

1. Известные сведения об алгоритмах SSA и MSSA

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

1.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Определение 1.1 (Оператор вложения). Оператором вложения \mathcal{H}_L с длиной окна L будем называть отображение, переводящее временной ряд $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $N \geq L$, в ганкелеву матрицу $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$, $K = N - L + 1$, такую, что $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$. Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

Определение 1.2 (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда \mathbf{X} с длиной окна $L < N$ называют матрицу \mathbf{X} , полученную применением оператора вложения \mathcal{H}_L , к ряду \mathbf{X} .

Пусть временной ряд \mathbf{X} представим в виде суммы временных рядов \mathbf{X}_k и шума \mathbf{E} :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов \mathbf{X}_k . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$. Первые два шага в алгоритме 2 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

Определение 1.3 (SSA-ранг временного ряда). Число d называется SSA-рангом временного ряда \mathbf{X} длины N , если $d \leq (N + 1)/2$ и для любой допустимой длины окна L , то есть такой, что $d \leq \min(L, N - L + 1)$, ранг траекторной матрицы \mathbf{X} этого ряда, построенной по длине окна L , равен d .

Алгоритм 1 SSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , m , $R : m \leq R \leq \min(L, N-L+1)$,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$:

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$ — оценки рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$.

- 1: Вложение: построение траекторной матрицы \mathbf{X} по длине окна L .
- 2: Разложение: проведение SVD траекторной матрицы \mathbf{X} , получение её представления в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d \leq \min(L, N-L+1).$$

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов $\tilde{\mathbf{X}}_k$ по матрицам \mathbf{X}_k посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей $i + j = \text{const}$:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N-L+1, i+j-1 = n \right\}.$$

Алгоритм 2 SSA для выделения сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R : 1 \leq R \leq \min(L, N-L+1)$.

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}$ — оценка сигнала $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$.

- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление ряда $\tilde{\mathbf{X}}$ по матрице $\tilde{\mathbf{X}}$ посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей $i + j = \text{const}$.
-

Замечание. В качестве параметра R в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

Пример 1.1. Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-

ранги.

- Ранг полиномиального ряда $x_n = Q_d(n)$, где Q_d — многочлен степени d , равен $d+1$.

- Ранг экспоненциального ряда $x_n = Ce^{\alpha n}$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ и $C \neq 0$, равен 1.

- Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^M C_j e^{\alpha_j n},$$

где $\alpha_j \in \mathbb{C}$ и $C_j \neq 0$ при всех j , равен количеству уникальных значений α_j .

- Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где $C \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\omega \in [0, 1/2]$, равен $r(\omega)$, где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

- Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^M Ce^{\alpha_j n} \cos(2\pi n\omega_j + \psi_j)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где Ω — множество уникальных пар (ω_i, α_i) , представленных в данном временном ряду.

Определение 1.4 (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ и $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ называют слабо L -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1. $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)},$
2. $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}.$

Утверждение 1.1. Пусть $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$, а \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ — траекторные матрицы с длиной окна L рядов \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ соответственно. Тогда сумма SVD матриц $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ является SVD матрицы \mathbf{X} тогда и только тогда, когда ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ слабо L -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 1.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

1.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [2, 3, 4].

Пусть дан P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

Определение 1.5 (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$ — траекторные матрицы рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$ соответственно, построенные по длине окна L . Траекторной матрицей многомерного временного ряда \mathbf{X} называется матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$, $K = N - L + 1$, построенная соединением матриц \mathbf{X}_p по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P].$$

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

Определение 1.6 (MSSA-ранг временного ряда). Число d называется MSSA-рангом P -мерного временного ряда \mathbf{X} длины N , если $d \leq P(N + 1)/(P + 1)$, и для любой допустимой длины окна L , то есть такой, что $d \leq \min(L, P(N - L + 1))$, ранг траекторной матрицы \mathbf{X} этого ряда, построенной по длине окна L , равен d .

Замечание. Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

Пример 1.2. Рассмотрим P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N с элементами вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{R(p)} a_i^{(p)} e^{-\alpha_i^{(p)} n} \cos \left(2\pi \omega_i^{(p)} n + \varphi_i^{(p)} \right). \quad (2)$$

MSSA-ранг такого ряда равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad (3)$$

где функция $r(\omega)$ определена в уравнении (1), а Ω — множество уникальных пар $(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)})$, представленных в данном временном ряде.

Замечание. В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HOSVD-MSSA на многомерных сигналах вида (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры $R(p)$, $\omega_i^{(p)}$ и $\alpha_i^{(p)}$ не зависят от номера ряда p , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [5]. Кроме того, в работе [6] также рассматривается этот частный случай модели.

Определение 1.7 (Слабая MSSA-разделимость). P -мерные временные ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ длины N называются слабо L -разделимыми, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P}, \\ 2. \quad & \sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}. \end{aligned}$$

Утверждение 1.2. Пусть $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$, а \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ — траекторные матрицы с длиной окна L рядов \mathbf{X} , $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ соответственно. Тогда сумма SVD матриц $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ является SVD матрицы \mathbf{X} тогда и только тогда, когда ряды $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ слабо L -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

1.3. ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [7, 6].

Пусть элементы многомерного временного ряда \mathbf{X} имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R a_j^{(p)} e^{\alpha_j n} e^{i(2\pi \omega_j n + \varphi_j^{(p)})}, \quad (4)$$

где i обозначает мнимую единицу, а параметрами модели являются амплитуды $a_j^{(p)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, фазы $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$, частоты $\omega_j \in [0, 1/2]$ и степени затухания $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Замечание. В статье [7] приводится алгоритм ESPRIT для модели временного ряда вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^R s_j(n) e^{i\omega_0 \Delta \sin \theta_j / c} a^{(p)}(\theta_j),$$

где оцениваемые параметры обозначены θ_j , но в работе будет рассматриваться модель вида (4) по причине, указанной в замечании к примеру 1.2.

