Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика

Учебная практика 1 (проектно-технологическая) (семестр 1)

«Тензорный анализ сингулярного спектра»

Выполнил:
Хромов Никита Андреевич
24.М22-мм

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Голяндина Н. Э.

Санкт-Петербург
2025

Оглавление

1. Введение

Singular spectrum analysis (SSA) [1] является распространённым методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и разделения аддитивных компонент сигнала из временного ряда. SSA относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала, и заключается в сингулярном разложении особой матрицы, построенной по временному ряду и называемой траекторной.

В работах [2, 3] предлагается тензорная модификации метода SSA для решения задачи выделения сигнала, которая основана на некотором тензорном разложении траекторного тензора, построенного по временному ряду. В работе [4] предлагается похожая тензорная модификация метода ESPRIT [5] для решения задачи оценки частот периодических компонент сигнала в особой модели. Причём, в этих работах утверждается преимущество тензорных модификаций над стандартным SSA.

Существует множество видов тензорных разложений, например каноническое (CPD) [6, 7], и Таккера (Tucker) [8]. Частным случаем разложения Таккера является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD) [9], которое также позволяет искать наилучшее приближение (усечением разложения).

В моей выпускной квалификационной работе бакалавра [10] была реализована тензорная модификация метода SSA с использованием тензорного разложения, в некотором смысле расширяющего SVD, и было проведено сравнение с методом SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала, а также было рассмотрено расширение метода SSA на многомерные ряды — метод MSSA [11], сформулирована и реализована тензорная модификация этого метода и проведено сравнение её с другими методами семейства SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала. В качестве метода разложения тензоров был выбран метод HOSVD, который имеет наибольшее число свойств, справедливых для SVD. В качестве языка программирования для реализаций алгоритмов был выбран язык R.

Способ построения траекторного тензора и его разложение были выбраны из предложенных в статье [4], однако в отличие от этой статьи, в данной работе изучается применение выбранных средств в задаче выделения сигнала из временного ряда и в задаче разделения компонент сигнала.

Все рассматриваемые в работе [10] сигналы были вещественнозначными. Однако методы семейства SSA допускают и комплекснозначные сигналы. Метод SSA при применении к комплексным рядам называют CSSA (Complex SSA). Специфика CSSA заключается в замене матричного транспонирования на эрмитово сопряжение. Кроме того, аналогом вещественного гармонического ряда, имеющего ранг 2 в терминах SSA, является экспонента с комплексным аргументом, которая имеет ранг 1 в терминах CSSA.

Целью этой работы является продолжение изучения тензорных модификаций алгоритмов, основанных на подпространстве сигнала. В частности, стояли задачи реализовать тензорную модификацию алгоритма ESPRIT, предложенную в работе [4], провести численное сравнение её с базовым методом ESPRIT на комплекснозначных временных рядах в модели, рассматриваемой в той же работе, провести численное исследование влияния направлений усечения траекторного тензора на точность алгоритма HO-SSA, и провести численные исследование методов HO-SSA и HO-MSSA с точки зрения точности выделения комплекснозначных сигналов.

В разделе 2 приведено описание методов SSA, MSSA и ESPRIT, а также некоторые их известные свойства и важные определения. В разделе 3 приведено описание некоторых тензорных разложений, используемых в работе, а также их свойства, необходимые для доказательства ключевых утверждений о тензорных модификациях методов семейства SSA. В разделе 4 представлено описание тензорной модификации метода SSA — HO-SSA (High-Order SSA), и приведены некоторые определения и утверждения, используемые далее в работе. В разделе 5 описывается метод HO-MSSA для выделения сигнала и разделения компонент и некоторые его свойства. В разделе 6 описывается тензорная модификация метода ESPRIT, которую будем называть HO-ESPRIT. Вкладом этой работы являются разделы 7, 8 и 9, в которых приводятся результаты численных исследований точности метода HO-ESPRIT в задаче оценки параметров комплексного сигнала особой модели, влияния выбора направлений усечения в алгоритме HO-SSA на точность выделения сигнала и точности методов HO-SSA и HO-MSSA в задаче выделения комплексных сигналов соответственно.

2. Известные сведения об алгоритмах SSA, MSSA и ESPRIT

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, а также некоторые их свойства и важные определения.

2.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд X длины N

$$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Определение 2.1 (Оператор вложения)**.** Оператором вложения $\mathcal{T}_L$ с длиной окна L будем называть отображение, переводящее временной ряд $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $N \geqslant L$, в ганкелеву матрицу $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$, $K = N - L + 1$, такую, что $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$. Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{T}_L(\mathsf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_K \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \ldots & x_N \end{pmatrix}.$$

Определение 2.2 (Траекторная матрица)**.** Траекторной матрицей ряда X с длиной окна $L < N$ называют матрицу $\mathbf{X} = \mathcal{T}_L(\mathsf{X})$.

Пусть временной ряд X представим в виде суммы временных рядов X_k и шума E:

$$\mathsf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}_k + \mathsf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнила, то есть нахождения рядов X_k. В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения $\sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}_k$.

Определение 2.3 (SSA-ранг временного ряда)**.** Число d называется SSA-рангом временного ряда X длины N, если $d \leqslant (N+1)/2$ и для любой допустимой длины окна L, то есть такой, что $d \leqslant \min(L, N-L+1)$, ранг траекторной матрицы $\mathbf{X}$ этого ряда, построенной по длине окна L, равен d.

Замечание 2.1. В качестве параметра R в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать SSA-ранг сигнала.

Алгоритм 1 SSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: X, $L : 1 < L < N$, где N — длина X, m, $R : m \leqslant R \leqslant \min(L, N{-}L{+}1)$, $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$:

$$\{1, 2 \ldots, R\} = \bigcup_{k=1}^{m} \mathfrak{S}_k, \qquad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \varnothing,\ k \neq l.$$

Результат: $\widetilde{\mathsf{X}}_1, \widetilde{\mathsf{X}}_2, \ldots, \widetilde{\mathsf{X}}_m$ — оценки рядов $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_m$.

1: Вложение: построение $\mathbf{X} = \mathcal{T}_L(\mathsf{X})$.

2: Разложение: применение SVD к $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^{\mathrm{H}}, \quad R \leqslant d \leqslant \min(L, N - L + 1),$$

где верхний индекс H обозначает эрмитово сопряжение матрицы.

3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^{\mathrm{H}}.$$

4: Восстановление: вычисление рядов $\widetilde{\mathsf{X}}_k$ по матрицам $\mathbf{X}_k$ посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей $i + j = \mathrm{const}$:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}\,, \qquad n \in \overline{1 : N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \Big\{(i,\, j) \;\Big|\; 1 \leqslant i \leqslant L,\, 1 \leqslant j \leqslant N - L + 1,\, i + j - 1 = n\Big\}.$$

Алгоритм 2 SSA для выделения сигнала.

Входные данные: X, $L : 1 < L < N$, где N — длина X, $R : 1 \leqslant R \leqslant \min(L, N - L + 1)$.

Результат: $\widetilde{\mathsf{X}}$ — оценка сигнала $\sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}_k$.

1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 1.

2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 1.

3: Группировка: построение матрицы

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{R} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^{\mathrm{H}}.$$

4: Восстановление ряда $\widetilde{\mathsf{X}}$ по матрице $\widetilde{\mathbf{X}}$ посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей $i + j = \mathrm{const}$.

Пример 2.1. Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные SSA-ранги.

1. Ранг полиномиального ряда $x_n = Q_d(n)$, где Q_d — многочлен степени d, равен $d+1$.

2. Ранг экспоненциального ряда $x_n = Ce^{\alpha n}$, где $C, \alpha \in \mathbb{C}$ и $C \neq 0$, равен 1.

3. Ранг суммы экспоненциальных рядов

$$x_n = \sum_{j=1}^{M} C_j e^{\alpha_j n},$$

   где $C_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$ и $C_j \neq 0$ при всех j, равен количеству уникальных значений α_j.

4. Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

   где $C \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\omega \in [0, 1/2]$, равен $r(\omega)$, где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0,\ 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \tag{1}$$

5. Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{j=1}^{M} Ce^{\alpha_j n} \cos(2\pi n\omega_j + \psi_j)$$

   равен

$$\sum_{(\omega,\alpha)\in\Omega} r(\omega),$$

   где Ω — множество уникальных пар $(\omega_i,\ \alpha_i)$, представленных в данном временном ряде.

Замечание 2.2. В силу того, что

$$\cos(2\pi\omega n + \varphi_n) = \frac{e^{2\pi \mathrm{i}\omega n+\varphi} + e^{-2\pi \mathrm{i}\omega n-\varphi}}{2},$$

где i обозначает мнимую единицу, вещественнозначные временные ряды из пунктов 4 и 5 являются частным случаем комплексного ряда из пункта 3.

Определение 2.4 (Слабая SSA-разделимость)**.** Временные ряды $\widehat{\mathsf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_N)$ и $\widetilde{\mathsf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N)$ называют слабо L-разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1. $\sum\limits_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \left(\tilde{x}_{j+k}\right)^* = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1:(N-L+1)},$

2. $\sum\limits_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \left(\tilde{x}_{j+k}\right)^* = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1:L},$

где верхний индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение.

