

# Обзор литературы по Tensor SSA

## 1 Статьи с теорией тензорных разложений

### 1.1 [A Multilinear Singular Value Decomposition](#)

Базовая теория по **HOSVD** (определения, свойства).

### 1.2 [On the Best Rank-1 and Rank- \$\(R\_1, R\_2, \dots, R\_N\)\$ Approximation of Higher-Order Tensors](#)

Про наилучшее приближение тензора меньшими рангами, описание алгоритма **HOOI**, некоторые его свойства.

### 1.3 [Tensor SVD: Statistical and Computational Limits](#)

Рассматривается точность приближения **HOOI** произвольного тензора по его зашумлённому варианту при различных случаях отношения минимального сингулярного числа тензора к уровню шума (SNR).

### 1.4 [Factorization strategies for third-order tensors и Third-Order Tensors as Operators on Matrices: A Theoretical and Computational Framework with Applications in Imaging](#)

В основном теория по трёхмерным тензорам, вводится определение **TSVD** и его свойства.

## 2 Tensor SSA с использованием HOSVD или HOOI

### 2.1 [Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case](#)

Рассматривается задача оценки параметров комплексного сигнала (одномерный и многомерный случаи), состоящего из суммы комплексных экспонент с близкими частотами. Приводится описание и обоснование тензорной модификации алгоритма **ESPRIT** с применением **HOOI**. Проводится численное сравнение этой модификации с базовым **ESPRIT**. Выявлено преимущество тензорного метода по точности оценки параметров сигнала, причём с увеличением уровня шума, преимущество увеличивается.

Траекторным тензором одномерного ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$  считается тензор  $\mathcal{X}$  размера  $I \times L \times J$ ,  $J = N - I - L + 2$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

Визуализация на рисунке 1.

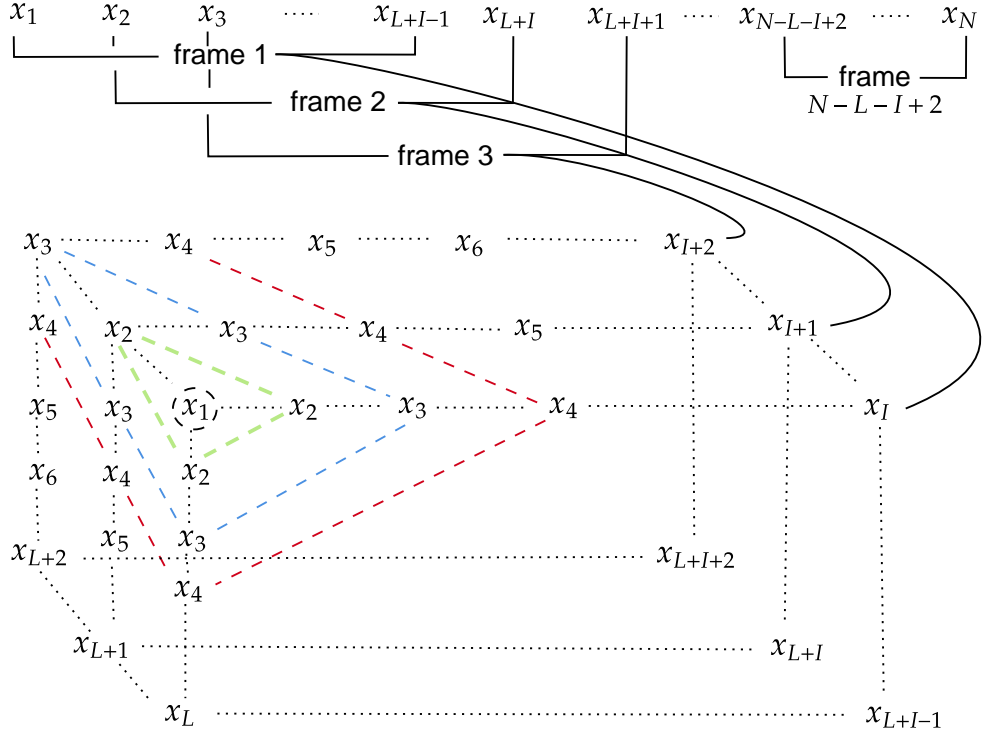


Рис. 1: Траекторный тензор одномерного ряда в HOSVD-SSA.

Траекторным тензором многомерного ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L : 1 < L < N$  считается тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $L \times K \times P$ ,  $K = N - L + 1$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, p \in \overline{1:P}.$$

Визуализация на рисунке 2.

Алгоритм заключается в нахождении наилучшего приближения траекторного тензора ряда с  $n$ -рангами  $(R, R, R)$  с помощью алгоритма **HOOI**.  $R$  задаётся равным числу экспонент с различными показателями входящих в сигнал. Затем оценка строится по матрице сингулярных векторов одного из направлений (1-го направления в одномерном случае, и 3-го в многомерном) тем же способом, что и в базовом **ESPRIT**.

