

# TENSORS FOR SIGNAL AND FREQUENCY ESTIMATION IN SUBSPACE-BASED METHODS: WHEN THEY ARE USEFUL?

N.A. KHROMOV<sup>1</sup>, N.E. GOLYANDINA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*University ...*

<sup>2</sup>*Institute ...*

*City, STATE*

e-mail: <sup>1</sup>ivanov@yandex.ru, <sup>2</sup>petrov@google.com

Abstract text.

**Keywords:** comma, separated, keywords, minimum 3, maximum 5

## 1 Introduction

Intro text...

## 2 Алгоритмы

### 2.1 Тензоры вложения

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  — (одноканальный) временной ряд длины  $N$ ,  $x_n \in \mathbb{C}$ .

**Definition 1** (Оператор вложения временного ряда в тензор). Оператором вложения временного ряда в тензор с длинами окна  $I$  и  $L$ :  $1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$  будем называть отображение  $\mathcal{T}_{I,L}$ , переводящее ряд  $\mathbf{X}$  в тензор  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I \times L \times J}$  ( $J = N - I - L + 2$ ) по правилу  $\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2}$ , где  $i \in \overline{1:I}$ ,  $l \in \overline{1:L}$ ,  $j \in \overline{1:J}$ .

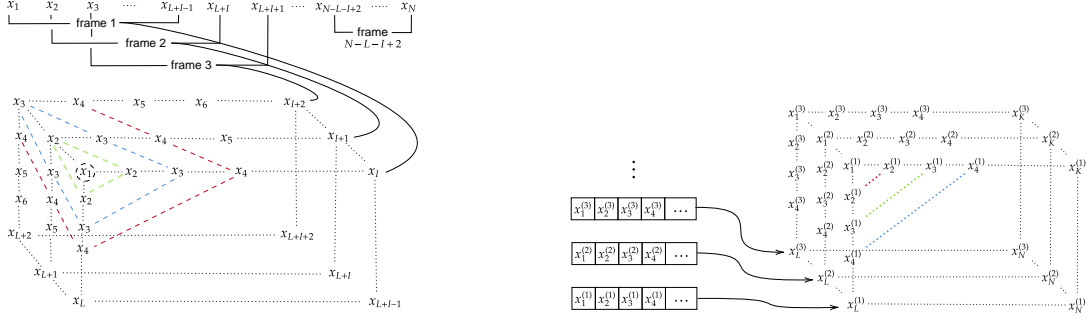
$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})$  —  $P$ -канальный временной ряд, состоящий из  $P$  одноканальных временных рядов, также называемых каналами.

**Definition 2** (Оператор вложения многоканального ряда в тензор). Оператором вложения многоканального ряда в тензор с длиной окна  $L$ :  $1 < L < N$  будем называть отображение  $\mathcal{T}_L$ , переводящее  $P$ -канальный ряд  $\mathbf{X}$  в тензор  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{L \times K \times P}$  ( $K = N - L + 1$ ) по правилу  $x_{l+k-1}^{(p)}$ , где  $l \in \overline{1:L}$ ,  $k \in \overline{1:K}$ ,  $p \in \overline{1:P}$ .

Визуализации применения вложения к одноканальному и многоканальному рядам представлены на картинках 1a, 1b.

### 2.2 Методы для выделения сигнала из временных рядов

В алгоритме 1 представлен метод НО-SSA для выделения сигнала из одноканального временного ряда.



(a) Результат применения оператора вложения к одноканальному временному ряду.

(b) Результат применения оператора вложения к многоканальному временному ряду.

Figure 1: Визуализации результатов применения операторов вложения рядов в тензоры.

**Data:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Result:**  $\hat{\mathbf{X}}$  — оценка сигнала  $\mathbf{X}$ .

1. **Вложение:** построение  $\mathcal{X} = \mathcal{T}_{I,L}(\mathbf{X})$  ;
2. **Разложение:** применение HOSVD или HOOI к  $\mathcal{X}$

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{R_1} \sum_{l=1}^{R_2} \sum_{j=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)};$$

3. **Восстановление:** усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ , в результате чего получается оценка сигнала  $\hat{\mathbf{X}}$ .