Утверждение 2.1. *Пусть* $\mathsf{X} = \widehat{\mathsf{X}} + \widetilde{\mathsf{X}}$*, а* $\mathbf{X}$*,* $\widehat{\mathbf{X}}$ *и* $\widetilde{\mathbf{X}}$ *— траекторные матрицы с длиной окна* L *рядов* X*,* $\widehat{\mathsf{X}}$ *и* $\widetilde{\mathsf{X}}$ *соответственно. Тогда сумма* SVD *матриц* $\widehat{\mathbf{X}}$ *и* $\widetilde{\mathbf{X}}$ *является* SVD *матрицы* $\mathbf{X}$ *тогда и только тогда, когда ряды* $\widehat{\mathsf{X}}$ *и* $\widetilde{\mathsf{X}}$ *слабо* L*-разделимы в терминах* SSA*.*

Утверждение 2.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые возможно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна.

2.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [12, 13, 11].

Пусть дан P-мерный временной ряд X длины N

$$\mathsf{X} = (\mathsf{X}_1 : \mathsf{X}_2 : \ldots : \mathsf{X}_P),$$
$$\mathsf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_N^{(p)}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Определение 2.5 (Траекторная матрица многомерного временного ряда)**.** Пусть $\mathbf{X}_j = \mathcal{T}_L(\mathsf{X}_j)$, $j \in \overline{1:P}$. Траекторной матрицей многомерного временного ряда X называется матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$, $K = N - L + 1$, построенная соединением матриц $\mathbf{X}_p$ по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \ldots : \mathbf{X}_P].$$

Определение 2.6 (Оператор вложения многомернрого временного ряда)**.** Отображение $\mathsf{X} \overset{L}{\longmapsto} \mathbf{X}$ будем обозначать $\mathcal{T}_L(\mathsf{X}) = \mathbf{X}$ и называть его оператором вложения многомерного временного ряда X.

Замечание 2.3. Оператор вложения из определения 2.1 является частным случаем оператора вложения многомерного временного ряда ($P = 1$).

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и восстановления в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

Определение 2.7 (MSSA-ранг временного ряда)**.** Число d называется MSSA-рангом P-мерного временного ряда X длины N, если $d \leqslant P(N+1)/(P+1)$, и для любой допустимой длины окна L, то есть такой, что $d \leqslant \min(L, P(N-L+1))$, ранг траекторной матрицы $\mathbf{X}$ этого ряда, построенной по длине окна L, равен d.

Замечание 2.4. Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

Пример 2.2. Рассмотрим P-мерный временной ряд X длины N с элементами $x_n^{(p)}$.

1. Если элементы этого ряда имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R(p)} a_j^{(p)} e^{\alpha_j^{(p)} n}, \tag{2}$$

   где $a_j^{(p)}$, $\alpha_j^{(p)} \in \mathbb{C}$ и $a_j^{(p)} \neq 0$, то MSSA ранг X равен количеству уникальных значений $\alpha_j^{(p)}$ в ряде.

2. Если элементы этого ряда имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R(p)} a_j^{(p)} e^{\alpha_j^{(p)} n} \cos\left(2\pi\omega_j^{(p)} n + \varphi_j^{(p)}\right), \tag{3}$$

   где $a_j^{(p)}$, $\alpha_j^{(p)}$, $\omega_j^{(p)}$, $\varphi_j^{(p)} \in \mathbb{R}$ и $a_j^{(0)} \neq 0$, то MSSA-ранг X равен

$$\sum_{(\omega,\alpha)\in\Omega} r(\omega),$$

   где функция $r(\omega)$ определена в уравнении (1), а Ω — множество уникальных пар $\left(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)}\right)$, представленных в данном временном ряде. Стоит заметить, что как и в замечании 2.2, вещественнозначный временной ряд (3) является частным случаем комплексного ряда (2).

Замечание 2.5. В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HO-MSSA на многомерных сигналах вида (3) и (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры $R(p)$, $\omega_i^{(p)}$ и $\alpha_i^{(p)}$ не зависят от номера ряда p, применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [14]. Кроме того, в работе [4] также рассматривается этот частный случай модели.

Определение 2.8 (Слабая MSSA-разделимость). P-мерные временные ряды $\widehat{\mathsf{X}}$ и $\widetilde{\mathsf{X}}$ длины N называются слабо L-разделимыми, если выполнены следующие условия:

1. $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \left(\tilde{x}_{j+k}^{(p')}\right)^* = 0, \qquad \forall i, j \in \overline{1:(N-L+1)},\, p, p' \in \overline{1:P},$
2. $\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \left(\tilde{x}_{m+i}^{(p)}\right)^* = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1:L}.$

Утверждение 2.2. *Пусть* $\mathsf{X} = \widehat{\mathsf{X}} + \widetilde{\mathsf{X}}$, *а* $\mathbf{X}$, $\widehat{\mathbf{X}}$ *и* $\widetilde{\mathbf{X}}$ *— траекторные матрицы с длиной окна* L *рядов* X, $\widehat{\mathsf{X}}$ *и* $\widetilde{\mathsf{X}}$ *соответственно. Тогда сумма* SVD *матриц* $\widehat{\mathbf{X}}$ *и* $\widetilde{\mathbf{X}}$ *является* SVD *матрицы* $\mathbf{X}$ *тогда и только тогда, когда ряды* $\widehat{\mathsf{X}}$ *и* $\widetilde{\mathsf{X}}$ *слабо* L*-разделимы в терминах MSSA.*

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

2.3. ESPRIT

Оригинальное описание алгоритма и его обоснование можно найти в статьях [5, 4].

Пусть элементы многомерного временного ряда X имеют вид

$$x_n^{(p)} = \sum_{j=1}^{R} a_j^{(p)} e^{\alpha_j n} e^{\mathrm{i}\left(2\pi\omega_j n + \varphi_j^{(p)}\right)}, \tag{4}$$

где параметрами модели являются амплитуды $a_j^{(p)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, фазы $\varphi_j^{(p)} \in [0, 2\pi)$, частоты $\omega_j \in [0, 1/2]$ и степени затухания $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Алгоритм ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance technique), как и SSA, относится к классу методов, основанных на подпространстве сигнала. В отличие от SSA, ESPRIT применяется для решения задачи оценки параметров степеней затухания α_j и частот ω_j многомерного комплекснозначного сигнала в модели (4).

В алгоритме 3 описан метод ESPRIT для оценки параметров сигнала (4).

Алгоритм 3 ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

Входные данные: X, $L : 1 < L < N$, где N — длина X, $R : 1 \leqslant R \leqslant \min(L, N - L + 1)$.

Результат: $(\widehat{\alpha}_1, \widehat{\omega}_1), (\widehat{\alpha}_2, \widehat{\omega}_2), \ldots, (\widehat{\alpha}_R, \widehat{\omega}_R)$ — оценки параметров сигнала (4).

1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 1

2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 1

3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^{\uparrow} = \mathbf{U}_{\downarrow}\mathbf{Z}$$

относительно матрицы $\mathbf{Z}$, где $\mathbf{U} = [U_1 : U_2 : \ldots : U_d]$, запись $\mathbf{U}^{\uparrow}$ обозначает матрицу $\mathbf{U}$ без первой строки, а запись $\mathbf{U}_{\downarrow}$ — без последней.

4: Нахождение первых R в порядке неубывания собственных чисел λ_j матрицы $\mathbf{Z}$. Полученные собственные числа $\lambda_{j'}$ считаются оценками экспонент $e^{\alpha_j + 2\pi \mathrm{i} \omega_j}$, возможно с точностью до некоторой перестановки $j = S(j')$, через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\widehat{\alpha}_j = \log\left(|\lambda_{j'}|\right), \qquad \widehat{\omega}_j = \frac{\operatorname{Arg}\left(\lambda_{j'}\right)}{2\pi}.$$

Замечание 2.6. Как и в методах SSA и MSSA, в качестве параметра алгоритма R рекомендуется выбирать ранг ряда (4).

Замечание 2.7. Алгоритм 3 применим и для одномерных временных рядов ($P = 1$).

3. Основы теории тензорных разложений

Под тензорами в данной работе подразумеваются M-мерные массивы. Элементы тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ обозначаются $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \ldots i_M}$. Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [9, 15, 16, 17]. Термины на русском языке взяты из работы [18].

3.1. Ранги тензоров и тензорные разложения

Для определения канонического тензорного разложения и разложения Таккера вводятся следующие определения.

Определение 3.1 (Тензорный ранг)**.**

1. Говорят, что тензор $\mathcal{A}$ размера $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$ имеет тензорный ранг, равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_M,$$

где $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$, а символ $\circ$ обозначает тензорное произведение.

2. Говорят, что тензор $\mathcal{A}$ имеет ранг R, если он представим в виде линейной комбинации R тензоров ранга 1, и такое R минимально. Обозначение: $R = \mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

Замечание 3.1. Представление тензора $\mathcal{A}$ в виде линейной комбинации $R = \mathrm{rank}(\mathcal{A})$ тензоров ранга 1 называется каноническим разложением этого тензора (CPD).

Замечание 3.2. Ранг тензора может зависеть от того, над каким полем рассматривается этот тензор: $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ [15].

Определение 3.2 (n-ранг тензора)**.** n-рангом (модовым рангом) тензора $\mathcal{A}$ называется размерность векторного пространства, порождённого n-столбцами (векторами n-го направления) этого тензора. Обозначается $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$.

Замечание 3.3.

1. В отличие от матричного случая, n-ранги тензора с количеством размеров больше 2 могут различаться.