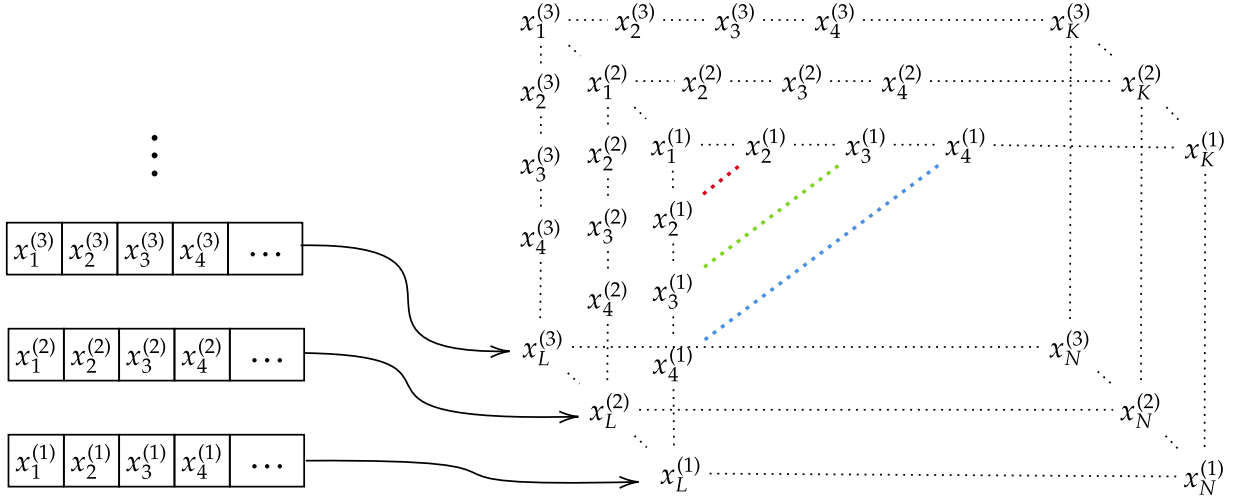


Рис. 2: Траекторный тензор многомерного ряда в HOSVD-MSSA.

## 2.2 Exponential data fitting using multilinear algebra: the decimative case

Рассматривается задача оценки параметров одномерного комплексного сигнала (только одномерный случай), состоящего из суммы экспоненциально-модулированных гармоник с близкими частотами. Исследуется алгоритм HTLSDstack: модификация ESPRIT, в которой по одномерному ряду строится  $D$  прореженных рядов длины  $M = N/D$  (считается, что длина ряда  $N$  делится на  $D$  нацело). Затем они считаются отдельными каналами одного многомерного ряда, и применяется многомерный вариант ESPRIT. Это уменьшает трудоёмкость алгоритма при небольшом уменьшении точности. Предлагается тензорная модификация этого алгоритма: HO-HTLSDstack, в которой к полученному многомерному ряду применяется тензорная модификация многомерного **ESPRIT** из 2.1.

Исходный ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  разбивается на  $D$  прореженных подрядов  $\mathbf{X}^{(d)}$  длины  $M$  так, что  $x_m^{(d)} = x_{(m-1)D+d}$ . Другими словами, в ряд с номером  $d$  входит каждый  $D$ -й элемент исходного ряда, начиная с  $x_d$ . По полученному многомерному ряду строится траекторный тензор так же, как в 2.1. Затем ищется наилучшее приближение этого тензора с  $n$ -рангами  $(R, \min(R, M), R')$ , где  $R$  задаётся равным числу экспонент с различными показателями входящих в сигнал, а  $R' \leq \min(R, D)$ . Авторы утверждают, что если частоты гармоник близки, то выбор  $R' < \min(R, D)$  улучшает точность оценки параметров.

Для оценки параметров используются сингулярные векторы 1-го направления полученного разложения аппроксимирующего тензора.

Численно показано, что тензорный вариант (HO-HTLSDstack) с выбором  $R' = 1$  оказывается точнее HTLSDstack во всех тестах, причём преимущество увеличивается с увеличением уровня шума. Также в одном тесте HO-HTLSDstack сравнивается с базовым ESPRIT и так же оказывается более точной. Во всех тестах рассматривался случай близких частот.

Кроме того, авторы показывают, что метод HO-HTLSDstack меньше чем на порядок более трудоёмкий, чем HTLSDstack, но на порядок менее трудоёмкий, чем базовый

ESPRIT.

Графики со сравнением методов по точности и трудоёмкости, приведённые в статье, указаны на рисунке 3.