Замечание. В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi i\omega n + \varphi_n} + e^{-2\pi i\omega n - \varphi_n}}{2},$$

вещественнозначный временной ряд из примера 1.2 при $R(p) = R$, $\omega_j^{(p)} = \omega_j$ и $\alpha_j^{(p)} = \alpha_j$ является частным случаем ряда (4).

Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания α_j и частот ω_j многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4). Первые два шага в алгоритме 3 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

Замечание. Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма R рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

Замечание. Алгоритм 3 применим и для одномерных временных рядов ($P = 1$).

2. Описание метода НО-SSA

Пусть дан временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Определение 2.1 (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда \mathbf{X} с параметрами $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$ будем называть тензор \mathcal{X} размера $I \times L \times J$, $J = N - I - L + 2$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

Алгоритм 3 ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$.

Результат: $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$ — оценки параметров сигнала (4).

3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы \mathbf{Z} , где $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \dots : U_d]$, запись \mathbf{U}^\dagger обозначает матрицу \mathbf{U} без первой строки, а запись \mathbf{U}_\downarrow — без последней.

4: Нахождение первых R в порядке неубывания собственных чисел λ_j матрицы \mathbf{Z} . Полученные собственные числа $\lambda_{j'}$ считаются оценками экспонент $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$, возможно с точностью до некоторой перестановки $j = S(j')$, через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$

Замечание. Траекторный тензор \mathcal{X} является ганкелевым [8].

Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}_{k..} = \mathcal{A}_{i_1=k}, \quad \mathcal{A}_{.k.} = \mathcal{A}_{i_2=k}, \quad \mathcal{A}_{..k} = \mathcal{A}_{i_3=k}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 1.1 сечения траекторного тензора ряда \mathbf{X} с параметрами I, L имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{..j} &= \mathcal{H}_I((x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+I+L-2})), \\ \mathcal{X}_{.l.} &= \mathcal{H}_I((x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+L+J-2})), \\ \mathcal{X}_{i..} &= \mathcal{H}_L((x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L+J-2})). \end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд \mathbf{X} и параметры $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$. Так как при замене одного из этих параметров на $J = N - I - L + 2$ или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки (I, L, J) без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

2.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд \mathbf{X} представим в виде суммы временных рядов \mathbf{X}_k и шума \mathbf{E} :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда \mathbf{X} в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов \mathbf{X}_k . Метод HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 4.

Алгоритм 4 HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , m , $R : m \leq R \leq \min(I, L, N - I - L + 2)$, $\mathfrak{S}_1^{(p)}, \dots, \mathfrak{S}_m^{(p)}$:

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k^{(p)} \quad \mathfrak{S}_k^{(p)} \cap \mathfrak{S}_l^{(p)} = \emptyset, k \neq l, p \in \{1, 2, 3\}.$$

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$ — оценки рядов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$.

- 1: Вложение: построение траекторного тензора \mathcal{X} по параметрам I, L .
- 2: Разложение: проведение HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (5)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k^{(1)}} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k^{(2)}} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k^{(3)}} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов $\tilde{\mathbf{X}}_k$ по тензорам $\mathcal{X}^{(k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{ilj}^{(k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, l, j) \mid 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n \right\}.$$

2.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших n -рангов, заданных пользователем, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD (HOSVD-SSA). Благодаря свойству ?? такое приближение можно считать достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом 4, поэтому опишем его, начиная с третьего шага. Описание приведено в алгоритме 5.

Второй способ использует алгоритм HOOI для приближения траекторного тензора ряда некоторым тензором меньших n -рангов, причём результатом выполнения HOOI будет HOSVD этого приближения (HOOI-SSA). Первый шаг этого алгоритма совпадает с первым шагом алгоритма 4, поэтому опишем его начиная со второго шага. Описание приведено в алгоритме 6.

Алгоритм 5 HOSVD-SSA для выделения сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : I}$, $R_2 \in \overline{1 : L}$, $R_3 \in \overline{1 : J}$.

Результат: $\hat{\mathbf{X}}$.

- 3: По параметрам R_1, R_2, R_3 и разложению траекторного тензора \mathcal{X} в виде (5), в тензоре \mathcal{Z} проводится замена сечений $\mathcal{Z}_{i_m=k}$ при $k > R_m$ на нулевые, и по полученному тензору $\hat{\mathcal{Z}}$ строится приближение траекторного тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
 - 4: Усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$, в результате чего получается оценка сигнала $\hat{\mathbf{X}}$.
-

3. Описание метода HOSVD-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HOSVD-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

Алгоритм 6 HOOI-SSA

Входные данные: \mathbf{X} , $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : I}$, $R_2 \in \overline{1 : L}$, $R_3 \in \overline{1 : J}$.

Результат: $\hat{\mathbf{X}}$.

- 2: Применение к построенному на первом шаге траекторному тензору \mathcal{X} метода HOOI с набором n -рангов (R_1, R_2, R_3) . Результат применения HOOI: тензор $\hat{\mathcal{X}}$, имеющий заданные n -ранги.
 - 3: Восстановление сигнала, совпадает с шагом 4 алгоритма 5.
-

3.1. HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан P -мерный временной ряд \mathbf{X} длины N

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

Определение 3.1 (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда \mathbf{X} с длиной окна $L : 1 < L < N$ будем называть тензор \mathcal{X} размерности $L \times K \times P$, $K = N - L + 1$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1 : L}, k \in \overline{1 : K}, p \in \overline{1 : P}.$$

Из определения следует, что сечение $\mathcal{X}_{\cdot p}$ траекторного тензора с длиной окна L является траекторной матрицей ряда $\mathbf{X}^{(p)}$, построенной по длине окна L . Пользуясь определением 1.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{\cdot p} = \mathcal{H}_L (\mathbf{X}^{(p)}).$$

Метод HOSVD-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HOSVD-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем, n -рангов. Для получения такого приближения используется усечение HOSVD траекторного тензора. Описание метода приведено в алгоритме 7.