2. В общем случае ранг тензора $\mathcal{A}$ не равен его n-рангам, даже если они все равны между собой. Кроме того, всегда справедливо неравенство $\mathrm{rank}_n(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

Определение 3.3 (n-я матрица развёртки тензора)**.** Пусть $\mathcal{A}$ — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$, тогда n-я матрица развёртки этого тензора (матрица сечений) — это матрица $[\mathbf{A}]_n$ (или $\mathbf{A}_{(n)}$) размера $I_n \times I_{n+1} I_{n+2} \ldots I_M I_1 I_2 \ldots I_{n-1}$, в которой элемент тензора $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \ldots i_M}$ содержится в строке i_n и столбце с номером, равным

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N} \left[(i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

Свойство 3.1 (Связь n-ранга тензора и ранга его развёртки по измерению n)**.** n-столбцы тензора $\mathcal{A}$ являются столбцами его n-й матрицы развёртки, и выполняется равенство

$$\mathrm{rank}_n(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}\left([\mathbf{A}]_n\right).$$

Определение 3.4 (Произведение тензора и матрицы по направлению). Пусть $\mathcal{A}$ — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$, $\mathbf{U}$ — матрица размера $J_n \times I_n$ с элементами u_{ij}, тогда произведением тензора $\mathcal{A}$ и матрицы $\mathbf{U}$ по направлению n $(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})$ называется тензор размера $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \ldots \times I_M$, который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} j_n i_{n+1} \ldots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n i_{n+1} \ldots i_M} u_{j_n i_n}.$$

Определение 3.5 (Разложение Таккера). Пусть тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ имеет n-ранги $(R_1, R_2, \ldots, R_M)$. Тогда $\mathcal{A}$ может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \ldots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \tag{5}$$

где тензор $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_M}$ называется ядром разложения, $\mathbf{U}^{(k)} \in \mathbb{C}^{I_k \times J_k}$, $J_k \geqslant R_k$. Такое представление называется разложением Таккера.

Замечание 3.4. Разложение Таккера не единственно. Частным случаем этого разложения является сингулярное разложение высшего порядка (HOSVD), которое и будет рассматриваться в дальнейшем в этой работе по следующим причинам:

- HOSVD имеет наибольше среди всех тензорных разложений число свойств, схожих со свойствами матричного сингулярного разложения (SVD), применяемого в алгоритмах SSA и MSSA;
- HOSVD позволяет находить наилучшее приближение тензора тензором с фиксированными n-рангами.

3.2. HOSVD

В этом разделе приведены определение разложения HOSVD и некоторые его свойства.

Теорема 1 (Сингулярное разложение порядка M). *Любой комплекснозначный тензор $\mathcal{A}$ размера $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$ может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \ldots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \tag{6}$$

в котором

1. $\mathbf{U}^{(n)} = \left[U_1^{(n)} : U_2^{(n)} : \ldots : U_{I_n}^{(n)}\right]$ — *унитарные матрицы,*

2. *$\mathcal{Z}$ — комплекснозначный тензор размера $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$, в котором каждое сечение $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$, полученное фиксированием индекса $i_n = \alpha$, удовлетворяет следующим свойствам.*

   а. *Полная ортогональность: сечения $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ и $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$ ортогональны для всех возможных значений n, α, $\beta : \alpha \neq \beta$:*

   $$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \qquad \alpha \neq \beta,$$

   где угловые скобки обозначают скалярное произведение.

   б. *Упорядоченность: сечения расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:*

   $$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geqslant \ldots \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \tag{7}$$

   для всех $n \in \overline{1:M}$.

Определение 3.6 (Сингулярное разложение тензора)**.** Разложение вида (6) называется сингулярным разложением тензора $\mathcal{A}$ порядка M или HOSVD тензора $\mathcal{A}$.

Определение 3.7 (Сингулярное число тензора)**.** Обозначим $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$ и будем называть $\sigma_i^{(n)}$ i-м сингулярным числом тензора $\mathcal{A}$ по направлению n.

Определение 3.8 (Сингулярный вектор тензора)**.** Векторы $U_i^{(n)}$ будем называть i-м сингулярным вектором тензора $\mathcal{A}$ по направлению n.

Замечание 3.5. Представление (6) можно переписать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \ldots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \ldots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \ldots \circ U_{i_M}^{(M)}. \tag{8}$$

Такое представление удобно для описания тензорных алгоритмов HO-SSA и HO-MSSA.

3.3. Свойства HOSVD

Многие свойства методов SSA и MSSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность некоторых свойств SSA и MSSA со свойствами HO-SSA и HO-MSSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

Пусть $\mathcal{A}$ — тензор размера $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$. Применением SVD ко всем матрицам сечений этого тензора вычисляются M матриц $\mathbf{U}^{(n)}$, составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Определим тензор $\mathcal{Z}$ следующим образом

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 \left(\mathbf{U}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}} \times_2 \left(\mathbf{U}^{(2)}\right)^{\mathrm{H}} \ldots \times_M \left(\mathbf{U}^{(M)}\right)^{\mathrm{H}},$$

Тогда исходный тензор $\mathcal{A}$ можно представить в виде (6)

Утверждение 3.1. *Процедура, описанная выше, даёт HOSVD тензора $\mathcal{A}$.*

Из-за этой связи HOSVD с SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

Свойство 3.2 (Единственность)**.**

1. Все сингулярные числа по каждому направлению определяются однозначно.

2. Если сингулярные числа по направлению n различны, то сингулярные векторы по направлению n определены с точностью до умножения на коэффициент единичной нормы. Другими словами, если вектор $U_\alpha^{(n)}$ умножается на $e^{\mathrm{i}\theta}$, то сечение $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ должно быть умножено на обратный коэффициент $e^{-\mathrm{i}\theta}$.

3. Сингулярные векторы по направлению n, соответствующие одному и тому же сингулярному числу по направлению n, могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией этих векторов. Соответствующие сечения $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ должны быть пересчитаны обратным образом. Другими словами, $\mathbf{U}^{(n)}$ можно заменить на $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению $\mathbf{U}^{(n)}$ на наборы сингулярных векторов по направлению n, соответствующих одинаковым сингулярным значениям по направлению n. При этом тензор $\mathcal{Z}$ должен быть заменён на $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^{\mathrm{H}}$.

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется с точностью до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

Свойство 3.3 (Обобщение)**.** HOSVD тензора является обобщением SVD в том смысле, что результат применения HOSVD к тензору с двумя размерами, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, с точностью до унитарных преобразований сингулярных векторов, отвечающих равным сингулярным числам, и соответствующих преобразований матрицы сингулярных значений.

Свойство 3.4 (Связь n-ранга тензора и его HOSVD)**.** Пусть имеется HOSVD тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ вида (6), тогда, по определению, тензор сингулярных чисел $\mathcal{Z}$ удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geqslant \ldots \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех $n \in \overline{1:M}$. Обозначим r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$. Тогда

$$\operatorname{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \tag{9}$$

Свойство 3.5 (Норма)**.** Пусть имеется HOSVD тензора $\mathcal{A}$, представленное в виде (6), и пусть $R_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$, $n \in \overline{1:M}$. Тогда справедливо равенство

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \|\mathcal{Z}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \ldots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2$$

3.4. Наилучшее приближение малого ранга разложением Таккера

HOSVD позволяет получать приближение произвольного тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ некоторым тензором с заданными меньшими n-рангами $(R_1, R_2, \ldots, R_M)$.

Определение 3.9 (Ориентированная энергия)**.** Ориентированной по направлению n энергией тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ в направлении вектора $X \in \mathbb{C}^{I_n}$ единичной нормы называют выражение

$$\operatorname{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \left\| X^{\mathrm{H}} [\mathbf{A}]_n \right\|^2.$$

Свойство 3.6 (Оптимальность в терминах ориентированной энергии)**.** Направления экстремальной ориентированной энергии по направлению n соответствуют сингулярным векторам по направлению n, причём значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по направлению n.

Это означает, что n-столбцы тензора $\mathcal{A}$ содержат наибольшие вклады в направлении $U_1^{(n)}$, и на это направление приходится $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2$ энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по направлению n достигает экстремума в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной $\left(\sigma_2^{(n)}\right)^2$, и так далее.

Свойство 3.7 (Приближение)**.** Пусть имеется HOSVD тензора $\mathcal{A}$, представленное в виде (6), и пусть $R_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$. Определим тензор $\widehat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma^{(n)}_{I'_n+1}, \sigma^{(n)}_{I'_n+2}, \ldots, \sigma^{(n)}_{R_n}$ для заданных I'_n, $n \in \overline{1:M}$, то есть заменяя нулями соответствующие сечения тензора $\mathcal{Z}$. Тогда верно

$$\left\|\mathcal{A} - \widehat{\mathcal{A}}\right\|^2 \leqslant \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma^{(1)}_{i_1}\right)^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} \left(\sigma^{(2)}_{i_2}\right)^2 + \ldots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma^{(M)}_{i_M}\right)^2. \tag{10}$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Для тензоров эта связь принимает другой вид. Тензор, получаемый отбрасыванием наименьших сингулярных значений по направлению n будет иметь n-ранги $(I'_1, I'_2, \ldots, I'_M)$, но в общем случае не будет наилучшим приближением при заданных ограничениях на n-ранги. Тем не менее, условие упорядоченности (7) подразумевает, что «энергия» $\mathcal{A}$ в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям индексов направлений. Следовательно, если $\sigma^{(n)}_{I'_n} \gg \sigma^{(n)}_{I'_n+1}$ (например, если $I'_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$, то меньшие сингулярные значения по измерению n не существенны), то $\widehat{\mathcal{A}}$ всё ещё можно считать хорошим приближением $\mathcal{A}$. Ошибка ограничена выражением (10).