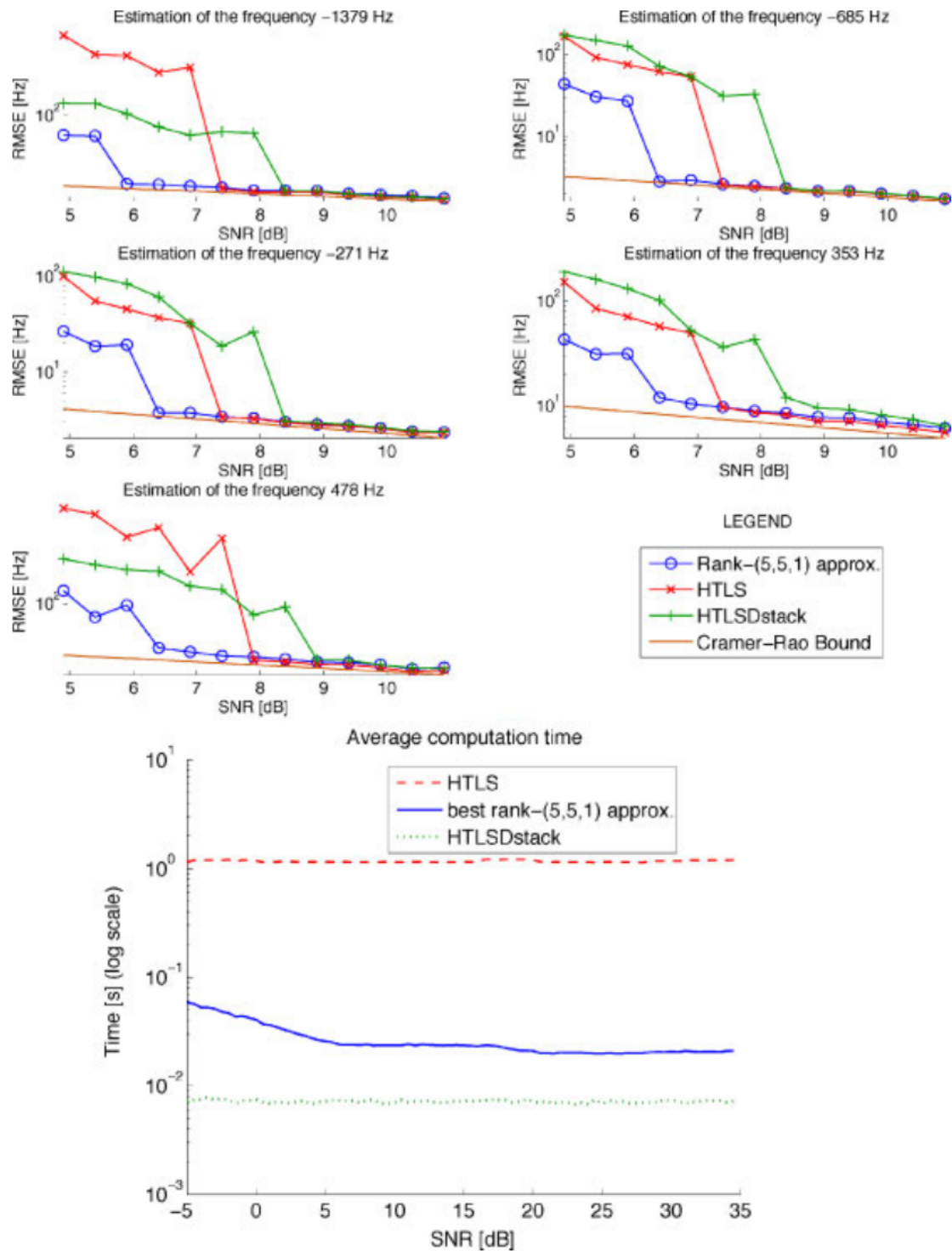


Рис. 3: Сравнение HTLS (ESPRIT), HTLSDstack и HO-HTLSDstack по точности оценки параметров и по трудоёмкости.

### 3 Tensor SSA с использованием $(L_r, L_r, 1)$ -разложения

#### 3.1 Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank- $(L_r, L_r, 1)$ Terms

Приводится теоретическая информация про разложение в сумму тензоров с  $n$ -рангами  $(L_r, L_r, 1)$ , в частности определение и условия единственности.

Рассматривается задача выделения сигнала в многомерном ряде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{MS} + \mathbf{N},$$

где  $\mathbf{Y}$  — наблюдаемый ряд,  $\mathbf{S}$  — искомый сигнал,  $\mathbf{M}$  — коэффициенты линейных комбинаций, с которыми сигнал составляет наблюдаемый ряд,  $\mathbf{N}$  — шум. Траекторный тензор ряда определяется так же, как в 2.1.

Для модели, в которой сигнал составляют суммы произведений полиномов и комплексных экспонент, доказаны условия единственности  $(L_r, L_r, 1)$ -разложения траекторного тензора ряда.

Метод заключается в построении траекторного тензора по ряду  $\mathbf{Y}$ , аппроксимации этого тензора меньшими  $n$ -рангами (но большими, чем  $n$ -ранги самого сигнала), и применении  $(L_r, L_r, 1)$ -разложения к этой аппроксимации. Далее по этому разложению можно построить оценку  $\mathbf{S}$ .

Проводятся численные сравнения точности выделения сигнала предложенным методом при различных выборах параметров рангов аппроксимации и  $L_r$ . Сравнения с другими методами выделения сигнала не проводится.

### 4 Tensor SSA с использованием CPD

#### 4.1 Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation