть пересчитаны обратным образом. Другими словами,  $\mathbf{U}^{(n)}$  можно заменить на  $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{Q}$  — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению  $\mathbf{U}^{(n)}$  на наборы сингулярных векторов по направлению  $n$ , соответствующих одинаковым сингулярным значениям по направлению  $n$ . При этом тензор  $\mathcal{Z}$  должен быть заменён на  $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$ .

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется с точностью до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

**Свойство 3.3** (Обобщение). HOSVD тензора является обобщением SVD в том смысле, что результат применения HOSVD к тензору с двумя размерами, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, с точностью до унитарных преобразований сингулярных векторов, отвечающих равным сингулярным числам, и соответствующих преобразований матрицы сингулярных значений.

**Свойство 3.4** (Связь  $n$ -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  вида (6), тогда, по определению, тензор сингулярных чисел  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех  $n \in \overline{1:M}$ . Обозначим  $r_n$  — наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$ . Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (9)$$

**Свойство 3.5** (Норма). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (6), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ ,  $n \in \overline{1:M}$ . Тогда справедливо равенство

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \|\mathcal{Z}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2$$

### 3.4. Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера

HOSVD позволяет получать приближение произвольного тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  некоторым тензором с заданными меньшими  $n$ -рангами  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ .

**Определение 3.10** (Ориентированная энергия). Ориентированной по направлению  $n$  энергией тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  в направлении вектора  $X \in \mathbb{C}^{I_n}$  единичной нормы называют выражение

$$\text{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^H[\mathbf{A}]_n\|^2.$$

**Свойство 3.6** (Оптимальность в терминах ориентированной энергии). Направления экстремальной ориентированной энергии по направлению  $n$  соответствуют сингулярным векторам по направлению  $n$ , причём значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по направлению  $n$ .

Это означает, что  $n$ -столбцы тензора  $\mathcal{A}$  содержат наибольшие вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ , и на это направление приходится  $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2$  энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по направлению  $n$  достигает экстремума в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U_1^{(n)}$ , с величиной  $\left(\sigma_2^{(n)}\right)^2$ , и так далее.

**Свойство 3.7** (Приближение). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (6), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ . Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших

сингулярных значений  $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$  для заданных  $I'_n$ ,  $n \in \overline{1:M}$ , то есть заменяя нулями соответствующие сечения тензора  $\mathcal{Z}$ . Тогда верно

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} (\sigma_{i_1}^{(1)})^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} (\sigma_{i_2}^{(2)})^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} (\sigma_{i_M}^{(M)})^2. \quad (10)$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Для тензоров эта связь принимает другой вид. Тензор, получаемый отбрасыванием наименьших сингулярных значений по направлению  $n$  будет иметь  $n$ -ранги  $(I'_1, I'_2, \dots, I'_M)$ , но в общем случае не будет наилучшим приближением при заданных ограничениях на  $n$ -ранги. Тем не менее, условие упорядоченности (7) подразумевает, что «энергия»  $\mathcal{A}$  в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям индексов направлений. Следовательно, если  $\sigma_{I'_n}^{(n)} \gg \sigma_{I'_n+1}^{(n)}$  (например, если  $I'_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ , то меньшие сингулярные значения по измерению  $n$  не существенны), то  $\hat{\mathcal{A}}$  всё ещё можно считать хорошим приближением  $\mathcal{A}$ . Ошибка ограничена выражением (10).

Одним из методов получения оптимального приближения тензора тензором малых рангов является алгоритм Higher-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [22, 23]. При заданных тензоре  $\mathcal{A}$  и наборе  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$  алгоритм решает задачу минимизации

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\| \rightarrow \min$$

относительно тензора  $\hat{\mathcal{A}}$  с заданными  $n$ -рангами  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ . Алгоритм HOOI является итерационным, в качестве начального приближения  $\mathcal{A}_0$  обычно используется усечение с нужными рангами HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ . Критерий остановки алгоритма на шаге  $k$ :  $\|\hat{\mathcal{A}}_{k-1} - \hat{\mathcal{A}}_k\| < \varepsilon$  для некоторого заданного  $\varepsilon$ , либо  $k \geq N$  для некоторого заданного  $N$ .

### Свойство 3.8.

1. Алгоритм HOOI не гарантирует сходимости к глобальному минимуму выражения

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}_k\|.$$

2. На практике алгоритм HOOI обычно демонстрирует линейную скорость сходимости, но его теоретическая скорость сходимости может быть и нелинейной в зависимости от конкретных условий [24].

## 4. Описание метода HO-SSA

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 4.1** (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $L, K : 1 < L, K < N, L + K < N + 1$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размера  $L \times K \times M$ ,  $M = N - L - K + 2$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkm} = x_{l+k+m-2} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, m \in \overline{1:M}.$$

Оператор построения траекторного тензора по одномерному ряду с параметрами  $L, K$  будем обозначать  $\mathcal{T}_{\text{T-SSA}}^{(L,K)}(\mathbf{X}) = \mathcal{X}$

*Замечание 4.1.* Траекторный тензор  $\mathcal{X}$  является ганкелевым [25].

Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}_{j..} = \mathcal{A}_{i_1=j}, \quad \mathcal{A}_{.j.} = \mathcal{A}_{i_2=j}, \quad \mathcal{A}_{..j} = \mathcal{A}_{i_3=j}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 2.1 сечения траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $L, K$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{..m} &= \mathcal{T}_L \left( (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+L+K-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{.k.} &= \mathcal{T}_L \left( (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+K+M-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{l..} &= \mathcal{T}_K \left( (x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+K+M-2}) \right). \end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд  $\mathbf{X}$  и параметры  $L, K : 1 < L, K < N, L + K < N + 1$ . Так как при замене одного из этих параметров на  $M = N - L - K + 2$  или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки  $(L, K, M)$  без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

### 4.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы сигнала  $\mathbf{S}$ , состоящего из временных рядов  $\mathbf{X}_g$ , и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{E} = \sum_{g=1}^G \mathbf{X}_g + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов  $\mathbf{X}_g$ . Метод HO-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 4.

---

**Алгоритм 4** HO-SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L, K : 1 < L, K < N$ ,  $L + K < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $G$ ,  $R_1, R_2, R_3 : G \leq R_p \leq I_p$ , где  $I_1 = L$ ,  $I_2 = K$ ,  $I_3 = N - L - K + 2$ ,  $\mathfrak{S}_1^{(p)}, \dots, \mathfrak{S}_G^{(p)}$ :

$$\{1, 2, \dots, R_p\} = \bigcup_{g=1}^G \mathfrak{S}_g^{(p)} \quad \mathfrak{S}_g^{(p)} \cap \mathfrak{S}_l^{(p)} = \emptyset, \quad g \neq l, \quad p \in \{1, 2, 3\}.$$

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\mathbf{X}}_2, \dots, \hat{\mathbf{X}}_G$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_G$ .

- 1: Вложение: построение траекторного тензора  $\mathcal{X} = \mathcal{T}_{\text{T-SSA}}^{(L,K)}(\mathbf{X})$ .
- 2: Разложение: применение HOSVD или HOOI с параметрами  $n$ -рангов  $R_1, R_2, R_3$  к  $\mathcal{X}$

$$\hat{\mathcal{S}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{m=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}. \quad (11)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\hat{\mathcal{X}}^{(g)} = \sum_{l \in \mathfrak{S}_g^{(1)}} \sum_{k \in \mathfrak{S}_g^{(2)}} \sum_{m \in \mathfrak{S}_g^{(3)}} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов  $\hat{\mathbf{X}}_g$  по тензорам  $\hat{\mathcal{X}}^{(g)}$  посредством их усреднения вдоль плоскостей  $l + k + m = \text{const}$ :

$$\hat{x}_n^{(g)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(l,k,m) \in \mathfrak{M}_n} \hat{\mathcal{X}}_{lkm}^{(g)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (l, k, m) \mid 1 \leq l \leq L, 1 \leq k \leq K, 1 \leq m \leq M, l + k + m - 2 = n \right\}.$$


---

*Замечание 4.2.* В алгоритме 4 и далее в работе под применением к тензору  $\mathcal{X}$  HOSVD с параметрами  $n$ -рангов  $R_1, R_2, R_3$  подразумевается усечение HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  с этими  $n$ -рангами.

**Определение 4.2.** Направлениями усечения траекторного тензора в алгоритме 4 будем называть множество  $\mathfrak{P} \subseteq \{1, 2, 3\}$  такое, что  $R_p < I_p$ , при  $p$  из  $\mathfrak{P}$ , и  $R_p = I_p$  иначе.

#### 4.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших  $n$ -рангов, которые задаются в качестве параметров алгоритма. Метод HO-SSA для выделения сигнала представлен в алгоритме 5.

---

**Алгоритм 5** HO-SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L, K : 1 < L, K < N$ ,  $L + K < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : K}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : M}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{S}}$  — оценка сигнала  $\mathbf{S}$ .

- 1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 4.
  - 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 4.
  - 3: Усреднение тензора  $\hat{\mathbf{S}}$  вдоль плоскостей  $l + k + m = \text{const}$ , в результате чего получается оценка сигнала  $\hat{\mathbf{S}}$ .
- 

*Замечание 4.3.* Направления усечения определены и для алгоритма 5.

#### 4.3. Свойства HO-SSA

В этом разделе приведены некоторые свойства метода HO-MSSA и вспомогательные определения.

**Теорема 2.** Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет конечный ранг  $d$  в терминах SSA (определение 2.3). Тогда для любых значений  $L$  и  $K$  таких, что

$$d \leq \min(L, K, N - L - K + 2), \quad (12)$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому направлению в HOSVD траекторного тензора  $\mathbf{X}$ , построенного по этому ряду с длинами окна  $L$  и  $K$ , будет равно  $d$ .

**Следствие.** Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HO-SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

## 5. Описание метода HO-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HO-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

### 5.1. HO-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два  $M$ -мерных временных ряда  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  длины  $N$  и  $X = \hat{X} + \tilde{X}$ .

**Определение 5.1** (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда  $X$  с длиной окна  $L : 1 < L < N$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $L \times K \times M$ ,  $K = N - L + 1$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkm} = x_{l+k-1}^{(m)} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, m \in \overline{1:M}.$$

Оператор построения траекторного тензора многомерного ряда с длиной окна  $L$  будем обозначать  $\mathcal{T}_{\text{T-MSSA}}^{(L)} = \mathcal{X}$

Из определения следует, что сечение  $\mathcal{X}_{..m}$  траекторного тензора с длиной окна  $L$  является траекторной матрицей ряда  $X^{(m)}$ , построенной по длине окна  $L$ . Пользуясь определением 2.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{..m} = \mathcal{T}_L(X^{(m)}).$$

**Утверждение 5.1.** Рассмотрим  $M$ -канальный временной ряд  $X$ . Пусть  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор этого ряда с длиной окна  $L$  размера  $L \times K \times M$ ,  $[X]_1$  и  $[X]_2$  — его первая и вторая матрицы развёртки соответственно. Тогда

1.  $[X]_1$  совпадает с траекторной матрицей  $X$ , построенной по длине окна  $L$ .
2.  $[X]_2$  совпадает с траекторной матрицей  $X$ , построенной по длине окна  $K$ .

*Доказательство.* По определению развёртки, матрицу  $[X]_1$  можно представить в блочном виде

$$[X]_1 = [\mathcal{X}_{..1} : \mathcal{X}_{..2} : \dots : \mathcal{X}_{..M}],$$

что совпадает с

$$[X]_1 = [\mathcal{T}_L(X^{(1)}) : \mathcal{T}_L(X^{(2)}) : \dots : \mathcal{T}_L(X^{(M)})],$$

что и является определением траекторной матрицы  $M$ -канального ряда.

Матрица  $[\mathbf{X}]_2$  представляется в виде

$$[\mathbf{X}]_2 = \left[ (\mathcal{X}_{..1})^T : (\mathcal{X}_{..2})^T : \dots : (\mathcal{X}_{..M})^T \right],$$

что совпадает с

$$[\mathbf{X}]_2 = \left[ \mathcal{T}_K(\mathbf{X}^{(1)}) : \mathcal{T}_K(\mathbf{X}^{(2)}) : \dots : \mathcal{T}_K(\mathbf{X}^{(M)}) \right].$$

□

Обозначим траекторные тензоры рядов  $\hat{\mathbf{X}}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L$   $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{X}$  соответственно. Метод HO-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров компонент  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$ . Описание метода приведено в алгоритме 6.

---

**Алгоритм 6** HO-MSSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ ,  $K = N - L + 1$ ,  $R_1, R_2, R_3 : R_p \leq I_m$ , где  $I_1 = L$ ,  $I_2 = K$ ,  $I_3 = M$ ,  $\hat{\mathfrak{S}}_p, \tilde{\mathfrak{S}}_p \subseteq \overline{1 : R_p} : \hat{\mathfrak{S}}_p \cap \tilde{\mathfrak{S}}_p = \emptyset$ ,  $p \in \{1, 2\}$ ,  $\hat{\mathfrak{P}}, \tilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : R_3}$

**Результат:**  $\hat{\mathring{\mathbf{X}}}, \tilde{\mathring{\mathbf{X}}}$  — оценки  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно.