Одним из методов получения оптимального приближения тензора тензором малых рангов является алгоритм High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [19, 20]. При заданных тензоре $\mathcal{A}$ и наборе n-рангов $(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_M)$ алгоритм решает задачу минимизации

$$\left\|\mathcal{A} - \widehat{\mathcal{A}}\right\| \to \min$$

относительно тензора $\widehat{\mathcal{A}}$ с заданными n-рангами $(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_M)$. Алгоритм HOOI является итерационным, в качестве начального приближения $\mathcal{A}_0$ обычно используется усечение с нужными рангами HOSVD тензора $\mathcal{A}$. Критерий остановки алгоритма на шаге k: $\left\|\widehat{\mathcal{A}}_{k-1} - \widehat{\mathcal{A}}_k\right\| < \varepsilon$ для некоторого заданного ε, либо $k \geqslant N$ для некоторого заданного N.

Свойство 3.8.

1. Алгоритм HOOI не гарантирует сходимости к глобальному минимуму выражения $\left\|\mathcal{A} - \widehat{\mathcal{A}}_k\right\|$.

2. На практике алгоритм HOOI обычно демонстрирует линейную скорость сходимости, но его теоретическая скорость сходимости может быть и нелинейной в зависимости от конкретных условий [21].

4. Описание метода HO-SSA

Пусть дан временной ряд X длины N

$$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Определение 4.1 (Траекторный тензор ряда)**.** Траекторным тензором ряда X с параметрами $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$ будем называть тензор $\mathcal{X}$ размера $I \times L \times J$, $J = N - I - L + 2$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \qquad i \in \overline{1:I},\ l \in \overline{1:L},\ j \in \overline{1:J}.$$

Замечание 4.1. Траекторный тензор $\mathcal{X}$ является ганкелевым [22].

Введём обозначения для сечений произвольного трёхмерного тензора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_{k\cdot\cdot} = \mathcal{A}_{i_1=k}, \quad \mathcal{A}_{\cdot k\cdot} = \mathcal{A}_{i_2=k}, \quad \mathcal{A}_{\cdot\cdot k} = \mathcal{A}_{i_3=k}.$$

Тогда в терминах оператора вложения 2.1 сечения траекторного тензора ряда X с параметрами I, L имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\cdot\cdot j} &= \mathcal{T}_I\Big((x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+I+L-2})\Big),\\
\mathcal{X}_{\cdot l\cdot} &= \mathcal{T}_I\Big((x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+L+J-2})\Big),\\
\mathcal{X}_{i\cdot\cdot} &= \mathcal{T}_L\Big((x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+L+J-2})\Big).
\end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд X и параметры $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$. Так как при замене одного из этих параметров на $J = N - I - L + 2$ или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их направлений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки (I, L, J) без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

4.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд X представим в виде суммы временных рядов X_k и шума E:

$$\mathsf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}_k + \mathsf{E}.$$

Алгоритм 4 HO-SSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: X, $I, L\,:\,1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина X, m, R_1, R_2, $R_3 : m \leqslant R_p \leqslant I_p$, где $I_1 = I$, $I_2 = L$, $I_3 = N - L - I + 2$, $\mathfrak{S}_1^{(p)}, \ldots, \mathfrak{S}_m^{(p)}$:

$$\{1,\, 2\, \ldots,\, R_p\} = \bigcup_{k=1}^{m} \mathfrak{S}_k^{(p)} \qquad \mathfrak{S}_k^{(p)} \cap \mathfrak{S}_l^{(p)} = \varnothing,\, k \neq l,\, p \in \{1, 2, 3\}.$$

Результат: $\widetilde{\mathsf{X}}_1$, $\widetilde{\mathsf{X}}_2$, …, $\widetilde{\mathsf{X}}_m$ — оценки рядов X_1, X_2, …, X_m.

1: Вложение: построение траекторного тензора $\mathcal{X}$ по параметрам I, L.

2: Разложение: применение HOSVD или HOOI к $\mathcal{X}$

$$\widehat{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{R_1} \sum_{l=1}^{R_2} \sum_{j=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \tag{11}$$

3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k^{(1)}} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k^{(2)}} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k^{(3)}} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}.$$

4: Восстановление: получение рядов $\widetilde{\mathsf{X}}_k$ по тензорам $\mathcal{X}^{(k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$:

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{ilj}^{(k)}, \qquad n \in \overline{1 : N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i,\, l,\, j) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant I,\, 1 \leqslant l \leqslant L,\, 1 \leqslant j \leqslant J,\, i + l + j - 2 = n \right\}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда X в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов X_k. Метод HO-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 4.

Определение 4.2. Направлениями усечения траекторного тензора в алгоритме 4 будем называть множество $\mathfrak{P} \subseteq \{1, 2, 3\}$ такое, что $R_p < I_p$, при p из $\mathfrak{P}$, и $R_p = I_p$ иначе.

4.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших n-рангов, заданных пользователем. Метод HO-SSA для выделения сигнала представлен в алгоритме 5.

Алгоритм 5 HO-SSA для выделения сигнала.

Входные данные: X, $I, L : 1 < I, L < N$, $I + L < N + 1$, где N — длина X, $R_1 \in \overline{1:I}$, $R_2 \in \overline{1:L}$, $R_3 \in \overline{1:J}$.

Результат: $\widehat{\mathsf{X}}$.

1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 4.
2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 4.
3: Усреднение тензора $\widehat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i+l+j = \mathrm{const}$, в результате чего получается оценка сигнала $\widehat{\mathsf{X}}$.

Замечание 4.2. Направления усечения определены и для алгоритма 5.

4.3. Свойства HO-SSA

В этом разделе приведены некоторые свойства метода HO-MSSA и вспомогательные определения.

Теорема 2. *Пусть временной ряд* X *имеет конечный ранг* d *в терминах* SSA *(определение 2.3). Тогда для любых значений* I *и* L *таких, что*

$$d \leqslant \min(I, L, N - I - L + 2), \tag{12}$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому направлению в HOSVD *траекторного тензора* $\mathcal{X}$*, построенного по этому ряду с длинами окна* I *и* L*, будет равно* d*.*

Следствие. Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HO-SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

5. Описание метода HO-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HO-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

5.1. HO-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два P-мерных временных ряда $\widehat{\mathsf{X}}$ и $\widetilde{\mathsf{X}}$ длины N и $\mathsf{X} = \widehat{\mathsf{X}} + \widetilde{\mathsf{X}}$.

Определение 5.1 (Траекторный тензор многомерного ряда)**.** Траекторным тензором ряда X с длиной окна $L:\ 1 < L < N$ будем называть тензор $\mathcal{X}$ размерности $L \times K \times P$, $K = N - L + 1$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x^{(p)}_{l+k-1} \qquad l \in \overline{1:L},\, k \in \overline{1:K},\, p \in \overline{1:P}.$$

Из определения следует, что сечение $\mathcal{X}_{\cdot\cdot p}$ траекторного тензора с длиной окна L является траекторной матрицей ряда $\mathsf{X}^{(p)}$, построенной по длине окна L. Пользуясь определением 2.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{\cdot\cdot p} = \mathcal{T}_L\left(\mathsf{X}^{(p)}\right).$$

Обозначим траекторные тензоры рядов $\widehat{\mathsf{X}}$, $\widetilde{\mathsf{X}}$ и X с длиной окна L $\widehat{\mathcal{X}}$, $\widetilde{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ соответственно. Метод HO-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала X в виде суммы HOSVD траекторных тензоров компонент $\widehat{\mathsf{X}}$ и $\widetilde{\mathsf{X}}$. Описание метода приведено в алгоритме 6.

5.2. HO-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан P-мерный временной ряд X длины N Метод HO-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HO-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем, n-рангов. Описание метода приведено в алгоритме 7.

5.3. Свойства HO-MSSA

В этом разделе приведены некоторые свойства метода HO-MSSA и вспомогательные определения.

Теорема 3. *Пусть X — P-мерный временной ряд длины N, тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *X имеет ранг d в терминах теории* MSSA *(определение 2.7) тогда и только тогда, когда для траекторного тензора $\mathcal{X}$, построенного по любой длине окна*

Алгоритм 6 HO-MSSA для разделения компонент сигнала.

Входные данные: X, $L : 1 < L < N$, $K = N - L + 1$, R_1, R_2, $R_3 : R_m \leqslant I_m$, где $I_1 = L$, $I_2 = K$, $I_3 = P$, $\widehat{\mathfrak{S}}_m$, $\widetilde{\mathfrak{S}}_m \subseteq \overline{1 : R_m} : \widehat{\mathfrak{S}}_m \cap \widetilde{\mathfrak{S}}_m = \varnothing$, $m \in \{1, 2\}$, $\widehat{\mathfrak{P}}$, $\widetilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : R_3}$

Результат: $\mathring{\widehat{\mathsf{X}}}$, $\mathring{\widetilde{\mathsf{X}}}$ — оценки $\widehat{\mathsf{X}}$ и $\widetilde{\mathsf{X}}$ соответственно.

1: Вложение: построение по ряду X траекторного тензора $\mathcal{X}$ с длиной окна L.