3.2. HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два P -мерных временных ряда $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ длины N и $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$. Их траекторные тензоры с длиной окна L обозначим $\hat{\mathcal{X}}$, $\tilde{\mathcal{X}}$, \mathcal{X} соответственно.

Алгоритм 7 HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Входные данные: $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$, $L : 1 < L < N$, где N — длина \mathbf{X} , $R_1 \in \overline{1 : L}$, $R_2 \in \overline{1 : K}$, $R_3 \in \overline{1 : P}$, где $K = N - L + 1$.

Результат: $\tilde{\mathbf{X}}$.

- 1: Построение по ряду \mathbf{X} траекторного тензора \mathcal{X} с длиной окна L .
- 2: Вычисление HOSVD \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (6)$$

- 3: Построение по параметрам R_1, R_2, R_3 усечения HOSVD

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

- 4: Восстановление многомерного ряда $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(P)})$ по тензору $\tilde{\mathcal{X}}$, которое происходит следующим образом: ряды $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$ получаются усреднением сечений $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$ вдоль побочных диагоналей $l + k = \text{const}$.
-

Метод HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала \mathbf{X} в виде суммы HOSVD траекторных тензоров компонент $\hat{\mathbf{X}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$. Первые два шага этого алгоритма совпадают с первыми двумя шагами алгоритма 7, поэтому описание алгоритма приводится, начиная с 3 шага. Описание метода приведено в алгоритме 8.

4. Описание метода HO-ESPRIT

Пусть \mathbf{X} — одномерный ($P = 1$) или многомерный ($P > 1$) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\bar{L} = \begin{cases} (I, L), & P = 1, \\ L, & P > 1, \end{cases}$$

Алгоритм 8 HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: \mathbf{X} , $L : 1 < L < N$, $K = N - L + 1$, $\widehat{\mathfrak{S}}, \widetilde{\mathfrak{S}} \subseteq \overline{1 : \min(L, K)} : \widehat{\mathfrak{S}} \cap \widetilde{\mathfrak{S}} = \emptyset$, $\widehat{\mathfrak{P}}, \widetilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : P}$

Результат: $\hat{\mathring{X}}, \tilde{\mathring{X}}$ — оценки $\widehat{\mathbf{X}}$ и $\widetilde{\mathbf{X}}$ соответственно.

3: Группировка: построение тензоров

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \widehat{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \widehat{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \widehat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}, \\ \widetilde{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \widetilde{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \widetilde{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \widetilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.\end{aligned}$$

4: Восстановление рядов $\hat{\mathring{X}}$ и $\tilde{\mathring{X}}$ по тензорам $\widehat{\mathcal{X}}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}$ соответственно путём применения к каждому из этих тензоров шага 4 алгоритма 7.

а \mathcal{X} — траекторный тензор ряда \mathbf{X} , построенный с длиной (длинами) окна из \overline{L} . Также определим область допустимых параметров \overline{L} :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(I, L) : 1 < I, L < N, I + L < N + 1\}, & P = 1, \\ \{L : 1 < L < N\}, & P > 1. \end{cases}$$

Описание метода HO-ESPRIT приведено в алгоритме 9.

5. Численные сравнения в задаче оценки параметров

В этом разделе приведены сравнения методов ESPRIT и HO-ESPRIT по точности оценки параметров сигнала вида (4) в случае одномерных и многомерных рядов. В качестве показателя точности оценки была выбрана метрика относительного средне-квадратичного отклонения (RRMSE)

$$\text{RRMSE} = \frac{100}{|\gamma|} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\gamma - \hat{\gamma}_j|^2} (\%), \quad (7)$$

где m — количество реализаций шума, γ — оцениваемый параметр, $\hat{\gamma}_j$ — оценка параметра γ по ряду с j -й реализацией шума. Такой выбор был сделан для того, чтобы в дальнейшем сравнить результаты с результатами работы [6], в которой использовалась именно такая метрика для определения точности оценивания параметров.

Алгоритм 9 HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

Входные данные: $\mathbf{X}, \bar{L} \in \mathcal{D}$, $R : 1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$, $d \in \{1, 2, 3\}$ — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров.

Результат: $(\hat{\alpha}_1, \hat{\omega}_1), (\hat{\alpha}_2, \hat{\omega}_2), \dots, (\hat{\alpha}_R, \hat{\omega}_R)$ — оценки параметров сигнала (4).

- 1: Построение траекторного тензора $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ по ряду \mathbf{X} с параметрами из \bar{L} . Если $P = 1$, то $I_1 = I$, $I_2 = L$, $I_3 = N - I - L + 2$, а если $P > 1$, то $I_1 = L$, $I_2 = N - L + 1$, $I_3 = P$.
- 2: Вычисление HOSVD \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=1}^{I_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы $\mathbf{U} = [U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \dots : U_{I_D}^{(d)}]$.

- 3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы \mathbf{Z} , где запись \mathbf{U}^\dagger обозначает матрицу \mathbf{U} без первой строки, а запись \mathbf{U}_\downarrow — без последней.

- 4: Нахождение первых R в порядке убывания собственных чисел λ_j матрицы \mathbf{Z} . Полученные собственные числа $\lambda_{j'}$ считаются оценками экспонент $e^{\alpha_j + 2\pi i \omega_j}$, возможно с точностью до некоторой перестановки $j = S(j')$, через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\hat{\alpha}_j = \log(|\lambda_{j'}|), \quad \hat{\omega}_j = \frac{\text{Arg}(\lambda_{j'})}{2\pi}.$$

5.1. Одномерный случай

Пусть $P = 1$ и $R = 2$, то есть одномерный временной ряд $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{24})$ состоит из элементов вида

$$x_n = e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n,$$

где $n \in \overline{0 : 24}$, $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, а ξ_n и η_n — последовательность независимых случайных величин из распределения $N(0, \sigma^2/2)$, $\sigma = 0.04$. Случайные величины ζ_n являются независимыми и их распределение называется кругосимметричным комплексным нормальным распределением (circularly-symmetric complex normal distribution) [9] с дисперсией σ^2 и обозначается $CN(0, \sigma^2)$.