- 1: Вложение: построение по ряду  $\mathbf{X}$  траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$ .
- 2: Разложение: применение HOSVD или HOOI с параметрами  $n$ -рангов  $R_1, R_2, R_3$  к  $\mathcal{X}$

$$\mathring{\mathcal{S}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{m=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}.$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\begin{aligned} \hat{\mathring{\mathcal{X}}} &= \sum_{l \in \hat{\mathfrak{S}}_1} \sum_{k \in \hat{\mathfrak{S}}_2} \sum_{m \in \hat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}, \\ \tilde{\mathring{\mathcal{X}}} &= \sum_{l \in \tilde{\mathfrak{S}}_1} \sum_{k \in \tilde{\mathfrak{S}}_2} \sum_{m \in \tilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkm} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_m^{(3)}. \end{aligned}$$

- 4: Восстановление: оценки рядов  $\hat{\mathbf{X}}^{(m)}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}^{(m)}$  получаются усреднением сечений  $\hat{\mathring{\mathcal{X}}}_{..m}$  и  $\tilde{\mathring{\mathcal{X}}}_{..m}$  соответствующих тензоров вдоль побочных диагоналей  $l + k = \text{const}$ .
- 

## 5.2. HO-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан  $M$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$ . Метод HO-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HO-SSA, сводится к получению как



можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших  $n$ -рангов. Описание метода приведено в алгоритме 7.

---

**Алгоритм 7** HO-MSSA для выделения сигнала

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(M)})^T$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : K}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : M}$ , где  $K = N - L + 1$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{S}}$  — оценка сигнала  $\mathbf{S}$ .

- 1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 6.
  - 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 6.
  - 3: Восстановление: сечения  $\mathring{\mathcal{S}}_{..m}$  усредняются вдоль побочных диагоналей  $l+k = \text{const}$  для получения оценок  $\hat{\mathbf{S}}^{(m)}$ .
- 

### 5.3. Свойства HO-MSSA

В этом разделе приведены некоторые свойства метода HO-MSSA и вспомогательные определения.

**Теорема 3.** Пусть  $\mathbf{X}$  —  $M$ -мерный временной ряд длины  $N$ , тогда справедливы следующие утверждения.

1.  $\mathbf{X}$  имеет ранг  $d$  в терминах теории MSSA (определение 2.7) тогда и только тогда, когда для траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по любой длине окна  $L < N$  такой, что  $d \leq \min(L, K)$  выполняется

$$\text{rank}_1(\mathcal{X}) = \text{rank}_2(\mathcal{X}) = d.$$

2. 3-ранг  $\mathcal{X}$  равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.

**Определение 5.2** (3-ранг многомерного ряда). 3-рангом многомерного ряда будем называть 3-ранг траекторного тензора этого ряда.

*Замечание 5.1.* Определение корректно, так как по построению траекторного тензора набор 3-столбцов этого тензора не зависит от выбора длины окна  $L$ , поэтому и 3-ранг траекторного тензора не зависит от выбора длины окна.

**Утверждение 5.2.** (О симметричности относительно замены длины окна) Пусть дан  $M$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  и выбрана некоторая длина окна  $L$ ,  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор этого ряда, построенный по длине окна  $L$ , а  $\mathcal{Y}$  — по длине окна  $K = N - L + 1$ , и пусть  $R_1, R_2, R_3$  — параметры, выбранные в третьем шаге алгоритма HO-MSSA, соответствующие  $\mathcal{X}$ , а  $R'_1, R'_2, R'_3$  — соответствующие  $\mathcal{Y}$ . Тогда если  $R_1 = R'_1, R_2 = R'_2, R_3 = R'_3$ , то оценки сигнала  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , построенные по  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  соответственно, совпадут.

*Замечание 5.2.* В отличие от метода HO-SSA, в методе HO-MSSA усечение траекторного тензора лишь по части направлений не имеет обоснования. Третье направление траекторного тензора имеет смысл, отличный от первых двух, и при отсутствии усечения по третьему направлению в восстановленный сигнал войдёт множество шумовых компонент этого направления. Так как матрицы сечения третьего направления траекторного тензора являются траекторными матрицами одномерных рядов, то усечение первых двух направлений имеет смысл схожий, с усечением матрицы сингулярных чисел в методе SSA. В силу диагональности матрицы сингулярных чисел, в SSA нет разницы в усечении этой матрицы по столбцам, строкам или в обоих направлениях. Однако в отличие от матрицы сингулярных чисел, тензор сингулярных чисел не обязан быть диагональным, из-за чего при отсутствии усечения по одному из направлений, в восстановленный сигнал войдёт множество шумовых компонент этого направления.

## 6. Описание метода HO-ESPRIT

Пусть  $\mathbf{X}$  — одномерный ( $M = 1$ ) или многомерный ( $M > 1$ ) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\bar{L} = \begin{cases} (L, K), & M = 1, \\ L, & M > 1, \end{cases}$$

а  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор ряда  $\mathbf{X}$ , построенный с длиной (длинами) окна из  $\bar{L}$ . Также определим область допустимых параметров  $\bar{L}$ :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(L, K) : 1 < L, K < N, L + K < N + 1\}, & M = 1, \\ \{L : 1 < L < N\}, & M > 1. \end{cases}$$

Описание метода HO-ESPRIT приведено в алгоритме 8. Обоснование метода можно найти в работе [4].

---

**Алгоритм 8** HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $\bar{L} \in \mathcal{D}$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$  — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров,  $R_1, R_2, R_3 : R_p \leq I_p$ , где  $I_1 = L$ ,  $I_2 = K$ ,  $I_3 = N - L - K + 2$  при  $M = 1$ , и  $I_1 = L$ ,  $I_2 = N - L + 1$ ,  $I_3 = M$  при  $M > 1$ ,  $R : R \leq R_d$ .

**Результат:**  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  по ряду  $\mathbf{X}$  с параметрами из  $\bar{L}$ .
- 2: Применение HOSVD или HOOI с параметрами  $n$ -рангов  $R_1, R_2, R_3$  к  $\mathcal{X}$

$$\tilde{\mathcal{S}} = \sum_{i_1=1}^{R_1} \sum_{i_2=1}^{R_2} \sum_{i_3=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы  $\mathbf{U} = [U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \dots : U_R^{(d)}]$ .

- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\uparrow = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где запись  $\mathbf{U}^\uparrow$  обозначает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а запись  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.

- 4: Нахождение собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы  $\mathbf{Z}$ . Полученные собственные числа  $\lambda_{j'}$  считаются оценками экспонент  $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$ , возможно с точностью до некоторой перестановки  $j = S(j')$ , через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$


---

По аналогии с обозначениями для алгоритма 3, в дальнейшем HO-ESPRIT будет обозначать одномерный вариант алгоритма 8, а HO-M-ESPRIT — многомерный.

### 6.1. Выбор параметра усечения третьего направления в алгоритмах HO-ESPRIT и HO-M-ESPRIT

**Теорема 4.** Пусть элементы многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$  имеют вид

$$x_n^{(m)} = s_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{J(m)} a_j^{(m)} e^{-\alpha_j^{(m)} n} e^{i 2\pi n \omega_j^{(m)}},$$

где  $a_j^{(m)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha_j^{(m)} \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_j^{(m)} \in (-1/2, 1/2]$ . Пусть в алгоритме 8  $d \neq 3$ , а  $N$  и  $L$  такие, что  $\min(L, KM) > \text{rank}(\mathbf{X})$  при  $d = 1$  или  $\min(K, LM) > \text{rank}(\mathbf{X})$  при  $d = 2$ . Тогда результат алгоритма 8 совпадает с множеством пар параметров  $(\alpha_j^{(m)}, \omega_j^{(m)})$  при любом выборе  $R_3$ , если  $R_1, R_2 > \text{rank}(\mathbf{X})$ .

*Доказательство.* Пусть  $d = 1$  (для  $d = 2$  доказательство аналогичное). Достаточно доказать, что в пространстве, порождённом столбцами матрицы  $\mathbf{U}$  из 2-го шага алгоритма содержатся все векторы вида

$$\left\{ a_j^{(m)} e^{-\alpha_j^{(m)} n} e^{i2\pi n \omega_j^{(m)}} \right\}_{n=l}^{l+L-1}.$$

По построению траекторного тензора многомерного ряда, и по свойствам HOSVD, это следует из того, что все векторы первого направления траекторного тензора имеют вид

$$\left\{ \sum_{j=1}^{J^{(m)}} a_j^{(m)} e^{-\alpha_j^{(m)} n} e^{i2\pi n \omega_j^{(m)}} \right\}_{n=l}^{l+L-1},$$

и для любого  $m$  среди них найдётся вектор с соответствующим набором параметров  $\alpha_j^{(m)}$  и  $\omega_j^{(m)}$ .  $\square$

**Теорема 5.** Пусть элементы одномерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$  имеют вид

$$x_n = s_n = \sum_{j=1}^J a_j e^{-\alpha_j n} e^{i2\pi n \omega_j},$$

где  $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_j \in (-1/2, 1/2]$ , и пусть  $N$ ,  $L$  и  $K$  такие, что  $\min(I_d, I_{d'} I_{d''}) > \text{rank}(\mathbf{X})$ , где  $\{d', d''\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{d\}$ , а  $I_p$  имеют тот же смысл, что в алгоритме 8. Тогда результат алгоритма 8 совпадает с множеством пар параметров  $(\alpha_j, \omega_j)$  при любом выборе  $R_d$ , если и  $R_{d'}, R_{d''} > \text{rank}(\mathbf{X})$ .

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4.

**Следствие.** Для получения несмещённых оценок параметров методами HO-ESPRIT и HO-M-ESPRIT необязательно знать 3-ранг рассматриваемого сигнала. Более того, численно было получено, что выбор  $R_3 < \text{rank}_3(\mathbf{X})$  может дать прирост точности оценок.

Это свойство отличает задачу выделения сигнала от задачи оценки параметров, так как в задаче выделения сигнала при выборе параметра  $R_3 < \text{rank}_3(\mathbf{X})$  оценка сигнала всегда имеет смещение.

## 7. Алгоритмы с использованием Dstack

Пусть  $\mathbf{X}$  — одномерный временной ряд.

**Определение 7.1** (Dstack). Оператор, отображающий одномерный временной ряд  $\mathbf{X}$  в  $D$ -мерный ряд  $\mathbf{X}_D$  по принципу  $x_n^{(d)} = x_{(n-1)D+d}$  будем называть Dstack и обозначать  $\mathcal{D}_D(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_D$ .

В работе [6] авторы рассматривают задачу оценки параметров одномерного сигнала и предлагают преобразовывать одномерный временной ряд в многомерный при помощи оператора Dstack, и затем применять к полученному ряду алгоритм HO-M-ESPRIT. Авторы утверждают, что полученный метод имеет преимущество в точности над методом HTLSDstack, который заключается в применении M-ESPRIT к результату применения Dstack, а также имеет преимущество в производительности над стандартным алгоритмом ESPRIT.

В данной работе будут рассмотрены Dstack модификации методов оценки параметров ESPRIT и HO-ESPRIT, а также методов выделения сигнала SSA и HO-SSA. Описания методов HO-ESPRIT и HO-SSA с использованием Dstack приведены в алгоритмах 9 и 10 соответственно.

---

**Алгоритм 9** Dstack HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $D, L_D : 1 \leq D \leq N, 1 < L_D < N_D = \lfloor N/D \rfloor, d \in \{1, 2\}$  —

номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров,  $R_1, R_2, R_3 : R_p \leq I_p$ , где  $I_1 = L_D, I_2 = K_D = N_D - L_D + 1, I_3 = D, R : R \leq R_d$ .

**Результат:**  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\omega}_1), (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\omega}_2), \dots, (\tilde{\alpha}_R, \tilde{\omega}_R)$  — оценки параметров сигнала (4) ( $M = 1$ ).

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} = \left( \mathcal{T}_{\text{T-MSSA}}^{(L)} \circ \mathcal{D}_D \right) (\mathbf{X})$ .
  - 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 8.
  - 3: Совпадает с шагом 3 алгоритма 8.
  - 4: Совпадает с шагом 4 алгоритма 8.
  - 5: В качестве итоговых оценок параметров используются  $\tilde{\alpha}_j = \hat{\alpha}_j, \tilde{\omega}_j = \hat{\omega}_j/D$ , где  $\hat{\alpha}_j, \hat{\omega}_j$  — оценки, полученные на шаге 4.
- 

*Замечание 7.1.* По теореме Котельникова [26] и по определению оператора  $\mathcal{D}_D$  алгоритм 9 способен оценить параметры сигнала только если выполнено неравенство

$$\max_{\omega \in \Omega} |\omega| \leq \frac{1}{2D},$$

где  $\Omega$  — множество всех частот, представленных в сигнале.

---

**Алгоритм 10** Dstack HO-SSA для оценки комплекснозначного сигнала.

---

**Входные данные:**  $X, D, L_D : 1 \leq D \leq N, 1 < L_D < N_D = \lfloor N/D \rfloor, R_1 \in \overline{1:L}, R_2 \in \overline{1:K}, R_3 \in \overline{1:M}$ , где  $K = N - L + 1$ .

**Результат:**  $\hat{S}$  — оценка сигнала.

- 1: Построение траекторного тензора  $\mathcal{X} = \left( \mathcal{T}_{\text{T-MSSA}}^{(L)} \circ \mathcal{D}_D \right) (X)$ .
- 2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 6.
- 3: Совпадает с шагом 3 алгоритма 7.
- 4: Преобразование полученной на шаге 3 оценки  $D$ -мерного сигнала  $\hat{S}_D$  в одномерный сигнал

$$\hat{S} = \mathcal{D}_D^{-1}(\hat{S}_D).$$


---

*Замечание 7.2.* Выбор  $D = 1$  в обоих алгоритмах приведёт к стандартным методам ESPRIT и SSA соответственно.

*Замечание 7.3.* Таким же образом можно определить алгоритмы Dstack ESPRIT и Dstack SSA, если применить оператор Dstack к одномерному ряду, и использовать соответствующий метод анализа многомерных рядов.

*Замечание 7.4.* Теорема 5 о выборе параметра  $R_3$  применима и для Dstack варианта ESPRIT.

## 8. Трудоёмкость алгоритмов

В этом разделе рассматриваются и сравниваются методы SSA и MSSA с их тензорными модификациями с точки зрения вычислительной трудоёмкости по времени. Под порядком трудоёмкости понимается асимптотический порядок количества операций с плавающей точкой, выполняемых в ходе алгоритма. Во всех алгоритмах самым трудоёмким шагом является разложение, поэтому нахождение трудоёмкости каждого алгоритма сводится к нахождению трудоёмкости соответствующего шага разложения.

### 8.1. Трудоёмкость методов семейства SSA

Рассмотрим алгоритм Basic SSA с точки зрения его временной трудоёмкости. Для вычисления всех компонент SVD матрицы размера  $L \times K$ ,  $L \leq K$  требуется количество

операций порядка  $O(L^2K)$  [27, 28], что в худшем случае, когда  $L \sim K \sim N/2$ , превращается в порядок  $O(N^3)$ . В большинстве ситуаций на самом деле требуется вычислить лишь  $r$  компонент разложения, соответствующих наибольшему сингулярному числу. В этом случае при использовании метода Ланцоша нахождения сингулярных компонент порядок количества операций понижается до  $O(rLK + r^2(L + K))$ , что в худшем случае соответствует  $O(rN^2 + r^2N)$ .

В работе [29] было показано, что используя метод Ланцоша с эффективным умножением ганкелевой матрицы на вектор, можно снизить трудоёмкость сингулярного разложения траекторной матрицы до порядка  $O(r(L + K) \log(L + K) + r^2(L + K)) = O(rN \log(N) + r^2N)$ .

Таким образом, алгоритм Basic SSA имеет временную асимптотическую трудоёмкость порядка  $O(rN \log(N) + r^2N)$ . Кроме того, в статье [14] было показано, что тот же порядок трудоёмкости справедлив и для алгоритмов MSSA и 2D-SSA. В частности, это значит, что сингулярное разложение любой блочной матрицы с ганкелевыми блоками имеет трудоёмкость порядка  $O(rN^* \log(N^*) + r^2N^*)$ , где  $N^*$  — общее число элементов в исходном временном ряде (например  $N^* = NM$  для  $M$ -канального ряда длины  $N$ ).

## 8.2. Трудоёмкость тензорных методов

Большинство реализаций сводят вычисление HOSVD к вычислению SVD всех развёрток этого тензора (см. утверждение 3.1). Таким образом, трудоёмкость HOVSD произвольного тензора с  $m$  направлениями сводится к вычислению SVD  $m$  матриц.

**Случай одноканального временного ряда** Из определения 4.1 следует, что траекторный тензор  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{L \times K \times M}$  одномерного временного ряда является ганкелевым, и его развёртки по направлениям 1, 2 и 3 являются блочно-ганкелевыми матрицами размеров  $L \times KM$ ,  $K \times LM$  и  $M \times LK$  соответственно.

Авторы работы [30] обратили внимание на то, что развёртки ганкелевых тензоров содержат множество повторяющихся столбцов. Оставляя только уникальные столбцы в матрице приводит её к ганкелевому виду и не изменяет базис пространства столбцов, но существенно сокращает временные затраты SVD. Например, вычисление левых сингулярных векторов матрицы-развёртки первого направления размера  $L \times KM$  можно заменить вычислением левых сингулярных векторов ганкелевой матрицы размера

$L \times (K + M - 1)$ . Аналогичное верно для матриц-развёрток по остальным направлениям.

Следовательно, вычисления первых  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  компонент SVD матриц-развёрток траекторного тензора, приведённых к ганкелевому виду, имеют трудоёмкости порядка

1.  $O(r_1(L + K + M) \log(L + K + M) + r_1^2(L + K + M))$ ,
2.  $O(r_2(L + K + M) \log(L + K + M) + r_2^2(L + K + M))$ ,
3.  $O(r_3(L + K + M) \log(L + K + M) + r_3^2(L + K + M))$

соответственно. Итого, временная трудоёмкость HOSVD траекторного тензора одномерного ряда имеет порядок  $O((r_1 + r_2 + r_3)N \log(N) + N(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2))$ .

**Случай многоканального временного ряда** В отличие от одноканального случая, траекторный тензор  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{L \times K \times M}$   $M$ -канального ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$  не является ганкелевым. По утверждению 5.1 первая и вторая развёртки  $\mathcal{X}$  совпадают с  $L$ - и  $K$ -траекторными матрицами  $\mathbf{X}$  соответственно, поэтому сингулярные разложения этих развёрток имеют трудоёмкости порядка  $O(r_k MN \log(MN) + r_k^2 MN)$ ,  $k \in \{1, 2\}$ .

Третья развёртка траекторного тензора не имеет ганкелевых свойств. По построению, это матрица размера  $M \times LK$ , пространство столбцов которой совпадает с пространством столбцов матрицы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} (\mathbf{X}^{(1)})^T \\ (\mathbf{X}^{(2)})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{X}^{(M)})^T \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times N},$$

то есть матрицы, строки которой являются каналами исходного ряда. То есть вычисление левых сингулярных векторов третьей развёртки траекторного тензора можно свести к вычислению левых сингулярных векторов матрицы  $\mathbf{X}$ , что имеет трудоёмкость порядка  $O(r_3 MN + r_3^2(M + N))$ . Итого, общая трудоёмкость HOSVD траекторного тензора многоканального ряда имеет порядок  $O((r_1 + r_2)MN \log(MN) + (r_1^2 + r_2^2 + r_3)MN + r_3^2(M + N))$ .

Таким образом, методы HO-SSA и HO-MSSA имеют трудоёмкости сопоставимые по порядку с SSA и MSSA соответственно, но бóльшие по константе.



## 9. Численные сравнения в задаче оценки параметров

В этом разделе приведены сравнения методов ESPRIT и HO-ESPRIT по точности оценки параметров сигнала вида (4) в случае одномерных и многомерных рядов. В качестве показателя точности оценки была выбрана метрика относительного средне-квадратичного отклонения (RRMSE)

$$\text{RRMSE} = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\gamma - \hat{\gamma}_j|^2} \cdot 100\%, \quad (13)$$

где  $m$  — количество реализаций шума,  $\gamma$  — оцениваемый параметр,  $\hat{\gamma}_j$  — оценка параметра  $\gamma$  по ряду с  $j$ -й реализацией шума. Такой выбор был сделан для того, чтобы в дальнейшем сравнить результаты с результатами работы [4], в которой использовалась именно такая метрика для определения точности оценивания параметров. Стоит заметить, что алгоритму, который всегда оценивает  $\hat{\gamma} = 0$  соответствует значение  $\text{RRMSE} = 100\%$ .

### 9.1. Одномерный случай

Пусть  $M = 1$  и  $R = 2$ , то есть одномерный временной ряд  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{25})$  состоит из элементов вида

$$x_{n+1} = e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n, \quad (14)$$

где  $n \in \overline{0 : 24}$ ,  $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ , а  $\xi_n$  и  $\eta_n$  — последовательность независимых случайных величин из распределения  $N(0, \sigma^2/2)$ ,  $\sigma = 0.04$ . Случайные величины  $\zeta_n$  являются независимыми и их распределение называется кругосимметричным комплексным нормальным распределением (circularly-symmetric complex normal distribution) [31] с дисперсией  $\sigma^2$  и обозначается  $\text{CN}(0, \sigma^2)$ .

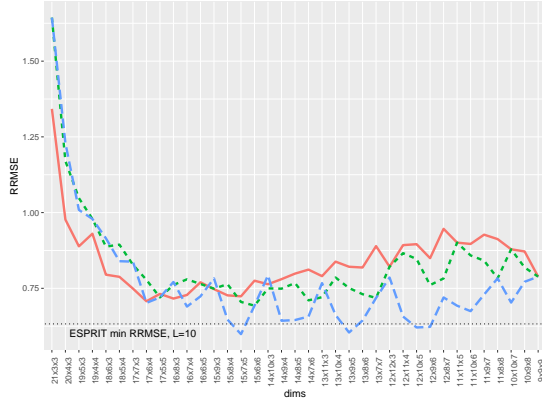
Пусть  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 0.22$ . Ниже приведены рассматриваемые варианты степеней затухания.

1.  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .
2.  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.01$ .
3.  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02$ .
4.  $\alpha_1 = -0.01$ ,  $\alpha_2 = -0.02$ .

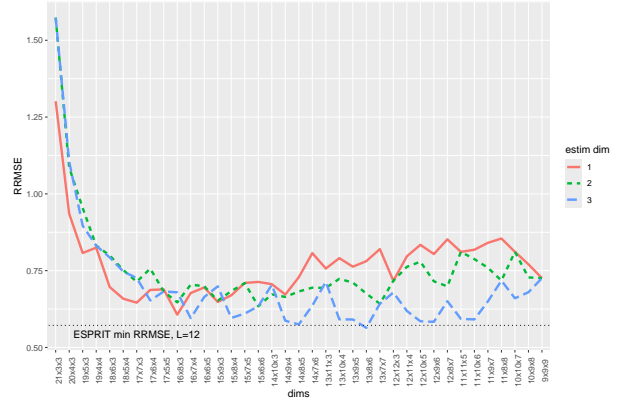
Такие параметры были выбраны, так как в статье [4] рассматривалась модель с такими частотами и степенями затухания из варианта 4. Во всех случаях ранг сигнала с такими параметрами будет равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два сингулярных вектора разложения из алгоритмов 3 и 8. В качестве способа разложения траекторного тензора был выбран метод HOOI, так как он даёт наиболее точное приближение тензора. В этом разделе RRMSE считалось по 500 реализациям шума.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок частот и степеней затухания, полученных методом HO-ESPRIT, от размеров траекторного тензора (ось  $x$ ) и выбора направления оценивания (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на рисунках изображены наименьшие по выбору длины окна  $L$  значения RRMSE соответствующего параметра, полученные методом ESPRIT.

Рисунки 1 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено (деление на  $|\gamma| = 0$  в формуле (13)). Рисунки 2, 3 и 4 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.



(a) RRMSE оценок  $\omega_1$ .



(б) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 1. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 1.