2: Разложение: применение HOSVD или HOOI к $\mathcal{X}$

$$\mathring{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

3: Группировка: построение тензоров

$$\widehat{\mathcal{X}} = \sum_{l \in \widehat{\mathfrak{S}}_1} \sum_{k \in \widehat{\mathfrak{S}}_2} \sum_{p \in \widehat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)},$$

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \sum_{l \in \widetilde{\mathfrak{S}}_1} \sum_{k \in \widetilde{\mathfrak{S}}_2} \sum_{p \in \widetilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

4: Восстановление: оценки рядов $\widehat{\mathsf{X}}^{(p)}$ и $\widetilde{\mathsf{X}}^{(p)}$ получаются усреднением сечений $\widehat{\mathcal{X}}_{\cdot\cdot p}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}_{\cdot\cdot p}$ соответствующих тензоров вдоль побочных диагоналей $l + k = \mathrm{const}$.

Алгоритм 7 HO-MSSA для выделения сигнала

Входные данные: $\mathsf{X} = \left(\mathsf{X}^{(1)}, \ldots, \mathsf{X}^{(P)}\right)^{\mathrm{T}}$, $L : 1 < L < N$, где N — длина X, $R_1 \in \overline{1 : L}$, $R_2 \in \overline{1 : K}$, $R_3 \in \overline{1 : P}$, где $K = N - L + 1$.

Результат: $\tilde{\mathsf{X}}$.

1: Совпадает с шагом 1 алгоритма 6.

2: Совпадает с шагом 2 алгоритма 6.

3: Восстановление: сечения $\mathring{\mathcal{X}}_{\cdot\cdot p}$ усредняются вдоль побочных диагоналей $l + k = \mathrm{const}$ для получения оценок $\widetilde{\mathsf{X}}^{(p)}$.

$L < N$ *такой, что* $d \leqslant \min(L, K)$ *выполняется*

$$\mathrm{rank}_1(\mathcal{X}) = \mathrm{rank}_2(\mathcal{X}) = d.$$

2. *3-ранг* $\mathcal{X}$ *равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.*

Определение 5.2 (3-ранг многомерного ряда)**.** 3-рангом многомерного ряда будем назвать 3-ранг траекторного тензора этого ряда.

Замечание 5.1. Определение корректно, так как по построению траекторного тензора набор 3-столбцов этого тензора не зависит от выбора длины окна L, поэтому и 3-ранг траекторного тензора не зависит от выбора длины окна.

Утверждение 5.1. (О симметричности относительно замены длины окна) *Пусть дан P-мерный временной ряд X длины N и выбрана некоторая длина окна L, $\mathcal{X}$ — траекторный тензор этого ряда, построенный по длине окна L, а $\mathcal{Y}$ — по длине окна $K = N - L + 1$, и пусть R_1, R_2, R_3 — параметры, выбранные в третьем шаге алгоритма* HO-MSSA, *соответствующие $\mathcal{X}$, а R_1', R_2', R_3' — соответствующие $\mathcal{Y}$. Тогда если $R_1 = R_2'$, $R_2 = R_1'$, $R_3 = R_3'$, то оценки сигнала $\widetilde{\mathsf{X}}$ и $\widetilde{\mathsf{Y}}$, построенные по $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, совпадут.*

6. Описание метода HO-ESPRIT

Пусть X — одномерный ($P = 1$) или многомерный ($P > 1$) комплекснозначный временной ряд вида (4). Обозначим

$$\overline{L} = \begin{cases} (I, L), & P = 1, \\ L, & P > 1, \end{cases}$$

а $\mathcal{X}$ — траекторный тензор ряда X, построенный с длиной (длинами) окна из $\overline{L}$. Также определим область допустимых параметров $\overline{L}$:

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \{(I, L) :\ 1 < I, L < N,\ I + L < N + 1\}, & P = 1, \\ \{L :\ 1 < L < N\}, & P > 1. \end{cases}$$

Описание метода HO-ESPRIT приведено в алгоритме 8. Обоснование метода можно найти в работе [4].

7. Численные сравнения в задаче оценки параметров

В этом разделе приведены сравнения методов ESPRIT и HO-ESPRIT по точности оценки параметров сигнала вида (4) в случае одномерных и многомерных рядов. В качестве показателя точности оценки была выбрана метрика относительного средне-

Алгоритм 8 HO-ESPRIT для оценки параметров комплекснозначного сигнала.

Входные данные: X, $\overline{L} \in \mathcal{D}$, $d \in \{1, 2, 3\}$ — номер направления сингулярных векторов, используемых для оценки параметров, R_1, R_2, R_3 : $R_m \leqslant I_m$, где $I_1 = I$, $I_2 = L$, $I_3 = N - I - L + 2$ при $P = 1$, и $I_1 = L$, $I_2 = N - L + 1$, $I_3 = P$ при $P > 1$, $R : R \leqslant R_d$.

Результат: $(\widehat{\alpha}_1, \widehat{\omega}_1), (\widehat{\alpha}_2, \widehat{\omega}_2), \ldots, (\widehat{\alpha}_R, \widehat{\omega}_R)$ — оценки параметров сигнала (4).

1: Построение траекторного тензора $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ по ряду X с параметрами из $\overline{L}$.

2: Применение HOSVD или HOOI к $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X} = \sum_{i_1=1}^{R_1} \sum_{i_2=1}^{R_2} \sum_{i_3=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 i_3} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ U_{i_3}^{(3)},$$

построение матрицы $\mathbf{U} = \left[U_1^{(d)} : U_2^{(d)} : \ldots : U_{R_d}^{(d)} \right]$.

3: Решение уравнения

$$\mathbf{U}^{\uparrow} = \mathbf{U}_{\downarrow} \mathbf{Z}$$

относительно матрицы $\mathbf{Z}$, где запись $\mathbf{U}^{\uparrow}$ обозначает матрицу $\mathbf{U}$ без первой строки, а запись $\mathbf{U}_{\downarrow}$ — без последней.

4: Нахождение первых R в порядке неубывания собственных чисел λ_j матрицы $\mathbf{Z}$. Полученные собственные числа $\lambda_{j'}$ считаются оценками экспонент $e^{\alpha_j + 2\pi \mathrm{i} \omega_j}$, возможно с точностью до некоторой перестановки $j = S(j')$,, через которые можно выразить оценки искомых параметров:

$$\widehat{\alpha}_j = \log \left(|\lambda_{j'}| \right), \qquad \widehat{\omega}_j = \frac{\operatorname{Arg}\left(\lambda_{j'} \right)}{2\pi}.$$

квадратичного отклонения (RRMSE)

$$\mathrm{RRMSE} = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |\gamma - \widehat{\gamma}_j|^2} \cdot 100\%, \tag{13}$$

где m — количество реализаций шума, γ — оцениваемый параметр, $\widehat{\gamma}_j$ — оценка параметра γ по ряду с j-й реализацией шума. Такой выбор был сделан для того, чтобы в дальнейшем сравнить результаты с результатами работы [4], в которой использовалась именно такая метрика для определения точности оценивания параметров. Стоит заметить, что алгоритму, который всегда оценивает $\widehat{\gamma} = 0$ соответствует значение RRMSE = 100%.

7.1. Одномерный случай

Пусть $P = 1$ и $R = 2$, то есть одномерный временной ряд $\mathsf{X} = (x_0, x_1, \ldots, x_{24})$ состоит из элементов вида

$$x_n = e^{\alpha_1 n} e^{2\pi \mathrm{i} \omega_1 n} + e^{\alpha_2 n} e^{2\pi \mathrm{i} \omega_2 n} + \zeta_n, \tag{14}$$

где $n \in \overline{0:24}$, $\zeta_n = \xi_n + \mathrm{i}\eta_n$, а ξ_n и η_n — последовательность независимых случайных величин из распределения $\mathrm{N}(0, \sigma^2/2)$, $\sigma = 0.04$. Случайные величины ζ_n являются независимыми и их распределение называется кругосимметричным комплексным нормальным распределением (circularly-symmetric complex normal distribution) [23] с дисперсией σ^2 и обозначается $\mathrm{CN}(0, \sigma^2)$.

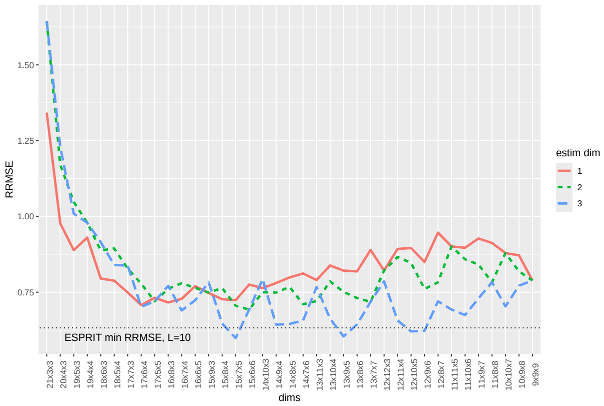
Пусть $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.22$. Ниже приведены рассматриваемые варианты степеней затухания.

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
2. $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.01$.
3. $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.02$.
4. $\alpha_1 = -0.01$, $\alpha_2 = -0.02$.