Пусть $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.22$. Ниже приведены рассматриваемые варианты степеней затухания.

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
2. $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.01$.
3. $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02$.
4. $\alpha_1 = -0.01$, $\alpha_2 = -0.02$.

Такие параметры были выбраны, так как в статье [6] рассматривалась модель с такими частотами и степенями затухания из варианта 4. Во всех случаях ранг сигнала с такими параметрами будет равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы \mathbf{Z} из алгоритмов 3 и 9. В этом разделе RRMSE считалось по 500 реализациям шума.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок частот и степеней затухания, полученных методом HO-ESPRIT, от размеров траекторного тензора (ось x) и выбора направления оценивания (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на рисунках изображены наименьшие по выбору длины окна значения RRMSE соответствующего параметра, полученные методом ESPRIT.

Рисунки 1 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 2, 3 и 4 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

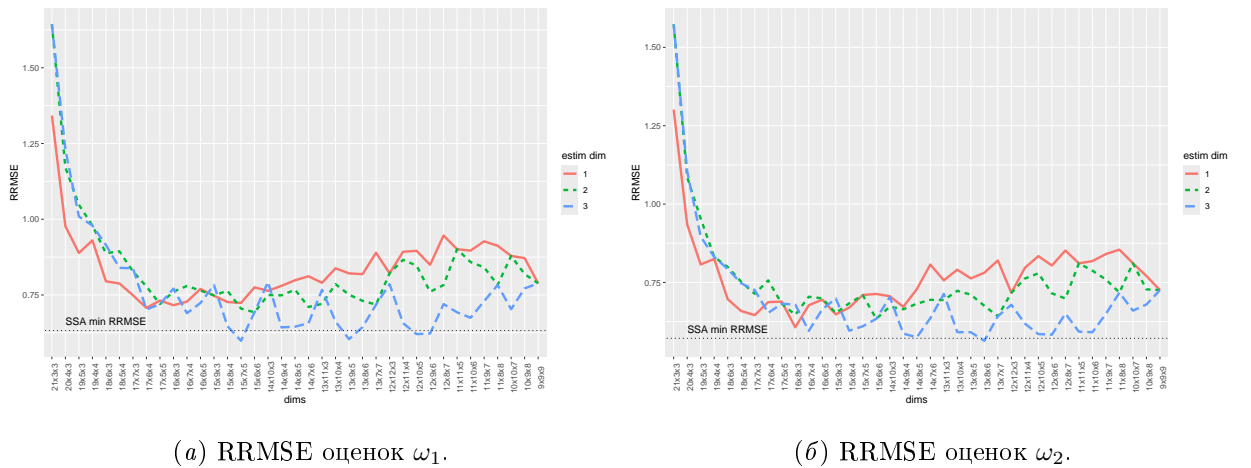


Рис. 1. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления восстановления, случай 1.

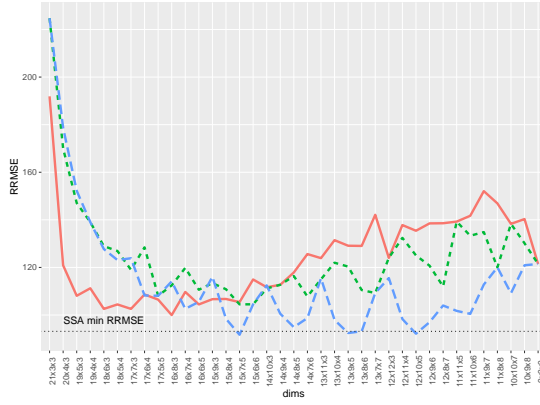
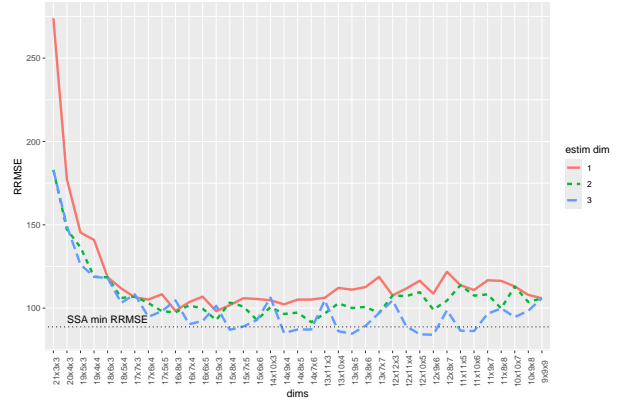
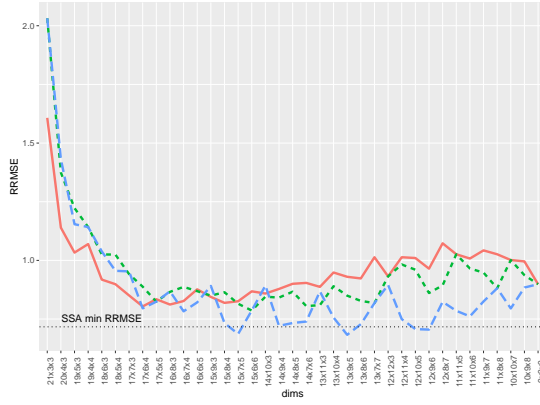
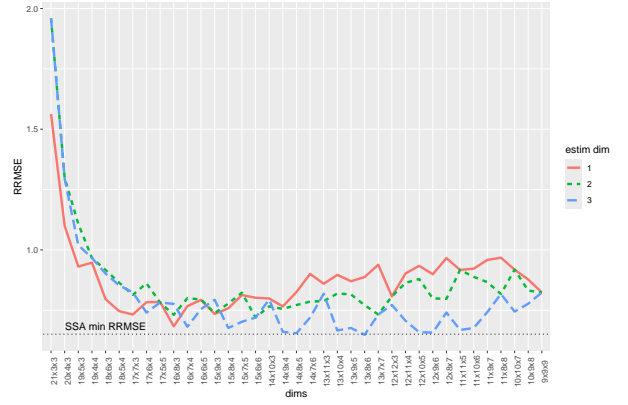
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(e) RRMSE оценок ω_1 .(e) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 2. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления восстановления, случай 2.