**Выводы из численных сравнений** В случае одномерных сигналов оценки методом HO-ESPRIT при оптимальном подборе параметров оказались не менее точными, чем оптимальные оценки стандартным методом ESPRIT. Кроме того, в некоторых ситуациях оптимальные оценки методом HO-ESPRIT оказываются точнее оптимальных оценок методом ESPRIT. Это соответствует результатам работы [4], в которой методы сравни-

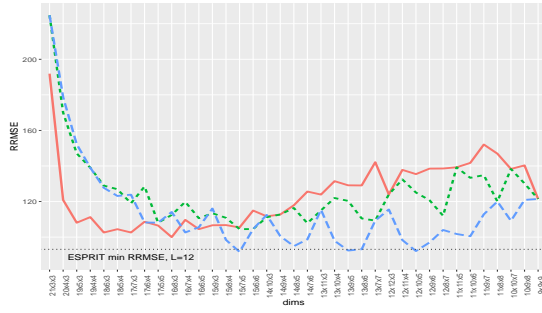
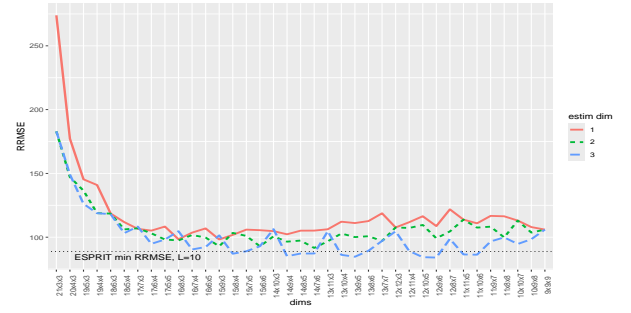
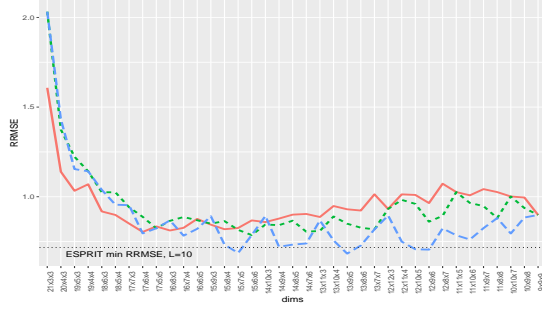
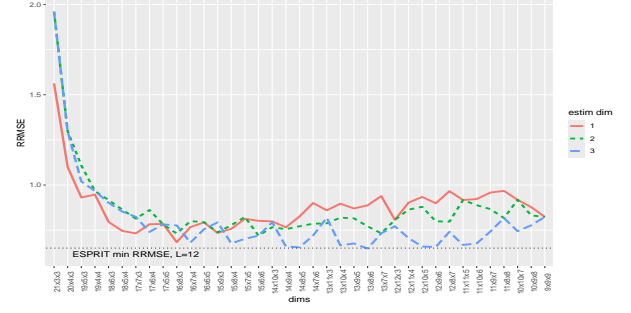
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 2. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 2.

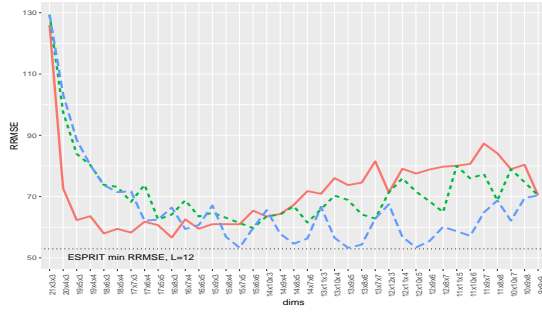
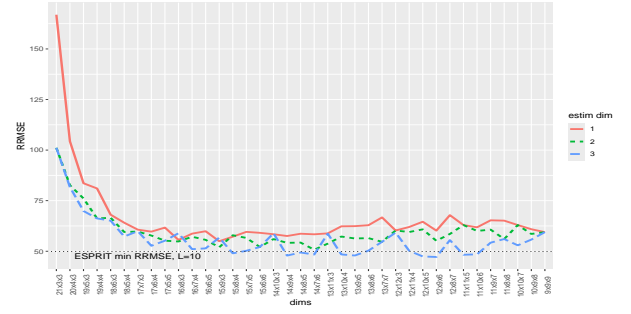
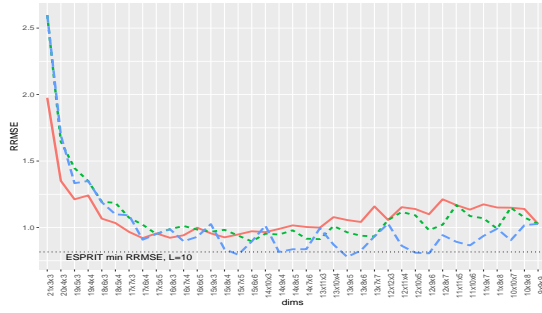
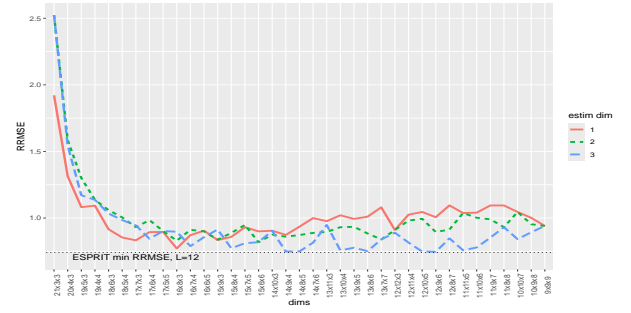
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(e) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 3. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 3.

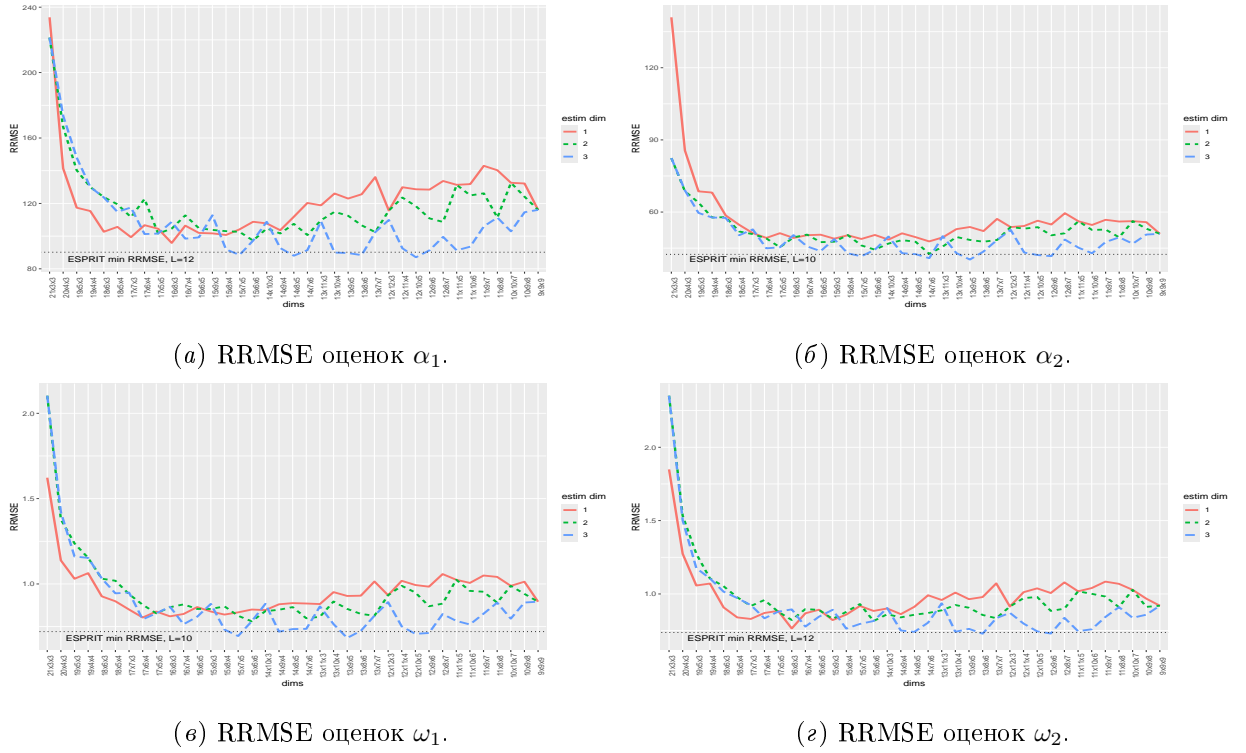


Рис. 4. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 4.

вались только при оптимальных размерах длины окна. Однако множество длин окна в алгоритме HO-ESPRIT, при которых точность оценок параметров сигнала близка к оптимальной, очень мало, и нам пока неизвестны способы их выбора кроме перебора. С другой стороны, для стандартного алгоритма ESPRIT требуется меньший набор параметров, а разница между методами в точности оценки при оптимальных параметрах невелика. В связи с этим, использование метода HO-ESPRIT для оценки параметров одномерных сигналов в текущем виде не обосновано.

Стоит заметить, что во всех случаях выбор номера направления  $d$  из алгоритма 8, соответствующего направлению наименьшего размера траекторного тензора, давал наиболее точные результаты.

## 9.2. Многомерный случай

Пусть  $M = 12$  и  $R = 2$ , то есть многомерный временной ряд

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(12)}),$$

$$\mathbf{X}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{25}^{(m)})$$

состоит из элементов вида

$$x_{n+1}^{(m)} = a_1^{(m)} e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + a_2^{(m)} e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n^{(m)},$$

где  $n \in \overline{0:24}$ , а  $\zeta_n^{(m)}$  — независимые случайные величины из распределения  $\text{CN}(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma = 0.2$ . Значения частот и варианты степеней затухания были взяты такими же, как в одномерном случае в разделе 9.1. В качестве амплитуд  $a_k^{(m)}$  были взяты независимые реализации случайных величин из распределения  $\text{CN}(0, 1)$ , их приблизительные значения приведены в выражении (15).

$$\begin{aligned} \text{Re}(a_1) &\approx (0, -0.1, -1, -0.4, 0.2, 0.3, -0.9, -0.3, -1.2, -0.2, 0.8, 0.5)^T, \\ \text{Im}(a_1) &\approx (-0.9, -0.3, -0.5, -0.6, -0.1, -0.2, -1.3, -0.1, 0.7, 0.1, -1, -1)^T, \\ \text{Re}(a_2) &\approx (-0.2, 0.7, 0.5, 0.1, -0.7, -0.1, 0.7, 0.3, -0.4, -1.5, -0.5, -1.5)^T, \\ \text{Im}(a_2) &\approx (0.3, -1.2, -0.2, -0.5, 0.8, -0.5, -0.6, 0.6, -0.7, 0, 0.2, -0.2)^T. \end{aligned} \quad (15)$$

Как и в одномерном случае, ранг сигналов с каждым набором параметров равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два сингулярных вектора разложения из алгоритмов 3 и 8. В качестве способа разложения траекторного тензора был выбран метод HOOI.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок параметров, полученных методами M-ESPRIT и HO-M-ESPRIT, от значения длины окна  $L$ .

Рисунки 5 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 6, 7 и 8 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

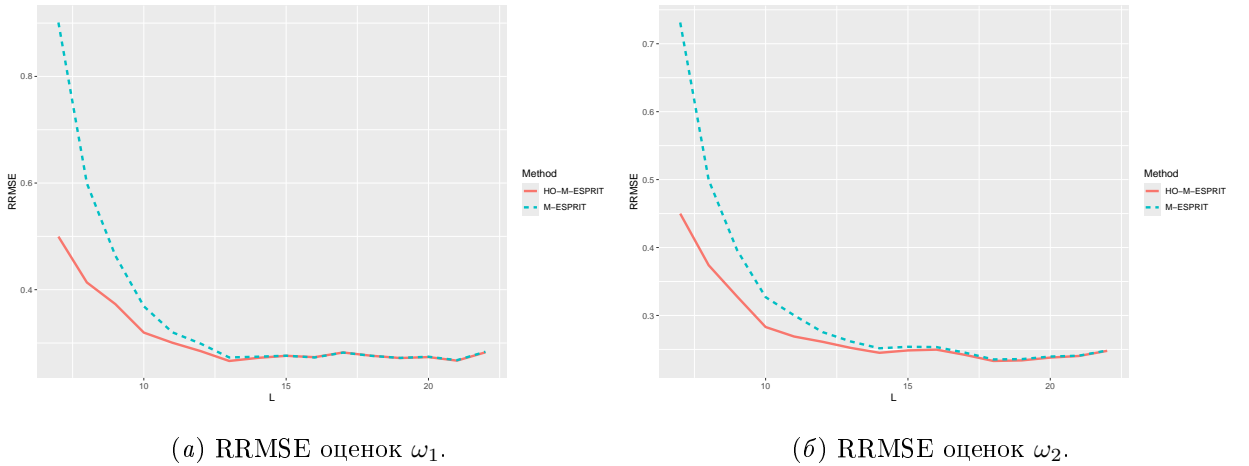


Рис. 5. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 1.