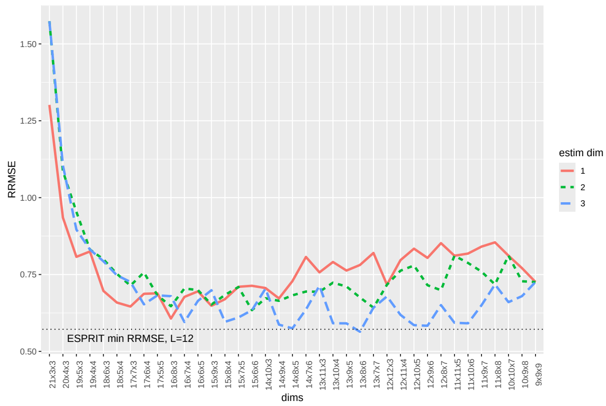
Такие параметры были выбраны, так как в статье [4] рассматривалась модель с такими частотами и степенями затухания из варианта 4. Во всех случаях ранг сигнала с такими параметрами будет равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы $\mathbf{Z}$ из алгоритмов 3 и 8. В качестве способа разложения траекторного тензора был выбран метод HOOI, так как он даёт наиболее точное приближение тензора. В этом разделе RRMSE считалось по 500 реализациям шума.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок частот и степеней затухания, полученных методом HO-ESPRIT, от размеров траекторного тензора (ось x) и выбора направления оценивания (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на рисунках изображены наименьшие по выбору длины окна L значения RRMSE соответствующего параметра, полученные методом ESPRIT.

Рисунки 1 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено (деление на $|\gamma| = 0$ в формуле (13)). Рисунки 2, 3 и 4 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

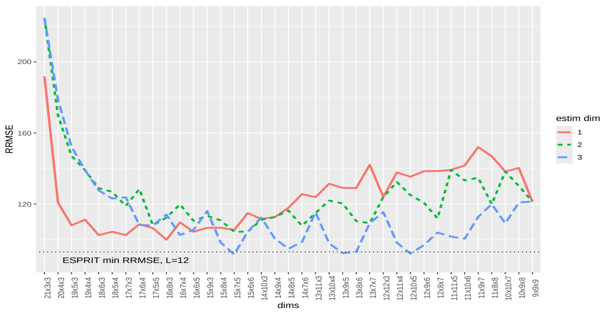


(*а*) RRMSE оценок ω_1.

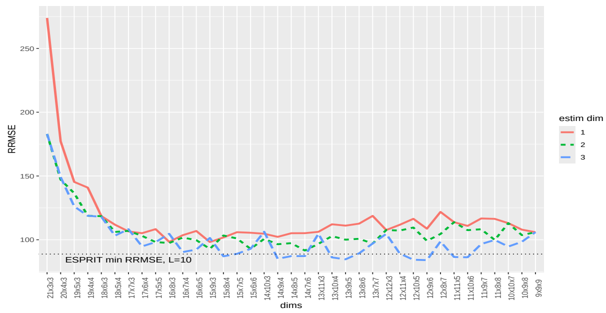


(*б*) RRMSE оценок ω_2.

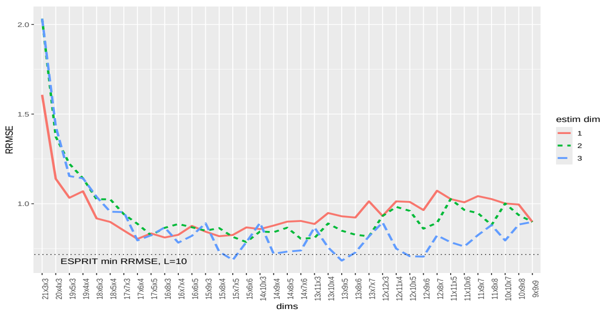
Рис. 1. Зависимость RRMSE оценок параметров одногомерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 1.



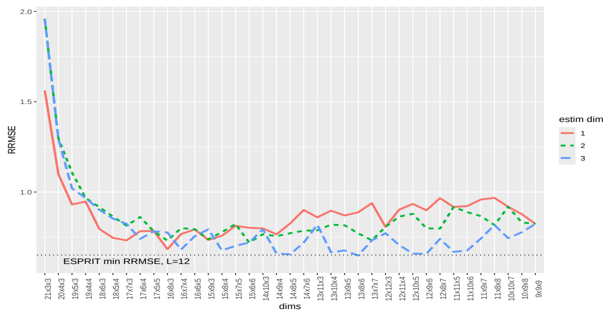
(*а*) RRMSE оценок α_1.



(*б*) RRMSE оценок α_2.



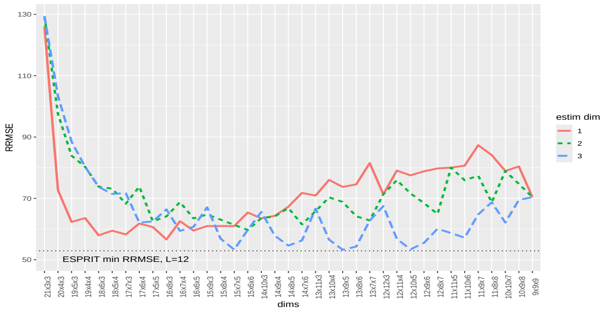
(*в*) RRMSE оценок ω_1.



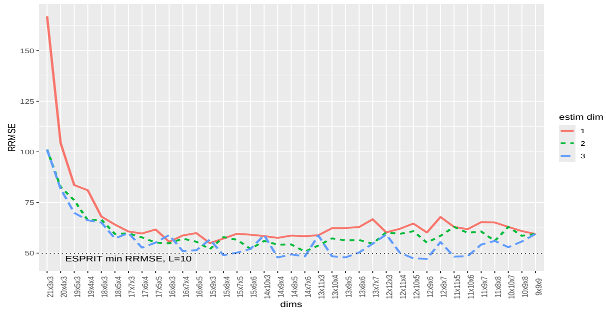
(*г*) RRMSE оценок ω_2.

Рис. 2. Зависимость RRMSE оценок параметров одногомерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 2.

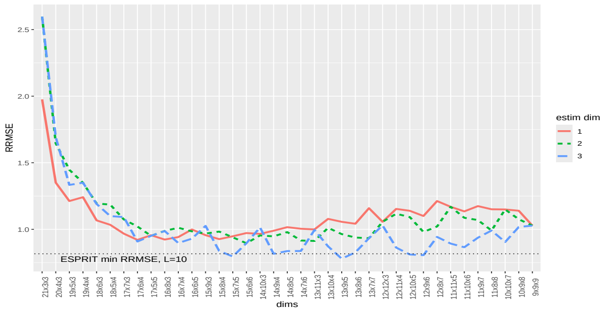
Выводы из численных сравнений В случае одномерных сигналов оценки методом HO-ESPRIT при оптимальном подборе параметров оказались не менее точными, чем оптимальные оценки стандартным методом ESPRIT. Кроме того, в некоторых ситуациях оптимальные оценки методом HO-ESPRIT оказываются точнее оптимальных оценок методом ESPRIT. Это соответствует результатам работы [4], в которой методы сравни-



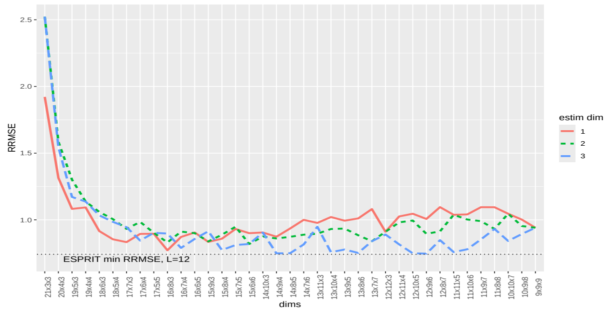
(а) RRMSE оценок α_1.



(б) RRMSE оценок α_2.

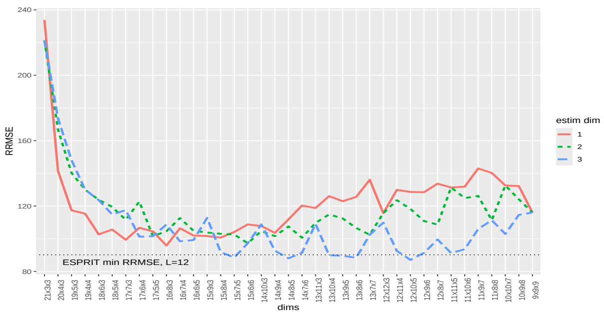


(в) RRMSE оценок ω_1.

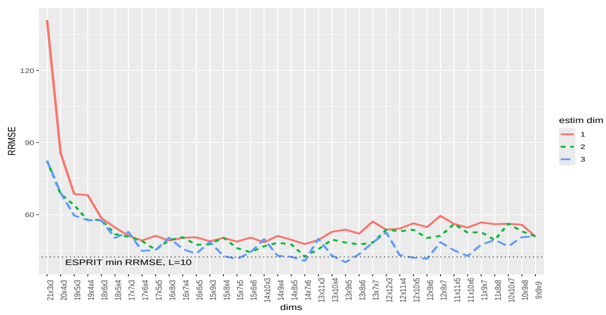


(г) RRMSE оценок ω_2.

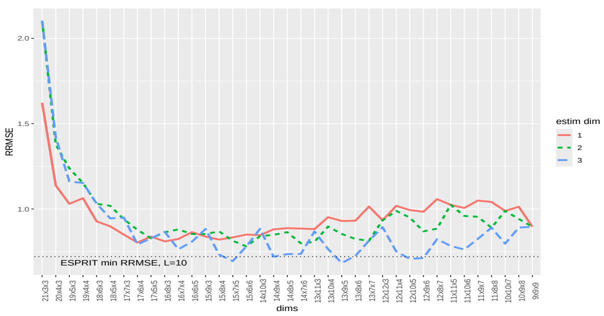
Рис. 3. Зависимость RRMSE оценок параметров одногомерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 3.



