

Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Учебная практика 4 (научно-исследовательская работа) (семестр 8)

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА»

Выполнил:

Хромов Никита Андреевич

24.М22-мм

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., доцент

Голяндина Н. Э.

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

1.	Введение	3
2.	Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT	4
2.1.	SSA	4
2.2.	MSSA	7
2.3.	ESPRIT	8
3.	Основы теории тензорных разложений	9
3.1.	Ранги тензоров и тензорные разложения	10
3.2.	HOSVD	12
3.3.	Свойства HOSVD	13
3.4.	Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера . .	15
4.	Описание метода HO-SSA	16
4.1.	HO-SSA для разделения компонент сигнала	17
4.2.	HO-SSA для выделения сигнала из ряда	17
5.	Описание метода HOSVD-MSSA	19
5.1.	HOSVD-MSSA для выделения сигнала	19
5.2.	HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала	20
6.	Описание метода HO-ESPRIT	21
7.	Численные сравнения в задаче оценки параметров	22
7.1.	Одномерный случай	23
7.2.	Многомерный случай	26
7.3.	Сравнение с задачей выделения многомерного сигнала	29
8.	Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA	29
8.1.	Выделение вещественного сигнала	30
8.2.	Выделение комплексного сигнала	31
9.	Заключение	33
	Список литературы	34

1. Введение

TODO

2. Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

2.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Определение 2.1 (Оператор вложения). Оператором вложения \mathcal{H}_L с длиной окна L будем называть отображение, переводящее временной ряд $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $N \geq L$, в ганкелеву матрицу $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$, $K = N - L + 1$, такую, что $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$. Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

Определение 2.2 (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда \mathbf{X} с длиной окна $L < N$ называют матрицу \mathbf{X} , полученную применением оператора вложения \mathcal{H}_L , к ряду \mathbf{X} .

Пусть временной ряд \mathbf{X} представим в виде суммы временных рядов \mathbf{X}_k и шума \mathbf{E} :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов \mathbf{X}_k . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$. Первые два шага в алгоритме 2 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

Определение 2.3 (SSA-ранг временного ряда). Число d называется SSA-рангом временного ряда \mathbf{X} длины N , если $d \leq (N + 1)/2$ и для любой допустимой длины окна L , то есть такой, что $d \leq \min(L, N - L + 1)$, ранг траекторной матрицы \mathbf{X} этого ряда, построенной по длине окна L , равен d .

Алгоритм 1 SSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , m , $R : m \leq R \leq \min(L, N-L+1)$,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$:

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$ — оценки рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$.

- 1: Вложение: построение траекторной матрицы \mathbf{X} по длине окна L .
- 2: Разложение: проведение SVD траекторной матрицы \mathbf{X} , получение её представления в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d \leq \min(L, N-L+1).$$

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов $\tilde{\mathbf{X}}_k$ по матрицам \mathbf{X}_k посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей $i + j = \text{const}$:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N-L+1, i+j-1 = n \right\}.$$

Алгоритм 2 SSA для выделения сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R : 1 \leq R \leq \min(L, N-L+1)$.

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}$ — оценка сигнала $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$.

- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление ряда $\tilde{\mathbf{X}}$ по матрице $\tilde{\mathbf{X}}$ посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей $i + j = \text{const}$.
-

Замечание. В качестве параметра R в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

Пример 2.1. Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-

ранги.

- Ранг полиномиального ряда $x_n = Q_d(n)$, где Q_d — многочлен степени d , равен $d+1$.

- Ранг экспоненциального ряда $x_n = Ce^{\alpha n}$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ и $C \neq 0$, равен 1.

- Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^M C_j e^{\alpha_j n},$$

где $\alpha_j \in \mathbb{C}$ и $C_j \neq 0$ при всех j , равен количеству уникальных значений α_j .

- Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где $C \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\omega \in [0, 1/2]$, равен $r(\omega)$, где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

- Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^M Ce^{\alpha_j n} \cos(2\pi n\omega_j + \psi_j)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где Ω — множество уникальных пар (ω_i, α_i) , представленных в данном временном ряду.

Определение 2.4 (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ и $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ называют слабо L -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1. $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)},$
2. $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}.$

Утверждение 2.1. Пусть $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$, а \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ — траекторные матрицы с длиной окна L рядов \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ соответственно. Тогда сумма SVD матриц $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ является SVD матрицы \mathbf{X} тогда и только тогда, когда ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ слабо L -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 2.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

2.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [2, 3, 4].

Пусть дан P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

Определение 2.5 (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$ — траекторные матрицы рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$ соответственно, построенные по длине окна L . Траекторной матрицей многомерного временного ряда \mathbf{X} называется матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$, $K = N - L + 1$, построенная соединением матриц \mathbf{X}_p по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P].$$

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

Определение 2.6 (MSSA-ранг временного ряда). Число d называется MSSA-рангом P -мерного временного ряда \mathbf{X} длины N , если $d \leq P(N + 1)/(P + 1)$, и для любой допустимой длины окна L , то есть такой, что $d \leq \min(L, P(N - L + 1))$, ранг траекторной матрицы \mathbf{X} этого ряда, построенной по длине окна L , равен d .

Замечание. Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

Пример 2.2. Рассмотрим P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N с элементами вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{R(p)} a_i^{(p)} e^{-\alpha_i^{(p)} n} \cos \left(2\pi \omega_i^{(p)} n + \varphi_i^{(p)} \right). \quad (2)$$

MSSA-ранг такого ряда равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad (3)$$

где функция $r(\omega)$ определена в уравнении (1), а Ω — множество уникальных пар $(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)})$, представленных в данном временном ряде.

Замечание. В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HOSVD-MSSA на многомерных сигналах вида (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры $R(p)$, $\omega_i^{(p)}$ и $\alpha_i^{(p)}$ не зависят от номера ряда p , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [5]. Кроме того, в работе [6] также рассматривается этот частный случай модели.

Определение 2.7 (Слабая MSSA-разделимость). P -мерные временные ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ длины N называются слабо L -разделимыми, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P}, \\ 2. \quad & \sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}. \end{aligned}$$

Утверждение 2.2. Пусть $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$, а \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ — траекторные матрицы с длиной окна L рядов \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ соответственно. Тогда сумма SVD матриц $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ является SVD матрицы \mathbf{X} тогда и только тогда, когда ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ слабо L -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

2.3. ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [7, 6].

Пусть элементы многомерного временного ряда \mathbf{X} имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{\alpha_j n} e^{i(2\pi \omega_j n + \varphi_j^{(p)})}, \quad (4)$$

где i обозначает мнимую единицу, а параметрами модели являются амплитуды $a_j^{(p)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, фазы $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$, частоты $\omega_j \in [0, 1/2]$ и степени затухания $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Замечание. В статье [7] приводится алгоритм ESPRIT для модели временного ряда вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R s_j(n) e^{i\omega_0 \Delta \sin \theta_j / c} a_j^{(p)}(\theta_j),$$

где оцениваемые параметры обозначены θ_j , но в работе будет рассматриваться модель вида (4) по причине, указанной в замечании к примеру 2.2.

Замечание. В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi i\omega n + \varphi_n} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi_n}}{2},$$

вещественнозначный временной ряд из примера 2.2 при $R(p) = R$, $\omega_j^{(p)} = \omega_j$ и $\alpha_j^{(p)} = \alpha_j$ является частным случаем ряда (4).

Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания α_j и частот ω_j многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4). Первые два шага в алгоритме 3 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

Замечание. Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма R рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

Замечание. Алгоритм 3 применим и для одномерных временных рядов ($P = 1$).

3. Основы теории тензорных разложений

Под тензорами в данной работе подразумеваются M -мерные массивы. Элементы тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ обозначаются $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$. Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [8, 9, 10, 11]. Термины на русском языке взяты из работы [12].

Алгоритм 3 ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$.

Результат: $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$ — оценки параметров сигнала (4).

3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы \mathbf{Z} , где $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d]$, запись \mathbf{U}^\dagger обозначает матрицу \mathbf{U} без первой строки, а запись \mathbf{U}_\downarrow — без последней.