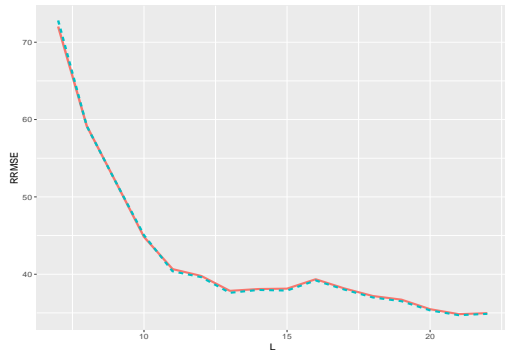
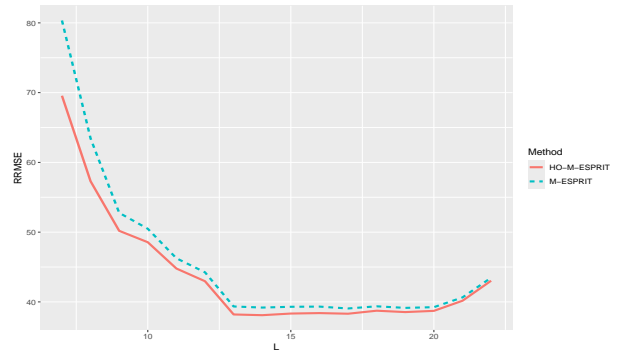
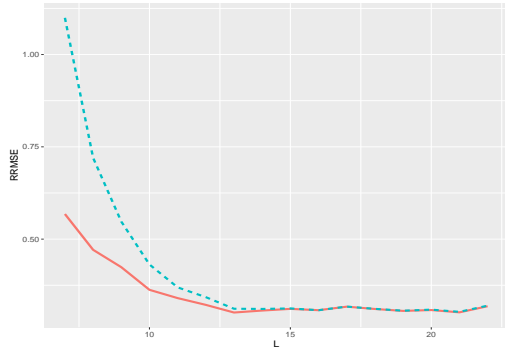
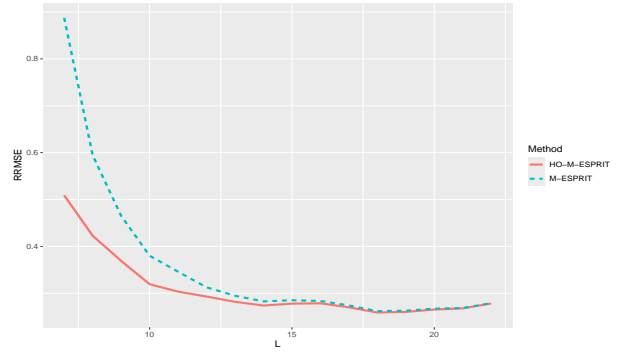
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(с) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 6. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 2.

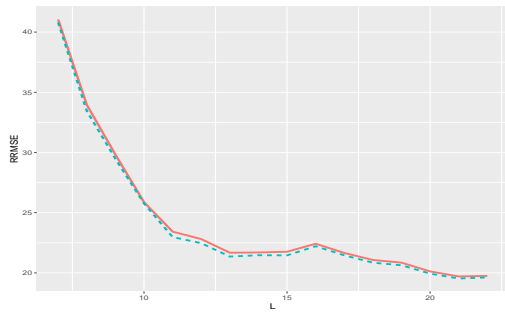
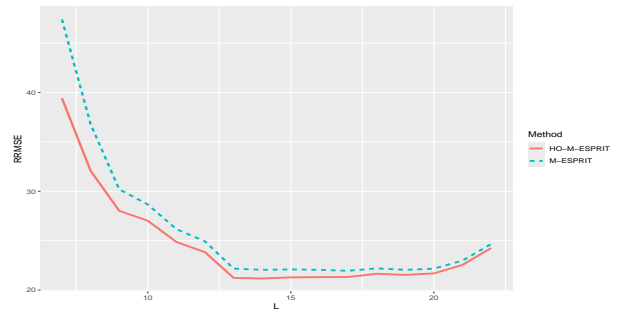
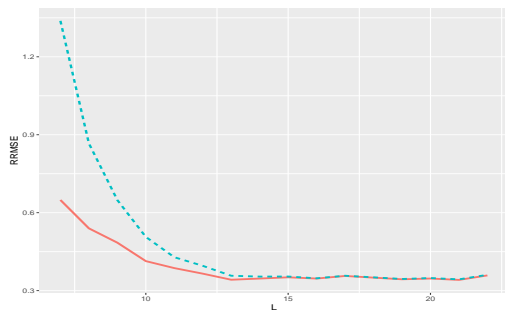
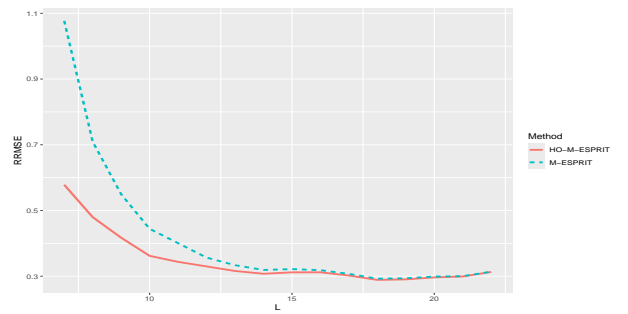
(a) RRMSE оценок  $\alpha_1$ .(б) RRMSE оценок  $\alpha_2$ .(с) RRMSE оценок  $\omega_1$ .(г) RRMSE оценок  $\omega_2$ .

Рис. 7. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 3.

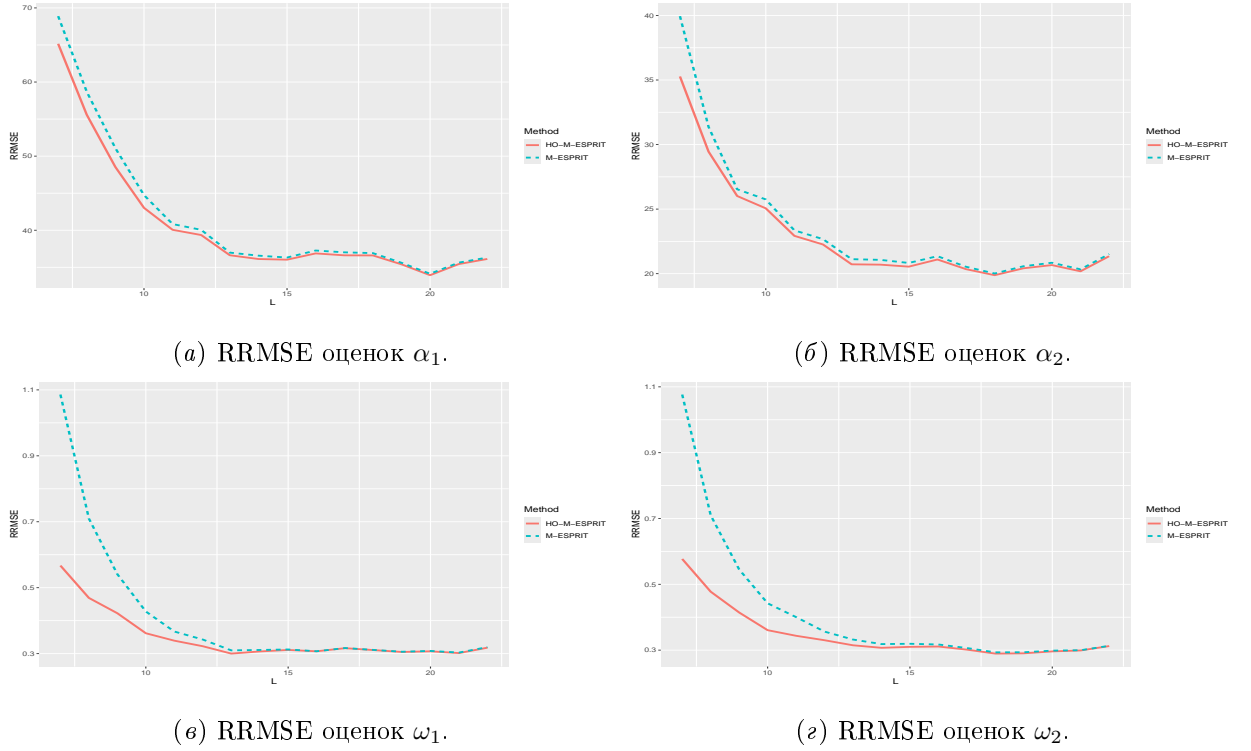


Рис. 8. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 4.

**Выводы из численных сравнений** Метод HO-M-ESPRIT оказался точнее стандартного метода M-ESPRIT в задаче оценки параметров многомерного ряда для любого выбора параметров длины окна во всех случаях, не считая двух: оценки методом HO-M-ESPRIT параметра  $\alpha_1$  оказались менее точными, чем методом M-ESPRIT, в случаях 2 и 3. Стоит заметить, что значения точности методов во всех случаях практически не отличимы при больших значениях длины окна.

## 10. Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA

В этом разделе рассматривается влияние выбора направлений усечения в методе HO-SSA на точность в задаче выделения сигнала.

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет вид

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

$$x_n = s_n + \varepsilon_n, \quad n \in \overline{1 : N},$$

где  $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$  — сигнал,  $\mathbf{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  — шум. Точность выделения сигнала будет оцениваться с помощью среднеквадратичного отклонения (RMSE) оценённого

сигнала от исходного. В данной работе RMSE высчитывается по следующей формуле

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}_i)}, \quad \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |s_j - \tilde{s}_j|^2,$$

где  $m$  — количество реализаций шума,  $\tilde{\mathbf{s}}_i$  — оценка сигнала, восстановленная по ряду с  $i$ -й реализацией шума. В качестве способа разложения траекторного тензора был выбран метод HOOI.

### 10.1. Выделение вещественного сигнала

Пусть  $N = 71$  и временной ряд состоит из элементов вида

$$x_n = 30 \cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_n$  — независимые случайные величины из распределения  $N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2 = 25$ . Во всех алгоритмах для восстановления бралось количество компонент разложения равное рангу сигнала, который в данном случае равен 2. В таблице 1 приведены значения RMSE оценки сигнала, восстановленного методом SSA при различных выборах длины окна. RMSE здесь и далее в этом разделе высчитывается по  $m = 500$  реализациям шума. Кро-

Таблица 1. SSA: RMSE оценки сигнала (16).

$L$	12	24	30	36
RMSE	1.82	1.42	<b>1.40</b>	1.42

ме того, здесь и далее жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения RMSE, причём отличие этих минимальных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

В таблице 2 представлены значения RMSE оценок сигнала, восстановленного методом HO-SSA при выборе различных направлений усечения. Параметры в таблице 2 представлены в порядке уменьшения третьего размера траекторного тензора, причём выполняется неравенство  $I \leq J \leq L$ . Большие параметры длин окна не рассматриваются, так как построенные по ним траекторные матрицы и траекторные тензоры будут совпадать с рассмотренными с точностью до перестановки размерностей.

Из таблицы 2 видно, что усечение только по направлению наибольшей размерности даёт результаты точнее, чем усечение по всем направлениям, при почти любом выборе



Таблица 2. HO-SSA: RMSE оценки сигнала (16) при выборе разных направлений усечения.

Направления усечения $I \times L$	12×49	12×37	7×36	12×31	19×30	24×25
3	1.85	1.52	<b>1.48</b>	1.54	1.57	1.59
2, 3	1.63	1.53	<b>1.49</b>	1.56	1.62	1.65
$\overline{1 : 3}$	1.63	1.53	<b>1.49</b>	1.56	1.62	1.65

длин окна. Но этого увеличения точности недостаточно, чтобы алгоритм HO-SSA был точнее базового SSA.

## 10.2. Выделение комплексного сигнала

Рассмотрим задачу выделения комплекснозначного сигнала из ряда  $X$  с элементами вида (14) с частотами  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 0.22$  и со степенями затухания  $\alpha_1 = -0.01$ ,  $\alpha_2 = -0.02$ .

На рисунке 9 представлен график зависимости RMSE от размеров траекторного тензора (ось  $x$ ) и направлений усечения (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на графике изображено минимальное по выбору длины окна значение RMSE для сигналов, восстановленных методом SSA. Как и в случае вещественного сигнала, метод HO-SSA оказывается существенно менее точным при любом выборе длин окна и направлений усечения, чем метод SSA. Также наиболее точные оценки сигнала получаются при выборе в качестве направления усечения направления минимальной размерности траекторного тензора ряда.

**Выводы численных сравнений** В отличие от задачи оценки параметров, где при выборе оптимальных длин окна тензорные методы могут давать оценки точнее, чем базовый ESPRIT, в задаче выделения сигнала при любом выборе длин окна точность восстановленных тензорными методами оценок сигналов всегда существенно меньше точности оценок, восстановленных базовым SSA.