**Algorithm 1:** HO-SSA for signal extraction.

*Remark 1.* Применение алгоритма 1 с такими параметрами длин окна, что размер одного любого направления тензора вложения равен 1, сводит алгоритм к базовому методу SSA, так как применение HOSVD или HOOI к тензору с двумя направлениями (матрице) совпадает с применением SVD.

В алгоритме 2 представлен метод HO-MSSA для выделения сигнала из многоканального временного ряда. (Возможно можно сократить запись, если написать, что шаг 1 такой же как и в одномерном алгоритме, но оператор вложения другой, шаг 2 полностью совпадает, шаг 3 обратный шагу 1?.)

*Remark 2.* Применение алгоритма 2 к одноканальному ряду также даёт базовый алгоритм SSA.

*Remark 3.* Если в алгоритме 2 слои третьего направления траекторного тензора

**Data:**  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$ ,  $L : 1 < L < N$ ,  $R_1 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : K}$ ,  
 $R_3 \in \overline{1 : P}$  ( $K = N - L + 1$ ).

**Result:**  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(Q)})$  — оценка сигнала  $\mathbf{X}$ .

1. **Вложение:** построение  $\mathcal{X} = \mathcal{T}_L(\mathbf{X})$  ;
2. **Разложение:** применение HOSVD или HOOI к  $\mathcal{X}$

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)};$$

3. **Восстановление:** сечения  $\hat{\mathcal{X}}_{..p}$  усредняются вдоль побочных диагоналей  $l + k = \text{const}$  для получения оценок  $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$ .

**Algorithm 2:** HO-MSSA for signal extraction.

соединить в матрицу по столбцам (получится матрица, состоящая из  $P$  блоков-матриц  $L \times K$ ), применить к ней SVD, построить приближение этой матрицы по первым  $R$  компонентам разложения, и затем применить антидиагональное усреднение к каждому блоку-матрице, то получится метод MSSA.

### 2.3 Методы для оценки параметров сигнала.

Пусть  $P$ -канальный временной ряд (возможно  $P = 1$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)}), \\ \mathbf{X}^{(p)} &= (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)}), \quad p = \overline{1 : P}, \\ x_n^{(p)} &= \sum_{r=1}^R a_r^{(p)} e^{\alpha_r n} e^{i(2\pi\omega_r n + \varphi_r^{(p)})}, \end{aligned}$$

где параметрами модели являются амплитуды  $a_j^{(p)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , фазы  $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$ , частоты  $\omega_j \in [0, 1/2]$  и степени затухания  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ . Алгоритм HO-ESPRIT, оценивающий частоты и степени затухания ряда, определяется следующим образом. После шага 2 алгоритма 2 (или шага 2 алгоритма 1 при  $P = 1$ ) строится матрица  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_d = [U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \dots : U_{R_d}^{(d)}]$  для некоторого  $d \in \{1, 2, 3\}$ , и решается уравнение

$$\mathbf{U}^\uparrow = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{Z}$$

относительно матрицы  $\mathbf{Z}$ , где запись  $\mathbf{U}^\uparrow$  означает матрицу  $\mathbf{U}$  без первой строки, а  $\mathbf{U}_\downarrow$  — без последней.  $R$  наибольших собственных чисел матрицы  $\mathbf{Z}$  считаются оценками  $\lambda_r = e^{\alpha_r + 2\pi i \omega_r}$ , из которых можно получить параметры  $\alpha_r$  и  $\omega_r$ . Базовые алгоритмы ESPRIT, использующие траекторную матрицу и SVD можно получить из HO-ESPRIT аналогично тому, как из HO-SSA и HO-MSSA можно получить базовые SSA и MSSA.

