

**ХРОМОВ Никита Андреевич**

**Выпускная квалификационная работа**

**ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5004.2020 «Прикладная математика и  
информатика»

Научный руководитель:

Доцент, кафедра статистического  
моделирования,

д.ф.-м.н., доцент Н.Э. Голяндина

Рецензент:

Исследователь, Национальный центр  
научных исследований, Франция,

к.ф.-м.н. К.Д. Усевич

Saint Petersburg State University  
Applied Mathematics and Computer Science

**KHROMOV Nikita Andreevich**

**Graduation Project**

**TENSOR SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS**

Scientific Supervisor:

Associate professor, Department of Statistical  
Modelling N. E. Golyandina

Reviewer:

Researcher, French National Centre for  
Scientific Research K. D. Usevich

Saint Petersburg

2024

# Оглавление

1.	Введение . . . . .	5
2.	Известные сведения об алгоритмах SSA и MSSA . . . . .	7
2.1.	SSA . . . . .	7
2.2.	MSSA . . . . .	10
3.	Основы теории тензорных разложений . . . . .	11
3.1.	Ранги тензоров и тензорные разложения . . . . .	12
3.2.	HOSVD . . . . .	13
3.3.	Свойства HOSVD . . . . .	15
3.4.	Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера . .	16
4.	Описание метода HO-SSA . . . . .	18
4.1.	HO-SSA для разделения компонент сигнала . . . . .	19
4.2.	HO-SSA для выделения сигнала из ряда . . . . .	20
5.	Свойства HO-SSA . . . . .	20
5.1.	Разделимость рядов в терминах HO-SSA . . . . .	21
5.2.	Примеры разделимости рядов в алгоритме HO-SSA . . . . .	22
5.3.	Ранг ряда в терминах HO-SSA . . . . .	23
6.	Примеры использования HO-SSA . . . . .	24
6.1.	Численное сравнение HO-SSA и SSA . . . . .	25
7.	Описание метода HOSVD-MSSA . . . . .	29
7.1.	HOSVD-MSSA для выделения сигнала . . . . .	29
7.2.	HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала . . . . .	31
8.	Свойства HOSVD-MSSA . . . . .	31
8.1.	Свойства HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала . . .	31
8.2.	Примеры разделимости рядов в алгоритме HOSVD-MSSA . . . .	34
8.3.	Свойства HOSVD-MSSA для выделения сигнала . . . . .	34
9.	Численные сравнения в задаче выделения сигнала . . . . .	38
9.1.	Результаты численных сравнений . . . . .	39
10.	Численные сравнения в задаче разделения компонент . . . . .	46
10.1.	Результаты численных сравнений . . . . .	48

10.2.	Смещение и дисперсия в случае отсутствия HOSVD-MSSA разделимости . . . . .	49
11.	Альтернативные тензорные разложения . . . . .	53
12.	Заключение . . . . .	58
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>59</b>

## 1. Введение

Singular spectrum analysis (SSA) [1] является распространённым методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и разделения аддитивных компонент сигнала из временного ряда. SSA относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала, и заключается в сингулярном разложении особой матрицы, построенной по временному ряду и называемой траекторной.

В работах [2, 3] предлагается тензорная модификация метода SSA для решения задачи выделения сигнала, которая основана на некотором тензорном разложении траекторного тензора, построенного по временному ряду. В работе [4] предлагается похожая тензорная модификация метода ESPRIT [5] для решения задачи оценки частот периодических компонент сигнала в особой модели. Причём, в этих работах утверждается преимущество тензорных модификаций над стандартным SSA.

Существует множество видов тензорных разложений, например каноническое (CPD) [6, 7], и Таккера (Tucker) [8]. Частным случаем разложения Таккера является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD) [9], которое также позволяет искать наилучшее приближение (усечением разложения).

Была поставлена задача реализовать тензорную модификацию метода SSA, выбрав некоторое тензорное разложение, в некотором смысле расширяющее SVD, и сравнить с методом SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала, а также рассмотреть расширение метода SSA на многомерные ряды — метод MSSA [10], сформулировать и реализовать тензорную модификацию этого метода и сравнить её с другими методами семейства SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала. В качестве метода разложения был выбран метод HOSVD, который имеет наибольшее число свойств, справедливых для SVD. В качестве языка программирования для реализаций алгоритмов был выбран язык R.

Способ построения траекторного тензора и его разложение были выбраны из предложенных в статье [4], однако в отличие от этой статьи, в данной работе изучается применение выбранных средств в задаче выделения сигнала из временного ряда и в задаче разделения компонент сигнала.

В разделе 2 приведено описание методов SSA и MSSA, а также некоторые их известные свойства и важные определения. В разделе 3 приведено описание некоторых тензорных разложений, используемых в работе, а также их свойства, необходимые для

доказательства ключевых утверждений о тензорных модификациях методов семейства SSA. В разделах 4, 5 представлено описание тензорных модификаций метода SSA — HOSVD-SSA и HOOI-SSA (оба этих метода в совокупности будем называть High-Order SSA или HO-SSA), и приведены утверждения, позволяющие использовать некоторые определения и свойства из теории базового SSA в модифицированных алгоритмах. В разделе 6 приведены примеры применения методов HO-SSA в задачах выделения сигнала из ряда и разделения компонент и численные сравнения этих методов с SSA. По итогам этого раздела было установлено, что в большинстве рассмотренных случаев методы HO-SSA имеют меньшую точность, чем метод Basic SSA. В разделах 7, 8, 9 и 10 описывается метод HOSVD-MSSA для выделения сигнала и разделения компонент и его свойства, а также проводятся численные сравнения этого метода с другими методами семейства SSA на гармонических сигналах особого вида. В результате были получены утверждения, позволяющие применять метод HOSVD-MSSA для выделения сигнала и разделения компонент, и было установлено преимущество этого метода над методом MSSA для рассматриваемых моделей сигнала и при некоторых условиях.

## 2. Известные сведения об алгоритмах SSA и MSSA

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

### 2.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 2.1** (Оператор вложения). Оператором вложения  $\mathcal{H}_L$  с длиной окна  $L$  будем называть отображение, переводящее временной ряд  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $N \geq L$ , в ганкелеву матрицу  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $K = N - L + 1$ , такую, что  $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$ . Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

**Определение 2.2** (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L < N$  называют матрицу  $\mathbf{X}$ , полученную применением оператора вложения  $\mathcal{H}_L$ , к ряду  $\mathbf{X}$ .

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов  $\mathbf{X}_k$ . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ . Первые два шага в алгоритме 2 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

**Определение 2.3** (SSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется SSA-рангом временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq (N + 1)/2$  и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

---

**Алгоритм 1** SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(L, N-L+1)$ ,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  по длине окна  $L$ .
- 2: Разложение: проведение SVD траекторной матрицы  $\mathbf{X}$ , получение её представления в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d \leq \min(L, N-L+1).$$

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по матрицам  $\mathbf{X}_k$  посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N-L+1, i+j-1 = n \right\}.$$


---

**Алгоритм 2** SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R : 1 \leq R \leq \min(L, N-L+1)$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$  — оценка сигнала  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ .

- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление ряда  $\tilde{\mathbf{X}}$  по матрице  $\tilde{\mathbf{X}}$  посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ .
- 

*Замечание.* В качестве параметра  $R$  в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

**Пример 2.1.** Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-



ранги.

- Ранг полиномиального ряда  $x_n = Q_d(n)$ , где  $Q_d$  — многочлен степени  $d$ , равен  $d+1$ .
- Ранг экспоненциального ряда  $x_n = Ce^{\alpha n}$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $C \neq 0$ , равен 1.
- Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где  $C \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\omega \in [0, 1/2]$ , равен  $r(\omega)$ , где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

- Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{i=1}^M Ce^{\alpha_i n} \cos(2\pi n\omega_i + \psi_i)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i, \alpha_i)$ , представленных в данном временном ряде.

**Определение 2.4** (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  и  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$  называют слабо  $L$ -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N-L+1)},$
2.  $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , а  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  является SVD матрицы  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 2.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

## 2.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [11, 12, 10].

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left( x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

**Определение 2.5** (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  — траекторные матрицы рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  соответственно, построенные по длине окна  $L$ . Траекторной матрицей многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  называется матрица  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$ ,  $K = N - L + 1$ , построенная соединением матриц  $\mathbf{X}_p$  по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P].$$

*Замечание.* Траекторная матрица одномерного временного ряда является частным случаем траекторной матрицы многомерного ряда.

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

**Определение 2.6** (MSSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется MSSA-рангом  $P$ -мерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d \leq P(N + 1)/(P + 1)$ , и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, P(N - L + 1))$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание.* Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

**Пример 2.2.** Рассмотрим  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  с элементами вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{R(p)} a_i^{(p)} e^{-\alpha_i^{(p)} n} \cos \left( 2\pi \omega_i^{(p)} n + \varphi_i^{(p)} \right). \quad (2)$$

MSSA-ранг такого ряда равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad (3)$$

где функция  $r(\omega)$  определена в уравнении (1), а  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)})$ , представленных в данном временном ряде.

*Замечание.* В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HOSVD-MSSA на многомерных сигналах вида (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры  $R(p)$ ,  $\omega_i^{(p)}$  и  $\alpha_i^{(p)}$  не зависят от номера ряда  $p$ , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [13]. Кроме того, в работе [4] также рассматривается этот частный случай модели.

**Определение 2.7** (Слабая MSSA-разделимость).  $P$ -мерные временные ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  длины  $N$  называются слабо  $L$ -разделимыми, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P},$
2.  $\sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 2.2.** Пусть  $X = \hat{X} + \tilde{X}$ , а  $X$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $X$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  является SVD матрицы  $X$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

### 3. Основы теории тензорных разложений

Под тензорами в данной работе подразумеваются  $M$ -мерные массивы. Элементы тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  обозначаются  $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$ . Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [9, 14, 15, 16]. Термины на русском языке взяты из работы [17].

### 3.1. Ранги тензоров и тензорные разложения

Для определения канонического тензорного разложения и разложения Таккера вводятся следующие определения.

**Определение 3.1** (Тензорный ранг).

1. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  имеет тензорный ранг, равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_M,$$

где  $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$ , а символ  $\circ$  обозначает тензорное произведение.

2. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  имеет ранг  $R$ , если он представим в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, и такое  $R$  минимально. Обозначение:  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* 1. Представление тензора  $\mathcal{A}$  в виде линейной комбинации  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$  тензоров ранга 1 называется каноническим разложением этого тензора (CPD).

2. Ранг тензора может зависеть от того, над каким полем рассматривается этот тензор:  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$  [14].

**Определение 3.2** ( $n$ -ранг тензора).  $n$ -рангом (модовым рангом) тензора  $\mathcal{A}$  называется размерность векторного пространства, порождённого  $n$ -столбцами (векторами  $n$ -го направления) этого тензора. Обозначается  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* 1. В отличие от матричного случая,  $n$ -ранги тензора с количеством размеров больше 2 могут различаться.

2. В общем случае ранг тензора  $\mathcal{A}$  не равен его  $n$ -рангам, даже если они все равны между собой. Кроме того, всегда справедливо неравенство  $\text{rank}_n(\mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**Определение 3.3** ( $n$ -я матрица развёртки тензора). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , тогда  $n$ -я матрица развёртки этого тензора (матрица сечений) — это матрица  $[\mathbf{A}]_n$  (или  $\mathbf{A}_{(n)}$ ) размера  $I_n \times I_{n+1}I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$ , в которой элемент тензора  $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_M}$  содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером, равным

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[ (i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

**Свойство 3.1** (Связь  $n$ -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению  $n$ ).  $n$ -столбцы тензора  $\mathcal{A}$  являются столбцами его  $n$ -й матрицы развёртки, и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}]_n).$$

**Определение 3.4** (Произведение тензора и матрицы по направлению). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ ,  $\mathbf{U}$  — матрица размера  $J_n \times I_n$  с элементами  $u_{ij}$ , тогда произведением тензора  $\mathcal{A}$  и матрицы  $\mathbf{U}$  по направлению  $n$  ( $\mathcal{A} \times_n \mathbf{U}$ ) называется тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_M$ , который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_M} u_{j_n i_n}.$$

**Определение 3.5** (Разложение Таккера). Пусть тензор  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  имеет  $n$ -ранги  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (4)$$

где тензор  $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$  называется ядром разложения,  $\mathbf{U}^{(k)} \in \mathbb{C}^{I_k \times J_k}$ ,  $J_k \geq R_k$ . Такое представление называется разложением Таккера.

*Замечание.* Разложение Таккера не единственно. Частным случаем этого разложения является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD), которое и будет рассматриваться в дальнейшем в этой работе по следующим причинам:

- HOSVD имеет наибольшее среди всех тензорных разложений число свойств, схожих со свойствами матричного сингулярного разложения (SVD), применяемого в алгоритмах SSA и MSSA;
- HOSVD позволяет находить наилучшее приближение тензора тензором с фиксированными  $n$ -рангами.

### 3.2. HOSVD

В этом разделе приведены определение разложения HOSVD и некоторые его свойства.

**Теорема 1** (Сингулярное разложение порядка  $M$ ). *Любой комплекснозначный тензор  $\mathcal{A}$  размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (5)$$

в котором

1.  $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)} : U_2^{(n)} : \dots : U_{I_n}^{(n)}]$  — унитарные матрицы,
2.  $\mathcal{Z}$  — комплекснозначный тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , в котором каждое сечение  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ , полученное фиксированием индекса  $i_n = \alpha$ , удовлетворяет следующим свойствам.
  - а. Полная ортогональность: сечения  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  и  $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$  ортогональны для всех возможных значений  $n, \alpha, \beta : \alpha \neq \beta$ :

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение.

- б. Упорядоченность: сечения расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \quad (6)$$

для всех  $n \in \overline{1 : M}$ .

**Определение 3.6** (Сингулярное разложение тензора). Разложение вида (5) называется сингулярным разложением тензора  $\mathcal{A}$  порядка  $M$  или HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .

**Определение 3.7** (Сингулярное число тензора). Обозначим  $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$  и будем называть  $\sigma_i^{(n)}$   $i$ -м сингулярным числом тензора  $\mathcal{A}$  по направлению  $n$ .

**Определение 3.8** (Сингулярный вектор тензора). Векторы  $U_i^{(n)}$  будем называть  $i$ -м сингулярным вектором тензора  $\mathcal{A}$  по направлению  $n$ .

*Замечание.* Представление (5) можно переписать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \quad (7)$$

Такое представление удобно для описания тензорных алгоритмов HO-SSA и HOSVD-MSSA.