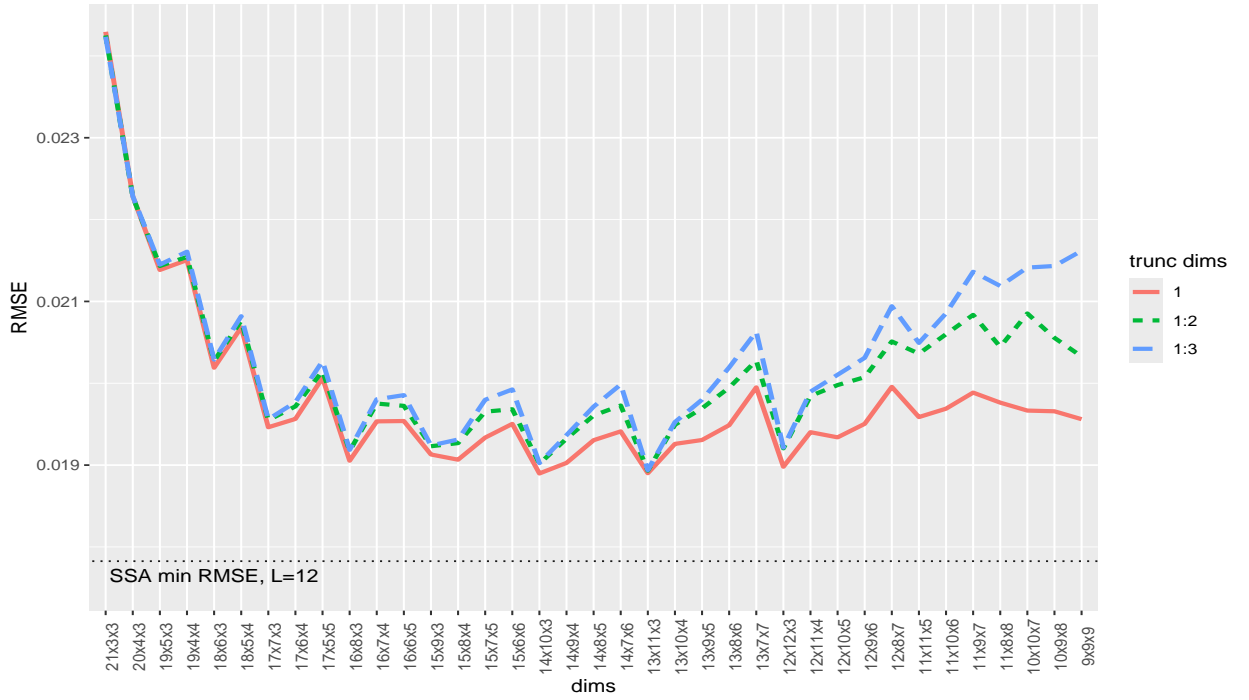


Рис. 9. Зависимость RMSE восстановленного сигнала от размеров траекторного тензора и направлений усечений.

## 11. Численные сравнения в задаче выделения многомерных комплексных сигналов

Пусть многомерный временной ряд  $X$  имеет тот же вид, что и ряд, рассматриваемый в разделе 9.2. Рассмотрим задачу выделения сигнала из этого временного ряда.

Ранг этого сигнала в терминах MSSA при всех рассматриваемых вариантах параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  равен 2, поэтому параметр  $R$  в алгоритме MSSA и параметры  $R_1$  и  $R_2$  в алгоритме 7 были взяты равными 2. 3-ранг этого сигнала в терминах HO-MSSA равен 2, поэтому параметр  $R_3$  в алгоритме 7 был взят равным 2. Случаи усечения по части направлений не рассматривались в силу замечания 5.2.

На рисунках 10 приведены графики зависимости RMSE оценок сигнала методами MSSA и HO-MSSA от выбора длины окна  $L$  для различных параметров степеней затухания  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Из графиков видно, что во всех случаях метод HO-MSSA выделяет комплексный сигнал более точно, чем метод MSSA, причём преимущество велико для большинства значений длины окна  $L$ . Однако RMSE обоих методов при оптимальном выборе  $L$  довольно близки. Этот результат совпадает с результатами численного сравнения методов

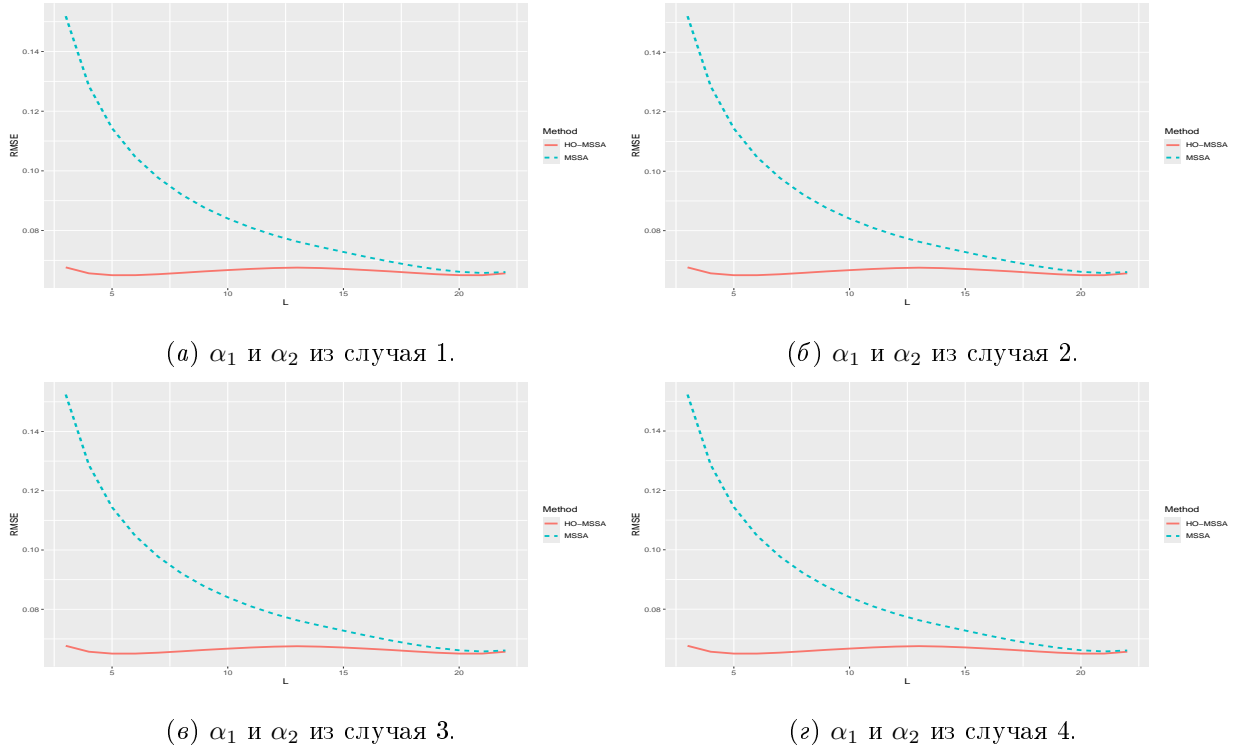


Рис. 10. Зависимость RMSE оценок многомерного сигнала от длины окна.

MSSA и HO-MSSA в задаче выделения вещественных сигналов.

## 12. Зависимость точности HO-MSSA от количества каналов

В работе [11] при сравнении методов MSSA и HO-MSSA по точности выделения сигнала было обнаружено, что для некоторых многоканальных рядов преимущество тензорного метода несущественно, а для других — довольно велико. В данном разделе приведены результаты численных исследований, направленных на проверку гипотезы о том, что основным признаком, влияющим на степень различия в точности MSSA и HO-MSSA в задаче выделения сигнала, является соотношение количества каналов ряда и 3-ранга этого ряда.

Рассматривался временной ряд вида

$$x_n^{(m)} = s_n^{(m)} + \xi_n^{(m)},$$

где  $1 \leq n \leq N$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,  $s_n^{(m)}$  — элементы сигнала,  $\xi_n^{(m)}$  — независимые случайные величины (шум) с распределением  $N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma \in \{0.2, 0.4, 0.6\}$ . Были рассмотрены следующие модели сигналов, в которых все каналы имеют одинаковые корни линейной рекуррентной формулы (ЛРФ) [1].

1. Каналы порождаются гармоникой и отличаются амплитудой.  $N = 25$ , ранг ряда  $r = 2$ , 3-ранг ряда  $r_3 = 1$ ,

$$s_n^{(m)} = A_m \cos(2\pi(n-1)/5).$$

2. Каналы порождаются экспоненциально- и полиномиально-модулируемой гармоникой и отличаются коэффициентами модулирующего полинома первой степени.  $N = 25$ ,  $r = 4$ ,  $r_3 = 2$ ,

$$s_n^{(m)} = (A_m(n-1) + B_m)e^{-0.04(n-1)} \cos(2\pi(n-1)/5).$$

3. Каналы порождаются суммой двух экспоненциально- и полиномиально-модулируемых гармоник с разными периодами и степенями экспоненциальной модуляции и отличаются коэффициентами модулирующих полиномов первой степени,  $N = 99$ ,  $r = 8$ ,  $r_3 = 4$ ,

$$\begin{aligned} s_n^{(m)} = & (A_m^{(1)}(n-1) + B_m^{(1)})e^{-0.04(n-1)} \cos(2\pi(n-1)/8) \\ & + (A_m^{(2)}(n-1) + B_m^{(2)})e^{-0.06(n-1)} \cos(2\pi(n-1)/6). \end{aligned}$$

Для каждой модели коэффициенты модулирующих полиномов были единожды выбраны случайным образом из распределения  $N(0, 1)$  и зафиксированы. Точность выделения сигналов сравнивалась с помощью RMSE по 500 реализациям шума при различных значениях стандартного отклонения шума  $\sigma$ , количества каналов  $M$ , и параметрах длины окна в каждом из методов  $r+1 \leq L_{\text{MSSA}} \leq N-r$ ,  $r+1 \leq L_{\text{T-MSSA}} \leq (N+1)/2$ . В целях уменьшения времени вычислений при  $N = 25$  рассматривались только параметры длин окна с шагом 2, а при  $N = 99$  — с шагом 5. В качестве параметров количества компонент восстановления использовались соответствующие ранги сигналов, или размеры направлений, если они меньше.

В таблицах 3, 5 и 7 представлены минимальные по параметрам длины окна значения RMSE для методов MSSA и HO-MSSA для разных значений количества каналов и стандартного отклонения шума. Значения параметров длины окна, при которых были достигнуты указанные RMSE приведены в скобках. В таблицах 4, 6 и 8 представлены относительные разности между минимальными значениями RMSE, посчитанными по формуле

$$\frac{\text{RMSE}_{\text{MSSA}} - \text{RMSE}_{\text{HO-MSSA}}}{\sigma},$$

Таблица 3. Зависимость RMSE оценки сигнала от количества каналов и стандартного отклонения шума для методов MSSA (М) и HO-MSSA (Т). Случай 1.

$\sigma$	Метод	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$	$M = 12$	$M = 16$	$M = 20$
0.2	М	.08 (17)	.07 (17)	.07 (17)	.07 (19)	.06 (21)	.06 (21)
	Т	.07 (11)	.06 (9)	.05 (9)	.05 (9)	.05 (7)	.05 (7)
0.4	М	.16 (17)	.15 (17)	.14 (19)	.13 (19)	.13 (21)	.13 (21)
	Т	.15 (11)	.12 (9)	.11 (9)	.10 (9)	.10 (7)	.10 (7)
0.6	М	.25 (17)	.22 (17)	.21 (19)	.20 (19)	.20 (21)	.19 (21)
	Т	.22 (11)	.19 (9)	.16 (9)	.15 (9)	.15 (7)	.14 (7)

Таблица 4. Зависимость относительной разницы оптимальных RMSE методов от количества каналов. Случай 1.

$\sigma$	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$	$M = 12$	$M = 16$	$M = 20$
0.2	.035	.060	.074	.078	.080	.081
0.4	.034	.061	.074	.078	.081	.081
0.6	.035	.062	.076	.080	.083	.082

Таблица 5. Зависимость RMSE оценки сигнала от количества каналов и стандартного отклонения шума для методов MSSA (М) и HO-MSSA (Т). Случай 2.

$\sigma$	Метод	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$	$M = 12$	$M = 16$	$M = 20$	$M = 40$
0.2	М	.11 (15)	.11 (17)	.10 (19)	.10 (19)	.10 (19)	.09 (19)	.09 (19)
	Т	.11 (11)	.09 (11)	.08 (9)	.08 (9)	.07 (7)	.07 (7)	.07 (5)
0.4	М	.23 (15)	.21 (17)	.20 (19)	.19 (19)	.19 (19)	.19 (19)	.19 (19)
	Т	.23 (11)	.20 (9)	.18 (9)	.16 (7)	.15 (7)	.15 (7)	.14 (5)
0.6	М	.34 (15)	.32 (17)	.30 (19)	.29 (19)	.29 (19)	.28 (19)	.28 (19)
	Т	.34 (11)	.30 (9)	.26 (9)	.22 (7)	.24 (7)	.23 (5)	.21 (5)

в зависимости от количества каналов.

Из представленных таблиц видно, что с увеличением количества каналов преимущество тензорного метода увеличивается, но с менее чем линейной скоростью. В случае, когда количество каналов совпадает с 3-рангом ряда, преимущество тензорного метода практически отсутствует. Когда количество каналов меньше 3-ранга, как при  $M = 2$  в

Таблица 6. Зависимость относительной разницы оптимальных RMSE методов от количества каналов. Случай 2.

$\sigma$	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$	$M = 12$	$M = 16$	$M = 20$	$M = 40$
0.2	.003	.056	.077	.098	.105	.112	.125
0.4	.004	.038	.054	.088	.093	.108	.122
0.6	.005	.034	.062	.074	.083	.100	.114

Таблица 7. Зависимость RMSE оценки сигнала от количества каналов и стандартного отклонения шума для методов MSSA (M) и HO-MSSA (T). Случай 3.