4: Нахождение первых R в порядке неубывания собственных чисел λ_j матрицы \mathbf{Z} . Полученные собственные числа $\lambda_{j'}$ считаются оценками экспонент $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$, возможно с точностью до некоторой перестановки $j = S(j')$, через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$

3.1. Ранги тензоров и тензорные разложения

Для определения канонического тензорного разложения и разложения Таккера вводятся следующие определения.

Определение 3.1 (Тензорный ранг).

1. Говорят, что тензор \mathcal{A} размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ имеет тензорный ранг, равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_M,$$

где $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$, а символ \circ обозначает тензорное произведение.

2. Говорят, что тензор \mathcal{A} имеет ранг R , если он представим в виде линейной комбинации R тензоров ранга 1, и такое R минимально. Обозначение: $R = \text{rank}(\mathcal{A})$.

Замечание. 1. Представление тензора \mathcal{A} в виде линейной комбинации $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ тензоров ранга 1 называется каноническим разложением этого тензора (CPD).

2. Ранг тензора может зависеть от того, над каким полем рассматривается этот тензор: \mathbb{C} или \mathbb{R} [9].

Определение 3.2 (n -ранг тензора). n -рангом (модовым рангом) тензора \mathcal{A} называется размерность векторного пространства, порождённого n -столбцами (векторами n -го направления) этого тензора. Обозначается $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$.

Замечание. 1. В отличие от матричного случая, n -ранги тензора с количеством размеров больше 2 могут различаться.

2. В общем случае ранг тензора \mathcal{A} не равен его n -рангам, даже если они все равны между собой. Кроме того, всегда справедливо неравенство $\text{rank}_n(\mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A})$.

Определение 3.3 (n -я матрица развёртки тензора). Пусть \mathcal{A} — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$, тогда n -я матрица развёртки этого тензора (матрица сечений) — это матрица $[\mathbf{A}]_n$ (или $\mathbf{A}_{(n)}$) размера $I_n \times I_{n+1}I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$, в которой элемент тензора $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$ содержится в строке i_n и столбце с номером, равным

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[(i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

Свойство 3.1 (Связь n -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению n). n -столбцы тензора \mathcal{A} являются столбцами его n -й матрицы развёртки, и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}]_n).$$

Определение 3.4 (Произведение тензора и матрицы по направлению). Пусть \mathcal{A} — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$, \mathbf{U} — матрица размера $J_n \times I_n$ с элементами u_{ij} , тогда произведением тензора \mathcal{A} и матрицы \mathbf{U} по направлению n ($\mathcal{A} \times_n \mathbf{U}$) называется тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_M$, который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_M} u_{j_n i_n}.$$

Определение 3.5 (Разложение Таккера). Пусть тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ имеет n -ранги (R_1, R_2, \dots, R_M) . Тогда \mathcal{A} может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (5)$$

где тензор $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$ называется ядром разложения, $\mathbf{U}^{(k)} \in \mathbb{C}^{I_k \times J_k}$, $J_k \geq R_k$.

Такое представление называется разложением Таккера.

Замечание. Разложение Таккера не единственно. Частным случаем этого разложения является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD), которое и будет рассматриваться в дальнейшем в этой работе по следующим причинам:

- HOSVD имеет наибольшее среди всех тензорных разложений число свойств, схожих со свойствами матричного сингулярного разложения (SVD), применяемого в алгоритмах SSA и MSSA;
- HOSVD позволяет находить наилучшее приближение тензора тензором с фиксированными n -рангами.

3.2. HOSVD

В этом разделе приведены определение разложения HOSVD и некоторые его свойства.

Теорема 1 (Сингулярное разложение порядка M). *Любой комплекснозначный тензор \mathcal{A} размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (6)$$

в котором

1. $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)} : U_2^{(n)} : \dots : U_{I_n}^{(n)}]$ — унитарные матрицы,
2. \mathcal{Z} — комплекснозначный тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$, в котором каждое сечение $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$, полученное фиксированием индекса $i_n = \alpha$, удовлетворяет следующим свойствам.
 - а. *Полная ортогональность:* сечения $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ и $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$ ортогональны для всех возможных значений $n, \alpha, \beta : \alpha \neq \beta$:

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение.

- б. *Упорядоченность:* сечения расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \quad (7)$$

для всех $n \in \overline{1 : M}$.

Определение 3.6 (Сингулярное разложение тензора). Разложение вида (6) называется сингулярным разложением тензора \mathcal{A} порядка M или HOSVD тензора \mathcal{A} .

Определение 3.7 (Сингулярное число тензора). Обозначим $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$ и будем называть $\sigma_i^{(n)}$ i -м сингулярным числом тензора \mathcal{A} по направлению n .

Определение 3.8 (Сингулярный вектор тензора). Векторы $U_i^{(n)}$ будем называть i -м сингулярным вектором тензора \mathcal{A} по направлению n .

Замечание. Представление (6) можно переписать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \quad (8)$$

Такое представление удобно для описания тензорных алгоритмов HO-SSA и HOSVD-MSSA.

3.3. Свойства HOSVD

Многие свойства методов SSA и MSSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность некоторых свойств SSA и MSSA со свойствами HO-SSA и HOSVD-MSSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

Пусть \mathcal{A} — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$. Применением SVD ко всем матрицам сечений этого тензора вычисляются M матриц $\mathbf{U}^{(n)}$, составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Определим тензор \mathcal{Z} следующим образом

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 (\mathbf{U}^{(1)})^H \times_2 (\mathbf{U}^{(2)})^H \dots \times_M (\mathbf{U}^{(M)})^H,$$

где верхний индекс H обозначает эрмитово сопряжение матрицы. Тогда исходный тензор \mathcal{A} можно представить в виде (6)

Утверждение 3.1. Процедура, описанная выше, даёт HOSVD тензора \mathcal{A} .

Из-за этой связи HOSVD с SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

Свойство 3.2 (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому направлению определяются однозначно.

2. Если сингулярные числа по направлению n различны, то сингулярные векторы по направлению n определены с точностью до умножения на коэффициент единичной нормы. Другими словами, если вектор $U_\alpha^{(n)}$ умножается на $e^{i\theta}$, то сечение $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ должно быть умножено на обратный коэффициент $e^{-i\theta}$.
3. Сингулярные векторы по направлению n , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по направлению n , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией этих векторов. Соответствующие сечения $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ должны быть пересчитаны обратным образом. Другими словами, $\mathbf{U}^{(n)}$ можно заменить на $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$, где \mathbf{Q} — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению $\mathbf{U}^{(n)}$ на наборы сингулярных векторов по направлению n , соответствующих одинаковым сингулярным значениям по направлению n . При этом тензор \mathcal{Z} должен быть заменён на $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$.

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется с точностью до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

Свойство 3.3 (Обобщение). HOSVD тензора является обобщением SVD в том смысле, что результат применения HOSVD к тензору с двумя размерами, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, с точностью до унитарных преобразований сингулярных векторов, отвечающих равным сингулярным числам, и соответствующих преобразований матрицы сингулярных значений.

Свойство 3.4 (Связь n -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ вида (6), тогда, по определению, тензор сингулярных чисел \mathcal{Z} удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех $n \in \overline{1:M}$. Обозначим r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$. Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (9)$$

Свойство 3.5 (Норма). Пусть имеется HOSVD тензора \mathcal{A} , представленное в виде (6), и пусть $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$, $n \in \overline{1:M}$. Тогда справедливо равенство

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \|\mathcal{Z}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2$$

3.4. Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера

HOSVD позволяет получать приближение произвольного тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ некоторым тензором с заданными меньшими n -рангами (R_1, R_2, \dots, R_M) .

Определение 3.9 (Ориентированная энергия). Ориентированной по направлению n энергией тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ в направлении вектора $X \in \mathbb{C}^{I_n}$ единичной нормы называют выражение

$$\text{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^H[\mathbf{A}]_n\|^2.$$

Свойство 3.6 (Об ориентированной энергии). Направления экстремальной ориентированной энергии по направлению n соответствуют сингулярным векторам по направлению n , причём значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по направлению n .

