**Лемма 1.** *Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим её столбцы $a_1, \ldots, a_n$. Пусть все столбцы $A$ различны, матрица $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ $(k \geqslant n)$ составлена из столбцов $A$ так, что каждый столбец из матрицы $A$ появляется в $B$, и некоторые столбцы могут повторяться. Пусть $r_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ — количество раз, которое столбец $a_j$ входит в матрицу $B$, и пусть $M = \max_j r_j$. Тогда*

$$\sigma_i(B) \leqslant \sigma_i(A)\sqrt{M} \quad \forall i$$

*где $\sigma_i(\cdot)$ обозначает $i$-е сингулярное значение матрицы в порядке убывания.*

*Доказательство.* Рассмотрим матрицу $S \in \mathbb{R}^{n\times k}$ такую, что её $k$-й столбец — это вектор стандартного базиса $e_j \in \mathbb{R}^n$ если $k$-й столбец матрицы $B$ совпадает с $a_j$. По построению $B = AS$. Для любого $j$ $j$-ая строка $S$ содержит ровно $r_j$ единиц.

Обозначим столбцы матрицы $B$ как $b_t$. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^k$, пусть $y = Sx \in \mathbb{R}^n$. $j$-ая компонента $y$ равна

$$y_j = \sum_{t\colon b_t = a_j} x_t,$$

по неравенству Коши–Буняковского,

$$|y_j| \leqslant \sqrt{r_j}\left(\sum_{t\colon b_t=a_j} x_t^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{M}\left(\sum_{t\colon b_t=a_j} x_t^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно

$$\|y\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |y_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n M\left(\sum_{t\colon b_t=a_j} x_t^2\right) = M\sum_{t=1}^k x_t^2 = M\|x\|_2^2,$$

так как множества $\{t : b_t = a_j\}$ не пересекаются, и в объединении дают множество $\{1, \ldots, k\}$. Но $\|y\|_2 = \|Sx\|_2$, и значит $\|S\|_2 \leqslant \sqrt{M}$.

Кроме того, для любого $x \in \mathbb{R}^k$,

$$\|Bx\|_2 = \|A(Sx)\|_2 \leq \|A\|_2\,\|Sx\|_2 \leq \|A\|_2\,\|S\|_2\,\|x\|_2 \leq \sqrt{M}\,\|A\|_2\,\|x\|_2.$$

2-норма матрицы совпадает с её наибольшим сингулярным числом, поэтому

$$\sigma_1(B) = \|B\|_2 \leqslant \sqrt{M}\,\|A\|_2 = \sqrt{M}\,\sigma_1(A).$$

Пусть теперь $i = 1, \ldots, n$, тогда по теореме Куранта–Фишера

$$\sigma_i(B) = \min_{\substack{U\subset\mathbb{R}^k\\ \dim U = k-i+1}} \max_{x\in U,\, x\neq \mathbf{0}} \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2}.$$

Зафиксируем произвольное подпространство $U \subset \mathbb{R}^k$ размерности $k - i + 1$ и положим

$$V = S(U) = \{v : v = Su, \forall u \in U\} \subset \mathbb{R}^n,$$

тогда $\dim V \leqslant \dim U = k - i + 1$, $y = Sx \in V$.

Пусть $x \in U$ и $x \neq \mathbf{0}$, тогда

$$\frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|A(Sx)\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|Ay\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2}\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2}\frac{\|Sx\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2}\frac{\|S\|_2\|x\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \sqrt{M}\frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2},$$

так как $\|S\|_2 \leqslant \sqrt{M}$. Переходя к максимуму по $x$ и минимуму по $U$, левая часть неравенства преобразуется в $\sigma_i(B)$, а правая в $\sqrt{M}\sigma_i(A)$. □

Применяя лемму, когда $A$ — матрица с каналами сигнала в строках, а $B$ — 3-развёртка траекторного тензора, получаем, что

$$\sigma_i(B) \leqslant \sqrt{\min(L,K)}\,\sigma_i(A),$$

где $L$ — длина окна, $K = N - L + 1$.