Выводы из численных сравнений В случае одномерных сигналов оценки методом HO-ESPRIT при оптимальном подборе параметров оказались не менее точными, чем оптимальные оценки стандартным методом ESPRIT. Кроме того, в некоторых ситуациях оптимальные оценки методом HO-ESPRIT оказываются точнее оптимальных оценок методом ESPRIT. Однако множество длин окна в алгоритме HO-ESPRIT, при которых точность оценок параметров сигнала близка к оптимальной, очень мало, и нам пока неизвестны способы их выбора кроме перебора. С другой стороны, для стандартного алгоритма ESPRIT требуется меньший набор параметров, а множество длин окна, при которых точность оценки близка к оптимальной, довольно велико. С учётом этих замечаний, и того, что разница в точности оптимальных параметров между методами невелика, использование метода HO-ESPRIT в текущем виде не обосновано.

Стоит заметить, что во всех случаях выбор номера направления d из алгоритма 9, соответствующего направлению наименьшего размера траекторного тензора, давал наи-

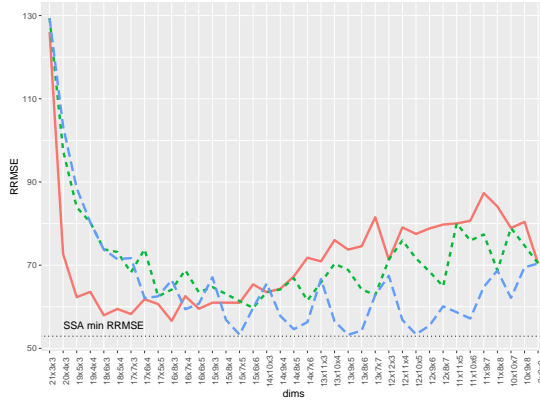
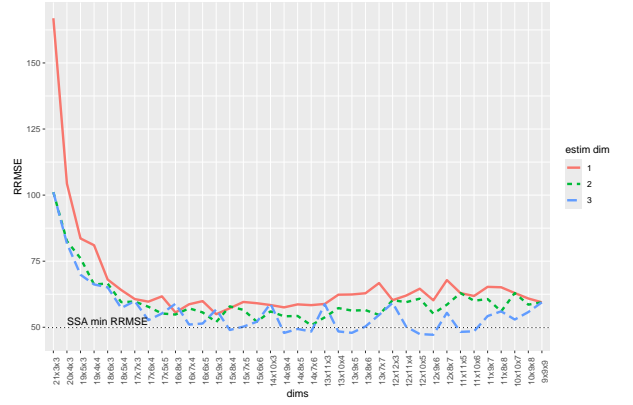
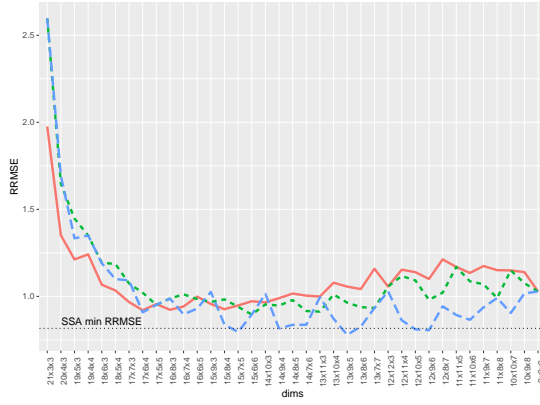
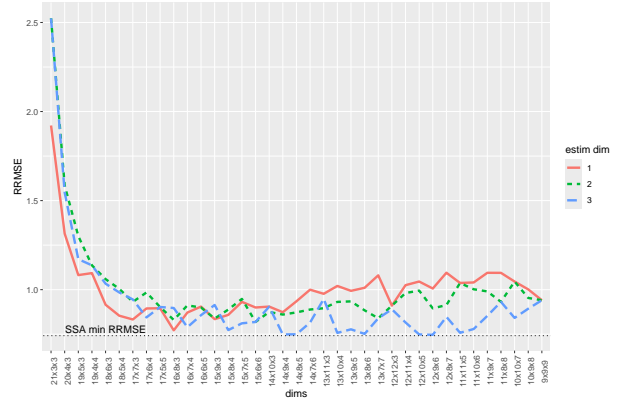
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(e) RRMSE оценок ω_1 .(e) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 3. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления восстановления, случай 3.

более точные результаты.