Это означает, что n -столбцы тензора \mathcal{A} содержат наибольшие вклады в направлении $U_1^{(n)}$, и на это направление приходится $(\sigma_1^{(n)})^2$ энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по направлению n достигает экстремума в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной $(\sigma_2^{(n)})^2$, и так далее.

Свойство 3.7 (Приближение). Пусть имеется HOSVD тензора \mathcal{A} , представленное в виде (6), и пусть $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$. Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ для заданных $I'_n, n \in \overline{1:M}$, то есть заменяя нулями соответствующие сечения тензора \mathcal{Z} . Тогда верно

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} (\sigma_{i_1}^{(1)})^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} (\sigma_{i_2}^{(2)})^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} (\sigma_{i_M}^{(M)})^2. \quad (10)$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Для тензоров эта связь принимает другой вид. Тензор, получаемый отбрасыванием наименьших сингулярных значений по направлению n будет иметь n -ранги $(I'_1, I'_2, \dots, I'_M)$, но в общем случае не будет наилучшим приближением при заданных ограничениях на n -ранги. Тем не менее, условие упорядоченности (7) подразумевает, что «энергия» \mathcal{A} в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям индексов направлений. Следовательно, если $\sigma_{I'_n}^{(n)} \gg \sigma_{I'_n+1}^{(n)}$ (например, если

$I'_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$, то меньшие сингулярные значения по измерению n не существенны), то $\hat{\mathcal{A}}$ всё ещё можно считать хорошим приближением \mathcal{A} . Ошибка ограничена выражением (10).

Одним из методов получения оптимального приближения тензора тензором малых рангов является алгоритм High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [13, 14]. При заданных тензоре \mathcal{A} и наборе n -рангов (R_1, R_2, \dots, R_M) алгоритм решает задачу минимизации

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\| \rightarrow \min$$

относительно тензора $\hat{\mathcal{A}}$ с заданными n -рангами (R_1, R_2, \dots, R_M) . Алгоритм HOOI является итерационным, в качестве начального приближения \mathcal{A}_0 обычно используется усечение с нужными рангами HOSVD тензора \mathcal{A} . Критерий остановки алгоритма на шаге k : $\|\hat{\mathcal{A}}_{k-1} - \hat{\mathcal{A}}_k\| < \varepsilon$ для некоторого заданного ε , либо $k \geq N$ для некоторого заданного N .

Свойство 3.8.

1. Алгоритм HOOI не гарантирует сходимости к глобальному минимуму выражения $\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}_k\|$.
2. На практике алгоритм HOOI обычно демонстрирует линейную скорость сходимости, но его теоретическая скорость сходимости может быть и нелинейной в зависимости от конкретных условий [15].

4. Описание метода HO-SSA

Пусть дан временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Определение 4.1 (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда \mathbf{X} с параметрами $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$ будем называть тензор \mathcal{X} размера $I \times L \times J$, $J = N - I - L + 2$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

Замечание. Траекторный тензор \mathcal{X} является ганкелевым [16].

Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}_{k..} = \mathcal{A}_{i_1=k}, \quad \mathcal{A}_{.k.} = \mathcal{A}_{i_2=k}, \quad \mathcal{A}_{..k} = \mathcal{A}_{i_3=k}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 2.1 сечения траекторного тензора ряда \mathbf{X} с параметрами I, L имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{..j} &= \mathcal{H}_I \left((x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+I+L-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{.l.} &= \mathcal{H}_I \left((x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+L+J-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{i..} &= \mathcal{H}_L \left((x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L+J-2}) \right). \end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд \mathbf{X} и параметры $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$. Так как при замене одного из этих параметров на $J = N - I - L + 2$ или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки (I, L, J) без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

4.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд \mathbf{X} представим в виде суммы временных рядов \mathbf{X}_k и шума \mathbf{E} :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда \mathbf{X} в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов \mathbf{X}_k . Метод HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 4.

4.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших n -рангов, заданных пользователем, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD (HOSVD-SSA). Благодаря свойству 3.7 такое приближение можно считать

Алгоритм 4 HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , m , $R : m \leq R \leq \min(I, L, N - I - L + 2)$, $\mathfrak{S}_1^{(p)}, \dots, \mathfrak{S}_m^{(p)}$:

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k^{(p)} \quad \mathfrak{S}_k^{(p)} \cap \mathfrak{S}_l^{(p)} = \emptyset, k \neq l, p \in \{1, 2, 3\}.$$

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$ — оценки рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$.

- 1: Вложение: построение траекторного тензора \mathcal{X} по параметрам I, L .
- 2: Разложение: проведение HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (11)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k^{(1)}} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k^{(2)}} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k^{(3)}} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов $\tilde{\mathbf{X}}_k$ по тензорам $\mathcal{X}^{(k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{ilj}^{(k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, l, j) \mid 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n \right\}.$$

достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом 4, поэтому опишем его, начиная с третьего шага. Описание приведено в алгоритме 5.

Второй способ использует алгоритм HOOI для приближения траекторного тензора ряда некоторым тензором меньших n -рангов, причём результатом выполнения HOOI будет HOSVD этого приближения (HOOI-SSA). Первый шаг этого алгоритма совпадает с первым шагом алгоритма 4, поэтому опишем его начиная со второго шага. Описание приведено в алгоритме 6.

Алгоритм 5 HOSVD-SSA для выделения сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : I}$, $R_2 \in \overline{1 : L}$, $R_3 \in \overline{1 : J}$.

Результат: $\hat{\mathbf{X}}$.

- 3: По параметрам R_1, R_2, R_3 и разложению траекторного тензора \mathcal{X} в виде (11), в тензоре \mathcal{Z} проводится замена сечений $\mathcal{Z}_{i_m=k}$ при $k > R_m$ на нулевые, и по полученному тензору $\hat{\mathcal{Z}}$ строится приближение траекторного тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
 - 4: Усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$, в результате чего получается оценка сигнала $\hat{\mathbf{X}}$.
-

Алгоритм 6 HOOI-SSA

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : I}$, $R_2 \in \overline{1 : L}$, $R_3 \in \overline{1 : J}$.

Результат: $\hat{\mathbf{X}}$.

- 2: Применение к построенному на первом шаге траекторному тензору \mathcal{X} метода HOOI с набором n -рангов (R_1, R_2, R_3) . Результат применения HOOI: тензор $\hat{\mathcal{X}}$, имеющий заданные n -ранги.
 - 3: Восстановление сигнала, совпадает с шагом 4 алгоритма 5.
-

5. Описание метода HOSVD-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HOSVD-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

5.1. HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

Определение 5.1 (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда \mathbf{X} с длиной окна $L : 1 < L < N$ будем называть тензор \mathcal{X} размерности $L \times K \times P$, $K = N - L + 1$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1 : L}, k \in \overline{1 : K}, p \in \overline{1 : P}.$$

Из определения следует, что сечение $\mathcal{X}_{..p}$ траекторного тензора с длиной окна L является траекторной матрицей ряда $\mathbf{X}^{(p)}$, построенной по длине окна L . Пользуясь определением 2.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{..p} = \mathcal{H}_L(\mathbf{X}^{(p)}).$$

Метод HOSVD-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HOSVD-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем, n -рангов. Для получения такого приближения используется усечение HOSVD траекторного тензора. Описание метода приведено в алгоритме 7.

Алгоритм 7 HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Входные данные: $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$, $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : L}$, $R_2 \in \overline{1 : K}$, $R_3 \in \overline{1 : P}$, где $K = N - L + 1$.

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}$.

- 1: Построение по ряду \mathbf{X} траекторного тензора \mathcal{X} с длиной окна L .
- 2: Вычисление HOSVD \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (12)$$

- 3: Построение по параметрам R_1, R_2, R_3 усечения HOSVD

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

- 4: Восстановление многомерного ряда $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(P)})$ по тензору $\tilde{\mathcal{X}}$, которое происходит следующим образом: ряды $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$ получают усреднением сечений $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$ вдоль побочных диагоналей $l + k = \text{const}$.
-

5.2. HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два P -мерных временных ряда $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ длины N и $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$. Их траекторные тензоры с длиной окна L обозначим $\hat{\mathcal{X}}$, $\tilde{\mathcal{X}}$, \mathcal{X} соответственно.