### 3.3. Свойства HOSVD

Многие свойства методов SSA и MSSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность некоторых свойств SSA и MSSA со свойствами HO-SSA и HOSVD-MSSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размера  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ . Применением SVD ко всем матрицам сечений этого тензора вычисляются  $M$  матриц  $\mathbf{U}^{(n)}$ , составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Определим тензор  $\mathcal{Z}$  следующим образом

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 (\mathbf{U}^{(1)})^H \times_2 (\mathbf{U}^{(2)})^H \dots \times_M (\mathbf{U}^{(M)})^H,$$

где верхний индекс  $H$  обозначает эрмитово сопряжение матрицы. Тогда исходный тензор  $\mathcal{A}$  можно представить в виде (5)

**Утверждение 3.1.** *Процедура, описанная выше, даёт HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .*

Из-за этой связи HOSVD с SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

**Свойство 3.2** (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому направлению определяются однозначно.
2. Если сингулярные числа по направлению  $n$  различны, то сингулярные векторы по направлению  $n$  определены с точностью до умножения на коэффициент единичной нормы. Другими словами, если вектор  $U_\alpha^{(n)}$  умножается на  $e^{i\theta}$ , то сечение  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должно быть умножено на обратный коэффициент  $e^{-i\theta}$ .
3. Сингулярные векторы по направлению  $n$ , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по направлению  $n$ , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией этих векторов. Соответствующие сечения  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должны быть пересчитаны обратным образом. Другими словами,  $\mathbf{U}^{(n)}$  можно заменить на  $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{Q}$  — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению  $\mathbf{U}^{(n)}$  на наборы сингулярных векторов по направлению  $n$ , соответствующих одинаковым сингулярным значениям по направлению  $n$ . При этом тензор  $\mathcal{Z}$  должен быть заменён на  $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$ .

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется с точностью до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

**Свойство 3.3** (Обобщение). HOSVD тензора является обобщением SVD в том смысле, что результат применения HOSVD к тензору с двумя размерами, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, с точностью до унитарных преобразований сингулярных векторов, отвечающих равным сингулярным числам, и соответствующих преобразований матрицы сингулярных значений.

**Свойство 3.4** (Связь  $n$ -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  вида (5), тогда, по определению, тензор сингулярных чисел  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех  $n \in \overline{1:M}$ . Обозначим  $r_n$  — наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$ . Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (8)$$

**Свойство 3.5** (Норма). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (5), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ ,  $n \in \overline{1:M}$ . Тогда справедливо равенство

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \|\mathcal{Z}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2$$

### 3.4. Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера

HOSVD позволяет получать приближение произвольного тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  некоторым тензором с заданными меньшими  $n$ -рангами  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ .

**Определение 3.9** (Ориентированная энергия). Ориентированной по направлению  $n$  энергией тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  в направлении вектора  $X \in \mathbb{C}^{I_n}$  единичной нормы называют выражение

$$\text{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^H[\mathbf{A}]_n\|^2.$$

**Свойство 3.6** (Об ориентированной энергии). Направления экстремальной ориентированной энергии по направлению  $n$  соответствуют сингулярным векторам по направлению  $n$ , причём значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по направлению  $n$ .



Это означает, что  $n$ -столбцы тензора  $\mathcal{A}$  содержат наибольшие вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ , и на это направление приходится  $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2$  энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по направлению  $n$  достигает экстремума в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U_1^{(n)}$ , с величиной  $\left(\sigma_2^{(n)}\right)^2$ , и так далее.

**Свойство 3.7** (Приближение). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (5), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ . Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших сингулярных значений  $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$  для заданных  $I'_n, n \in \overline{1:M}$ , то есть заменяя нулями соответствующие сечения тензора  $\mathcal{Z}$ . Тогда верно

$$\left\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\right\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} \left(\sigma_{i_2}^{(2)}\right)^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2. \quad (9)$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Для тензоров эта связь принимает другой вид. Тензор, получаемый отбрасыванием наименьших сингулярных значений по направлению  $n$  будет иметь  $n$ -ранги  $(I'_1, I'_2, \dots, I'_M)$ , но в общем случае не будет наилучшим приближением при заданных ограничениях на  $n$ -ранги. Тем не менее, условие упорядоченности (6) подразумевает, что «энергия»  $\mathcal{A}$  в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям индексов направлений. Следовательно, если  $\sigma_{I'_n}^{(n)} \gg \sigma_{I'_n+1}^{(n)}$  (например, если  $I'_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ , то меньшие сингулярные значения по измерению  $n$  не существенны), то  $\hat{\mathcal{A}}$  всё ещё можно считать хорошим приближением  $\mathcal{A}$ . Ошибка ограничена выражением (9).

Одним из методов получения оптимального приближения тензора тензором малых рангов является алгоритм High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [18, 19]. При заданных тензоре  $\mathcal{A}$  и наборе  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$  алгоритм решает задачу минимизации

$$\left\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\right\| \rightarrow \min$$

относительно тензора  $\hat{\mathcal{A}}$  с заданными  $n$ -рангами  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ . Алгоритм HOOI является итерационным, в качестве начального приближения  $\mathcal{A}_0$  обычно используется усечение с нужными рангами HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ . Критерий остановки алгоритма на шаге  $k$ :  $\left\|\hat{\mathcal{A}}_{k-1} - \hat{\mathcal{A}}_k\right\| < \varepsilon$  для некоторого заданного  $\varepsilon$ , либо  $k \geq N$  для некоторого заданного  $N$ .

### Свойство 3.8.

1. Алгоритм НООИ не гарантирует сходимости к глобальному минимуму выражения  $\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}_k\|$ .
2. На практике алгоритм НООИ обычно демонстрирует линейную скорость сходимости, но его теоретическая скорость сходимости может быть и нелинейной в зависимости от конкретных условий [20].

## 4. Описание метода НО-SSA

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 4.1** (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размера  $I \times L \times J, J = N - I - L + 2$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

*Замечание.* Траекторный тензор  $\mathcal{X}$  является ганкелевым [21].

Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}_{k..} = \mathcal{A}_{i_1=k}, \quad \mathcal{A}_{..k} = \mathcal{A}_{i_2=k}, \quad \mathcal{A}_{.k.} = \mathcal{A}_{i_3=k}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 2.1 сечения траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{..j} &= \mathcal{H}_I \left( (x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+I+L-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{.l.} &= \mathcal{H}_I \left( (x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+L+J-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{i..} &= \mathcal{H}_L \left( (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L+J-2}) \right). \end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд  $\mathbf{X}$  и параметры  $I, L : 1 < I, L < N, I + L < N + 1$ . Так как при замене одного из этих параметров на  $J = N - I - L + 2$  или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки  $(I, L, J)$  без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

#### 4.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов  $\mathbf{X}_k$ . Метод HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 3.

---

**Алгоритм 3** HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(I, L, N - I - L + 2)$ ,  $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторного тензора  $\mathcal{X}$  по параметрам  $I, L$ .
- 2: Разложение: проведение HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (10)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по тензорам  $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$  посредством их усреднения вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{ilj}^{(\mathfrak{S}_k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, l, j) \mid 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n \right\}.$$


---

## 4.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших  $n$ -рангов, заданных пользователем, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD (HOSVD-SSA). Благодаря свойству 3.7 такое приближение можно считать достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом 3, поэтому опишем его, начиная с третьего шага. Описание приведено в алгоритме 4.

Второй способ использует алгоритм HOOI для приближения траекторного тензора ряда некоторым тензором меньших  $n$ -рангов, причём результатом выполнения HOOI будет HOSVD этого приближения (HOOI-SSA). Первый шаг этого алгоритма совпадает с первым шагом алгоритма 3, поэтому опишем его начиная со второго шага. Описание приведено в алгоритме 5.

---

**Алгоритм 4** HOSVD-SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 3: По параметрам  $R_1, R_2, R_3$  и разложению траекторного тензора  $\mathcal{X}$  в виде (10), в тензоре  $\mathcal{Z}$  проводится замена сечений  $\mathcal{Z}_{i_m=k}$  при  $k > R_m$  на нулевые, и по полученному тензору  $\hat{\mathcal{Z}}$  строится приближение траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ .
  - 4: Усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ , в результате чего получается оценка сигнала  $\hat{\mathbf{X}}$ .
- 

## 5. Свойства HO-SSA

В силу аналогичности свойств SVD и HOSVD, многие определения и свойства из теории SSA [1] можно перенести на тензорный случай.

---

**Алгоритм 5** HOOI-SSA
 

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 < I, L < N$ ,  $I + L < N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 2: Применение к построенному на первом шаге траекторному тензору  $\mathcal{X}$  метода HOOI с набором  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, R_3)$ . Результат применения HOOI: тензор  $\hat{\mathcal{X}}$ , имеющий заданные  $n$ -ранги.
  - 3: Восстановление сигнала, совпадает с шагом 4 алгоритма 4.
- 

### 5.1. Разделимость рядов в терминах HO-SSA

**Теорема 2.** Пусть  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$  и  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N)$  — временные ряды длины  $N$ ,  $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}$ . Траекторные тензоры рядов с длинами окна  $I, L$  равны соответственно  $\tilde{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}$ . Тогда существует HOSVD тензора  $\mathcal{X}$ , которое можно представить в виде суммы HOSVD тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$  в том и только том случае, когда взаимно ортогональны все подряды рядов  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\hat{\mathbf{X}}$  длины  $I, L, J = N - I - L + 2$ , то есть

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sum_{i=0}^{I-1} \tilde{x}_{k+i} \hat{x}_{m+i} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : (N - I + 1)}, \\
 2. \quad & \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_{k+l} \hat{x}_{m+l} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : (N - L + 1)}, \\
 3. \quad & \sum_{j=0}^{J-1} \tilde{x}_{k+j} \hat{x}_{m+j} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : (N - J + 1)}.
 \end{aligned}$$

*Доказательство.* Сингулярные разложения тензоров  $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{X}}$  могут быть представлены в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathbf{z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}, \\
 \tilde{\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \tilde{\mathbf{z}}_{ilj} \tilde{U}_i^{(1)} \circ \tilde{U}_l^{(2)} \circ \tilde{U}_j^{(3)}, \\
 \hat{\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \hat{\mathbf{z}}_{ilj} \hat{U}_i^{(1)} \circ \hat{U}_l^{(2)} \circ \hat{U}_j^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Сумма  $\mathcal{X} = \sum_i \sum_l \sum_j \tilde{\mathbf{z}}_{ilj} \tilde{U}_i^{(1)} \circ \tilde{U}_l^{(2)} \circ \tilde{U}_j^{(3)} + \sum_i \sum_l \sum_j \hat{\mathbf{z}}_{ilj} \hat{U}_i^{(1)} \circ \hat{U}_l^{(2)} \circ \hat{U}_j^{(3)}$  является HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  в том и только том случае, когда пары векторов  $\tilde{U}_k^{(\sigma)}, \hat{U}_m^{(\sigma)}$  взаимно

ортогональны при всех возможных значениях  $\sigma, k, m$ . Это равносильно ортогональности линейных пространств  $\mathcal{L}_1^{(\sigma)}, \mathcal{L}_2^{(\sigma)}$ , построенных на векторах  $\tilde{U}_k^{(\sigma)}$  и  $\hat{U}_m^{(\sigma)}$  соответственно.

Рассмотрим пространства  $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(1)}$ : это пространства первых направлений тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$ , то есть пространства, построенные на векторах вида  $(\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_{k+I-1})^T$  и  $(\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_{k+L-1})^T$  соответственно. Отсюда следует, что условие ортогональности линейных пространств, построенных на этих векторах равносильно первому условию из формулировки теоремы.

Оставшиеся два условия получаются аналогично из условий ортогональности оставшихся двух пар линейных пространств.  $\square$

*Замечание.* Условия утверждения выше сильнее, чем для аналогичного утверждения 2.1 для стандартного SSA. Это позволяет предположить, что тензорный вариант может оказаться не точнее стандартного.

Из утверждения 2 следует, что понятие слабой разделимости ряда из теории SSA применимо и к тензорному случаю.

**Следствие.** Если временные ряды  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\hat{\mathbf{X}}$  длины  $N$  слабо  $I$ - и  $L$ -разделимы в смысле теории SSA (определение 2.4), то существует такое HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$  ряда  $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}$ , что его можно разбить на две части, являющиеся HOSVD траекторных тензоров, составленных по рядам  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\hat{\mathbf{X}}$ .

## 5.2. Примеры разделимости рядов в алгоритме HO-SSA

Рассмотрим условия разделимости рядов  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ ,  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  в некоторых частных случаях.

- Отделимость от константного ряда

Пусть  $\tilde{x}_n \neq 0$  для  $n \in \overline{1:N}$ . Тогда необходимые и достаточные условия разделимости с ним ряда  $\hat{\mathbf{X}}$  в смысле HO-SSA следующие:

1. Ряд  $\hat{\mathbf{X}}$  имеет целый период  $T$ , и  $I/T, L/T, J/T$  — целые;
2.  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_T = 0$ .

**Пример 5.1.** Ряд с элементами вида  $\tilde{x}_n = \cos(2\pi n/T + \varphi)$  длины  $N$  такой, что  $N+2$  делится нацело на  $T$ , будет слабо разделим с константным рядом при выборе параметров  $I, L : I + L < N + 1$ , делящихся нацело на  $T$ .

- Отделимость от экспоненциального ряда

Пусть  $\tilde{x}_n = e^{\alpha n}$  для  $n \in \overline{1:N}$ . Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда  $\hat{X}$  в смысле HO-SSA следующие:

1. Ряд  $(\tilde{x}_1\hat{x}_1, \tilde{x}_2\hat{x}_2, \dots, \tilde{x}_N\hat{x}_N)$  имеет целый период  $T$ , и  $I/T, L/T, J/T$  — целые;
2.  $\tilde{x}_1\hat{x}_1 + \tilde{x}_2\hat{x}_2 + \dots + \tilde{x}_N\hat{x}_N = 0$ .

**Пример 5.2.** Ряд с элементами вида  $\tilde{x}_n = e^{-\alpha n} \cos(2\pi n/T + \varphi)$  длины  $N$  такой, что  $N+2$  делится нацело на  $T$ , будет слабо разделим с рядом с элементами вида  $\hat{x}_n = e^{\alpha n}$  при выборе параметров  $I, L : I+L < N+1$ , делящихся нацело на  $T$ .

- Отделимость от гармонического ряда

Пусть  $\tilde{x}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$ , где  $0 < \omega < 1/2$ , и  $I, L, J > 2$ . Положим  $\hat{x}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$ , тогда если  $\omega \neq \omega'$  и  $I\omega, I\omega', L\omega, L\omega', J\omega, J\omega'$  — целые числа, то ряд  $\tilde{X}$  разделим с рядом  $\hat{X}$  в смысле HO-SSA.

### 5.3. Ранг ряда в терминах HO-SSA

**Теорема 3.** Пусть временной ряд  $X$  имеет конечный ранг  $d$  в терминах SSA (определение 2.3). Тогда для любых значений  $I$  и  $L$  таких, что

$$d \leq \min(I, L, N - I - L + 2), \quad (11)$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому направлению в HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по этому ряду с длинами окна  $I$  и  $L$ , будет равно  $d$ .

*Доказательство.* Временной ряд  $X$  имеет SSA-ранг  $d$ , если для любой длины окна  $L'$  такой, что  $d \leq \min(L', N - L' + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L'$ , равен  $d$ . Это равносильно тому, что для любых таких  $L'$  линейное пространство, построенное на векторах вида  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L'-1})^T$ , имеет размерность  $d$ . С другой стороны, после замены  $L'$  на  $I, L$  или  $N - I - L + 2$  такой же вид имеют векторы траекторного тензора  $\mathcal{X}$  по соответствующим направлениям. Таким образом, если выполняется неравенство (11), то все  $n$ -ранги тензора  $\mathcal{X}$  равны  $d$ . Применение свойства 3.4 заканчивает доказательство.  $\square$

**Следствие.** Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HO-SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

## 6. Примеры использования HO-SSA

Рассмотрим несколько примеров использования HO-SSA для анализа временных рядов.