5.2. Многомерный случай

Пусть $P = 12$ и $R = 2$, то есть многомерный временной ряд

$$\begin{aligned} X &= (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(12)}), \\ X^{(p)} &= (x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_{24}^{(p)}) \end{aligned}$$

состоит из элементов вида

$$x_n^{(p)} = a_1^{(p)} e^{\alpha_1 n} e^{2\pi i \omega_1 n} + a_2^{(p)} e^{\alpha_2 n} e^{2\pi i \omega_2 n} + \zeta_n^{(p)},$$

где $n \in \overline{0:24}$, а ζ_n — последовательность независимых случайных величин из распределения $CN(0, \sigma^2)$, $\sigma = 0.2$. Значения частот и варианты степеней затухания были взяты такими же, как в одномерном случае в разделе 5.1. В качестве амплитуд $a_k^{(p)}$ были взяты

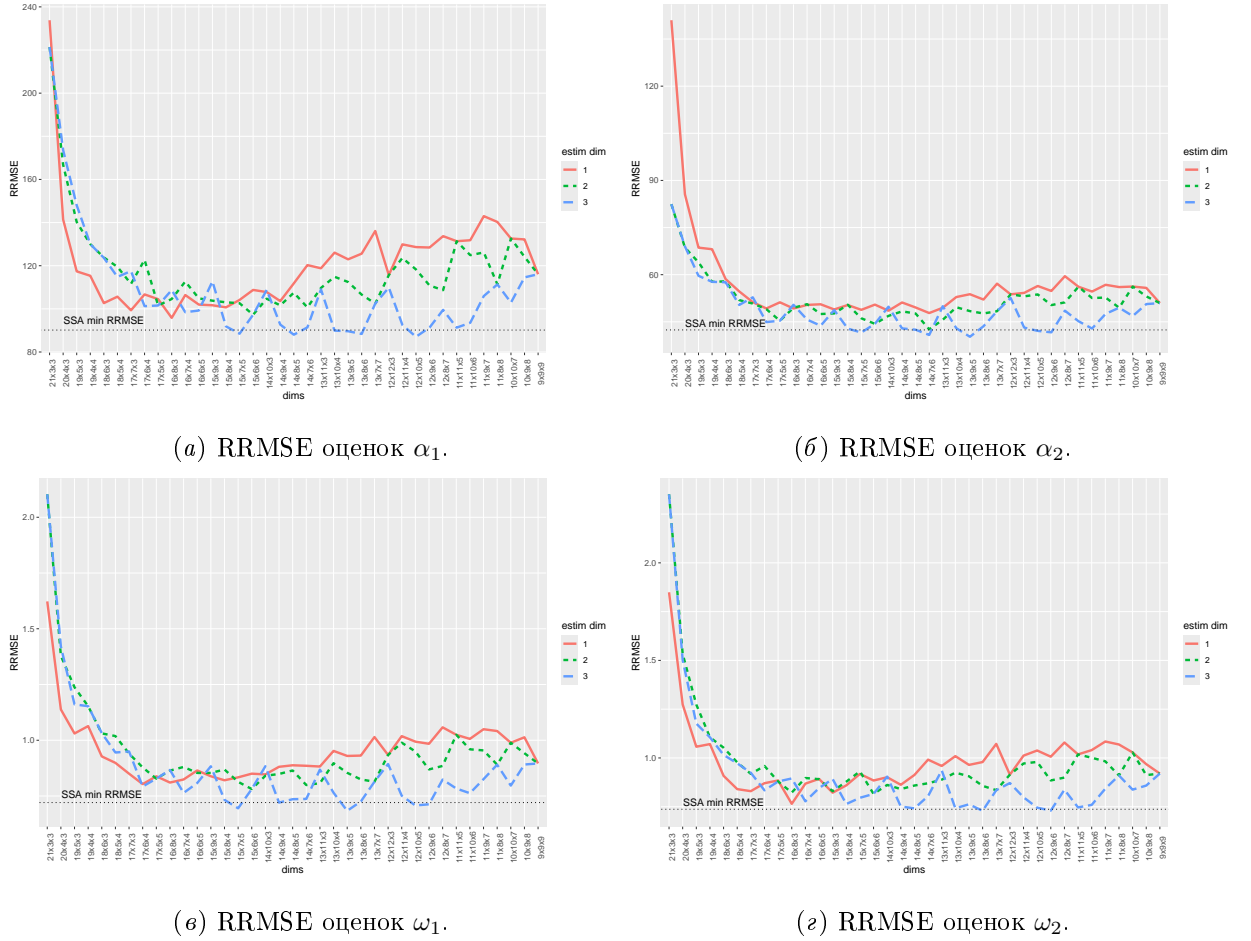


Рис. 4. Зависимость RRMSE оценок параметров одномерного ряда от длины окна и направления восстановления, случай 4.

независимые реализации случайных величин из распределения $CN(0, 1)$, их приближенные значения приведены в уравнении (8).

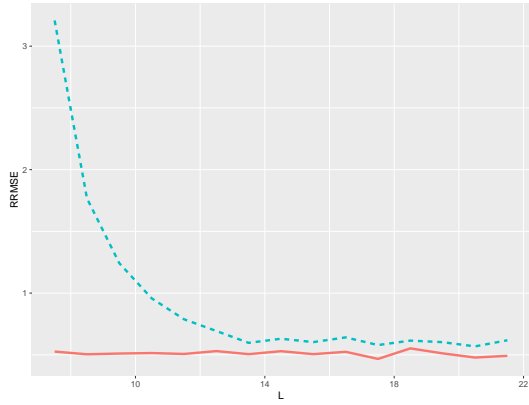
$$\begin{aligned}
 \text{Re}(a_1) &\approx (0, -0.1, -1, -0.4, 0.2, 0.3, -0.9, -0.3, -1.2, -0.2, 0.8, 0.5)^T, \\
 \text{Im}(a_1) &\approx (-0.9, -0.3, -0.5, -0.6, -0.1, -0.2, -1.3, -0.1, 0.7, 0.1, -1, -1)^T, \\
 \text{Re}(a_2) &\approx (-0.2, 0.7, 0.5, 0.1, -0.7, -0.1, 0.7, 0.3, -0.4, -1.5, -0.5, -1.5)^T, \\
 \text{Im}(a_2) &\approx (0.3, -1.2, -0.2, -0.5, 0.8, -0.5, -0.6, 0.6, -0.7, 0, 0.2, -0.2)^T.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Как и в одномерном случае, ранг сигналов с каждым набором параметров равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы \mathbf{Z} из алгоритмов 3 и 9.