Метод HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала \mathbf{X} в виде суммы

HOSVD траекторных тензоров компонент \hat{X} и \tilde{X} . Первые два шага этого алгоритма совпадают с первыми двумя шагами алгоритма 7, поэтому описание алгоритма приводится, начиная с 3 шага. Описание метода приведено в алгоритме 8.

Алгоритм 8 HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: $X, L : 1 < L < N, K = N - L + 1, \hat{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \overline{1 : \min(L, K)} : \hat{\mathfrak{S}} \cap \tilde{\mathfrak{S}} = \emptyset, \hat{\mathfrak{P}}, \tilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : P}$

Результат: $\hat{\hat{X}}, \hat{\tilde{X}}$ — оценки \hat{X} и \tilde{X} соответственно.

3: Группировка: построение тензоров

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \hat{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \hat{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \hat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \tilde{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \tilde{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \tilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.\end{aligned}$$

4: Восстановление рядов $\hat{\hat{X}}$ и $\hat{\tilde{X}}$ по тензорам $\hat{\mathcal{X}}$ и $\tilde{\mathcal{X}}$ соответственно путём применения к каждому из этих тензоров шага 4 алгоритма 7.

6. Описание метода HO-ESPRIT

Пусть X — одномерный ($P = 1$) или многомерный ($P > 1$) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\bar{L} = \begin{cases} (I, L), & P = 1, \\ L, & P > 1, \end{cases}$$

а \mathcal{X} — траекторный тензор ряда X , построенный с длиной (длинами) окна из \bar{L} . Также определим область допустимых параметров \bar{L} :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(I, L) : 1 < I, L < N, I + L < N + 1\}, & P = 1, \\ \{L : 1 < L < N\}, & P > 1. \end{cases}$$

Описание метода HO-ESPRIT приведено в алгоритме 9. Обоснование метода можно найти в работе [6].

Алгоритм 9 HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

Входные данные: $\mathbf{X}, \bar{L} \in \mathcal{D}$, $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$, $d \in \{1, 2, 3\}$ — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров.

Результат: $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$ — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Построение траекторного тензора $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ по ряду \mathbf{X} с параметрами из \bar{L} . Если $P = 1$, то $I_1 = I$, $I_2 = L$, $I_3 = N - I - L + 2$, а если $P > 1$, то $I_1 = L$, $I_2 = N - L + 1$, $I_3 = P$.
- 2: Вычисление HOSVD \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=1}^{I_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы $\mathbf{U} = [U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \dots : U_{I_D}^{(d)}]$.

- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы \mathbf{Z} , где запись \mathbf{U}^\dagger обозначает матрицу \mathbf{U} без первой строки, а запись \mathbf{U}_\downarrow — без последней.

- 4: Нахождение первых R в порядке убывания собственных чисел λ_j матрицы \mathbf{Z} . Полученные собственные числа $\lambda_{j'}$ считаются оценками экспонент $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$, возможно с точностью до некоторой перестановки $j = S(j')$, через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$

7. Численные сравнения в задаче оценки параметров

В этом разделе приведены сравнения методов ESPRIT и HO-ESPRIT по точности оценки параметров сигнала вида (4) в случае одномерных и многомерных рядов. В качестве показателя точности оценки была выбрана метрика относительного среднеквадратичного отклонения (RRMSE)

$$\text{RRMSE} = \frac{100}{|\gamma|} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\gamma - \hat{\gamma}_j|^2} (\%), \quad (13)$$

где m — количество реализаций шума, γ — оцениваемый параметр, $\hat{\gamma}_j$ — оценка параметра γ по ряду с j -й реализацией шума. Такой выбор был сделан для того, чтобы в

дальнейшем сравнить результаты с результатами работы [6], в которой использовалась именно такая метрика для определения точности оценивания параметров.

7.1. Одномерный случай

Пусть $P = 1$ и $R = 2$, то есть одномерный временной ряд $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{24})$ состоит из элементов вида

$$x_n = e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n, \quad (14)$$

где $n \in \overline{0:24}$, $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, а ξ_n и η_n — последовательность независимых случайных величин из распределения $N(0, \sigma^2/2)$, $\sigma = 0.04$. Случайные величины ζ_n являются независимыми и их распределение называется кругосимметричным комплексным нормальным распределением (circularly-symmetric complex normal distribution) [17] с дисперсией σ^2 и обозначается $CN(0, \sigma^2)$.

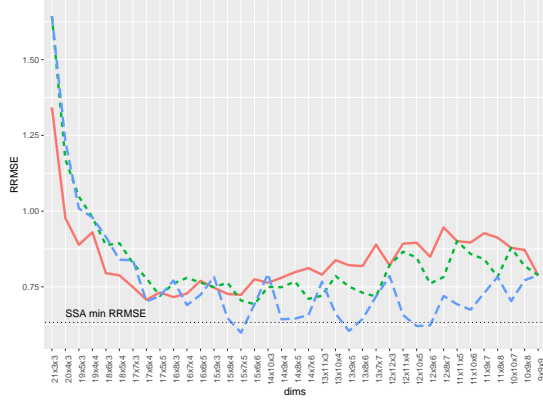
Пусть $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.22$. Ниже приведены рассматриваемые варианты степеней затухания.

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
2. $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.01$.
3. $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02$.
4. $\alpha_1 = -0.01$, $\alpha_2 = -0.02$.

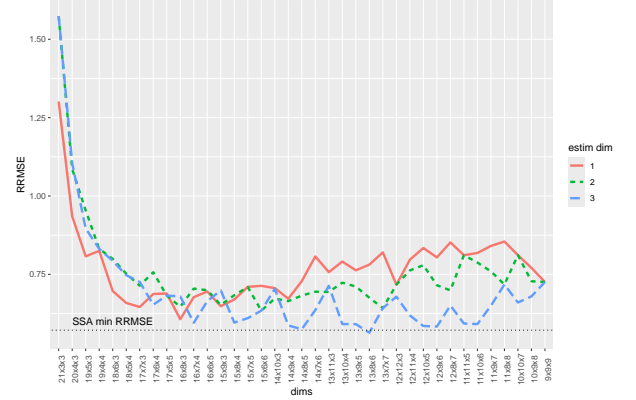
Такие параметры были выбраны, так как в статье [6] рассматривалась модель с такими частотами и степенями затухания из варианта 4. Во всех случаях ранг сигнала с такими параметрами будет равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы \mathbf{Z} из алгоритмов 3 и 9. В этом разделе RRMSE считалось по 500 реализациям шума.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок частот и степеней затухания, полученных методом HO-ESPRIT, от размеров траекторного тензора (ось x) и выбора направления оценивания (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на рисунках изображены наименьшие по выбору длины окна значения RRMSE соответствующего параметра, полученные методом ESPRIT.

Рисунки 1 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 2, 3 и 4 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

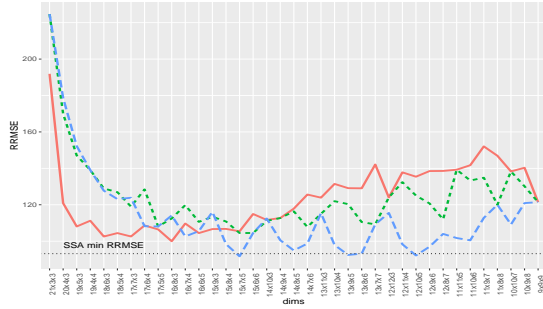


(a) RRMSE оценок ω_1 .

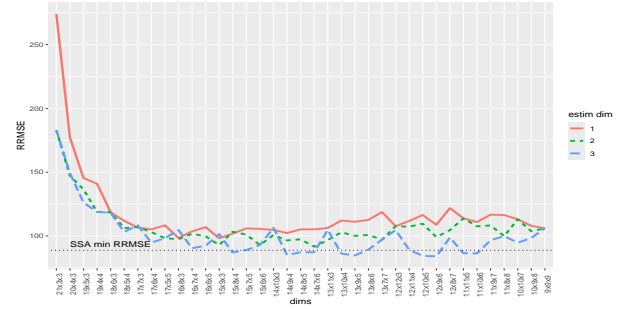


(б) RRMSE оценок ω_2 .