**Пример 6.1** (Разделимость синуса и константы). Рассмотрим ряд с элементами  $x_n = 3 + \sin(2\pi n/3 + \pi/3)$ , где  $n \in \overline{0:15}$ . После построения траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с параметрами  $I = L = 6$  вычисляются его тензор сингулярных чисел  $\mathcal{Z}$  и матрицы сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)}$ ,  $\mathbf{U}^{(2)}$ ,  $\mathbf{U}^{(3)}$ . Так как все размерности траекторного тензора  $\mathcal{X}$  равны, его матрицы сечений по всем направлениям совпадают, а значит совпадают и матрицы сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$ .

$$\mathbf{U} \approx \begin{pmatrix} -0.41 & 0.00 & 0.58 & 0.70 & -0.10 & 0.01 \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & 0.08 & 0.62 & 0.33 \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & 0.06 & 0.33 & -0.63 \\ -0.41 & -0.00 & 0.58 & -0.70 & 0.10 & -0.01 \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & -0.08 & -0.62 & -0.33 \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & -0.06 & -0.33 & 0.63 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Z} \approx \left( \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} -44.09 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2.60 & -4.50 & \dots & 0 & -4.50 & 2.60 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4.50 & 2.60 & \dots & 0 & 2.60 & 4.50 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right).$$

Здесь вертикальной чертой обозначено разделение тензора по третьему направлению. Все не указанные элементы тензора  $\mathcal{Z}$  равны 0. Видно, что первый сингулярный вектор постоянен, а второй и третий — периодические с периодом 3. Кроме того, по каждому из трёх направлений количество ненулевых сингулярных чисел равно 3 (например  $\|\mathcal{Z}_{..1}\| > \|\mathcal{Z}_{..2}\| = \|\mathcal{Z}_{..3}\| > 0$ ,  $\|\mathcal{Z}_{..j}\| = 0$  для всех остальных  $j$ ). Исходя из этого,



имеет смысл отнести индекс  $\{1\}$  к константной компоненте ряда, индексы  $\{2, 3\}$  — к гармонической (синус), а остальные проигнорировать. После восстановления тензоров, полученных такой группировкой, получаем два ряда

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}} &= (3, 3, \dots, 3), \\ \widetilde{\mathbf{X}} &= (0.86, 0, -0.86, 0.86, \dots, 0, -0.86, 0.86).\end{aligned}$$

Таким образом, константный ряд отделился от синуса.

**Пример 6.2** (Смещение двух косинусов). Рассмотрим ряд с элементами

$$x_n = \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/4), \quad n \in \overline{0 : 33}.$$

Выбрав параметры  $I = L = 12$ , после разложения получаем тензор сингулярных значений  $\mathcal{Z}$  и, в силу равенства размерностей траекторного тензора, равные между собой матрицы сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$ . Тензор  $\mathcal{Z}$  имеет вид тензорного блока  $\mathcal{Z}'$  размерности  $4 \times 4 \times 4$ , окаймлённого нулями, в котором уже нельзя выделить блочно-диагональную структуру. Если рассмотреть матрицы сингулярных векторов, можно увидеть, что никакой сингулярный вектор не имеет периода равного 3 или 4:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.58 & 0 & \dots \\ -0.18 & 0.36 & 0.14 & -0.39 & \dots \\ -0.17 & -0.16 & 0.43 & 0.30 & \dots \\ 0.38 & -0.04 & -0.29 & 0.32 & \dots \\ 0.14 & 0.002 & -0.14 & -0.54 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, произошло смешение двух косинусов одинаковой амплитуды.

### 6.1. Численное сравнение HO-SSA и SSA

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= (x_1, x_2, \dots, x_N), \\ x_n &= s_n + \varepsilon_n, \quad n \in \overline{1 : N},\end{aligned}\tag{12}$$

где  $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$  — сигнал,  $\mathbf{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  — шум. Рассмотрим задачу выделения сигнала на примерах различных рядов.

**Пример 6.3** (Выделение экспоненты). Пусть  $N = 23$ ,  $\varepsilon_n$  — независимые  $N(0, 2.25)$  величины,

$$s_n = 2e^{0.035n}. \quad (13)$$

Таблица 1. SSA: RMSE оценки экспоненциального сигнала (13).

$L$	4	6	12
MSE	0.65	0.55	<b>0.52</b>

Таблица 2. HO-SSA: RMSE оценки экспоненциального сигнала (13).

$I \times L \times J$ Приближение	$4 \times 4 \times 17$	$4 \times 6 \times 15$	$4 \times 9 \times 12$	$6 \times 6 \times 13$	$6 \times 8 \times 11$
Усечение HOSVD	0.59	<b>0.56</b>	<b>0.56</b>	<b>0.56</b>	0.58
HOOI	0.58	<b>0.55</b>	<b>0.55</b>	0.56	0.57

В таблицах 1 и 2 приведены значения среднеквадратичного отклонения (RMSE) восстановленного ряда от исходного для различных значений параметров после использования SSA и двух вариаций HO-SSA для выделения сигнала. Для тензорных модификаций параметры представлены в порядке уменьшения третьего размера траекторного тензора. Большие параметры длин окна не рассматриваются, так как построенные по ним траекторные матрицы и траекторные тензоры будут совпадать с рассмотренными с точностью до перестановки размерностей. RMSE здесь и далее в этом разделе высчитывается по 500 реализациям шума, если не указано иное. Кроме того, здесь и далее жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения RMSE, причём отличие этих минимальных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ . В данной работе RMSE высчитывается по следующей формуле

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}_i)}, \quad \text{MSE}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (s_j - \tilde{s}_j)^2,$$

где  $m$  — количество реализаций шума,  $\tilde{\mathbf{s}}_i$  — оценка сигнала, восстановленная по ряду с  $i$ -й реализацией шума.

**Пример 6.4** (Выделение косинуса). Пусть  $N = 71$ , рассматриваются три варианта шума: белый гауссовский с параметром  $\sigma^2 = 25$  и красный гауссовский с параметрами  $\delta^2 = 5$ ,  $\varphi = 0.5$  и  $\delta^2 = 5$ ,  $\varphi = 0.9$ . Сигнал имеет вид

$$s_n = 30 \cos(2\pi n/12). \quad (14)$$

В таблицах 3, 4 и 5 приведены значения отклонения восстановленного ряда от исходного ряда для различных вариантов шума и различных значений параметров после использования SSA и HO-SSA. Параметры длин окна для тензорных модификаций брались таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $I \leq J \leq L$ .

Таблица 3. SSA: RMSE оценки сигнала (14).

вид шума \ $L$	$L$			
	12	24	30	36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	<b>1.40</b>	1.42
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	<b>1.01</b>	1.03
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	<b>1.34</b>	1.36

Таблица 4. HOSVD-SSA: RMSE оценки сигнала (14).

вид шума \ $I \times L$	$I \times L$					
	12×49	12×37	7×36	12×31	19×30	24×25
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.64	1.53	<b>1.49</b>	1.57	1.62	1.66
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.18	1.12	<b>1.08</b>	1.14	1.19	1.21
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.58	<b>1.44</b>	1.46	1.47	1.54	1.57

Таблица 5. HOOI-SSA: RMSE оценки сигнала (14).

вид шума \ $I \times L$	$I \times L$					
	12×49	12×37	7×36	12×31	19×30	24×25
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.63	1.53	<b>1.49</b>	1.56	1.62	1.65
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.17	1.12	<b>1.08</b>	1.14	1.19	1.21
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.56	1.42	<b>1.39</b>	1.44	1.51	1.54

**Пример 6.5** (Выделение линейного ряда). Пусть  $N = 39$ , рассматриваются два варианта белого гауссовского шума: с параметром  $\sigma^2 = 2.25$  и с параметром  $\sigma^2 = 0.04$ . Сигнал имеет вид

$$s_n = 2 + 0.1n. \quad (15)$$

В каждом из случаев шума рассматриваются по два варианта восстановления линейного сигнала: по одной компоненте и по двум. В таблицах 6, 7, 8 и 9 приведены значения среднеквадратичного отклонения восстановленного линейного ряда от исходного. Таблицам 6 и 7 соответствует белый гауссовский шум с дисперсией  $\sigma^2 = 2.25$ , таблицам 8 и 9 — с дисперсией  $\sigma^2 = 0.04$ .

Таблица 6. SSA: RMSE оценки линейного сигнала (15), случай  $\sigma^2 = 2.25$ .

Компонент	$L$	10	15	20
1		0.44	<b>0.42</b>	<b>0.42</b>
2		0.70	<b>0.66</b>	0.68

Таблица 7. HO-SSA: RMSE оценки линейного сигнала (15), случай  $\sigma^2 = 2.25$ .

Компонент	$I \times L$	6×20	10×20	10×16
	Метод восстановления			
1	HOSVD-SSA	<b>0.46</b>	0.48	0.49
	HOOI-SSA	<b>0.45</b>	0.47	0.48
2	HOSVD-SSA	<b>0.57</b>	0.58	0.60
	HOOI-SSA	<b>0.61</b>	0.62	0.64

Таблица 8. SSA: RMSE оценки линейного сигнала (15), случай  $\sigma^2 = 0.04$ .

Компонент	$L$	10	15	20
1		<b>0.09</b>	0.108	0.118
2		0.10	<b>0.093</b>	<b>0.093</b>

Таблица 9. HO-SSA: RMSE оценки линейного сигнала (15), случай  $\sigma^2 = 0.04$ .

Компонент	$I \times L$	$6 \times 20$	$10 \times 20$	$10 \times 16$
	Метод восстановления			
1	HOSVD-SSA	<b>0.130</b>	0.136	0.145
	HOOI-SSA	<b>0.130</b>	0.136	0.144
2	HOSVD-SSA	<b>0.112</b>	0.125	0.130
	HOOI-SSA	<b>0.114</b>	0.124	0.130

**Пример 6.6** (Случай, когда HO-SSA выделяет сигнал точнее, чем SSA). Пусть  $N = 9$ , шум — красный гауссовский с параметрами  $\delta = 0.1$ ,  $\varphi = 0.9$ . Сигнал имеет вид

$$s_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2). \quad (16)$$

В таблице 10 приведены оптимальные значения RMSE оценок сигнала для разных методов по 1000 реализаций шума.

Таблица 10. Сравнение SSA и HO-SSA: RMSE оценок сигнала (16).

SSA	HOSVD-SSA	HOOI-SSA
0.116	0.110	<b>0.095</b>

Причины, по которым в этом примере обе вариации HO-SSA дают стабильно лучшие результаты, чем SSA, пока неизвестны и остаются для дальнейшего изучения.

## 7. Описание метода HOSVD-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HOSVD-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

### 7.1. HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = \left( x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right)^T.$$

**Определение 7.1** (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L : 1 < L < N$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $L \times K \times P$ ,  $K = N - L + 1$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, p \in \overline{1:P}.$$

Из определения следует, что сечение  $\mathcal{X}_{..p}$  траекторного тензора с длиной окна  $L$  является траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}^{(p)}$ , построенной по длине окна  $L$ . Пользуясь определением 2.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{..p} = \mathcal{H}_L(\mathbf{X}^{(p)}).$$

Метод HOSVD-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HOSVD-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем,  $n$ -рангов. Для получения такого приближения используется усечение HOSVD траекторного тензора. Описание метода приведено в алгоритме 6.

---

**Алгоритм 6** HOSVD-MSSA для выделения сигнала

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1:L}$ ,  $R_2 \in \overline{1:K}$ ,  $R_3 \in \overline{1:P}$ , где  $K = N - L + 1$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$ .

- 1: Построение по ряду  $\mathbf{X}$  траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$ .
- 2: Вычисление HOSVD  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (17)$$

- 3: Построение по параметрам  $R_1, R_2, R_3$  усечения HOSVD

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

- 4: Восстановление многомерного ряда  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(P)})$  по тензору  $\tilde{\mathcal{X}}$ , которое происходит следующим образом: ряды  $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$  получаются усреднением сечений  $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$  вдоль побочных диагоналей  $l + k = \text{const}$ .
-

## 7.2. HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два  $P$ -мерных временных ряда  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  длины  $N$  и  $X = \hat{X} + \tilde{X}$ . Их траекторные тензоры с длиной окна  $L$  обозначим  $\hat{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{X}$  соответственно.

Метод HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала  $X$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров компонент  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$ . Первые два шага этого алгоритма совпадают с первыми двумя шагами алгоритма 6, поэтому описание алгоритма приводится, начиная с 3 шага. Описание метода приведено в алгоритме 7.

---

**Алгоритм 7** HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $X, L : 1 < L < N, K = N - L + 1, \hat{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}} \subseteq 1 : \min(L, K) : \hat{\mathfrak{S}} \cap \tilde{\mathfrak{S}} = \emptyset, \hat{\mathfrak{P}}, \tilde{\mathfrak{P}} \subseteq 1 : P$

**Результат:**  $\hat{\mathring{X}}, \tilde{\mathring{X}}$  — оценки  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно.

3: Группировка: построение тензоров

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \hat{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \tilde{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \hat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \tilde{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \hat{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \tilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.\end{aligned}$$

4: Восстановление рядов  $\hat{\mathring{X}}$  и  $\tilde{\mathring{X}}$  по тензорам  $\hat{\mathcal{X}}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}$  соответственно путём применения к каждому из этих тензоров шага 4 алгоритма 6.

---

## 8. Свойства HOSVD-MSSA

В этом разделе описаны свойства, позволяющие перенести некоторые определения из теории SSA для анализа многомерных рядов на тензорный случай.

### 8.1. Свойства HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть  $P$ -мерный временной ряд  $X$  длины  $N$  представим в виде суммы временных рядов  $X = \hat{X} + \tilde{X}$ , и пусть выбрана длина окна  $L$ . Обозначим  $K = N - L + 1$ ,  $\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}$  — траекторные тензоры рядов  $X, \hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно, построенные по длине окна  $L$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  — матрицы, в строках которых стоят одномерные ряды, составляющие ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно,  $\hat{\Lambda}^{(I)}$  — пространство, порождённое векторами вида

$\left(\hat{x}_i^{(p)}, \hat{x}_{i+1}^{(p)}, \dots, \hat{x}_{i+I-1}^{(p)}\right)^T$ , где  $i \in \overline{1 : (N - I + 1)}$ ,  $p \in \overline{1 : P}$ . Аналогично определяется пространство  $\tilde{\Lambda}^{(I)}$  для ряда  $\tilde{X}$ . Также определим  $\hat{\Lambda}_3$  и  $\tilde{\Lambda}_3$  — пространства, порождённые столбцами матриц  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно.

**Определение 8.1.** Многомерные временные ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  называются слабо  $L$ -разделимыми в терминах HOSVD-MSSA, если выполняются равенства

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P}, \\ 2. \quad & \sum_{k=0}^{K-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - K + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P}, \end{aligned}$$

*Замечание.* Условия 1 и 2 равносильны ортогональности пар пространств  $\hat{\Lambda}^{(L)}$  с  $\tilde{\Lambda}^{(L)}$  и  $\hat{\Lambda}^{(K)}$  с  $\tilde{\Lambda}^{(K)}$  соответственно.

**Теорема 4.** Такие HOSVD тензоров  $\hat{\mathcal{X}}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}$ , что их сумма является HOSVD тензора  $\mathcal{X}$ , существуют тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  слабо  $L$ -разделимы.

*Доказательство.* Рассмотрим два случая: когда пространства  $\hat{\Lambda}_3$  и  $\tilde{\Lambda}_3$  ортогональны, и когда ортогональности нет.

Пусть пространства  $\hat{\Lambda}_3$  и  $\tilde{\Lambda}_3$  ортогональны, то есть  $\sum_{p=1}^P \hat{x}_i^{(p)} \tilde{x}_j^{(p)} = 0$  для любых  $i, j \in \overline{1 : N}$ . Рассмотрим HOSVD тензоров  $\hat{\mathcal{X}}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}$ :

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \hat{\mathcal{Z}}_{lkp} \hat{U}_l^{(1)} \circ \hat{U}_k^{(2)} \circ \hat{U}_p^{(3)}, \quad (18)$$

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \tilde{\mathcal{Z}}_{lkp} \tilde{U}_l^{(1)} \circ \tilde{U}_k^{(2)} \circ \tilde{U}_p^{(3)}. \quad (19)$$

Сумма таких представлений будет являться HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  в том и только том случае, когда для любого  $\sigma \in \{1, 2, 3\}$  пространства, порождённые векторами  $\hat{U}_i^{(\sigma)}$  ортогональны пространствам, порождённым векторами  $\tilde{U}_i^{(\sigma)}$ , что равносильно ортогональности пространств, порождённых векторами тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  по направлению  $\sigma$  и векторами тензора  $\tilde{\mathcal{X}}$  по тому же направлению для всех  $\sigma$ . При условии ортогональности пространств  $\hat{\Lambda}_3$  и  $\tilde{\Lambda}_3$ , это условие равносильно ортогональности пар пространств  $\hat{\Lambda}^{(L)}$  с  $\tilde{\Lambda}^{(L)}$  и  $\hat{\Lambda}^{(K)}$  с  $\tilde{\Lambda}^{(K)}$ .

Пусть теперь пространства  $\hat{\Lambda}_3$  и  $\tilde{\Lambda}_3$  неортогональны. Определим пространство  $\Lambda_3 = \left\{ \alpha \hat{y} + \beta \tilde{y} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \hat{y} \in \hat{\Lambda}_3, \tilde{y} \in \tilde{\Lambda}_3 \right\}$  и матрицу  $\mathbf{U}_3 = \left[ U_1^{(3)} : U_2^{(3)} : \dots : U_P^{(3)} \right]$ , столбцы которой составляют ортонормированный базис пространства  $\Lambda_3$ . Так как  $\hat{\Lambda}_3 \subseteq$



$\Lambda_3$ , то  $\{U_p^{(3)}\}$  также является ортонормированным базисом пространства  $\hat{\Lambda}_3$ , следовательно существуют тензор  $\hat{\mathcal{Z}}$  и ортогональные матрицы  $\hat{\mathbf{U}}_1 = [\hat{U}_1^{(1)} : \hat{U}_2^{(1)} : \dots : \hat{U}_L^{(1)}]$  и  $\hat{\mathbf{U}}_2 = [\hat{U}_1^{(2)} : \hat{U}_2^{(2)} : \dots : \hat{U}_K^{(2)}]$  такие, что выражение

$$\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \hat{\mathcal{Z}}_{lkp} \hat{U}_l^{(1)} \circ \hat{U}_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}$$

является HOSVD тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  с точностью до перенумерации элементов  $\hat{\mathcal{Z}}$  и соответствующей перестановки столбцов матриц  $\hat{\mathbf{U}}_\sigma$  и  $\mathbf{U}_3$ . Аналогично существуют тензор  $\tilde{\mathcal{Z}}$  и ортогональные матрицы  $\tilde{\mathbf{U}}_1 = [\tilde{U}_1^{(1)} : \tilde{U}_2^{(1)} : \dots : \tilde{U}_L^{(1)}]$  и  $\tilde{\mathbf{U}}_2 = [\tilde{U}_1^{(2)} : \tilde{U}_2^{(2)} : \dots : \tilde{U}_K^{(2)}]$  такие, что выражение

$$\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \tilde{\mathcal{Z}}_{lkp} \tilde{U}_l^{(1)} \circ \tilde{U}_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}$$

является HOSVD тензора  $\tilde{\mathcal{X}}$ .

Ортогональность пар пространств  $\hat{\Lambda}^{(L)}$  с  $\tilde{\Lambda}^{(L)}$  и  $\hat{\Lambda}^{(K)}$  с  $\tilde{\Lambda}^{(K)}$  равносильна ортогональности пар векторов  $\hat{U}_l^{(1)}$  с  $\tilde{U}_{l'}^{(1)}$  и  $\hat{U}_k^{(2)}$  с  $\tilde{U}_{k'}^{(2)}$  для всех  $l, l', k, k'$ , что равносильно тому, что  $\mathbf{U}_1 = [\hat{\mathbf{U}}_1 : \tilde{\mathbf{U}}_1]$  и  $\mathbf{U}_2 = [\hat{\mathbf{U}}_2 : \tilde{\mathbf{U}}_2]$  — ортогональные матрицы. Ортогональность матриц  $\mathbf{U}_\sigma$  равносильна тому, что выражение

$$\mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}_1 \times_2 \mathbf{U}_2 \times_3 \mathbf{U}_3,$$

где

$$\mathcal{Z}_{lkp} = \begin{cases} \hat{\mathcal{Z}}_{lkp}, & l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, \\ \tilde{\mathcal{Z}}_{l-L, k-K, p}, & l \in \overline{(L+1):2L}, k \in \overline{(K+1):2K}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

является HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  с точностью до перенумерации элементов  $\mathcal{Z}$  и соответствующей перестановки столбцов матриц  $\mathbf{U}_\sigma$ . С другой стороны, это выражение является суммой HOSVD тензоров  $\hat{\mathcal{X}}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}$ .  $\square$

**Следствие.** Таким образом, если ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах HOSVD-MSSA, то исходя из теоремы можно выделить следующие рекомендации к выбору множеств  $\hat{\mathfrak{P}}$  и  $\tilde{\mathfrak{P}}$  в алгоритме 7: если  $\sum_{p=1}^P \hat{x}_i^{(p)} \tilde{x}_j^{(p)} = 0$  для любых  $i, j \in \overline{1:N}$ , то рекомендуется выбирать множества  $\hat{\mathfrak{P}}$  и  $\tilde{\mathfrak{P}}$  непересекающимися, а иначе — равными.

*Замечание.* Как следует из определения 2.7, условия слабой разделимости в алгоритме MSSA отличаются от условий в алгоритме HOSVD-MSSA: вместо условия 2 требуется,

чтобы для любых  $k, m \in \overline{1 : L}$  выполнялось

$$\sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0.$$

Это условие является менее строгим, чем условие 2 слабой HOSVD-MSSA разделимости, однако случаи, когда эти условия выполняются не одновременно, достаточно редки.

## 8.2. Примеры разделимости рядов в алгоритме HOSVD-MSSA

Рассмотрим условия разделимости 2-мерных рядов  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  в некоторых частных случаях.

- Разделимость константных рядов от гармоник

Пусть  $\hat{x}_n^{(p)} = C_p$  а  $\tilde{x}_n^{(p)} = A_p \cos(2\pi\omega_p n + \varphi_p)$ , где  $C_p, A_p \neq 0$ ,  $\omega_p \in (0, 1/2)$ . Тогда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах HOSVD-MSSA тогда и только тогда, когда  $L\omega_p, K\omega_p$  — целые для любых  $p$ .

**Пример 8.1.** Пусть  $N = 40$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1/20$ ,  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = -1.5$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Эти ряды не будут слабо разделимы в терминах HOSVD-MSSA ни при какой длине окна, однако будут разделимы в терминах MSSA при  $L = 20$ .

*Замечание.* Изменением длины  $N$  этого ряда можно добиться существования  $L$ , дающего слабую HOSVD-MSSA-разделимость. Например, при  $N = 39$  и  $L = 20$  эти ряды будут слабо разделимы в терминах HOSVD-MSSA.

- Разделимость разночастотных гармоник

Пусть  $\hat{x}_n^{(p)} = \hat{A}_p \cos(2\pi\hat{\omega}_p n + \hat{\varphi}_p)$ ,  $\tilde{x}_n^{(p)} = \tilde{A}_p \cos(2\pi\tilde{\omega}_p n + \tilde{\varphi}_p)$ , где  $\hat{A}_p, \tilde{A}_p \neq 0$ ,  $\hat{\omega}_p, \tilde{\omega}_p \in (0, 1/2)$ ,  $\hat{\omega}_p \neq \tilde{\omega}_p$ . Тогда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах HOSVD-MSSA тогда и только тогда, когда  $L(\hat{\omega}_p + \tilde{\omega}_p)$ ,  $L(\hat{\omega}_p - \tilde{\omega}_p)$ ,  $K(\hat{\omega}_p + \tilde{\omega}_p)$  и  $K(\hat{\omega}_p - \tilde{\omega}_p)$  — целые.

## 8.3. Свойства HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Пусть  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P)$  —  $P$ -мерный временной ряд длины  $N$ ,  $\mathbf{H}_p$  — траекторные матрицы рядов  $\mathbf{X}_p$  с длиной окна  $L < N$ ,  $p \in \overline{1 : P}$ . Обозначим  $K = N - L + 1$ .

Построим траекторную матрицу этого ряда  $\mathbf{X}$ :  $\mathbf{X} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P] \in \mathbb{R}^{L \times KP}$ , её SVD имеет вид

$$\mathbf{X}_H = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T.$$

Теперь построим траекторный тензор  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{L \times K \times P}$  этого многомерного ряда с длиной окна  $L$ , как описано в определении 7.1. Его HOSVD имеет вид

$$\mathcal{X} = \mathcal{Z} \times_1 \hat{\mathbf{U}}_1 \times_2 \hat{\mathbf{U}}_2 \times_3 \hat{\mathbf{U}}_3. \quad (20)$$

**Утверждение 8.1.** *Существуют такие SVD матрицы  $\mathbf{X}_H$  и HOSVD тензора  $\mathcal{X}$ , что  $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}_1$ .*

*Доказательство.* Из свойства 3.1 известно, что в качестве  $\hat{\mathbf{U}}_1$  можно выбрать матрицу  $\hat{\mathbf{U}}$  левых сингулярных векторов из SVD 1-й матрицы развёртки  $[\mathbf{X}]_1$  тензора  $\mathcal{X}$ . В свою очередь,  $[\mathbf{X}]_1 = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P] = \mathbf{X}_H$ .  $\square$

**Следствие.** Из этого утверждения и из того, что разложения SVD и HOSVD единственны с точностью до, возможно, некоторых ортогональных преобразований матриц сингулярных векторов, следует, что пространства, порождаемые левыми сингулярными векторами матрицы  $\mathbf{X}_H$  и сингулярными векторами первого направления тензора  $\mathcal{X}$  совпадают.

*Замечание.* При вычислении HOSVD тензора используется алгоритм, который последовательно вычисляет SVD всех матриц сечений этого тензора, и получившиеся матрицы левых сингулярных векторов использует в качестве матриц сингулярных векторов соответствующего направления в представлении (20). Такой алгоритм обоснован утверждением 3.1. Таким образом, на практике совпадают не только пространства, порождаемые описанными выше сингулярными векторами, но и матрицы, составленные из этих векторов.

**Теорема 5.** *Пусть  $\mathbf{X}$  —  $P$ -мерный временной ряд длины  $N$ , тогда справедливы следующие утверждения.*

1.  *$\mathbf{X}$  имеет ранг  $d$  в терминах теории MSSA (определение 2.6) тогда и только тогда, когда для траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по любой длине окна  $L < N$  такой, что  $d \leq \min(L, K)$  выполняется*

$$\text{rank}_1(\mathcal{X}) = \text{rank}_2(\mathcal{X}) = d.$$

2. 3-ранг  $\mathcal{X}$  равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.

*Доказательство.* Исходя из утверждения 8.1, 1-ранг траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по многомерному ряду  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L$  такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , будет равен рангу  $d$  этого ряда из теории MSSA. Кроме того, для таких  $L$  ранг второго измерения этого траекторного тензора тоже будет равен  $d$ , так как  $\text{rank}_2(\mathcal{X}) = \text{rank}([\mathbf{X}]_2)$ , а матрица сечений  $[\mathbf{X}]_2$  по построению совпадает с траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$ , построенной по длине окна  $K = N - L - 1$ .

Векторы вдоль третьего измерения траекторного тензора  $\mathcal{X}$  имеют вид

$$\left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(P)}\right), \quad i \in \overline{1:N}.$$

Размерность пространства порождённого этими векторами совпадает с рангом матрицы, в которой столбцами будут являться эти векторы, а эта матрица совпадает с матрицей, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.  $\square$

**Определение 8.2** (3-ранг многомерного ряда). 3-рангом многомерного ряда будем называть 3-ранг траекторного тензора этого ряда.

*Замечание.* Определение корректно, так как по построению траекторного тензора набор 3-столбцов этого тензора не зависит от выбора длины окна  $L$ , поэтому и 3-ранг траекторного тензора не зависит от выбора длины окна.

**Пример 8.2.** Пусть двумерный временной ряд  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)})^T$  состоит из временных рядов следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m &= \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_N^{(m)}\right), \\ x_n^{(m)} &= a_m \sin(2\pi n \omega_m + \psi_m), \end{aligned}$$

где  $m \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \overline{1:N}$ ,  $a_m \neq 0$ ,  $0 < \omega_m < 1/2$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ . Обозначим за  $r$  ранг ряда  $\mathbf{X}$ , а за  $r_3$  — 3-ранг этого ряда. В таблице 11 представлены значения рангов этого ряда в терминах HOSVD-MSSA в зависимости от различных значений параметров  $\psi_m$  и  $\omega_m$ .

Таблица 11. Ранги рядов в зависимости от параметров.

Параметры	$\psi_1 = \psi_2$	$\psi_1 \neq \psi_2$	$\omega_1 \neq \omega_2$
	$\omega_1 = \omega_2$	$\omega_1 \neq \omega_2$	
$r$	2	2	4
$r_3$	1	2	2

**Утверждение 8.2.** (О симметричности относительно замены длины окна) Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  и выбрана некоторая длина окна  $L$ ,  $\mathcal{X}$  — тензорный тензор этого ряда, построенный по длине окна  $L$ , а  $\mathcal{Y}$  — по длине окна  $K = N - L + 1$ , и пусть  $R_1, R_2, R_3$  — параметры, выбранные в третьем шаге алгоритма HOSVD-MSSA, соответствующие  $\mathcal{X}$ , а  $R'_1, R'_2, R'_3$  — соответствующие  $\mathcal{Y}$ . Тогда если  $R_1 = R'_1, R_2 = R'_2, R_3 = R'_3$ , то оценки сигнала  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , построенные по  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  соответственно, совпадут.

*Доказательство.* По построению  $\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} = x_{k+l-1}^{(p)} = \mathcal{Y}_{klp}$ , где  $l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, p \in \overline{1:P}$ . Это означает, что  $[\mathbf{X}]_1 = [\mathbf{Y}]_2$  и  $[\mathbf{X}]_2 = [\mathbf{Y}]_1$ , а  $[\mathbf{X}]_3 = [\mathbf{Y}]_3$ . Пусть усечение HOSVD  $\mathcal{X}$ , описанное в третьем шаге алгоритма, имеет вид

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)},$$

тогда усечение HOSVD  $\mathcal{Y}$  будет иметь вид

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \sum_{l=1}^{R'_1} \sum_{k=1}^{R'_2} \sum_{p=1}^{R'_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(2)} \circ U_k^{(1)} \circ U_p^{(3)} = \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{klp} U_k^{(2)} \circ U_l^{(1)} \circ U_p^{(3)}.$$

Отсюда следует, что  $[\tilde{\mathbf{X}}]_1 = [\tilde{\mathbf{Y}}]_2$ ,  $[\tilde{\mathbf{X}}]_2 = [\tilde{\mathbf{Y}}]_1$  и  $[\tilde{\mathbf{X}}]_3 = [\tilde{\mathbf{Y}}]_3$ , а значит выполнено равенство  $\tilde{\mathcal{X}}_{lkp} = \tilde{\mathcal{Y}}_{klp}$  или, по другому,  $\tilde{\mathcal{X}}_{..p} = \tilde{\mathcal{Y}}_{..p}^T$ , следовательно усреднения сечений  $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$  и  $\tilde{\mathcal{Y}}_{..p}$  вдоль побочных диагоналей совпадут для всех  $p$ .  $\square$

## 9. Численные сравнения в задаче выделения сигнала

В этом разделе представлены сравнения методов SSA, MSSA, 2D-SSA [22], HOOI-SSA и HOSVD-MSSA по точности восстановления сигнала из многомерных рядов вида

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P), \\ \mathbf{X}_P &= \left( s_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, \dots, s_N^{(p)} + \varepsilon_N^{(p)} \right), \\ s_n^{(p)} &= a_p \cos(2\pi n \omega_p + \psi_p), \quad a_p \neq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\varepsilon_n^{(p)}$  — независимые случайные величины с распределением  $N(0, 25)$  (белый гауссовский шум), а  $s_n^{(p)}$  — элементы искомого сигнала. В качестве оценки точности восстановления сигнала было взято среднеквадратичное отклонение (RMSE) восстановленного сигнала от истинного его значения по 500 реализациям шума. Под применением одномерных методов (SSA и HOOI-SSA) для выделения многомерного сигнала  $\mathbf{X}$  понимается применение этих методов к каждому из рядов  $\mathbf{X}^{(p)}$  отдельно.

**Принцип выбора числа компонент, относимых к сигналу** В каждом из методов семейства SSA важным этапом является выбор числа компонент разложения траекторной матрицы или тензора ряда, по которым будет восстанавливаться сигнал. В теории SSA утверждается, что в общем случае для получения наибольшей точности восстановления сигнала рекомендуется брать число компонент, равное рангу этого сигнала в терминах конкретного метода. Ранг сигнала в терминах метода  $T$  будем обозначать  $r_T$ , например:  $r_{\text{SSA}}$  — ранг сигнала в терминах SSA,  $r_{\text{MSSA}}$  — в терминах MSSA и т.д.

Ранги сигнала (21) в терминах методов SSA и MSSA приведены в примерах 2.1 и 2.2 соответственно.

Тензорные алгоритмы выделения сигнала сводятся к приближению траекторного тензора некоторым тензором  $(R_1, R_2, R_3)$ -ранга. Теоремы 3 и 5 позволяют свести задачу выбора  $R_1, R_2, R_3$  к нахождению  $r_{\text{SSA}}$  в одномерном случае и  $r_{\text{MSSA}}$  и  $r_3$  в многомерном, где  $r_3$  — 3-ранг сигнала. Тогда рекомендуемым выбором  $(R_1, R_2, R_3)$  в алгоритме HO-SSA будет  $R_1 = R_2 = R_3 = r_{\text{SSA}}$ , а в алгоритме HOSVD-MSSA —  $R_1 = R_2 = r_{\text{MSSA}}$ ,  $R_3 = r_3$ .

Элементы многомерного сигнала вида (21) можно представить в виде суммы

$$s_n^{(p)} = \sum_{m=1}^d A_m(p, n),$$

$$A_m(p, n) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi p\omega'_m) \\ \sin(2\pi p\omega'_m) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi n\omega''_m) \\ \sin(2\pi n\omega''_m) \end{pmatrix},$$

где  $(\omega'_m, \omega''_m) \neq (\omega'_j, \omega''_j)$  для  $m \neq j$  и  $\omega'_m, \omega''_m \in (0, 1/2)$ . В статье [22] утверждается, что тогда ранг данного многомерного сигнала в терминах 2D-SSA равен сумме

$$r_{\text{2D-SSA}} = \sum_{m=1}^d \nu_m,$$

где

$$\nu_m = 2 \text{rank} \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m & d_m \\ d_m & -c_m & -b_m & a_m \end{pmatrix}.$$

### 9.1. Результаты численных сравнений

Рассмотрим некоторые варианты сигнала вида (21). В таблицах 12, 14 и 16 приведены значения рангов сигналов в каждом из методов в зависимости от значения параметров  $\omega_p, \psi_p$  для случаев  $P = 2, P = 5$  и  $P = 9$  соответственно. Для одномерных методов (SSA и HOOI-SSA) указаны ранги каждого одномерного сигнала  $S_P$ .

В таблицах 13, 15 и 17 приведены минимальные значения среднеквадратичного отклонения восстановленного сигнала от истинного для каждого метода и при различных значениях параметров для случаев  $P = 2, P = 5$  и  $P = 9$  соответственно. Жирным шрифтом выделены минимальные по методам значения RMSE оценки сигнала для фиксированного набора параметров. Отличие этих минимальных значений от остальных значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

На графиках 1, 2 и 3 приведены зависимости точности восстановления сигнала от выбора параметра  $L$  для методов SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA, и от выбора параметров  $I, L$  для метода HOOI-SSA для случаев  $P = 2, P = 5$  и  $P = 9$  соответственно.

*Замечание.* В методе 2D-SSA параметр длины окна двумерный, то есть  $L_{xy} = (L_x, L_y)$ . Будем полагать  $L_y = [(P + 1)/2]$  и  $L_x = L$ , где  $[t]$  обозначает взятие целой части числа  $t$  с округлением вниз.

**Выводы из численных сравнений** Таким образом, метод HOSVD-MSSA выделил сигнал точнее, чем метод MSSA во всех рассмотренных примерах, и оказался точнее метода 2D-SSA в случае малого числа рядов и в случае различающихся амплитуд у

сигналов, причём последнее преимущество увеличилось с увеличением размерности ряда. В случаях равных амплитуд сигналов метод 2D-SSA оказался точнее остальных методов, что соответствует малому 2D-SSA-рангу таких сигналов.

**Трудоёмкости алгоритмов** Так как шаг разложения является самым трудоёмким шагом в алгоритмах HOSVD-SSA и HOSVD-MSSA, то для оценки трудоёмкости алгоритма достаточно оценить трудоёмкость HOSVD траекторного тензора. Оценим трудоёмкость алгоритма HOSVD-MSSA, трудоёмкость HOSVD-SSA получается аналогично подстановкой других обозначений размерностей.

Из утверждения 3.1 следует, что вычисление HOSVD траекторного тензора размерности  $L \times K \times P$  сводится к вычислению SVD на трёх матрицах размерностей  $L \times KP$ ,  $K \times LP$ ,  $P \times LK$ . Вычисление SVD матрицы размерности  $m \times n$  имеет асимптотическую трудоёмкость, равную  $O(\min(mn^2, m^2n))$ . Таким образом, асимптотическая сложность HOSVD траекторного тензора, а следовательно и всего алгоритма, имеет вид

$$O(LKP(\min(L, KP) + \min(K, LP) + \min(P, LK))). \quad (22)$$

Если требуется вычислить только усечение HOSVD с  $n$ -рангами  $(r_1, r_2, r_3)$ , то так как трудоёмкость вычисления первых  $r$  компонент SVD матрицы  $m \times n$  при  $r \ll \min(m, n)$  равна  $O(rmn)$ , трудоёмкость HOSVD можно уменьшить до порядка

$$O(LKP(r_1 + r_2 + r_3)). \quad (23)$$

Самым трудоёмким шагом в алгоритме HOOI-SSA является применение к траекторному тензору алгоритма HOOI. При вычислении алгоритмом HOOI приближения тензора размеров  $I \times L \times J$  тензором  $n$ -рангов  $(r_1, r_2, r_3)$  каждая итерация имеет асимптотическую сложность

$$O(r_1 r_2 r_3 (I + L + J)), \quad (24)$$

а согласно свойству 3.8 можно считать, что скорость сходимости алгоритма линейная.



Таблица 12. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: ранги сигнала вида (21),  $P = 2$ ,  $a_1 = 30$ ,  $a_2 = 20$ .

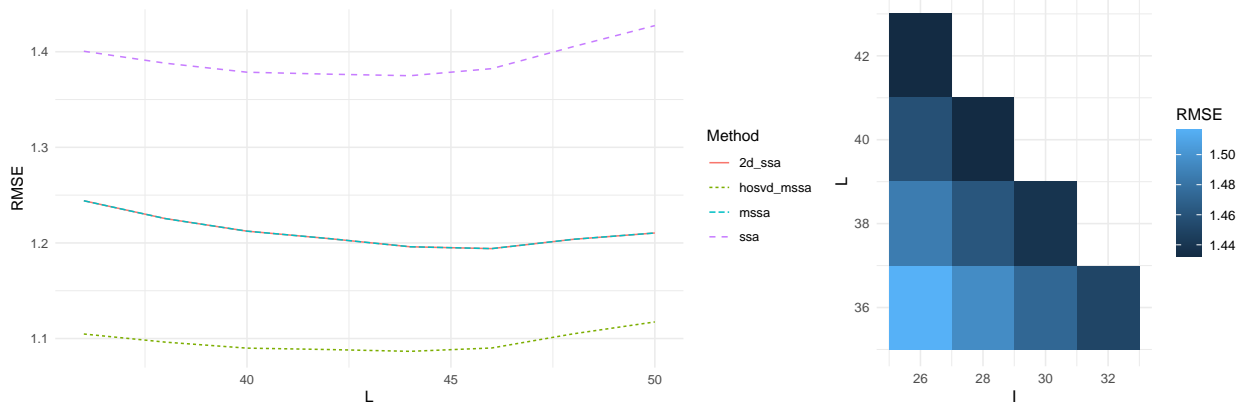
Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = \psi_2 = 0$	2	2	1	2
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	2	2	2	2
$\omega_1 = \frac{1}{12}, \omega_2 = \frac{1}{8}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	2	4	2	4

Таблица 13. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: минимальные RMSE оценки сигнала вида (21),  $P = 2$ ,  $a_1 = 30$ ,  $a_2 = 20$ .

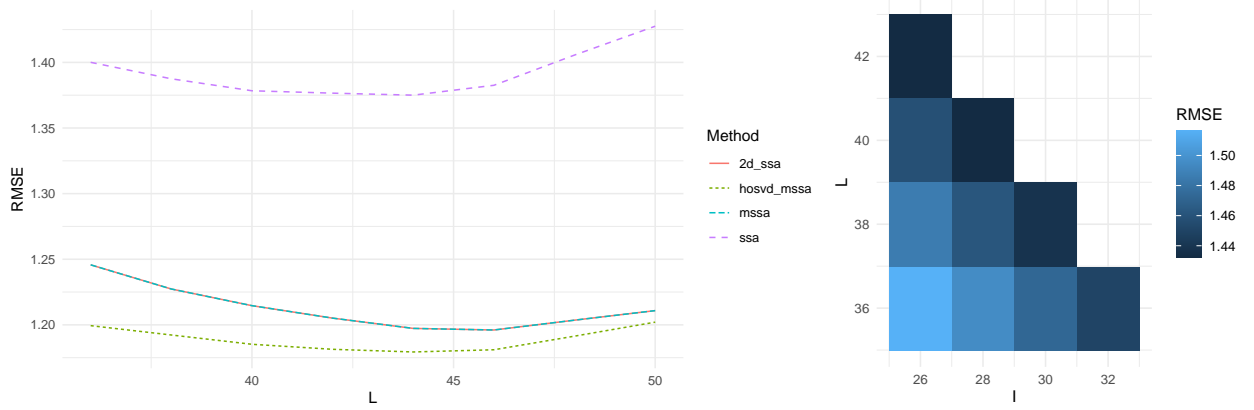
Параметры	SSA	HOOI-SSA	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = \psi_2 = 0$	1.37	1.43	1.19	<b>1.09</b>	1.19
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	1.38	1.43	1.20	<b>1.18</b>	1.20
$\omega_1 = \frac{1}{12}, \omega_2 = \frac{1}{8}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	<b>1.39</b>	1.45	1.69	1.66	1.69

Таблица 14. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: ранги сигнала вида (21),  $P = 5$ .

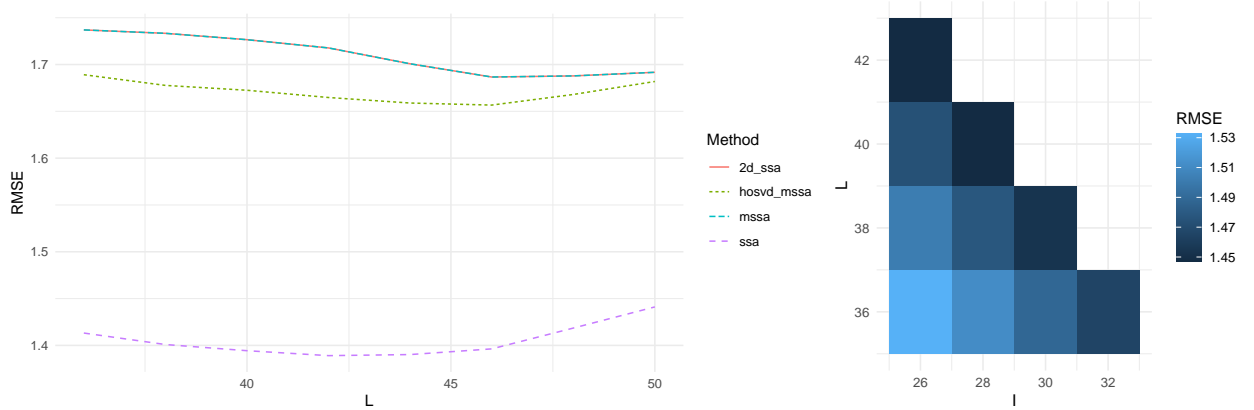
Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	2
$a_1 = a_4 = 30$ $a_2 = a_5 = 20, a_3 = 25$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	6
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12},$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$	2	2	2	2
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/3$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{12}$ $\omega_4 = \omega_5 = \frac{1}{8}$	2	4	4	10



(a)  $\omega_1 = \omega_2 = 1/12$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 0$



(b)  $\omega_1 = \omega_2 = 1/12$ ,  $\psi_1 = 0, \psi_2 = \pi/4$



(c)  $\omega_1 = 1/12, \omega_2 = 1/8, \psi_1 = 0, \psi_2 = \pi/4$

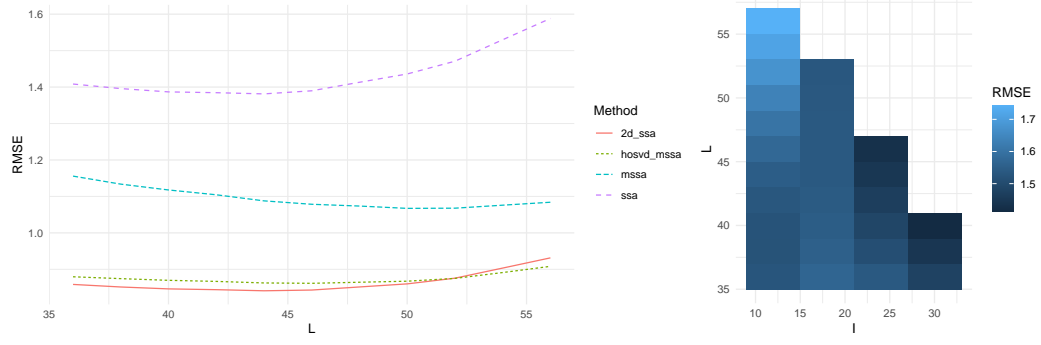
Рис. 1. Зависимости точности выделения сигнала от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD-MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI-SSA (справа),  $P = 2$ ,  $a_1 = 30$ ,  $a_2 = 20$ .

Таблица 15. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: минимальные RMSE оценки сигнала вида (21),  $P = 5$ .

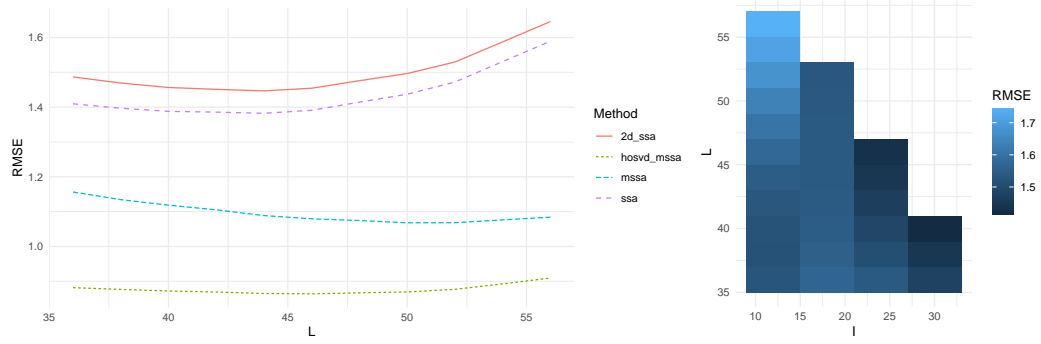
Параметры	SSA	HOOI-SSA	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.34	1.40	0.95	0.75	<b>0.73</b>
$a_1 = a_4 = 30$ $a_2 = a_5 = 20, a_3 = 25$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.41	1.07	<b>0.86</b>	1.45
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12}$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$	1.38	1.41	1.07	1.05	<b>0.84</b>
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/3$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{12}$ $\omega_4 = \omega_5 = \frac{1}{8}$	<b>1.38</b>	1.41	1.50	1.49	1.78

Таблица 16. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: ранги сигнала вида (21),  $P = 9$ .

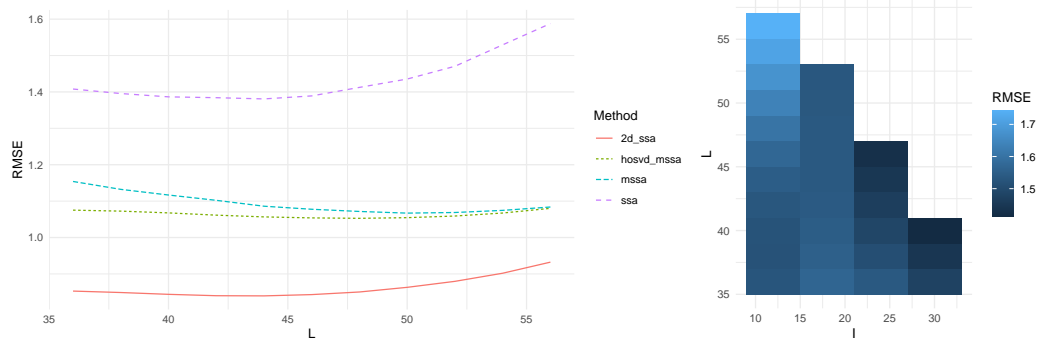
Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	2
$a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p-1), 1 \leq p \leq 4$ $a_5 = 22, \omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	10
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12},$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/5$	2	2	2	2
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/5$ $\omega_p = \frac{1}{12}, 1 \leq p \leq 7$ $\omega_8 = \omega_9 = \frac{1}{8}$	2	4	4	10



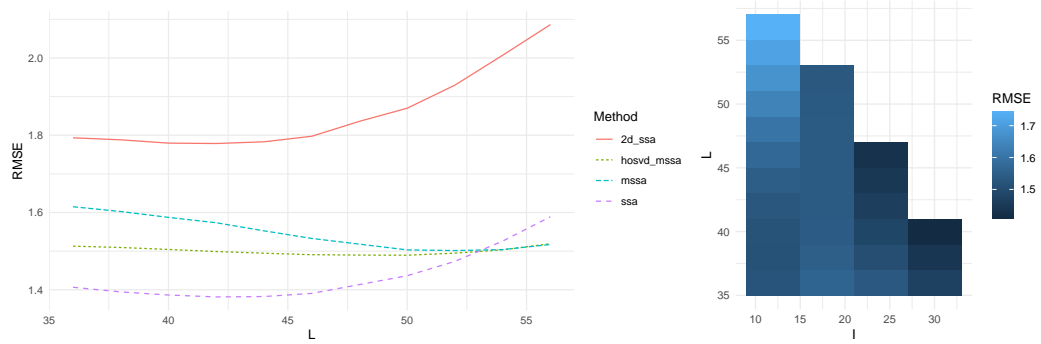
$$(a) a_p = 30, \omega_p = 1/12, \psi_p = 0$$



$$(b) a_1 = a_4 = 30, a_2 = a_5 = 20, a_3 = 25, \omega_p = 1/12, \psi_p = 0$$

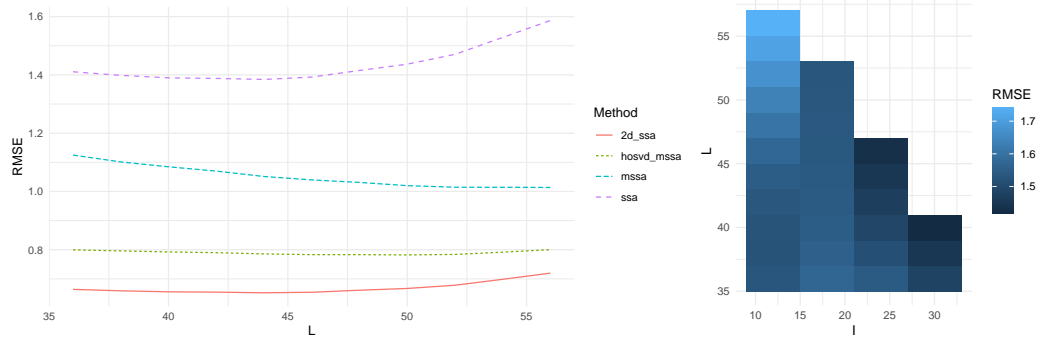


$$(c) a_p = 30, \omega_p = 1/12, \psi_p = 2(p-1)\pi/3$$

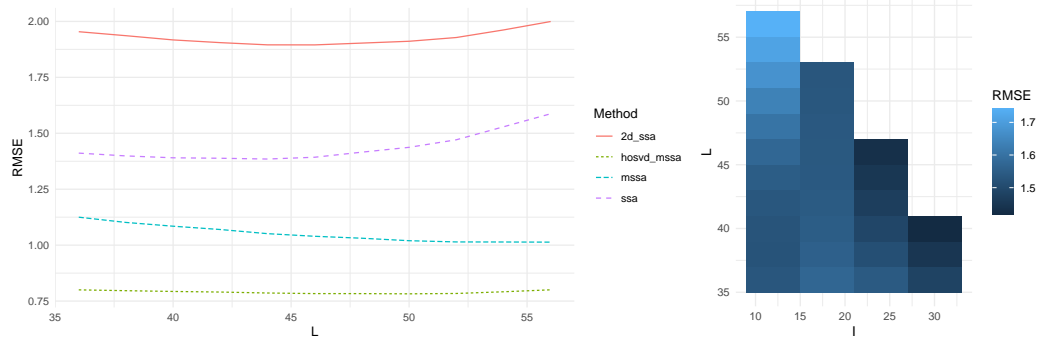


$$(d) a_p = 30, \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/12, \omega_4 = \omega_5 = 1/8, \psi_p = 2(p-1)\pi/3$$

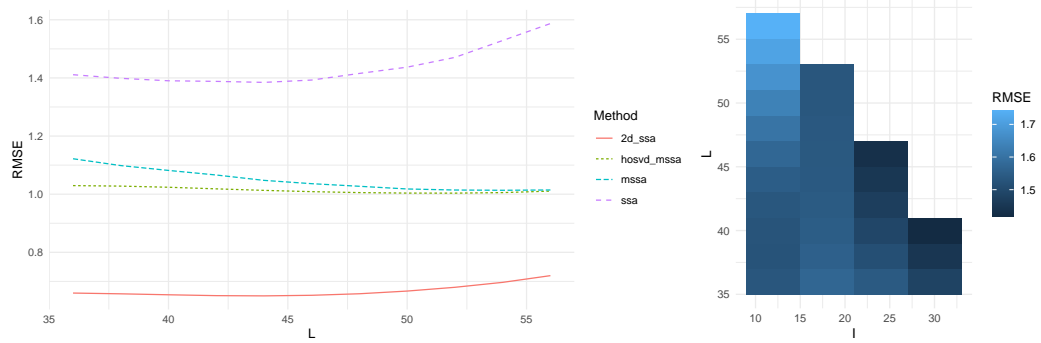
Рис. 2. Зависимости точности выделения сигнала от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD-MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI-SSA (справа),  $P = 5$ .



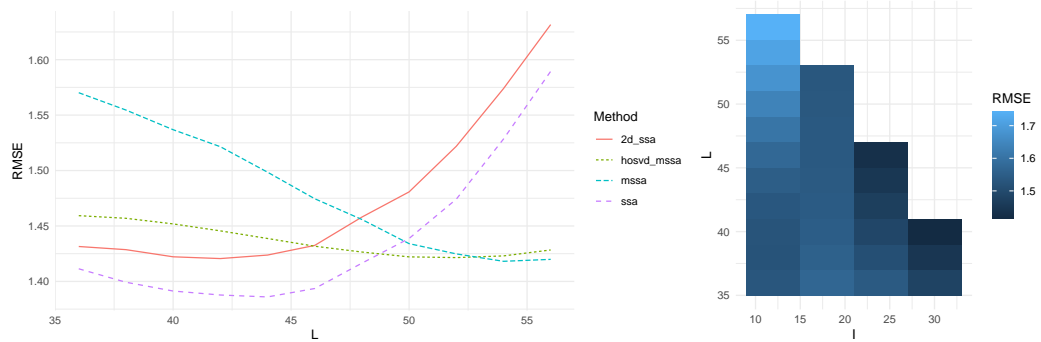
$$(a) a_p = 30, \omega_p = 1/12, \psi_p = 0$$



$$(b) a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p-1), 1 \leq p \leq 4, a_5 = 22, \omega_p = 1/12, \psi_p = 0$$



$$(c) a_p = 30, \omega_p = 1/12, \psi_p = 2(p-1)\pi/5$$



$$(d) a_p = 30, \omega_p = 1/12, 1 \leq p \leq 7, \omega_8 = \omega_9 = 1/8, \psi_p = 2(p-1)\pi/5$$

Рис. 3. Зависимости точности выделения сигнала от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD-MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI-SSA (справа),  $P = 9$ .

Таблица 17. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: минимальные RMSE оценки сигнала вида (21),  $P = 9$ .

Параметры	SSA	HOOI-SSA	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.42	1.01	0.78	<b>0.65</b>
$a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p - 1)$ $1 \leq p \leq 4, a_5 = 22$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.42	1.01	<b>0.78</b>	1.90
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12}$ $\psi_p = 2(p - 1)\pi/5$	1.38	1.42	1.01	1.00	<b>0.65</b>
$a_p = 30, \psi_p = 2(p - 1)\pi/5$ $\omega_p = \frac{1}{12}, 1 \leq p \leq 7$ $\omega_8 = \omega_9 = \frac{1}{8}$	<b>1.39</b>	1.42	1.42	1.42	1.42

## 10. Численные сравнения в задаче разделения компонент

Рассматриваются временные ряды  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P)$ ,  $\mathbf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)}\right)^T$ , вида

$$x_n^{(p)} = \hat{s}_n^{(p)} + \tilde{s}_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)},$$

где  $\varepsilon_n^{(p)}$  — белый гауссовский шум со стандартным отклонением  $\sigma = 0.1$ . Ниже приведены рассматриваемые варианты сигналов  $\hat{s}_n^{(p)}$ ,  $\tilde{s}_n^{(p)}$ .

1. **Равные по каналам сигналы:**  $N = 44, P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2 \cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = \cos(2\pi n/3). \quad (25)$$

2. **Сигналы по каналам отличаются амплитудой:**  $N = 44, P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)} \cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3), \quad (26)$$

$$c_1 = (-0.63, 0.18, -0.84, 1.60, 0.33, -0.82, 0.49, 0.74, 0.58, -0.31, 1.51, 0.39)$$

$$c_2 = (-0.62, -2.21, 1.12, -0.04, -0.02, 0.94, 0.82, 0.59, 0.92, 0.78, 0.07, -1.99).$$

Амплитуды  $c_j^{(p)}$  взяты случайным образом из распределения  $N(0, 1)$  и фиксированы для каждой реализации шума и для всех дальнейших примеров.

3. **Фазы сигналов меняются линейно по номеру канала:**  $N = 44$ ,  $P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)} \cos(2\pi n/5 + p\pi/6), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3 + p\pi/9). \quad (27)$$

4. **Произвольные фазы сигналов:**  $N = 44$ ,  $P = 12$ ,

$$\begin{aligned} \hat{s}_n^{(p)} &= 2c_1^{(p)} \cos(2\pi n/5 + \varphi_1^{(p)}), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3 + \varphi_2^{(p)}), \\ \varphi_1 &= (4.60, 3.00, 2.75, 0.44, 1.99, 4.16, 5.74, 2.88, 4.09, 3.01, 0.53, 2.13), \\ \varphi_2 &= (4.35, 5.41, 1.54, 0.62, 3.26, 2.56, 1.84, 2.09, 1.62, 4.81, 5.50, 5.27). \end{aligned} \quad (28)$$

Фазы  $\varphi_j^{(p)}$  взяты случайным образом из распределения  $U(0, 2\pi)$  и фиксированы для каждой реализации шума.