## 2.4 Dstack модификация ESPRIT

При большой длине ряда  $N$  вычисление HOSVD (SVD) траекторного тензора (матрицы) может быть довольно трудоёмкой задачей. Одним из способов бороться с этой проблемой является модификация алгоритма EPSRIT: HTLSDstack (HTLS — другое название ESPRIT). Метод HTLSDstack разработан для одноканальных временных рядов. *(Возможно здесь вставить фразу, что он обобщается на многоканальные ряды, но такой случай мы рассматривать в работе не будем.)*

Метод заключается в том, чтобы по одноканальному временному ряду  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  построить многоканальный ряд  $\mathbf{X}_D = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(D)})$ , где  $D$  — некоторый параметр (предполагается, что  $N$  делится на  $D$  нацело), а элементы рядов  $\mathbf{X}_D^{(d)}$  получаются из оригинального ряда by decimating the time series by factor  $D$ . Другими словами,  $x_m^{(d)} = x_{(m-1)D+d}$ , где  $m \in \overline{1 : (N/D)}$ . Затем к полученному многоканальному ряду применяется многоканальный вариант метода HO-ESPRIT или ESPRIT. По Nyquist-Shannon sampling theorem, можно увеличивать sampling time interval  $\Delta t$  в  $D$  раз с сохранением всех частот в сигнале, пока сохраняется равенство  $\max_r |\omega_r| < 1/(2D\Delta t)$ .

## 3 Сравнение тензорных методов с матричными

Сравнение для одномерных методов в таблицах 1, 2.

Table 1: Сравнение результатов для одномерных методов выделения сигнала.

Метод	Результат сравнения точности
SSA	Обычно наиболее точный, ошибка с увеличением шума растёт медленно.
HO-SSA	В большинстве случаев значительно менее точный, чем SSA, однако можно подобрать примеры, когда он слегка точнее SSA.
SSADstack	Точность ниже, чем у базового SSA.
HO-SSADstack ( $R_3 = \max$ )	Слегка точнее, чем SSADstack, но всё ещё менее точен, чем SSA.
HO-SSADstack ( $R_3 = 1$ )	При малом шуме точность сильно ниже, чем у SSA за счёт большого сдвига, с увеличением шума становится точнее, чем SSADstack и HO-SSADstack, но всё ещё менее точный, чем базовый SSA.

Сравнение результатов для многомерных методов:

1. Выделение сигнала: HO-MSSA точнее базового MSSA при выборе одинаковых длин окна. Чем сильнее ряды похожи друг на друга, тем больше преимущество.
2. Оценка параметров: аналогично выделению сигнала.

Table 2: Сравнение результатов для одномерных методов оценки параметров.

HTLS	При малом уровне шума точнее, чем Dstack варианты. С увеличением шума в случае, когда частоты сигнала близки, перестаёт идентифицировать одну из компонент быстрее, чем Dstack методы.
HO-HTLS	При выборе оптимальных параметров оказывается точнее, чем HTLS, однако различие точности невелико.
HTLSDstack	Точность ниже, чем у базового HTLS.
HO-HTLSDstack ( $R_3 = \max$ )	Немного точнее HTLS, но заметно менее точен, чем при $R_3 = 1$ .
HO-HTLSDstack ( $R_3 = 1$ )	При малом шуме немного менее точный, чем HTLS, но точнее остальных методов. Более устойчив к большому шуму при близких частотах.

## References

- [1] Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. (2005). Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case. *Linear Algebra with Applications*. Vol. **12**, Num. **8**, pp. 809-826.
- [2] Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. (2009). Exponential data fitting using multilinear algebra: the decimative case. *Journal of Chemometrics*. Vol. **23**, Num. **7-8**, pp. 341-351s.
- [3] Jacobs P.A., Lewis P.A.W. (1983). Stationary Discrete Autoregressive-Moving Average Time Series Generated by Mixtures. *Journal of Time Series Analysis*. Vol. **4**, Num. **1**, pp. 19-36.
- [4] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions*. Wiley: New York.
- [5] Worldometers.info [Electronic resource] Mode of access: <https://www.worldometers.info/coronavirus>. Date of access: 27.02.2022.