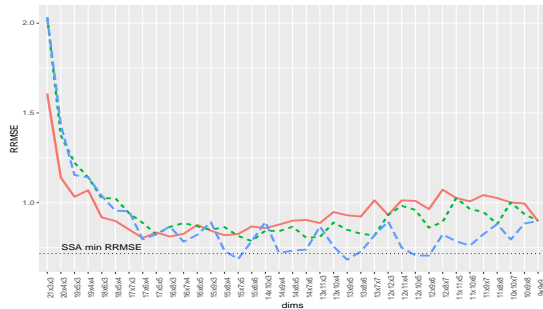
Рис. 1. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 1.



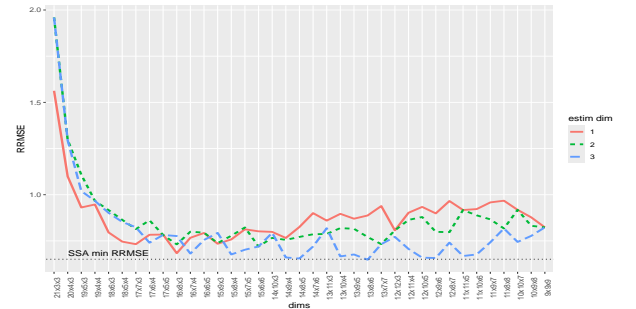
(a) RRMSE оценок α_1 .



(б) RRMSE оценок α_2 .



(в) RRMSE оценок ω_1 .



(г) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 2. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 2.

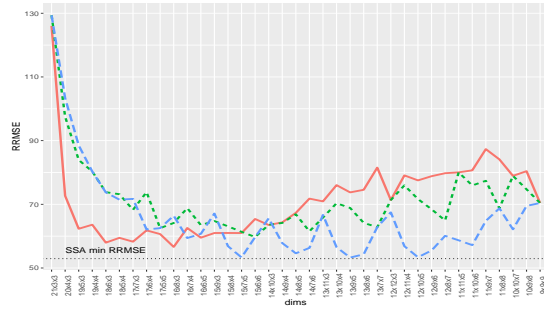
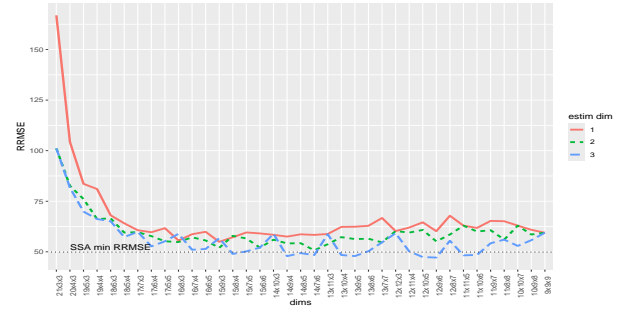
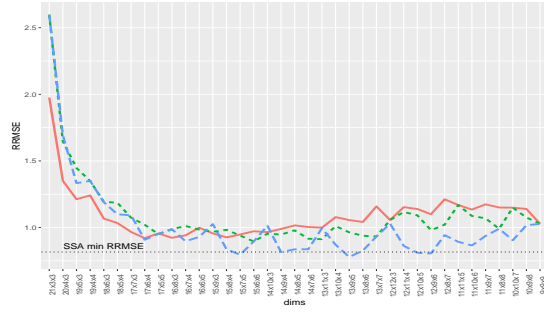
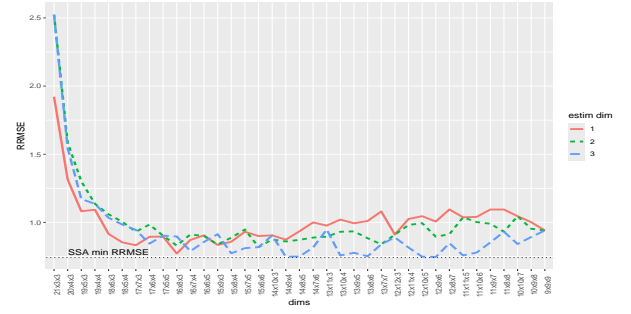
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(e) RRMSE оценок ω_1 .(e) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 3. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 3.

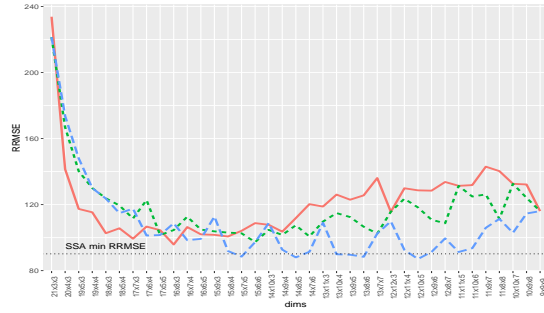
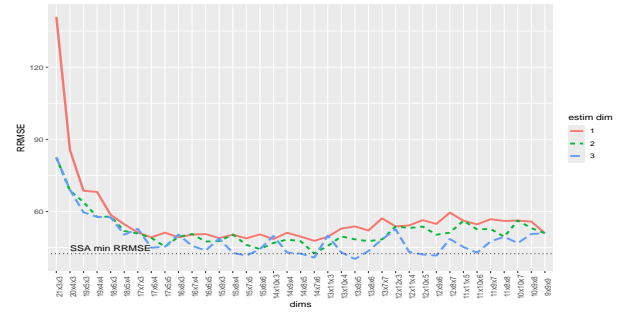
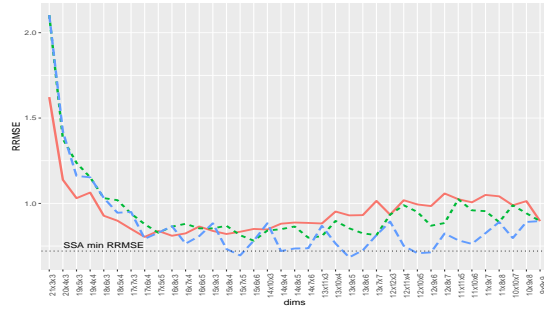
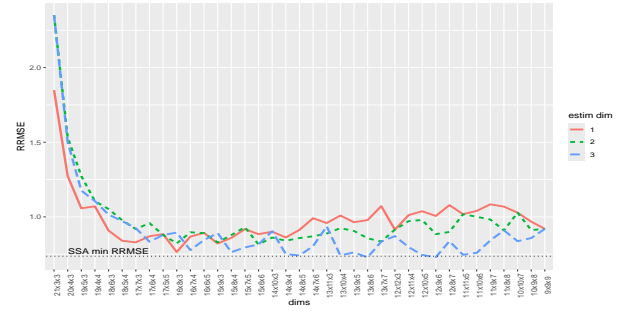
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(e) RRMSE оценок ω_1 .(e) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 4. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 4.

Выводы из численных сравнений В случае одномерных сигналов оценки методом HO-ESPRIT при оптимальном подборе параметров оказались не менее точными, чем оптимальные оценки стандартным методом ESPRIT. Кроме того, в некоторых ситуациях оптимальные оценки методом HO-ESPRIT оказываются точнее оптимальных оценок методом ESPRIT. Это соответствует результатам работы [6], в которой методы сравнивались только при оптимальных размерах длины окна. Однако множество длин окна в алгоритме HO-ESPRIT, при которых точность оценок параметров сигнала близка к оптимальной, очень мало, и нам пока неизвестны способы их выбора кроме перебора. С другой стороны, для стандартного алгоритма ESPRIT требуется меньший набор параметров, а множество длин окна, при которых точность оценки близка к оптимальной, довольно велико. С учётом этих замечаний, и того, что разница в точности оптимальных параметров между методами невелика, использование метода HO-ESPRIT в текущем виде не обосновано.

Стоит заметить, что во всех случаях выбор номера направления d из алгоритма 9, соответствующего направлению наименьшего размера траекторного тензора, давал более точные результаты.

7.2. Многомерный случай

Пусть $P = 12$ и $R = 2$, то есть многомерный временной ряд

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(12)}), \\ \mathbf{X}^{(p)} &= (x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{24}^{(p)}) \end{aligned}$$

состоит из элементов вида

$$x_n^{(p)} = a_1^{(p)} e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + a_2^{(p)} e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n^{(p)},$$

где $n \in \overline{0 : 24}$, а $\zeta_n^{(p)}$ — независимые случайные величины из распределения $\text{CN}(0, \sigma^2)$, $\sigma = 0.2$. Значения частот и варианты степеней затухания были взяты такими же, как в одномерном случае в разделе 7.1. В качестве амплитуд $a_k^{(p)}$ были взяты независимые реализации случайных величин из распределения $\text{CN}(0, 1)$, их приблизительные значения

приведены в выражении (15).

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(a_1) &\approx (0, -0.1, -1, -0.4, 0.2, 0.3, -0.9, -0.3, -1.2, -0.2, 0.8, 0.5)^T, \\
 \text{Im}(a_1) &\approx (-0.9, -0.3, -0.5, -0.6, -0.1, -0.2, -1.3, -0.1, 0.7, 0.1, -1, -1)^T, \\
 \text{Re}(a_2) &\approx (-0.2, 0.7, 0.5, 0.1, -0.7, -0.1, 0.7, 0.3, -0.4, -1.5, -0.5, -1.5)^T, \\
 \text{Im}(a_2) &\approx (0.3, -1.2, -0.2, -0.5, 0.8, -0.5, -0.6, 0.6, -0.7, 0, 0.2, -0.2)^T.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Как и в одномерном случае, ранг сигналов с каждым набором параметров равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы \mathbf{Z} из алгоритмов 3 и 9.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок параметров, полученных методами ESPRIT и HO-ESPRIT, от значения длины окна L .

Рисунки 5 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 6, 7 и 8 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

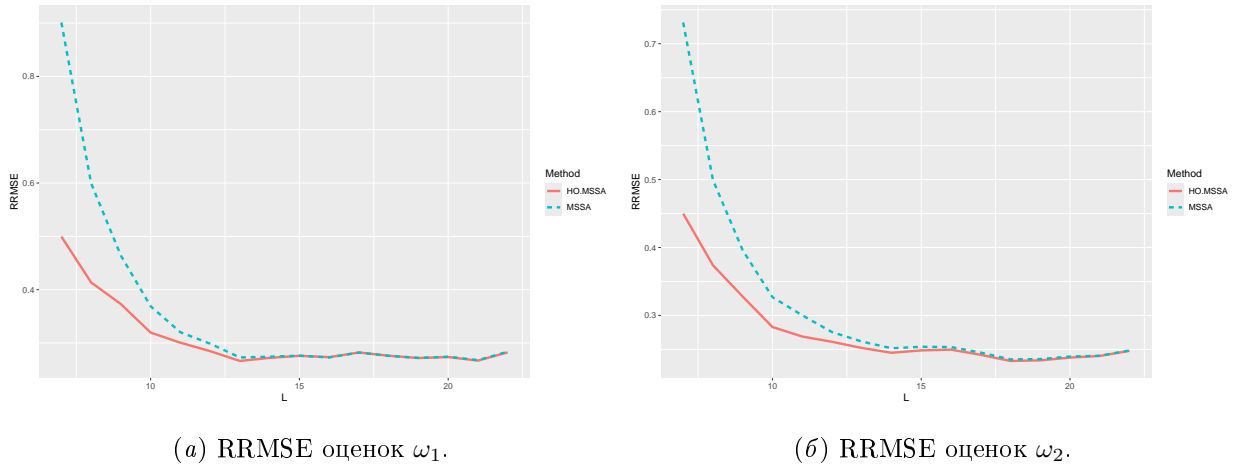


Рис. 5. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 1.

Выводы из численных сравнений Метод HO-ESPRIT оказался точнее стандартного метода ESPRIT в задаче оценки параметров многомерного ряда для любого выбора параметров длины окна во всех случаях, не считая двух: оценки методом HO-ESPRIT параметра α_1 оказались менее точными, чем методом ESPRIT, в случаях 2 и 3.

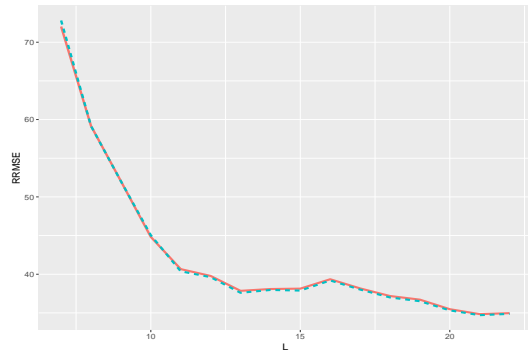
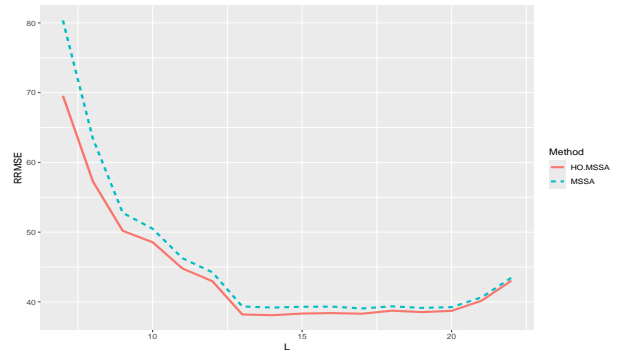
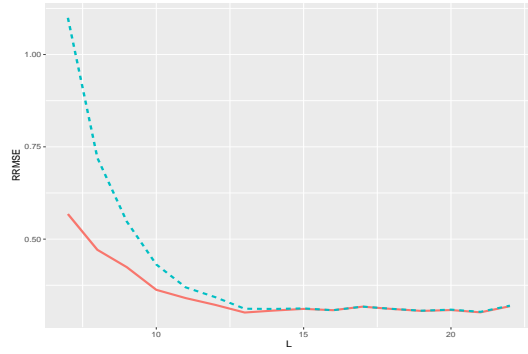
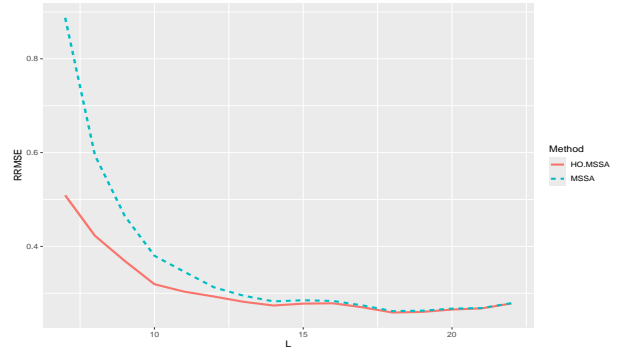
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(с) RRMSE оценок ω_1 .(г) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 6. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 2.

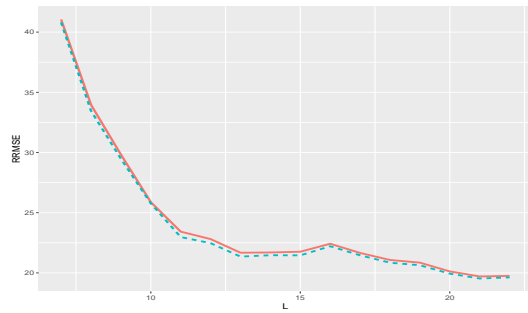
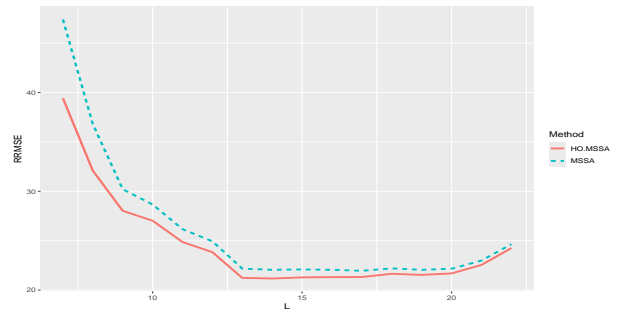
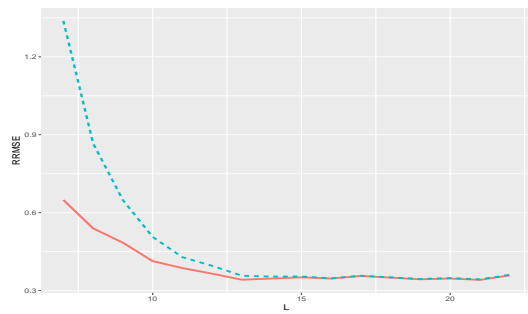
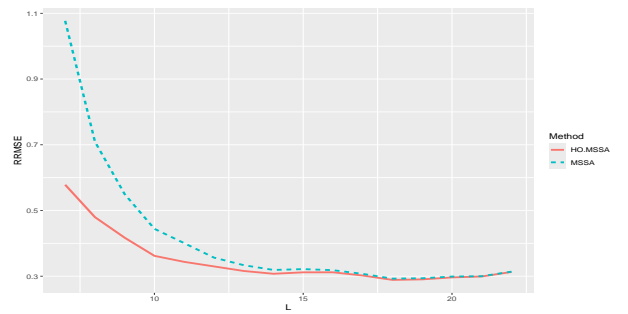
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(с) RRMSE оценок ω_1 .(г) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 7. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 3.

