TENSORS FOR SIGNAL AND FREQUENCY ESTIMATION IN SUBSPACE-BASED METHODS: WHEN THEY ARE USEFUL?

N.A. Khromov[1], N.E. Golyandina[2]

[1] *University ...*
[2] *Institute ...*
City, STATE
e-mail: [1]`ivanov@yandex.ru`, [2]`petrov@google.com`

Abstract text.

Keywords: comma, separated, keywords, minimum 3, maximum 5

1 Introduction

Intro text...

2 Алгоритмы

2.1 Тензоры вложения

$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — (одноканальный) временной ряд длины N, $x_n \in \mathbb{C}$.

Definition 1 (Оператор вложения временного ряда в тензор)**.** Оператором вложения временного ряда в тензор с длинами окна I и L: $1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$ будем называть отображение $\mathcal{T}_{I,L}$, переводящее ряд X в тензор $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I \times L \times J}$ $(J = N - I - L + 2)$ по правилу $\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2}$, где $i \in \overline{1:I}$, $l \in \overline{1:L}$, $j \in \overline{1:J}$.

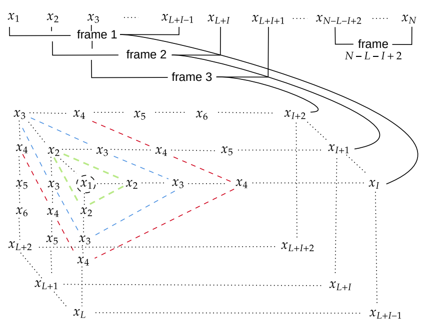
$\mathsf{X} = (\mathsf{X}^{(1)}, \mathsf{X}^{(2)}, \ldots, \mathsf{X}^{(P)})$ — P-канальный временной ряд, состоящий из P одноканальных временных рядов, также называемых каналами.

Definition 2 (Оператор вложения многоканального ряда в тензор)**.** Оператором вложения многоканального ряда в тензор с длиной окна L: $1 < L < N$ будем называть отображение $\mathcal{T}_L$, переводящее P-канальный ряд X в тензор $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{L \times K \times P}$ $(K = N - L + 1)$ по правилу $x^{(p)}_{l+k-1}$, где $l \in \overline{1:L}$, $k \in \overline{1:K}$, $p \in \overline{1:P}$.

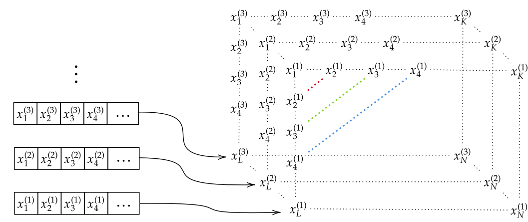
Визуализации применения вложения к одноканальному и многоканальному рядам представлены на картинках 1a, 1b.

2.2 Методы для выделения сигнала из временных рядов

В алгоритме 1 представлен метод HO-SSA для выделения сигнала из одноканального временного ряда.



(a) Результат применения оператора вложения к одноканальному временному ряду.



(b) Результат применения оператора вложения к многоканальному временному ряду.

Figure 1: Визуализации результатов применения операторов вложения рядов в тензоры.

Data: X, $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, $R_1 \in \overline{1:I}$, $R_2 \in \overline{1:L}$, $R_3 \in \overline{1:J}$.

Result: $\widetilde{\mathsf{X}}$ — оценка сигнала X.

1. **Вложение:** построение $\mathcal{X} = \mathcal{T}_{I,L}(\mathsf{X})$;
2. **Разложение:** применение HOSVD или HOOI к $\mathcal{X}$

$$\widehat{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{R_1} \sum_{l=1}^{R_2} \sum_{j=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)};$$

3. **Восстановление:** усреднение тензора $\widehat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$, в результате чего получается оценка сигнала $\widehat{\mathsf{X}}$.

Algorithm 1: HO-SSA for signal extraction.

Remark 1. Применение алгоритма 1 с такими параметрами длин окна, что размер одного любого направления тензора вложения равен 1, сводит алгоритм к базовому методу SSA, так как применение HOSVD или HOOI к тензору с двумя направлениями (матрице) совпадает с применением SVD.

В алгоритме 2 представлен метод HO-MSSA для выделения сигнала из многоканального временного ряда. (*Возможно можно сократить запись, если написать, что шаг 1 такой же как и в одномерном алгоритме, но оператор вложения другой, шаг 2 полностью совпадает, шаг 3 обратный шагу 1?*.)

Remark 2. Применение алгоритма 2 к одноканальному ряду также даёт базовый алгоритм SSA.

Remark 3. Если в алгоритме 2 слои третьего направления траекторного тензора

Data: $\mathsf{X} = \left(\mathsf{X}^{(1)}, \ldots, \mathsf{X}^{(P)}\right)^{\mathrm{T}}$, $L: 1 < L < N$, $R_1 \in \overline{1:L}$, $R_2 \in \overline{1:K}$,
$R_3 \in \overline{1:P}$ $(K = N - L + 1)$.
Result: $\widetilde{\mathsf{X}} = (\widetilde{\mathsf{X}}^{(1)}, \widetilde{\mathsf{X}}^{(2)}, \ldots, \widetilde{\mathsf{X}}^{(Q)})$ — оценка сигнала X.