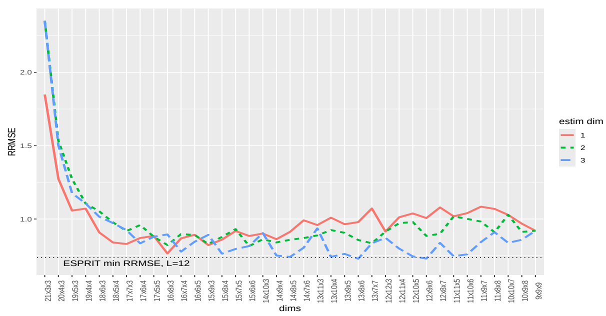
(а) RRMSE оценок α_1.



(б) RRMSE оценок α_2.



(в) RRMSE оценок ω_1.



(г) RRMSE оценок ω_2.

Рис. 4. Зависимость RRMSE оценок параметров одногомерного ряда от длины окна и направления усечения, случай 4.

вались только при оптимальных размерах длины окна. Однако множество длин окна в алгоритме HO-ESPRIT, при которых точность оценок параметров сигнала близка к оптимальной, очень мало, и нам пока неизвестны способы их выбора кроме перебора. С другой стороны, для стандартного алгоритма ESPRIT требуется меньший набор параметров, а разница между методами в точности оценки при оптимальных параметрах невелика. В связи с этим, использование метода HO-ESPRIT для оценки параметров одномерных сигналов в текущем виде не обосновано.

Стоит заметить, что во всех случаях выбор номера направления d из алгоритма 8, соответствующего направлению наименьшего размера траекторного тензора, давал наиболее точные результаты.

7.2. Многомерный случай

Пусть $P = 12$ и $R = 2$, то есть многомерный временной ряд

$$\mathsf{X} = \left(\mathsf{X}^{(1)}, \mathsf{X}^{(2)}, \ldots, \mathsf{X}^{(12)}\right),$$
$$\mathsf{X}^{(p)} = \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots, x_{24}^{(p)}\right)$$

состоит из элементов вида

$$x_n^{(p)} = a_1^{(p)} e^{\alpha_1 n} e^{2\pi \mathrm{i} \omega_1 n} + a_2^{(p)} e^{\alpha_2 n} e^{2\pi \mathrm{i} \omega_2 n} + \zeta_n^{(p)},$$

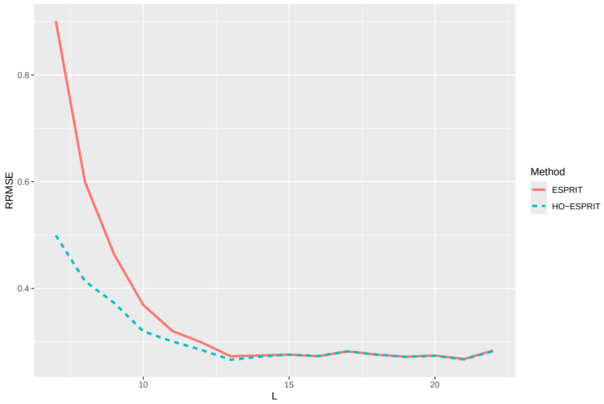
где $n \in \overline{0:24}$, а $\zeta_n^{(p)}$ — независимые случайные величины из распределения $\mathrm{CN}(0,\,\sigma^2)$, $\sigma = 0.2$. Значения частот и варианты степеней затухания были взяты такими же, как в одномерном случае в разделе 7.1. В качестве амплитуд $a_k^{(p)}$ были взяты независимые реализации случайных величин из распределения $\mathrm{CN}(0,\,1)$, их приблизительные значения приведены в выражении (15).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(a_1) &\approx (0, -0.1, -1, -0.4, 0.2, 0.3, -0.9, -0.3, -1.2, -0.2, 0.8, 0.5)^{\mathrm{T}}, \\
\mathrm{Im}(a_1) &\approx (-0.9, -0.3, -0.5, -0.6, -0.1, -0.2, -1.3, -0.1, 0.7, 0.1, -1, -1)^{\mathrm{T}}, \\
\mathrm{Re}(a_2) &\approx (-0.2, 0.7, 0.5, 0.1, -0.7, -0.1, 0.7, 0.3, -0.4, -1.5, -0.5, -1.5)^{\mathrm{T}}, \\
\mathrm{Im}(a_2) &\approx (0.3, -1.2, -0.2, -0.5, 0.8, -0.5, -0.6, 0.6, -0.7, 0, 0.2, -0.2)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

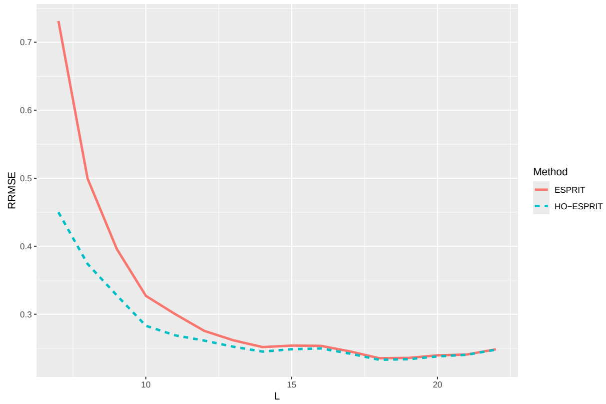
Как и в одномерном случае, ранг сигналов с каждым набором параметров равен 2, поэтому для оценки параметров использовались только первые два собственных числа матрицы $\mathbf{Z}$ из алгоритмов 3 и 8. В качестве способа разложения траекторного тензора был выбран метод HOOI.

Ниже представлены графики зависимости RRMSE оценок параметров, полученных методами ESPRIT и HO-ESPRIT, от значения длины окна L.

Рисунки 5 соответствуют случаю 1. Графики с RRMSE оценок степеней затухания не приводятся в этом случае, так как для них RRMSE не определено. Рисунки 6, 7 и 8 соответствуют случаям 2, 3 и 4 соответственно.

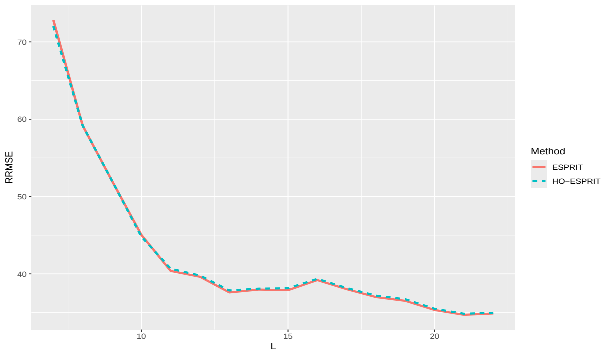


(*а*) RRMSE оценок ω_1.

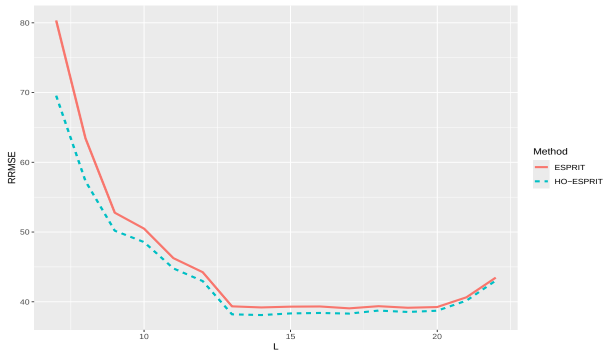


(*б*) RRMSE оценок ω_2.

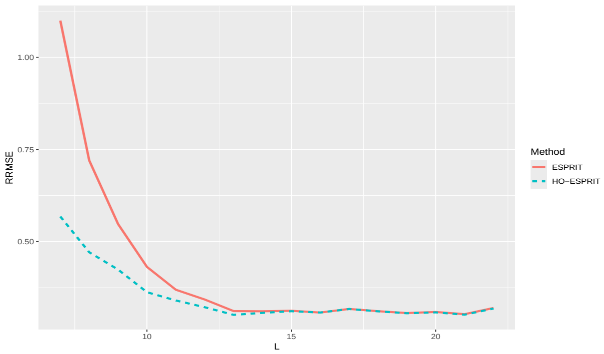
Рис. 5. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 1.



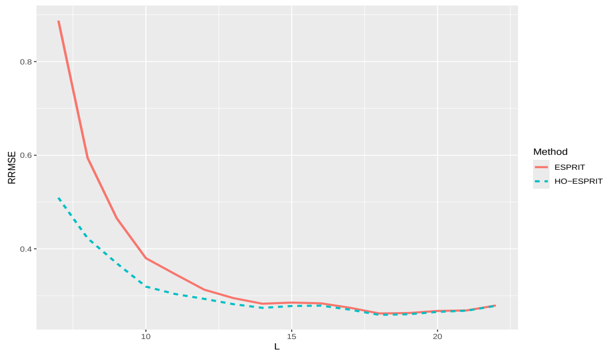
(*а*) RRMSE оценок α_1.



(*б*) RRMSE оценок α_2.

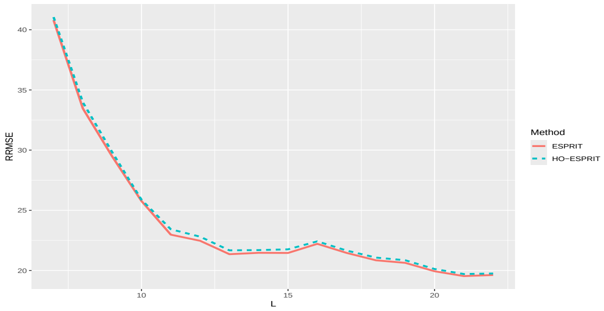


(*в*) RRMSE оценок ω_1.