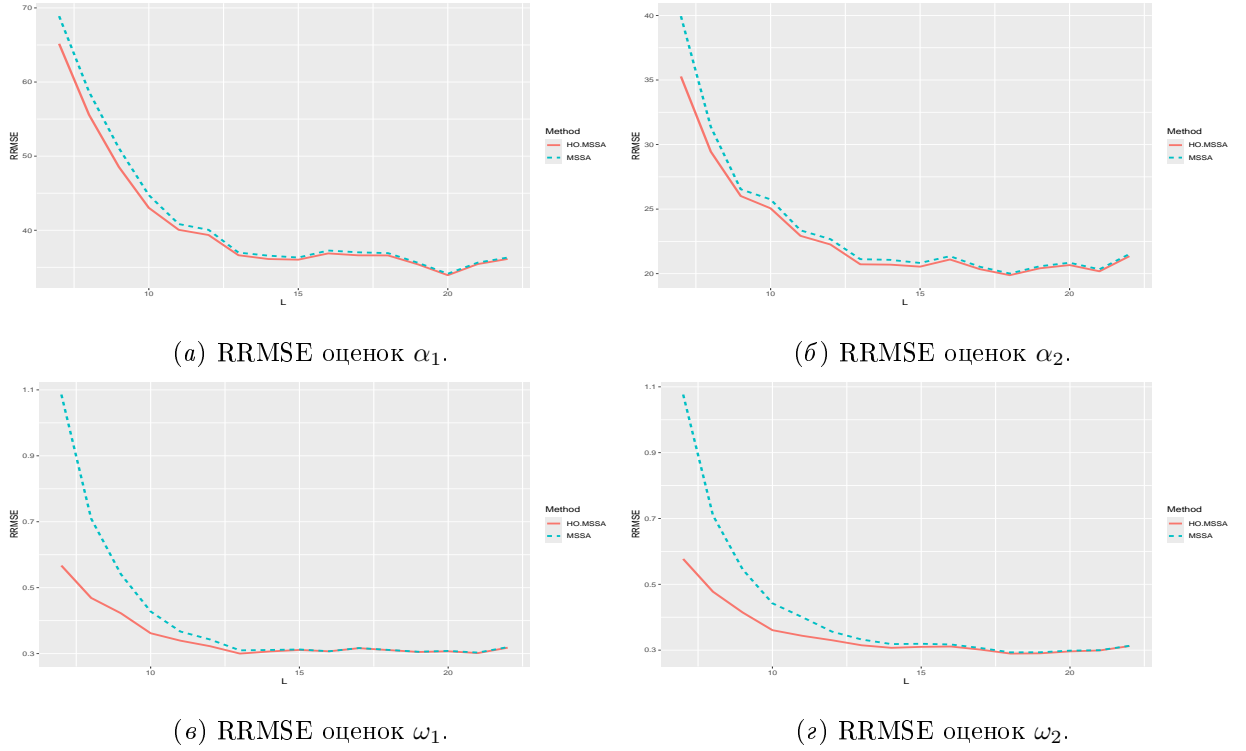


Рис. 8. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 4.

7.3. Сравнение с задачей выделения многомерного сигнала

8. Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA

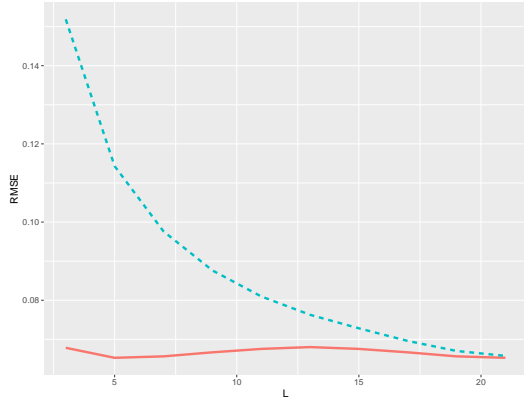
В этом разделе рассматривается влияние выбора направлений усечения в методе HO-SSA на точность в задаче выделения сигнала. Под направлениями усечения имеются в виду номера направлений траекторного тензора, к которым применялось усечение. Например, если траекторный тензор имеет размеры (I, L, J) , а направление усечения равно $\overline{1:2}$, то это соответствует выбору $(R_1, R_2, R_3) = (r, r, J)$ в алгоритмах 5 и 6, где r — ранг сигнала.

Пусть временной ряд \mathbf{X} имеет вид

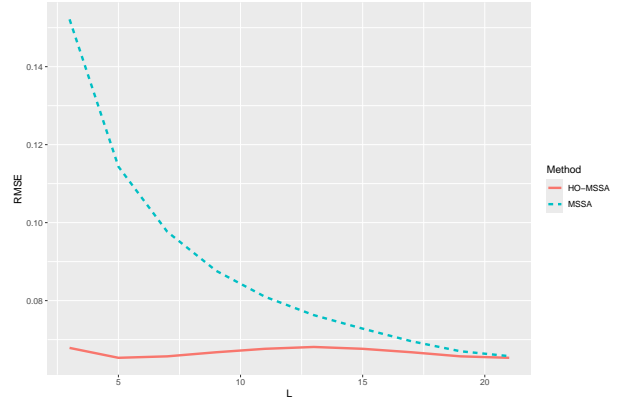
$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

$$x_n = s_n + \varepsilon_n, \quad n \in \overline{1:N},$$

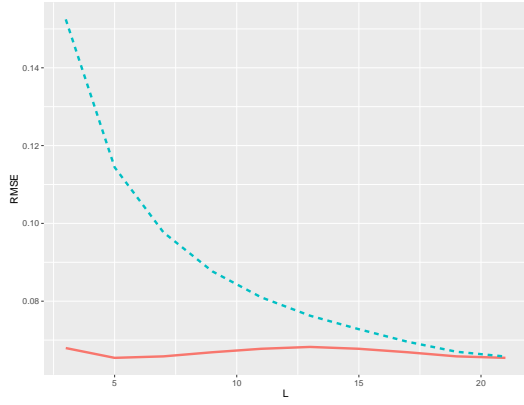
где $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ — сигнал, $\mathbf{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ — шум. Точность выделения сигнала будет оцениваться с помощью среднеквадратичного отклонения (RMSE) оценённого



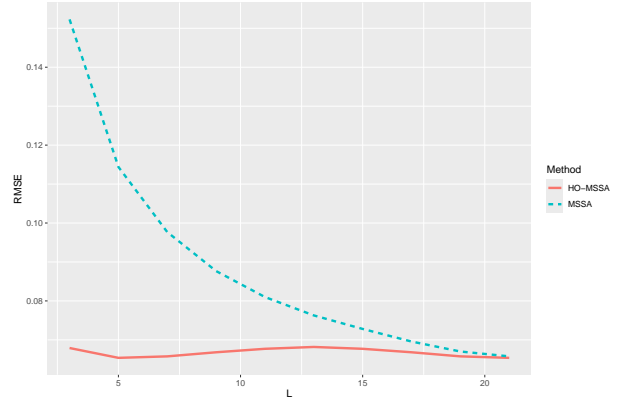
(a) Случай 1.



(б) Случай 2.



(в) Случай 3.



(г) Случай 4.

Рис. 9. Зависимость RMSE оценок многомерного сигнала от длины окна.

сигнала от исходного. В данной работе RMSE высчитывается по следующей формуле

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}_i)}, \quad \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |s_j - \tilde{s}_j|^2,$$

где m — количество реализаций шума, $\tilde{\mathbf{s}}_i$ — оценка сигнала, восстановленная по ряду \mathbf{s} i -й реализацией шума.

8.1. Выделение вещественного сигнала

Пусть $N = 71$ и временной ряд состоит из элементов вида

$$x_n = 30 \cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n, \quad (16)$$

где ε_n — независимые случайные величины из распределения $N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 25$. Во всех алгоритмах для восстановления бралось количество компонент разложения равное рангу сигнала, который в данном случае равен 2. В таблице 1 приведены значения RMSE

оценки сигнала, восстановленного методом SSA при различных выборах длины окна. RMSE здесь и далее в этом разделе высчитывается по $m = 500$ реализациям шума. Кро-

Таблица 1. SSA: RMSE оценки сигнала (16).

L	12	24	30	36
RMSE	1.82	1.42	1.40	1.42

ме того, здесь и далее жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения RMSE, причём отличие этих минимальных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

В таблице 2 представлены значения RMSE оценок сигнала, восстановленного методом HOOI-SSA при выборе различных направлений усечения. Метод HOSVD-SSA даёт менее точные схожие результаты. Параметры в таблице 2 представлены в порядке уменьшения третьего размера траекторного тензора, причём выполняется неравенство $I \leq J \leq L$. Большие параметры длин окна не рассматриваются, так как построенные по ним траекторные матрицы и траекторные тензоры будут совпадать с рассмотренными с точностью до перестановки размерностей.

Таблица 2. HOOI-SSA: RMSE оценки сигнала (16) при разных направлениях усечения.

$I \times L$ Направления усечения	12×49	12×37	7×36	12×31	19×30	24×25
3	1.85	1.52	1.48	1.54	1.57	1.59
2, 3	1.63	1.53	1.49	1.56	1.62	1.65
$\bar{1} : \bar{3}$	1.63	1.53	1.49	1.56	1.62	1.65

Из таблицы 2 видно, что усечение только по направлению наибольшей размерности даёт результаты точнее, чем усечение по всем направлениям, при почти любом выборе длин окна. Но этого увеличения точности недостаточно, чтобы алгоритм HO-SSA был точнее базового SSA.

8.2. Выделение комплексного сигнала

Рассмотрим задачу выделения комплекснозначного сигнала из ряда X с элементами вида (14) с частотами $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.22$ и со степенями затухания $\alpha_1 = -0.01$,

$\alpha_2 = -0.02$.

На рисунке 10 представлен график зависимости RMSE от размеров траекторного тензора (ось x) и направлений усечения (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на графике изображено минимальное по выбору длины окна значение RMSE для сигналов, восстановленных методом SSA. Как и в случае вещественного сигнала, метод

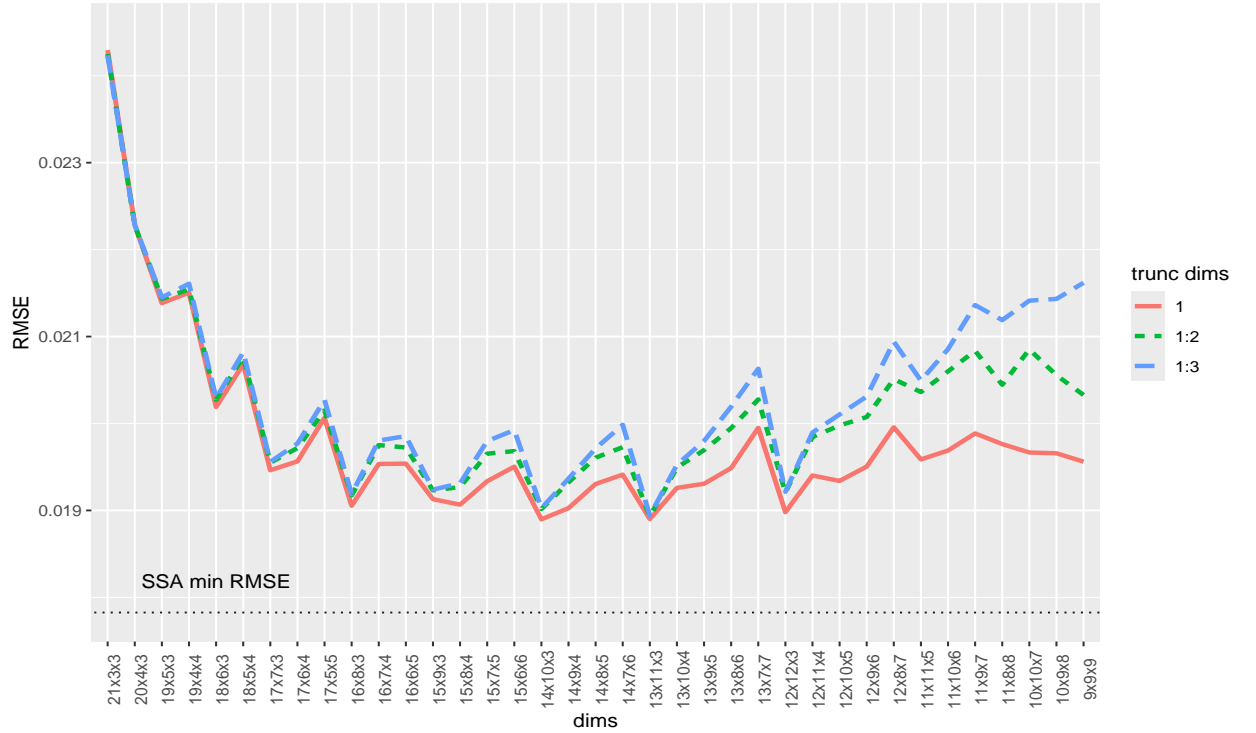


Рис. 10. Зависимость RMSE восстановленного сигнала от размеров траекторного тензора и направлений усечений.

НО-SSA оказывается существенно менее точным при любом выборе длин окна и направлений усечения, чем метод SSA. Также наиболее точные оценки сигнала получаются при выборе в качестве направления усечения направления минимальной размерности траекторного тензора ряда.

Выводы численных сравнений В отличие от задачи оценки параметров, где при выборе оптимальных длин окна тензорные методы могут давать оценки точнее, чем базовый ESPRIT, в задаче выделения сигнала при любом выборе длин окна точность восстановленных тензорными методами оценок сигналов всегда существенно меньше точности оценок, восстановленных базовым SSA.

9. Заключение

TODO

Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
3. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage / Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin Heidelberg, 2020.
5. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
6. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
7. Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.
8. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
9. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Rev. — 2009. — Vol. 51, no. 3. — P. 455–500.
10. Savostyanov D. V., Tyrtshnikov E.E. Approximate multiplication of tensor matrices based on the individual filtering of factors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49, no. 10. — P. 1662–1677.
11. Kazeev V. A., Tyrtshnikov E.E. Structure of the Hessian matrix and an economical implementation of Newton's method in the problem of canonical approximation of tensors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50,

- no. 6. — P. 927–945.
12. Осинский А.И. Оценки аппроксимации тензорных поездов по норме Чебышёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 211–216.
 13. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. On the Best Rank-1 and Rank- (R_1, R_2, \dots, R_N) Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
 14. Sheehan B., Saad Y. Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Relation to PCA and GLRAM // Proceedings of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining. — Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2007.
 15. Eldén L., Savas B. A Newton–Grassmann Method for Computing the Best Multilinear Rank- (r_1, r_2, r_3) Approximation of a Tensor // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 31, no. 2. — P. 248–271.
 16. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.
 17. Tse David, Viswanath Pramod. Fundamentals of Wireless Communication. — Cambridge University Press, 2005.