5. **Разделимость константы от гармоник:**  $N = 44$ ,  $P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 3c_1^{(p)}, \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3). \quad (29)$$

6. **Разные по каналам частоты:**  $N = 59$ ,  $P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2 \cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = \begin{cases} \cos(2\pi n/3), & 1 \leq p \leq 10, \\ 0.4 \cos(2\pi n/6), & 11 \leq p \leq 12. \end{cases} \quad (30)$$

7. **Ортогональность пространств третьих направлений траекторных тензоров:**  $N = 29$ ,  $P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2 \cos(2\pi n/5) \cos(2\pi p/3), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = 0.5 \cos(2\pi n/3) \cos(2\pi p/6). \quad (31)$$

Сравнивались методы MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA по точности разделения компонент сигнала. В качестве оценки точности разделения компонент сигнала было взято RMSE каждой восстановленной компоненты сигнала от истинного её значения по 1000 реализациям шума, причём сравнения разных методов производилось на одних реализациях шума при выборе оптимальных для каждого метода параметров длины окна  $L$ . Оптимальность длины окна проверялась эмпирически.

**Принцип соотношения компонент сингулярного разложения с компонентами сигнала** Решение о том, к какой компоненте сигнала относить то или иное слагаемое

сингулярного разложения траекторной матрицы или тензора, принимается из вида сингулярных векторов, образующих это слагаемое. А именно: сингулярный вектор должен иметь такой же вид, как и компонента сигнала. Например, если сигнал является суммой двух гармоник с периодами 5 и 3, то в случае MSSA и 2D-SSA к первой компоненте имеет смысл относить те слагаемые, левые сингулярные векторы которых являются гармониками с периодом 5, а ко второй — с периодом 3. В случае HOSVD-MSSA к первой компоненте имеет смысл относить те слагаемые, сингулярные векторы по первому и второму направлению которых являются гармониками с периодом 5, а ко второй — с периодом 3.

### 10.1. Результаты численных сравнений

В таблице 18 представлены индексы сингулярных векторов, относимых к компонентам сигнала: в каждой строке индексы над горизонтальной чертой отвечают компоненте  $\hat{s}_n^{(p)}$ , под горизонтальной чертой — компоненте  $\tilde{s}_n^{(p)}$ . В столбце  $\mathfrak{P}_i$  выписаны соответствующие множества из алгоритма 7, принцип их выбора указан в следствии к теореме 4.

*Замечание.* Максимальные значения индексов для каждого примера совпадает рангом соответствующего сигнала в терминах каждого из методов.

Сигнал  $\tilde{s}_n^{(p)}$  в уравнении (30) представляется в виде суммы двух сигналов

$$\begin{aligned}\tilde{s}_n^{(p)} &= \tilde{r}_n^{(p)} + \tilde{q}_n^{(p)}, \\ \tilde{r}_n^{(p)} &= \begin{cases} \cos(2\pi n/3), & 1 \leq p \leq 10, \\ 0, & 11 \leq p \leq 12, \end{cases} \\ \tilde{q}_n^{(p)} &= \begin{cases} 0, & 1 \leq p \leq 10, \\ 0.4 \cos(2\pi n/6), & 11 \leq p \leq 12, \end{cases}\end{aligned}$$

поэтому считается, что сигнал состоит из трёх компонент:  $\hat{s}_n^{(p)}$ ,  $\tilde{r}_n^{(p)}$  и  $\tilde{q}_n^{(p)}$ . Из-за этого в таблице 18 в строке, отвечающей сигналу (30) выписаны три набора индексов: первый соответствует  $\hat{s}_n^{(p)}$ , второй —  $\tilde{r}_n^{(p)}$ , третий —  $\tilde{q}_n^{(p)}$ .

По аналогии, в таблице 19 представлены минимальные значения RMSE восстановленных компонент сигналов. Жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения RMSE для данного сигнала. Отличие выделенных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .



**Выводы из численных сравнений** Таким образом, метод HOSVD-MSSA разделяет компоненты сигнала не менее точно, чем метод MSSA во всех рассмотренных примерах, причём его точность выше в случае, когда у сигналов не меняются фазы при изменении номера сигнала. Метод 2D-SSA оказался точнее метода HOSVD-MSSA только в специфическом случае равных амплитуд сигнала, что соответствует малому 2D-SSA-рангу такого сигнала.

Таблица 18. Сравнение MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: индексы компонент сигналов.

Вид сигнала	(HOSVD) MSSA	$\mathfrak{P}_i$	2D-SSA
(25)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{1, 2}{1, 2}$	$\frac{1, 2}{3, 4}$
(26)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{1, 2}{1, 2}$	$\frac{\overline{1 : 8}, 13, 14, 19, 20}{\overline{9 : 12}, \overline{15 : 18}, \overline{21 : 24}}$
(27)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{\overline{1 : 4}}{\overline{1 : 4}}$	$\frac{\overline{1 : 8}, 13, 14, 19, 20}{\overline{9 : 12}, \overline{15 : 18}, \overline{21 : 24}}$
(28)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{\overline{1 : 4}}{\overline{1 : 4}}$	$\frac{\overline{1 : 6}, \overline{9 : 12}, 17, 18}{7, 8, \overline{13 : 16}, \overline{19 : 24}}$
(29)	$\frac{1}{2, 3}$	$\frac{1, 2}{1, 2}$	$\frac{\overline{1 : 5}, 12}{\overline{6 : 11}, \overline{13 : 18}}$
(30)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{\overline{1 : 3}}{\overline{1 : 3}}$	$\frac{1, 2}{\overline{3 : 6}, 9, 10}$
	$\frac{5, 6}{5, 6}$	$\frac{\overline{1 : 3}}{\overline{1 : 3}}$	$\frac{7, 8, 11, 12}{7, 8, 11, 12}$
(31)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\overline{1 : 4}}{\overline{5 : 8}}$

## 10.2. Смещение и дисперсия в случае отсутствия HOSVD-MSSA разделимости

В случае отсутствия шума, при длине окна, когда в MSSA есть слабая разделимость, а в HOSVD-MSSA ее нет, очевидно, MSSA будет точнее разделять компоненты, так как его ошибка будет равна нулю. Если для HOSVD-MSSA не существует длины окна, дающей точную разделимость, то, очевидно, MSSA при оптимальной длине окна будет лучше, чем HOSVD-MSSA при своей оптимальной длине окна.

Таблица 19. Сравнение MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: минимальные RMSE оценок компонент сигналов.

Вид сигнала	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
(25)	0.026	0.019	<b>0.014</b>
	0.025	0.016	<b>0.014</b>
(26)	0.029	<b>0.019</b>	0.086
	0.029	<b>0.019</b>	0.083
(27)	<b>0.026</b>	<b>0.025</b>	0.117
	<b>0.025</b>	<b>0.025</b>	0.114
(28)	<b>0.026</b>	<b>0.025</b>	0.034
	<b>0.025</b>	<b>0.025</b>	0.033
(29)	<b>0.017</b>	<b>0.017</b>	0.023
	0.025	<b>0.019</b>	0.033
(30)	0.024	0.018	<b>0.012</b>
	0.024	<b>0.018</b>	0.031
	0.024	<b>0.014</b>	0.026
(31)	0.031	<b>0.023</b>	0.025
	0.030	<b>0.022</b>	0.024

Взглянем на соотношение ошибок с точки зрения разложения средне-квадратичного отклонения в сумму дисперсии и квадрата смещения:  $\text{RMSE}^2 = \text{Var} + \text{bias}^2$ .

Сделаем следующее предположение о поведении слагаемых в зависимости от дисперсии шума  $\sigma^2$ , подтверждаемое на практике: при не слишком большом уровне шума, пока одна из компонент сигнала не начинает смешиваться с шумом, верны следующие соотношения:

$$\text{Var} \approx C\sigma^2, \quad \text{bias} \approx \text{const}. \quad (32)$$

Покажем, что за счет того, что дисперсия оценки, полученной методом HOSVD-MSSA меньше дисперсии оценки, полученной методом MSSA, начиная с некоторого уровня шума, HOSVD-MSSA начинает точнее оценивать компоненты сигнала, даже если в отсутствии шума этот метод был менее точным. Заодно проверим выполнение соотношений (32). Заметим, что  $\text{bias}$  совпадает с RMSE в отсутствии шума, так как в этом случае дисперсия нулевая.

Рассмотрим случай 2-мерного временного ряда длины  $N$ , который имеет вид

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{S}} + \mathbf{E},$$

где  $\hat{s}_n^{(1)} = 3$ ,  $\hat{s}_n^{(2)} = -1.5$ ,  $\tilde{s}_n^{(1)} = \cos(2\pi n/20)$  и  $\tilde{s}_n^{(2)} = 2 \cos(2\pi n/20)$ , а  $\varepsilon_n^{(p)}$  — независимые случайные величины с распределением  $N(0, \sigma^2)$ . Согласно примеру 8.1 в этом случае сигналы  $\tilde{\mathbf{S}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$  являются разделимыми в смысле MSSA при  $L = 20$ , и не являются разделимыми в смысле HOSVD-MSSA.

Рассмотрим зависимость среднеквадратичного отклонения оценки сигнала каждым из методов от выбора длины окна  $L$  при различных вариантах шума

1. отсутствие шума:  $\sigma_0 = 0$ ,
2. малый шум:  $\sigma_1 = 0.5$ ,
3. большой шум:  $\sigma_2 = 1$ .

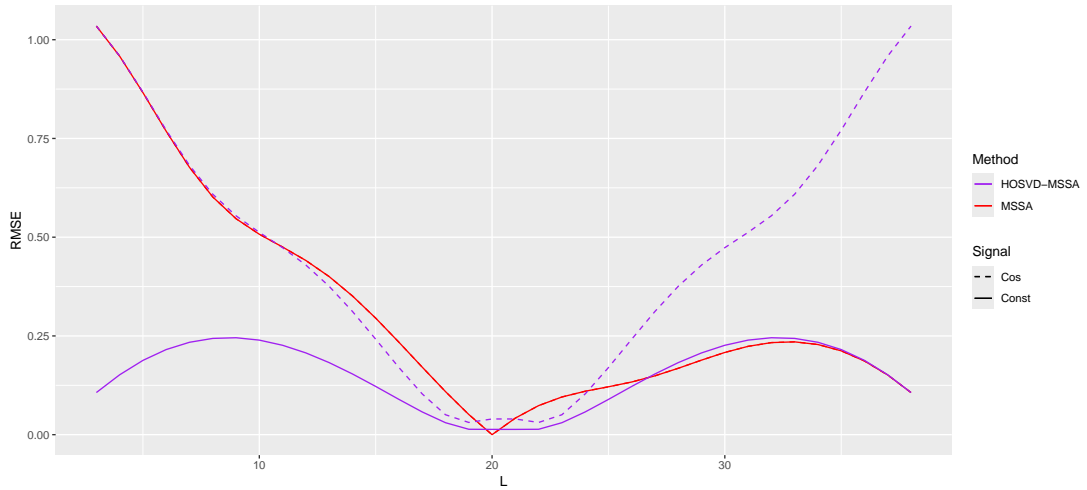


Рис. 4. Зависимость RMSE оценки сигнала от длины окна при отсутствующем шуме

На рисунках 4, 5 и 6 изображены графики зависимости RMSE оценок разделённых компонент сигнала для методов MSSA и HOSVD-MSSA от параметра длины окна  $L$ . Для каждой длины окна RMSE было посчитано по 500 реализациям шума, причём для различных длин окна и для различных методов восстановления при одной длине окна реализации шума совпадали. Индексы компонент разложения, относимых к той или иной компоненте сигнала, были взяты равными тем, что были описаны в таблице 18 для сигнала (29).

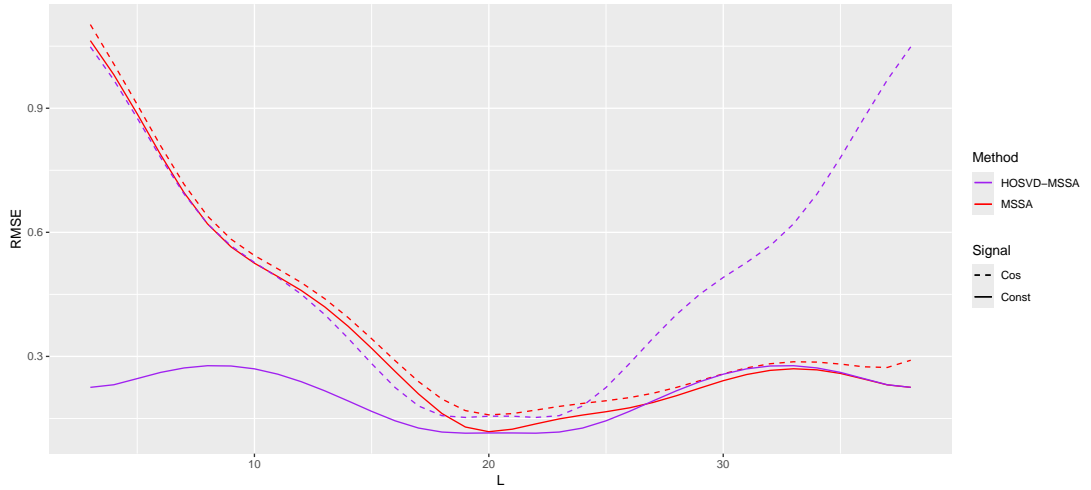


Рис. 5. Зависимость RMSE оценки сигнала от длины окна при малом шуме

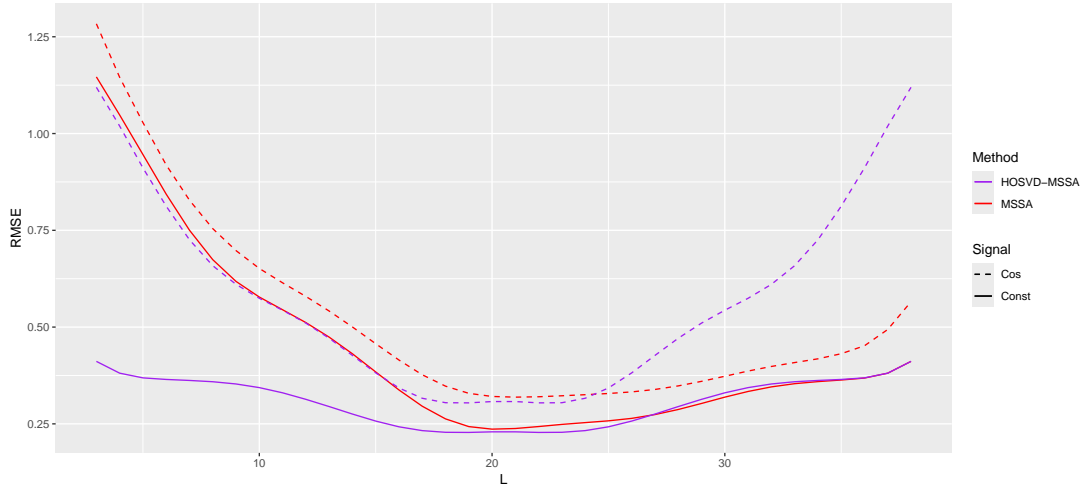


Рис. 6. Зависимость RMSE оценки сигнала от длины окна при большом шуме

Из полученных графиков видно, что при отсутствии шума метод MSSA с длиной окна  $L = 20$  точно разделяет компоненты сигнала, а методом HOSVD-MSSA разделить компоненты сигнала без ошибки нельзя ни при какой длине окна, что соответствует наличию и отсутствию слабой разделимости для каждого из методов соответственно. Как было сказано выше, значение RMSE в случае отсутствия шума является смещением bias оценки метода при данном  $L$ .

При добавлении малого шума преимущество MSSA пропадает, и при большинстве значений параметра  $L$  метод HOSVD-MSSA разделяет компоненты точнее, чем метод MSSA, однако оптимальные значения RMSE для обоих методов довольно близки. Значение  $\widehat{\text{Var}}_1 = \text{RMSE}^2 - \text{bias}^2$  является оценкой дисперсии оценки компоненты сигнала при малом шуме. При добавлении большего шума метод HOSVD-MSSA начинает де-

монстрировать преимущество с точки зрения точности разделения компонент сигнала для большинства значений длин окна  $L$ .

Продemonстрируем выполнение предположения (32). Пусть  $C = \widehat{\text{Var}}_1/\sigma_1$ , тогда  $\widehat{\text{Var}}_2 = \widehat{\text{Var}}_1\sigma_2/\sigma_1$  — оценка дисперсии оценки компоненты, соответствующая росту дисперсии шума от  $\sigma_1$  к  $\sigma_2$  в предположении (32). Тогда, как показано на графике 7, выполняется приближительное равенство

$$\sqrt{\text{bias}^2 + \widehat{\text{Var}}_2} \approx \text{RMSE},$$

где RMSE соответствует шуму с  $\sigma = 1$ .

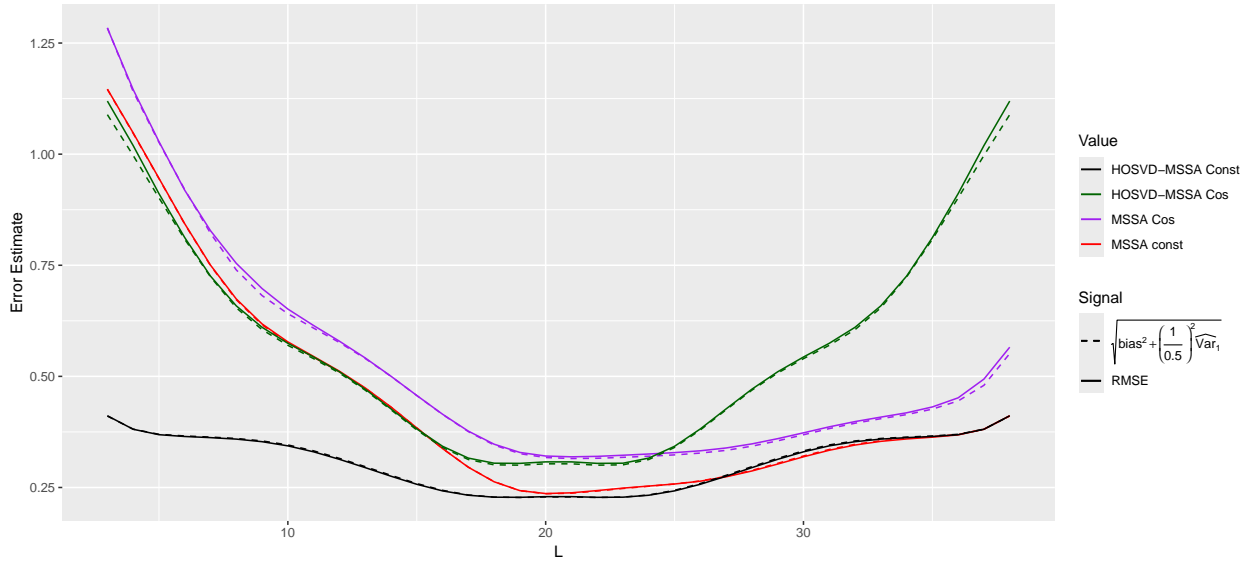


Рис. 7. Сравнение значений RMSE при большой дисперсии шума и аппроксимации  $\sqrt{\text{bias}^2 + \widehat{\text{Var}}_2}$  в зависимости от длины окна

Таким образом, несмотря на отсутствие слабой разделимости данного сигнала в терминах HOSVD-MSSA, тензорная модификация оказывается точнее (хотя и незначительно) базового метода MSSA при достаточно большой дисперсии шума. Пример показывает важность выбора длины окна, соответствующей наилучшей разделимости и уменьшающей смещение.

## 11. Альтернативные тензорные разложения

Кроме разложения Таккера, частным случаем которого является HOSVD, существуют и другие тензорные разложения, в некотором смысле расширяющие SVD. Например, ранговое (каноническое) разложение тензора. Суть этого разложения заклю-

чается в представлении тензора  $\mathcal{A}$  в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, где  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ . Однако нахождение этого ранга в общем случае является NP-трудной задачей [23].

CP (Canonical Polyadic или CANDECOMP-PARAFAC) approximation [6, 7]— итерационный метод приближения тензора суммой заданного пользователем числа тензоров ранга 1. То есть по параметру  $K$  этот метод вычисляет наилучшее приближение заданного тензора суммой  $K$  тензоров ранга 1. Заметим, что из-за отсутствия каких-либо требований к ортогональности в определении рангового разложения тензора, многие свойства, верные в теории SSA, могут потерять справедливость при использовании этого разложения.

Рассмотрим ряды  $\tilde{x}_n = 3$ ,  $\hat{x}_n = \sin(2\pi n/3)$ ,  $n \in \overline{0:15}$ . Построим по этим рядам траекторные тензоры с параметрами  $I = L = 6$ . Тогда ранг траекторного тензора  $\tilde{\mathcal{X}}$ , соответствующего константному ряду, равен 1, так как его можно представить в виде

$$\tilde{\mathcal{X}} = 3X \circ X \circ X,$$

где  $X = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . Ранг траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ , соответствующего синусу, равен 3, так как его можно представить в виде

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k X_k \circ Y_k \circ Z_k,$$

где  $\lambda_1 \approx 160.56$ ,  $\lambda_2 \approx 65.69$ ,  $\lambda_3 \approx 123.76$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3] &\approx \begin{pmatrix} -0.16 & 0.25 & 0.06 \\ 0.25 & -0.06 & -0.25 \\ -0.09 & -0.19 & 0.19 \\ -0.16 & 0.25 & 0.06 \\ 0.25 & -0.06 & -0.25 \\ -0.09 & -0.19 & 0.19 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3] &\approx \begin{pmatrix} -0.25 & -0.15 & 0.21 \\ 0.18 & -0.10 & -0.25 \\ 0.07 & 0.25 & 0.04 \\ -0.25 & -0.15 & 0.21 \\ 0.18 & -0.10 & -0.25 \\ 0.07 & 0.25 & 0.04 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, Z_3] &\approx \begin{pmatrix} -0.10 & -0.25 & -0.01 \\ 0.25 & 0.12 & -0.24 \\ -0.15 & 0.13 & 0.25 \\ -0.10 & -0.25 & -0.01 \\ 0.25 & 0.12 & -0.24 \\ -0.15 & 0.13 & 0.25 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

притом точных приближений двумя тензорами ранга 1 нет. Траекторный тензор ряда  $x_n = \tilde{x}_n + \hat{x}_n$ , построенный с параметрами  $I = L = 6$  представим в виде суммы

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k X_k \circ Y_k \circ Z_k,$$

где  $\lambda_1 \approx 320.17$ ,  $\lambda_2 \approx 120.97$ ,  $\lambda_3 \approx 209.38$ ,  $\lambda_4 \approx 648$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3, X_4] &= \begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.17 \\ 0.11 & 0.25 & -0.04 & -0.17 \\ 0.14 & 0.00 & -0.21 & -0.17 \\ -0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.17 \\ 0.11 & 0.25 & -0.04 & -0.17 \\ 0.14 & 0.00 & -0.21 & -0.17 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] &= \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 & -0.25 & -0.17 \\ -0.08 & 0.21 & -0.00 & -0.17 \\ -0.17 & 0.04 & 0.25 & -0.17 \\ 0.25 & -0.25 & -0.25 & -0.17 \\ -0.08 & 0.21 & -0.00 & -0.17 \\ -0.17 & 0.04 & 0.25 & -0.17 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] &= \begin{pmatrix} -0.00 & -0.14 & -0.08 & 0.17 \\ -0.25 & -0.11 & 0.25 & 0.17 \\ 0.25 & 0.25 & -0.17 & 0.17 \\ -0.00 & -0.14 & -0.08 & 0.17 \\ -0.25 & -0.11 & 0.25 & 0.17 \\ 0.25 & 0.25 & -0.17 & 0.17 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

притом точных приближений суммой трёх тензоров ранга 1 нет.

По структуре векторов видно, что четвёртая компонента разложения соответствует константному ряду, а остальные три имеют период равный 3. Таким образом, несмотря на отсутствие ограничений на ортогональность в определении ранговых разложений тензора, наблюдается разделимость константного и периодического рядов при наличии условий слабой разделимости в терминах SSA и отсутствия шума. Однако понятия ранга в терминах SSA и в терминах CP различаются, так как в терминах SSA синус с периодом 3 имеет ранг 2, а в терминах рангового разложения, как показано выше, такой синус имеет ранг 3.

*Замечание.* Траекторный тензор, соответствующий синусоидальному ряду, будет иметь ранг 2, если рассматривать его над полем  $\mathbb{C}$ , так как синус является суммой комплекс-



ных экспонент, а траекторный тензор экспоненциального ряда имеет ранг 1. Утверждения про зависимость ранга тензора от поля, над которым он рассматривается, можно найти в работе [14].

Другим недостатком СР является то, что это итерационный метод со случайным начальным приближением, в связи с чем на одних и тех же данных он может выдавать разные результаты, в том числе может как сойтись, так и нет.

Возможно можно добиться лучших результатов, используя СР или его модификации, если строить тензор по ряду некоторым другим образом и подбирать другие параметры разложения. Этот вопрос предлагается изучить в будущих работах.

## 12. Заключение

В работе было показано, что по своим свойствам HO-SSA и HOSVD-MSSA имеют много общего с Basic SSA и MSSA соответственно. Однако, есть и особенности, кардинально меняющие свойства методов, которые можно использовать для анализа временных рядов.

В результате исследования методов HO-SSA и HOSVD-MSSA были сделаны следующие выводы: методы можно использовать для выделения сигнала, и, в некоторых случаях, разделения компонент сигнала. В большинстве рассмотренных примеров, как HOSVD-SSA, так и HOOI-SSA, оказались хуже, чем Basic SSA в точности выделения сигнала. Удалось построить только один пример, где тензорная модификация выделяет сигнал точнее, чем Basic SSA. В работе [4] утверждалось преимущество тензорной модификации алгоритма ESPRIT, применяемого для оценки частот параметрического сигнала, над базовым алгоритмом в большем числе случаев. В данной работе показано, что это преимущество отсутствует для тензорной модификации алгоритма SSA, применяемого в задачах выделения сигнала и разделения компонент сигнала. Исходный код реализации методов HO-SSA и HOSVD-MSSA на языке программирования R, а также примеры его использования можно найти в [24]. Код написан в стиле существующего пакета Rssa [25, 26], реализующего многие методы семейства SSA в R. Также в коде использованы пакеты [27, 28, 29].

С другой стороны, в рассмотренных случаях, когда сигналы имеют вид вещественных гармоник, метод HOSVD-MSSA оказался точнее метода MSSA в задаче выделения сигнала и оказался точнее в задаче разделения компонент сигнала при условии наличия слабой HOSVD-MSSA-разделимости, либо при условии наличия у шума большой дисперсии. В случаях гармонических сигналов с равными амплитудами данный метод оказался менее точным, чем метод 2D-SSA.

Таким образом, остались открытыми вопросы: найти семейство сигналов, для которых метод HOSVD-MSSA разделяет компоненты точнее, чем метод MSSA, исследовать другие тензорные разложения в задачах выделения сигнала и разделения компонент (например в работе [30] предлагается использование модификации метода CPD — Block-Term Decomposition, в задаче разделения комплексных экспонент), а также перенести понятие сильной разделимости из теории MSSA на метод HOSVD-MSSA.

## Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Kouchaki S., Sanei S. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
3. Improved Tensor-Based Singular Spectrum Analysis Based on Single Channel Blind Source Separation Algorithm and Its Application to Fault Diagnosis / Yang D., Yi C., Xu Z., Zhang Y., Ge M., and Liu C. // Applied Sciences. — 2017. — Vol. 7, no. 4.
4. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
5. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1989. — Vol. 37, no. 7. — P. 984–995.
6. Harshman R.A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
7. Carroll J.D., Chang J.-J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35, no. 3. — P. 283–319.
8. Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. — 1966. — Vol. 31, no. 3. — P. 279–311.
9. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
10. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin Heidelberg, 2020.
11. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
12. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage /

- Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
13. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
  14. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Rev. — 2009. — Vol. 51, no. 3. — P. 455–500.
  15. Savostyanov D. V., Tyrtysnikov E.E. Approximate multiplication of tensor matrices based on the individual filtering of factors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49, no. 10. — P. 1662–1677.
  16. Kazeev V. A., Tyrtysnikov E.E. Structure of the Hessian matrix and an economical implementation of Newton’s method in the problem of canonical approximation of tensors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, no. 6. — P. 927–945.
  17. Осинский А.И. Оценки аппроксимации тензорных поездов по норме Чебышёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 211–216.
  18. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. On the Best Rank-1 and Rank- $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
  19. Sheehan B., Saad Y. Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Relation to PCA and GLRAM // Proceedings of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining. — Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2007.
  20. Eldén L., Savas B. A Newton–Grassmann Method for Computing the Best Multilinear Rank- $(r_1, r_2, r_3)$  Approximation of a Tensor // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 31, no. 2. — P. 248–271.
  21. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.
  22. Golyandina N., Usevich K. 2D-Extension of Singular Spectrum Analysis: Algorithm and Elements of Theory // Matrix Methods: Theory, Algorithms and Applications. — WORLD SCIENTIFIC, 2010. — P. 449–473.
  23. Hillar C.J., Lim L.-H. Most Tensor Problems Are NP-Hard // Journal of the ACM. — 2013. — Vol. 60, no. 6.

24. Khromov N. — Tensor SSA implementation in R. — Access mode: <https://zenodo.org/records/11359308>.
25. Rssa: A collection of methods for singular spectrum analysis : 2022. — R package version 1.0.5. Access mode: <http://CRAN.R-project.org/package=Rssa>.
26. Golyandina N., Korobeynikov A., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis with R. — Springer Berlin Heidelberg, 2018.
27. Li J., Bien J., Wells M. — rTensor: Tools for Tensor Analysis and Decomposition : 2021. — R package version 1.4.8. Access mode: <https://CRAN.R-project.org/package=rTensor>.
28. Gerard D., Hoff P. — tensr: Covariance Inference and Decompositions for Tensor Datasets : 2018. — R package version 1.0.2. Access mode: <https://CRAN.R-project.org/package=tensr>.
29. Wickham H., Henry L., RStudio. — purrr: Functional Programming Tools : 2023. — R package version 1.0.2. Access mode: <https://CRAN.R-project.org/package=purrr>.
30. De Lathauwer L. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank- $(L_r, L_r, 1)$  Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 32, no. 4. — P. 1451–1474.