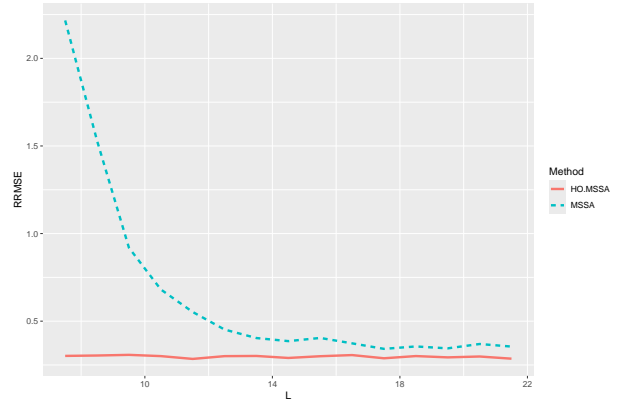
Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок параметров, полученных методами ESPROT и HO-ESPRIT, от значения длины окна L .

Рисунки 5 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания

не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 6, 7 и 8 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

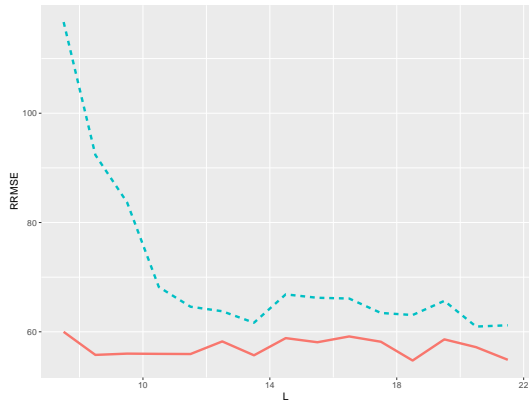


(a) RRMSE оценок ω_1 .

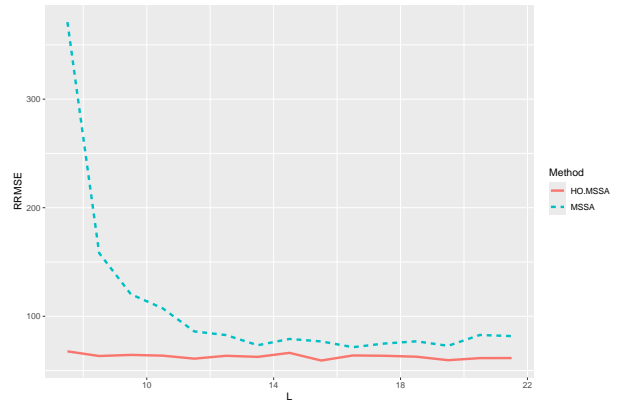


(б) RRMSE оценок ω_2 .

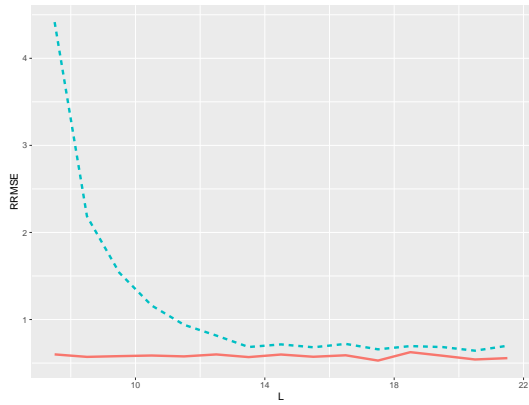
Рис. 5. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 1.



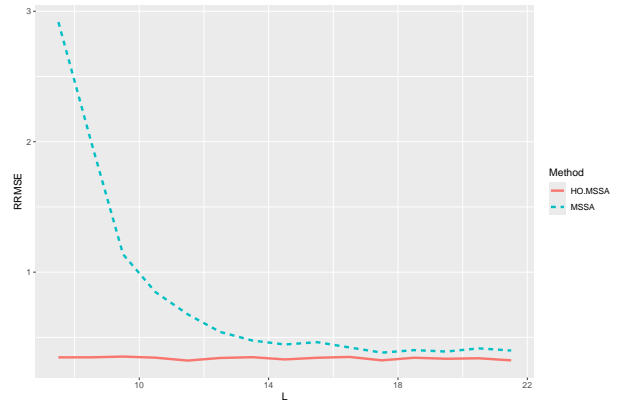
(a) RRMSE оценок α_1 .



(б) RRMSE оценок α_2 .



(в) RRMSE оценок ω_1 .



(г) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 6. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 2.