1. **Вложение:** построение $\mathcal{X} = \mathcal{T}_L(\mathsf{X})$;
2. **Разложение:** применение HOSVD или HOOI к $\mathcal{X}$
$$\widehat{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)};$$
3. **Восстановление:** сечения $\mathring{\mathcal{X}}_{\cdot\cdot p}$ усредняются вдоль побочных диагоналей $l + k = \mathrm{const}$ для получения оценок $\widetilde{\mathsf{X}}^{(p)}$.

Algorithm 2: HO-MSSA for signal extraction.

соединить в матрицу по столбцам (получится матрица, состоящая из P блоков-матриц $L \times K$), применить к ней SVD, построить приближение этой матрицы по первым R компонентам разложения, и затем применить антидиагональное усреднение к каждму блоку-матрице, то получится метод MSSA.

2.3 Методы для оценки параметров сигнала.

Пусть P-канальный временной ряд (возможно $P = 1$) имеет вид
$$\mathsf{X} = (\mathsf{X}^{(1)}, \mathsf{X}^{(2)}, \ldots, \mathsf{X}^{(P)}),$$
$$\mathsf{X}^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_N^{(p)}), \quad p = \overline{1:P},$$
$$x_n^{(p)} = \sum_{r=1}^{R} a_r^{(p)} e^{\alpha_r n} e^{\mathrm{i}\left(2\pi\omega_r n + \varphi_r^{(p)}\right)},$$

где параметрами модели являются амплитуды $a_j^{(p)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, фазы $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$, частоты $\omega_j \in [0, 1/2]$ и степени затухания $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Алгоритм HO-ESPRIT, оценивающий частоты и степени затухания ряда, определяется следующим образом. После шага 2 алгоритма 2 (или шага 2 алгоритма 1 при $P = 1$) строится матрица $\mathbf{U} = \mathbf{U}_d = \left[U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \ldots : U_{R_d}^{(d)}\right]$ для некоторого $d \in \{1, 2, 3\}$, и решается уравнение
$$\mathbf{U}^{\uparrow} = \mathbf{U}_{\downarrow} \mathbf{Z}$$
относительно матрицы $\mathbf{Z}$, где запись $\mathbf{U}^{\uparrow}$ означает матрицу $\mathbf{U}$ без первой строки, а $\mathbf{U}_{\downarrow}$ — без последней. R наибольших собственных чисел матрицы $\mathbf{Z}$ считаются оценками $\lambda_r = e^{\alpha_r + 2\pi\mathrm{i}\omega_r}$, из которых можно получить параметры α_r и ω_r. Базовые алгоритмы ESPRIT, использующие траекторную матрицу и SVD можно получить из HO-ESPRIT аналогично тому, как из HO-SSA и HO-MSSA можно получить базовые SSA и MSSA.

2.4 Dstack модификация ESPRIT

При большой длине ряда N вычисление HOSVD (SVD) траекторного тензора (матрицы) может быть довольно трудоёмкой задачей. Одним из способов бороться с этой проблемой является модификация алгоритма EPSRIT: HTLSDstack (HTLS — другое название ESPRIT). Метод HTLSDstack разработан для одноканальных временных рядов. (*Возможно здесь вставить фразу, что он обобщается на многоканальные ряды, но такой случай мы рассматривать в работе не будем.*)

Метод заключается в том, чтобы по одноканальному временнмоу ряду $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ построить многоканальный ряд $\mathsf{X}_D = (\mathsf{X}^{(1)}, \mathsf{X}^{(2)}, \ldots, \mathsf{X}^{(D)})$, где D - некоторый параметр (предполагается, что N делится на D нацело), а элементы рядов $\mathsf{X}_D^{(d)}$ получаются из оригинального ряда by decimating the time series by factor D. Другими словами, $x_m^{(d)} = x_{(m-1)D+d}$, где $m \in \overline{1:(N/D)}$. Затем к полученному многоканальному ряду применяется многоканальный вариант метода HO-ESPRIT или ESPRIT. По Nyquist-Shannon sampling theorem, можно увеличивать sampling time interval Δt в D раз с сохранением всех частот в сигнале, пока сохраняется равенство $\max_r |\omega_r| < 1/(2D\Delta t)$.

3 Сравнение тензорных методов с матричными

Тут привести какие-нибудь таблички и, может, графики.

References

[1] Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. (2005). Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case. *Linear Algebra with Applications*. Vol. **12**, Num. **8**, pp. 809-826.

[2] Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. (2009). Exponential data fitting using multilinear algebra: the decimative case. *Journal of Chemometrics*. Vol. **23**, Num. **7-8**, pp. 341-351s.

[3] Jacobs P.A., Lewis P.A.W. (1983). Stationary Discrete Autoregressive-Moving Average Time Series Generated by Mixtures. *Journal of Time Series Analysis*. Vol. **4**, Num. **1**, pp. 19-36.

[4] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions*. Wiley: New York.

[5] Worldometers.info [Electronic resource] Mode of access: `https://www.worldometers.info/coronavirus`. Date of access: 27.02.2022.