$\sigma$	Метод	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$	$M = 12$	$M = 16$	$M = 20$	$M = 40$
0.2	M	.08 (54)	.07 (69)	.07 (74)	.07 (79)	.07 (79)	.07 (84)	.06 (89)
	T	.08 (44)	.07 (34)	.07 (19)	.06 (29)	.06 (19)	.06 (14)	.05 (14)
0.4	M	.17 (64)	.15 (69)	.14 (74)	.14 (79)	.13 (79)	.13 (84)	.13 (89)
	T	.16 (39)	.15 (34)	.13 (29)	.12 (29)	.12 (14)	.12 (14)	.10 (9)
0.6	M	.28 (59)	.22 (69)	.21 (74)	.21 (74)	.20 (79)	.20 (84)	.19 (89)
	T	.29 (39)	.22 (34)	.20 (29)	.18 (29)	.19 (19)	.17 (19)	.16 (9)

Таблица 8. Зависимость относительной разницы оптимальных RMSE методов от количества каналов. Случай 3.

$\sigma$	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$	$M = 12$	$M = 16$	$M = 20$	$M = 40$
0.2	.010	.003	.007	.024	.050	.046	.068
0.4	.011	.003	.020	.036	.030	.036	.060
0.6	-.021	.004	.023	.052	.024	.042	.051

случае 3, тензорный метод может оказаться менее точным чем стандартный при высоком уровне шума, что может быть связано с тем, что у тензорного метода более низкое пороговое значение стандартного отклонения шума, при котором происходит смешивание собственных чисел сигнала с собственными числами шума на шаге разложения. Для сигналов более сложной структуры (случаи 2 и 3), начиная с некоторого значения количества каналов  $M > M^*$ , преимущество тензорного метода растёт с уменьшением уровня шума ( $M^* \approx 8$  в случае 2 и  $M^* \approx 20$  в случае 3).

Таким образом, метод HO-MSSA наиболее целесообразно применять в случае, ко-

гда количество каналов сигнала существенно превосходит его 3-ранг, а уровень шума не велик. Дальнейшее исследование собственных чисел траекторных тензоров сигналов необходимо для более точного понимания устойчивости метода HO-MSSA к шуму.

### 13. Численные сравнения методов Dstack со стандартными

Рассмотрим случай временного ряда, состоящего из двух гармоник с близкими частотами. Особенность близких частот в том, что с увеличением шума некоторые методы оценки параметров могут начать идентифицировать обе частотные компоненты как одну с параметрами, равными усреднённым значениям параметров исходных компонент. Пусть ряд  $\mathbf{X}$  состоит из элементов вида

$$x_{n+1} = \cos(2\pi n\omega_1) + \cos(2\pi n\omega_2) + \xi_n,$$

где  $\omega_1 = 0.02$ ,  $\omega_2 = 0.0205$ ,  $\xi_n$  — независимые случайные величины из распределения  $N(0, \sigma^2)$ ,  $n \in \overline{0:989}$ . Ранг этого ряда в терминах SSA равен 4, поэтому в задаче оценки параметров выбирается  $R = 4$  в алгоритмах 2, 3, 9, и  $R_1 = R_2 = 4$  в алгоритме 10. Во всех случаях для Dstack методов был выбран параметр  $D = 10$ . В этом случае  $\max_j |\omega_j| = 0.0205 \leq 0.05 = 1/2D$ , то есть выполняются условия из замечания 7.1, значит Dstack методы применимы. Ряд был выбран аналогично тому, что рассматривался в работе [6].

В этом разделе точность выделения частот и оценки сигнала оценивается с помощью RMSE, посчитанного по 100 реализациям шума. RMSE оценки частоты сигнала считается следующим образом

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^m |\omega_k - \hat{\omega}_{kj}|^2},$$

где  $\hat{\omega}_{kj}$  — оценка частоты  $\omega_k$ , полученная по ряду с  $j$ -й реализацией шума. Так как ранг рассматриваемого временного ряда равен 4, то методы, основанные на подпространстве сигнала, возвращают 4 оценки параметров. В случае отсутствия шума множество оценок можно разбить на две группы с равными параметрами  $\alpha$  и равными по модулю параметрами  $\omega$ . В связи с этим на множестве модулей полученных оценок частот проводилась кластеризация методом kmeans, в качестве  $\hat{\omega}_{1j}$  выбирался наименьший по значению центр кластера, а в качестве  $\hat{\omega}_{2j}$  — наибольший.

### 13.1. Задача оценки параметров сигнала

Сравниваются методы ESPRIT, Dstack ESPRIT и Dstack HO-ESPRIT с выбором  $R_3 = 4$  и  $R_3 = 1$ . Выбор  $R_3 = 4$  обусловлен тем, что 3-ранг ряда  $\mathbf{X}_D = \mathcal{D}_D(\mathbf{X})$  равен 4, а выбор  $R_3 = 1$  обусловлен теоремой 4.

Рассматриваются два варианта шума: «малый» — со стандартным отклонением  $\sigma = 0.2$ , и «большой» — с  $\sigma = 0.6$ . На рисунках 11 приведены графики зависимости RMSE оценки методом ESPRIT (слева) и Dstack модификациями (справа) от длины окна для малого шума, а на рисунках 12 — для большого. Для удобства сравнения на каждом из графиков пунктирной линией обозначено минимальное значение с соседнего графика.

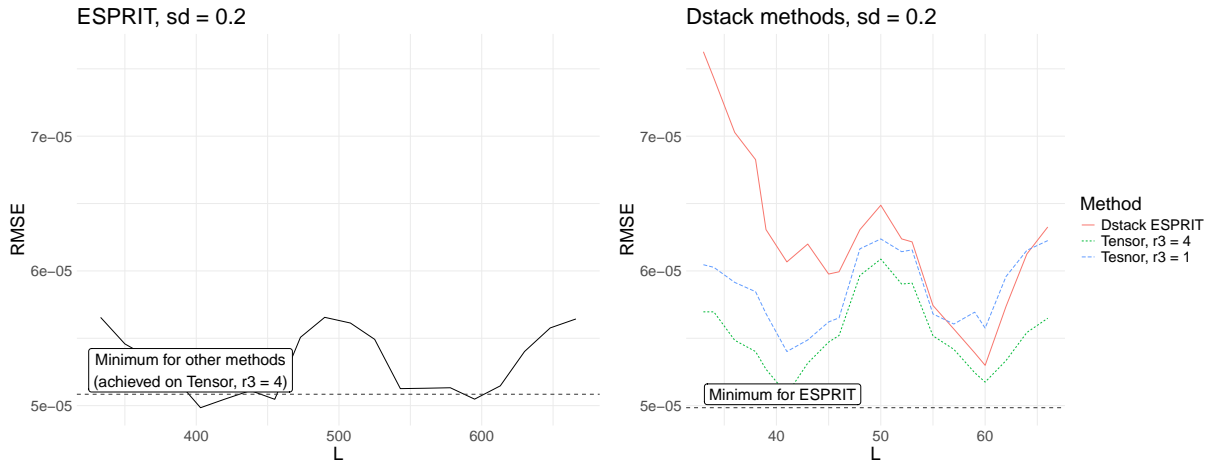


Рис. 11. Зависимость RMSE оценки частот методами ESPRIT и модификациями Dstack от длины окна. Случай  $\sigma = 0.2$ .

Из графиков видно, что при малом уровне шума все методы близки по точности, и минимальная ошибка достигается методом ESPRIT, а среди Dstack методов наименьшую ошибку имеет Dstack HO-ESPRIT с выбором  $R_3 = 4$ . Однако в случае высокого уровня шума точность метода ESPRIT заметно снижается. Это происходит по той причине, что из-за близости частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ESPRIT перестаёт их различать, и оценивает как одну частоту. Наиболее точным методом в случае большого уровня шума является Dstack HO-ESPRIT с выбором  $R_3 = 1$ .

### 13.2. Задача выделения сигнала

Сравниваются методы SSA, Dstack SSA и Dstack HO-SSA с выбором  $R_3 = 4$ . Вариант  $R_3 = 1$  не рассматривается, так как в этом случае, в отличие от задачи оценки



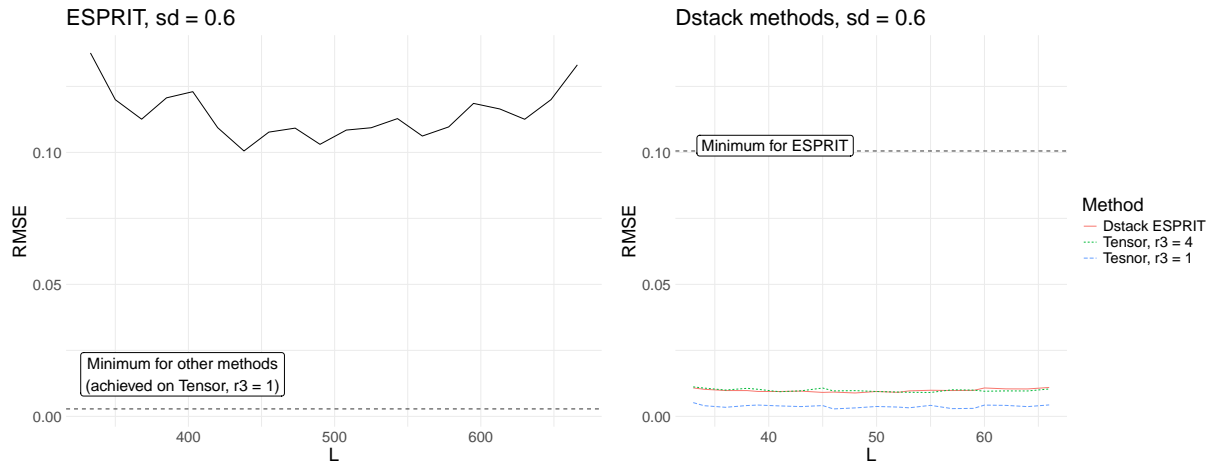


Рис. 12. Зависимость RMSE оценки частот методами ESPRIT и модификациями Dstack от длины окна. Случай  $\sigma = 0.6$ .

параметров, у оценки сигнала возникает большое смещение.

Как и в разделе 13.1, рассматриваются два уровня шума:  $\sigma = 0.2$  и  $\sigma = 0.6$ . На рисунках 13 приведены графики зависимости RMSE оценки методом SSA (слева) и Dstack модификациями (справа) от длины окна для малого шума, а на рисунках 14 — для большого. Для удобства сравнения на каждом из графиков пунктирной линией обозначено минимальное значение с соседнего графика.

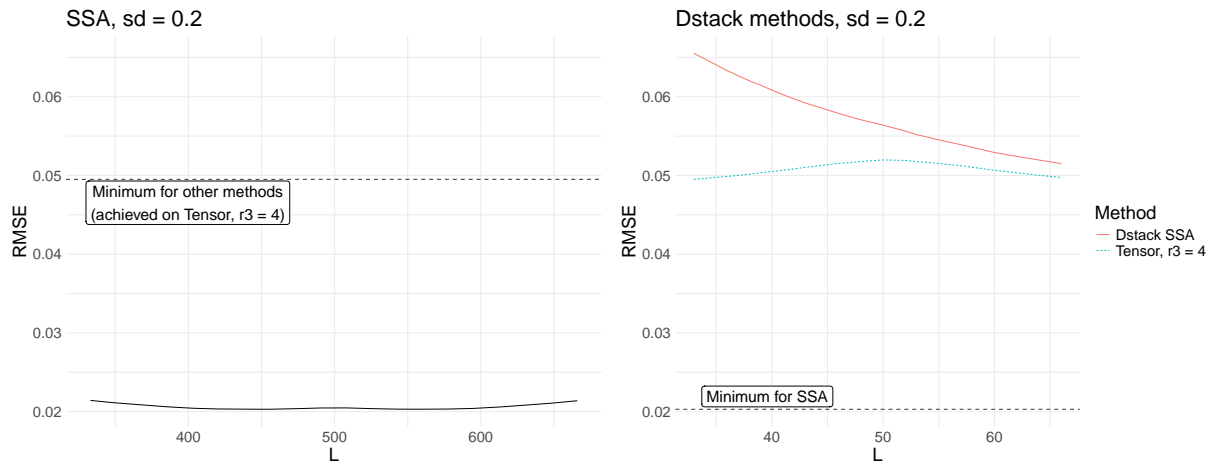


Рис. 13. Зависимость RMSE оценки частот методами ESPRIT и модификациями Dstack от длины окна. Случай  $\sigma = 0.2$ .

Из графиков видно, что при любом уровне шума SSA выделяет сигнал значительно точнее, чем Dstack методы. При выборе оптимальных длин окна методы Dstack SSA и Dstack HO-SSA близки по точности, с небольшим преимуществом тензорного метода.

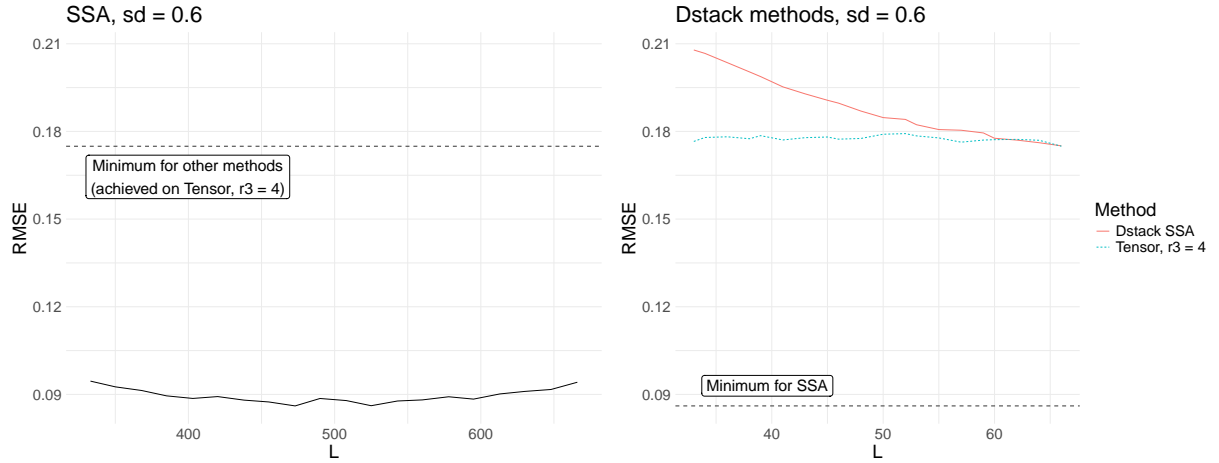


Рис. 14. Зависимость RMSE оценки частот методами ESPRIT и модификациями Dstack от длины окна. Случай  $\sigma = 0.6$ .

## 14. Другие варианты применения тензорных разложений в задаче выделения сигнала

В данном разделе приведён краткий обзор статей, не рассмотренных ранее, в которых предлагается использовать вложение ряда в тензор, и последующее его тензорное разложение в задачах выделения сигнала или оценки параметров. Также описаны возможные перспективы дальнейшего изучения тензорных методов.

### 14.1. Тензорный SSA с использованием $(L_r, L_r, 1)$ -разложения

В статье [32] рассматривается задача выделения сигнала в многомерном ряде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{S} + \mathbf{N},$$

где  $\mathbf{Y}$  — наблюдаемый ряд,  $\mathbf{S}$  — искомый сигнал,  $\mathbf{M}$  — коэффициенты линейных комбинаций, с которыми сигнал составляет наблюдаемый ряд,  $\mathbf{N}$  — шум. Траекторный тензор ряда определяется так же, как в определении 4.1. Приводится теоретическая информация про разложение в сумму тензоров с  $n$ -рангами  $(L_r, L_r, 1)$ , которое называется  $(L_r, L_r, 1)$ -разложением, в частности приводятся определение и условия единственности.

Для модели, в которой сигнал составляют суммы произведений полиномов и комплексных экспонент, доказаны условия единственности  $(L_r, L_r, 1)$ -разложения траекторного тензора ряда.

Сам метод заключается в построении траекторного тензора по ряду  $\mathbf{Y}$ , аппроксимации этого тензора меньшими  $n$ -рангами (но бóльшими, чем  $n$ -ранги самого сигнала), и применении  $(L_r, L_r, 1)$ -разложения к этой аппроксимации. Далее по этому разложению строится оценка сигнала  $\mathbf{S}$ .

В работе проводятся численные сравнения точности выделения сигнала предложенным методом при различных выборах параметров рангов аппроксимации и  $L_r$ , однако сравнения с другими методами выделения сигнала не проводятся.

В дальнейшем возможно провести численное сравнение предлагаемого метода с SSA, MSSA и HO-MSSA с точки зрения точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала.

## 14.2. Тензорный SSA с использованием CPD

В работе [2] рассматривается задача выделения одномерного вещественного сигнала из ряда с нестационарным шумом.

Вводится понятие траекторного тензора следующим образом: исходный одномерный ряд делится на непересекающиеся подряды длины  $l$ , затем траекторный тензор строится аналогично траекторному тензору многомерного ряда из определения 5.1, как если бы эти подряды были каналами многомерного сигнала. Предлагается алгоритм Tensor-Based SSA (TSSA), основанный на применении CPD к полученному траекторному тензору ряда.

Кроме того, предлагается алгоритм TSSA-EMD, основанный на использовании метода EMD [33] для адаптивной группировки компонент CPD. Метод заключается в получении CPD траекторного тензора, использовании EMD для выделения сигнала, построении траекторного тензора  $\mathcal{F}$  этой оценки сигнала, и решении оптимизационных задач

$$J(\mathcal{G}_{ijk}) = \left\| \mathcal{F}_{ijk} - \sum_{r=1}^R \mathcal{G}_{ijk} a_{ir} b_{jr} c_{kr} \right\|^2 \rightarrow \min_{\mathcal{G}_{ijk}}$$

для всех  $i, j, k$ , где  $a_{ir}$ ,  $b_{jr}$  и  $c_{kr}$  — элементы компонент CPD. После нахождения тензора адаптивных весов  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_{ijk}\}$  строится оценка траекторного тензора сигнала

$$\mathcal{S}_{ijk} = \sum_{r=1}^R \mathcal{G}_{ijk} a_{ir} b_{jr} c_{kr},$$

по которому восстанавливается оценка сигнала.

Метод TSSA-EMD численно сравнивался с SSA и другими методами выделения сигнала на моделированном ряде с нестационарным шумом, причём явная формула рассматриваемого ряда в статье не приведена. Было показано значимое преимущество TSSA-EMD над остальными рассматриваемыми методами в смысле RMSE, причём для каждого алгоритма рассматривался лишь один набор параметров. Также было рассмотрено применение TSSA-EMD к реальному ряду.

Мной был рассмотрен метод с применением CPD, но без использования EMD и тензора адаптивных весов, и численные сравнения показали значимое преимущество базового SSA над предлагаемым методом. В дальнейшем имеет смысл рассмотреть предлагаемый метод с использованием адаптивных весов с точки зрения точности выделения сигнала, причём можно заменить EMD на другие методы выделения сигнала.

### 14.3. Tensor SSA с использованием T-SVD

В работе [34] рассматривается задача выделения многомерного сигнала. Траекторный тензор сигнала строится аналогично определению 5.1. К тензору применяется разложение T-SVD [16, 20], которое является разложением Таккера с  $f$ -диагональным ядром разложения, то есть сечения 3-го направления этого тензора — диагональные матрицы.

В статье приводится утверждение о «трубном» (tubal) ранге траекторных тензоров рядов, представимых в виде суммы произведений полиномов, экспонент и гармоник. Трубный ранг тензора — это число ненулевых векторов 3-го направления в ядре разложения  $\mathcal{Z}$  этого тензора. Также приводится утверждение о связи T-SVD с кратковременным преобразованием Фурье.

Авторы приводят лишь визуальное сравнение с методом TenSOFO на примере выделения электрокардиограммы плода от электрокардиограммы матери, и не приводят никаких метрик точности выделения сигнала.

Мной был рассмотрен предлагаемый метод, и были проведены численные сравнения с методами MSSA и HO-MSSA на малом наборе рядов. Предлагаемый метод оказался наименее точным. В дальнейшем для полноты возможно провести сравнения на большем классе сигналов.

## 15. Заключение

В результате работы было показано, что тензорные модификации алгоритма ESPRIT в задаче оценки параметров одномерных и многомерных комплексных сигналов при оптимальном выборе параметров длин окна оказываются точнее стандартного метода ESPRIT, что соотносится с результатами работы [4]. Однако преимущество тензорных алгоритмов мало, и множество длин окна, при которых это преимущество есть, также невелико.

Также в работе показано, что в отличие от задачи оценки параметров, тензорные методы в задаче выделения комплексных сигналов имеют преимущество лишь в случае многомерных сигналов. Метод HO-SSA выделяет одномерные комплексные сигналы существенно менее точно, чем базовый SSA, а метод HO-MSSA выделяет многомерные комплексные сигналы точнее метода MSSA. Кроме того, было показано, что в случае, когда количество каналов больше 3-ранга ряда, преимущество HO-MSSA растёт с увеличением количества каналов, но когда количество каналов равно или меньше 3-ранга, тензорный метод может как потерять преимущество, так и вовсе стать менее точным.

С другой стороны, было показано, что при достаточно близких частотах и высоком уровне шума стандартный методы ESPRIT может перестать идентифицировать все параметры сигнала, в то время как использование Dstack HO-ESPRIT в этих же условиях продолжает оценивать параметры с высокой точностью. Однако применение Dstack модификаций в задаче оценки параметров затруднено необходимостью того, чтобы выполнялось некоторое достаточно строгое условие на частоты, представленные в сигнале. В задаче выделения сигнала, стандартный метод SSA оказался точнее Dstack модификаций при любом уровне шума.

Было выяснено, что трудоёмкости тензорных и матричных методов совпадают асимптотически. Однако асимптотика трудоёмкости тензорных методов имеет бóльшую константу.

Кроме того, было показано, что точность выделения одномерных сигналов методом HO-SSA можно увеличить, восстанавливая сигнал усечением траекторного тензора лишь по части его направлений. Однако этого увеличения точности всё ещё недостаточно, чтобы тензорный метод был точнее стандартного SSA.

## Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Kouchaki S., Sanei S. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
3. Improved Tensor-Based Singular Spectrum Analysis Based on Single Channel Blind Source Separation Algorithm and Its Application to Fault Diagnosis / Yang D., Yi C., Xu Z., Zhang Y., Ge M., and Liu C. // Applied Sciences. — 2017. — Vol. 7, no. 4.
4. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
5. Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.
6. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the decimative case // Journal of Chemometrics. — 2009. — Vol. 23, no. 7–8. — P. 341–351.
7. Harshman R.A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
8. Carroll J.D., Chang J.-J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35, no. 3. — P. 283–319.
9. Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. — 1966. — Vol. 31, no. 3. — P. 279–311.
10. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
11. Хромов Н.А. Выпускная квалификационная работа «Тензорный анализ сингулярного спектра». — 2024. — научный руководитель Голяндина Н.Э.
12. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. —

Springer Berlin Heidelberg, 2020.

13. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
14. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with the Rssa Package / Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
15. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
16. Kilmer M.E., Martin C.D. Factorization strategies for third-order tensors // Linear Algebra and its Applications. — 2011. — Vol. 435, no. 3. — P. 641–658.
17. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Rev. — 2009. — Vol. 51, no. 3. — P. 455–500.
18. Savostyanov D. V., Tyrtysnikov E.E. Approximate multiplication of tensor matrices based on the individual filtering of factors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49, no. 10. — P. 1662–1677.
19. Kazeev V. A., Tyrtysnikov E.E. Structure of the Hessian matrix and an economical implementation of Newton’s method in the problem of canonical approximation of tensors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, no. 6. — P. 927–945.
20. Third-Order Tensors as Operators on Matrices: A Theoretical and Computational Framework with Applications in Imaging / Kilmer M.E., Braman K., Hao N., and Hoover R.C. // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2013. — Vol. 34, no. 1. — P. 148–172.
21. Осинский А.И. Оценки аппроксимации тензорных поездов по норме Чебышёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 211–216.
22. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. On the Best Rank-1 and Rank- $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
23. Sheehan B., Saad Y. Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Re-

- lation to PCA and GLRAM // Proceedings of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining. — Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2007.
24. Eldén L., Savas B. A Newton–Grassmann Method for Computing the Best Multilinear Rank- $(r_1, r_2, r_3)$  Approximation of a Tensor // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 31, no. 2. — P. 248–271.
  25. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.
  26. Котельников В. А. О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи // Усп. физ. наук. — 2006. — Т. 176, № 7. — С. 762–770.
  27. Golub G., Kahan W. Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis. — 1965. — Vol. 2, no. 2. — P. 205–224.
  28. Golub G. H., Reinsch C. Singular value decomposition and least squares solutions // Numerische Mathematik. — 1970. — Vol. 14, no. 5. — P. 403–420.
  29. Korobeynikov Anton. Computation- and space-efficient implementation of SSA // Statistics and Its Interface. — 2010. — Vol. 3, no. 3. — P. 357–368.
  30. Badeau Roland, Boyer Rémy. Fast Multilinear Singular Value Decomposition for Structured Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 30, no. 3. — P. 1008–1021.
  31. Tse David, Viswanath Pramod. Fundamentals of Wireless Communication. — Cambridge University Press, 2005.
  32. De Lathauwer L. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank- $(L_r, L_r, 1)$  Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 32, no. 4. — P. 1451–1474.
  33. Lin Jing, Zhang Aimin. Fault feature separation using wavelet-ICA filter // NDT & E International. — 2005. — Vol. 38, no. 6. — P. 421–427.
  34. Trung Le Thanh, Abed-Meraim Karim, Trung Nguyen Linh. Higher-Order Singular Spectrum Analysis for Multichannel Biomedical Signal Analysis // 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO). — IEEE. — 2024. — P. 1337–1341.