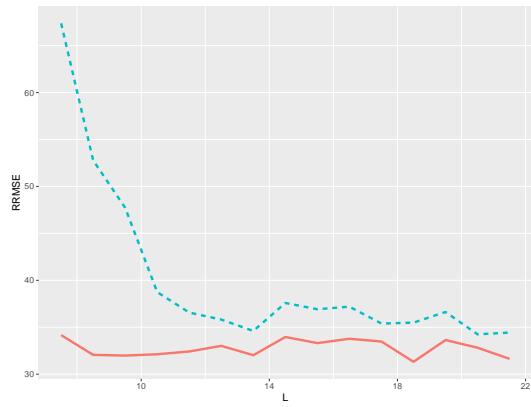
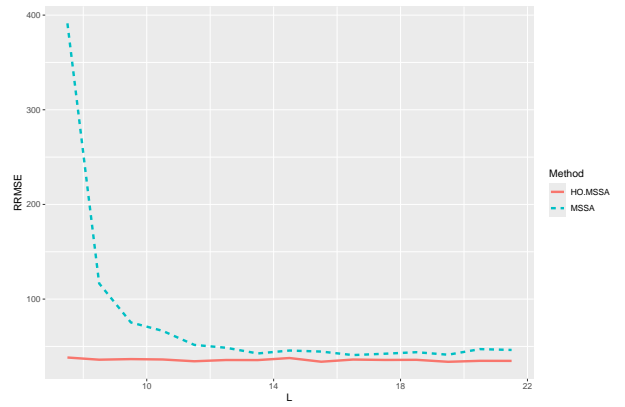
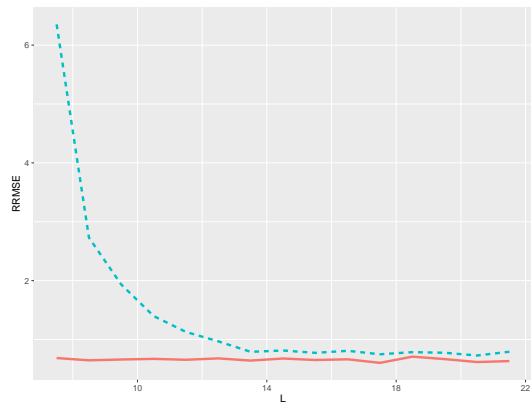
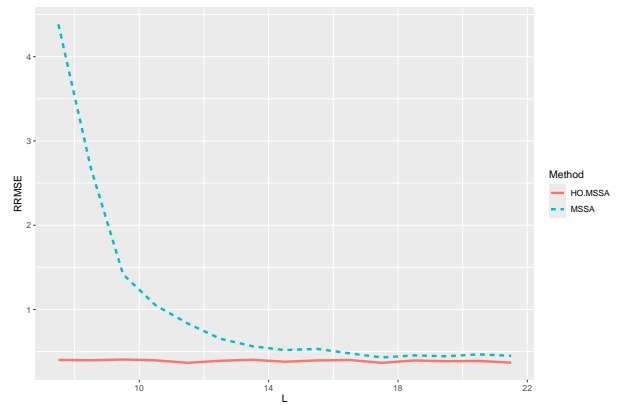
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(в) RRMSE оценок ω_1 .(г) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 7. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 3.

Выводы из численных сравнений Метод HO-ESPRIT оказался точнее стандартного метода ESPRIT в задаче оценки параметров многомерного ряда во всех рассмотренных случаях для любого выбора параметров длины окна.

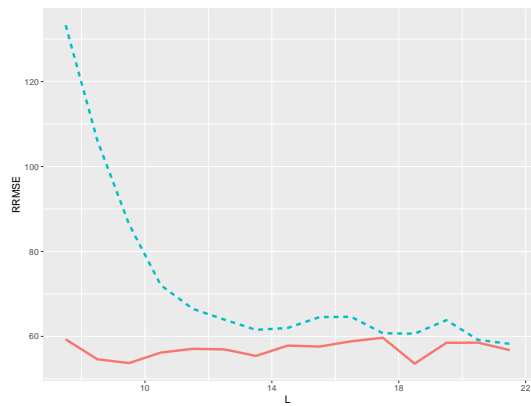
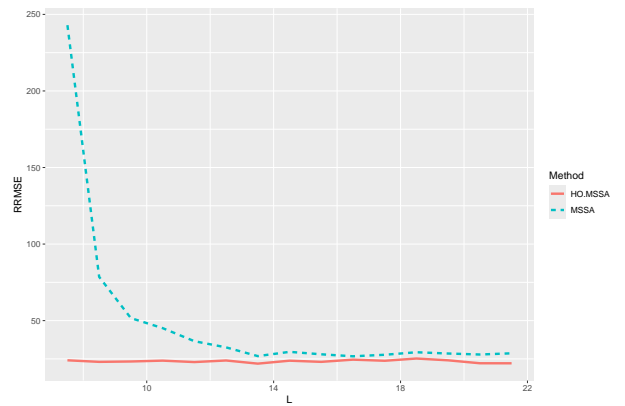
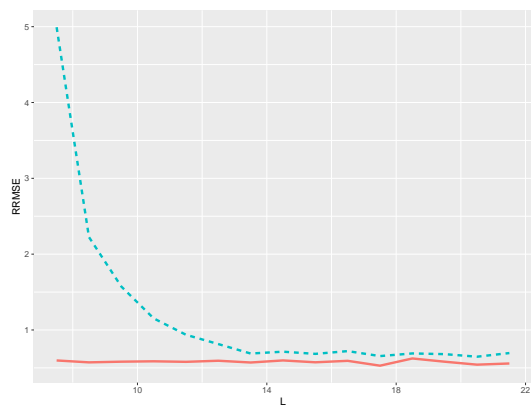
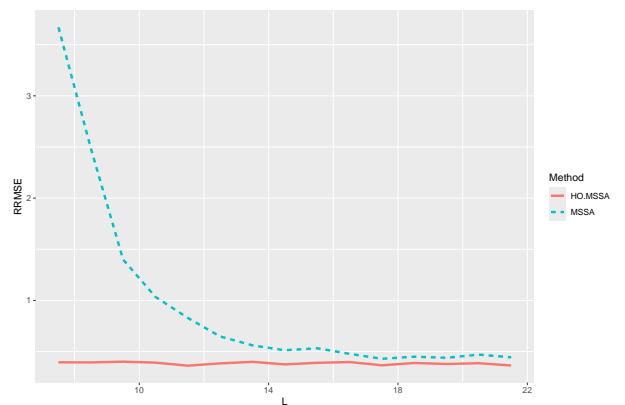
(a) RRMSE оценок α_1 .(б) RRMSE оценок α_2 .(с) RRMSE оценок ω_1 .(д) RRMSE оценок ω_2 .

Рис. 8. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 4.

Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»–SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
3. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage / Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin Heidelberg, 2020.
5. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
6. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
7. Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.
8. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.
9. Tse David, Viswanath Pramod. Fundamentals of Wireless Communication. — Cambridge University Press, 2005.