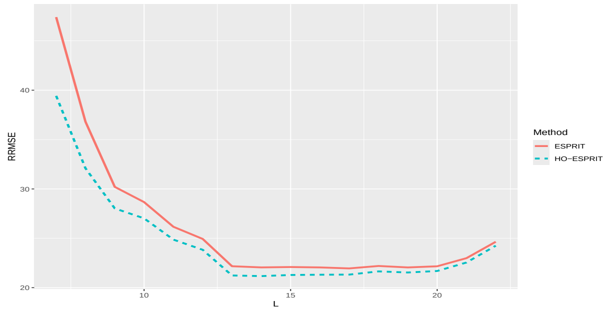


(*г*) RRMSE оценок ω_2.

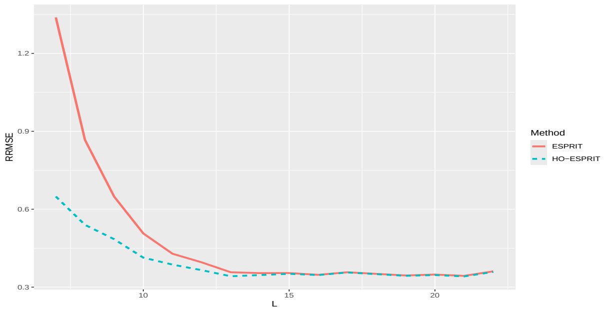
Рис. 6. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 2.



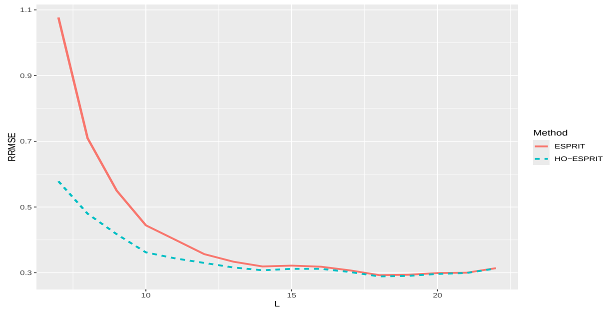
(*а*) RRMSE оценок α_1.



(*б*) RRMSE оценок α_2.

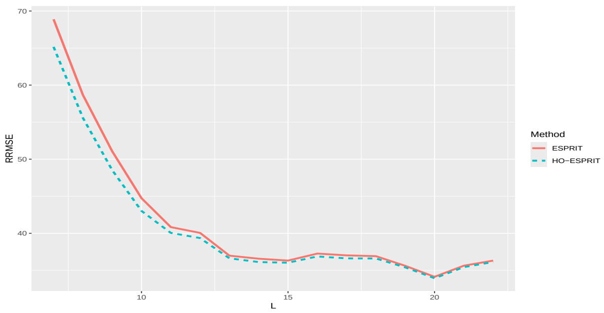


(*в*) RRMSE оценок ω_1.

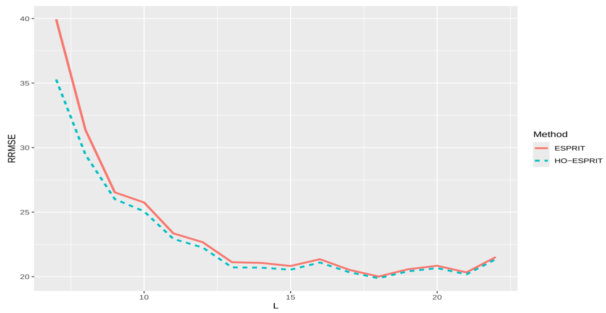


(*г*) RRMSE оценок ω_2.

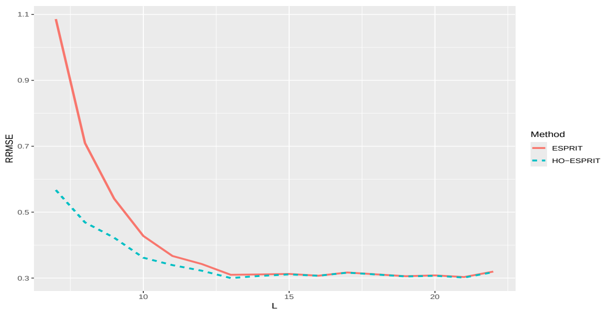
Рис. 7. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 3.



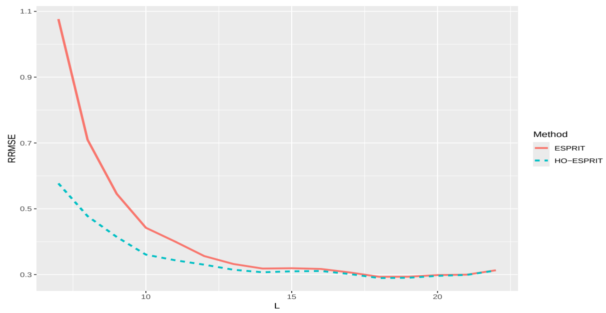
(*а*) RRMSE оценок α_1.



(*б*) RRMSE оценок α_2.



(*в*) RRMSE оценок ω_1.



(*г*) RRMSE оценок ω_2.

Рис. 8. Зависимость RRMSE оценок параметров многомерного ряда от длины окна, случай 4.

Выводы из численных сравнений Метод HO-ESPRIT оказался точнее стандартного метода ESPRIT в задаче оценки параметров многомерного ряда для любого выбора параметров длины окна во всех случаях, не считая двух: оценки методом HO-ESPRIT параметра α_1 оказались менее точными, чем методом ESPRIT, в случаях 2 и 3. Стоит заметить, что значения точности методов во всех случаях практически не отличимы при больших значениях длины окна.

8. Выбор направления усечения в алгоритме HO-SSA

В этом разделе рассматривается влияние выбора направлений усечения в методе HO-SSA на точность в задаче выделения сигнала.

Пусть временной ряд X имеет вид

$$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots x_N),$$
$$x_n = s_n + \varepsilon_n, \qquad n \in \overline{1:N},$$

где $\mathsf{S} = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ — сигнал, $\mathsf{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N)$ — шум. Точность выделения сигнала будет оцениваться с помощью среднеквадратичного отклонения (RMSE) оценённого сигнала от исходного. В данной работе RMSE высчитывается по следующей формуле

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{MSE}\left(\mathsf{S}, \widetilde{\mathsf{S}}_i\right)}, \quad \mathrm{MSE}\left(\mathsf{S}, \widetilde{\mathsf{S}}\right) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |s_j - \tilde{s}_j|^2,$$

где m — количество реализаций шума, $\widetilde{\mathsf{S}}_i$ — оценка сигнала, восстановленная по ряду с i-й реализацией шума. В качестве способа разложения траекторного тензора был выбран метод HOOI.

8.1. Выделение вещественного сигнала

Пусть $N = 71$ и временной ряд состоит из элементов вида

$$x_n = 30\cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n, \tag{16}$$

где ε_n — независимые случайные величины из распределения $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 25$. Во всех алгоритмах для восстановления бралось количество компонент разложения равное рангу сигнала, который в данном случае равен 2. В таблице 1 приведены значения RMSE оценки сигнала, восстановленного методом SSA при различных выборах длины окна. RMSE здесь и далее в этом разделе высчитывается по $m = 500$ реализациям шума. Кроме того, здесь и далее жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения

Таблица 1. SSA: RMSE оценки сигнала (16).

L	12	24	30	36
RMSE	1.82	1.42	**1.40**	1.42

RMSE, причём отличие этих минимальных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

В таблице 2 представлены значения RMSE оценок сигнала, восстановленного методом HO-SSA при выборе различных направлений усечения. Параметры в таблице 2 представлены в порядке уменьшения третьего размера траекторного тензора, причём выполняется неравенство $I \leqslant J \leqslant L$. Бóльшие параметры длин окна не рассматриваются, так как построенные по ним траекторные матрицы и траекторные тензоры будут совпадать с рассмотренными с точностью до перестановки размерностей.

Таблица 2. HO-SSA: RMSE оценки сигнала (16) при выборе разных направлений усечения.

$I \times L$ / Направления усечения	12×49	12×37	7×36	12×31	19×30	24×25
3	1.85	1.52	**1.48**	1.54	1.57	1.59
2, 3	1.63	1.53	**1.49**	1.56	1.62	1.65
$\overline{1:3}$	1.63	1.53	**1.49**	1.56	1.62	1.65

Из таблицы 2 видно, что усечение только по направлению наибольшей размерности даёт результаты точнее, чем усечение по всем направлениям, при почти любом выборе длин окна. Но этого увеличения точности недостаточно, чтобы алгоритм HO-SSA был точнее базового SSA.

8.2. Выделение комплексного сигнала

Рассмотрим задачу выделения комплекснозначного сигнала из ряда X с элементами вида (14) с частотами $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.22$ и со степенями затухания $\alpha_1 = -0.01$, $\alpha_2 = -0.02$.

На рисунке 9 представлен график зависимости RMSE от размеров траекторного тензора (ось x) и направлений усечения (цвет и тип линий). Чёрной пунктирной линией на графике изображено минимальное по выбору длины окна значение RMSE для сигналов, восстановленных методом SSA. Как и в случае вещественного сигнала, метод

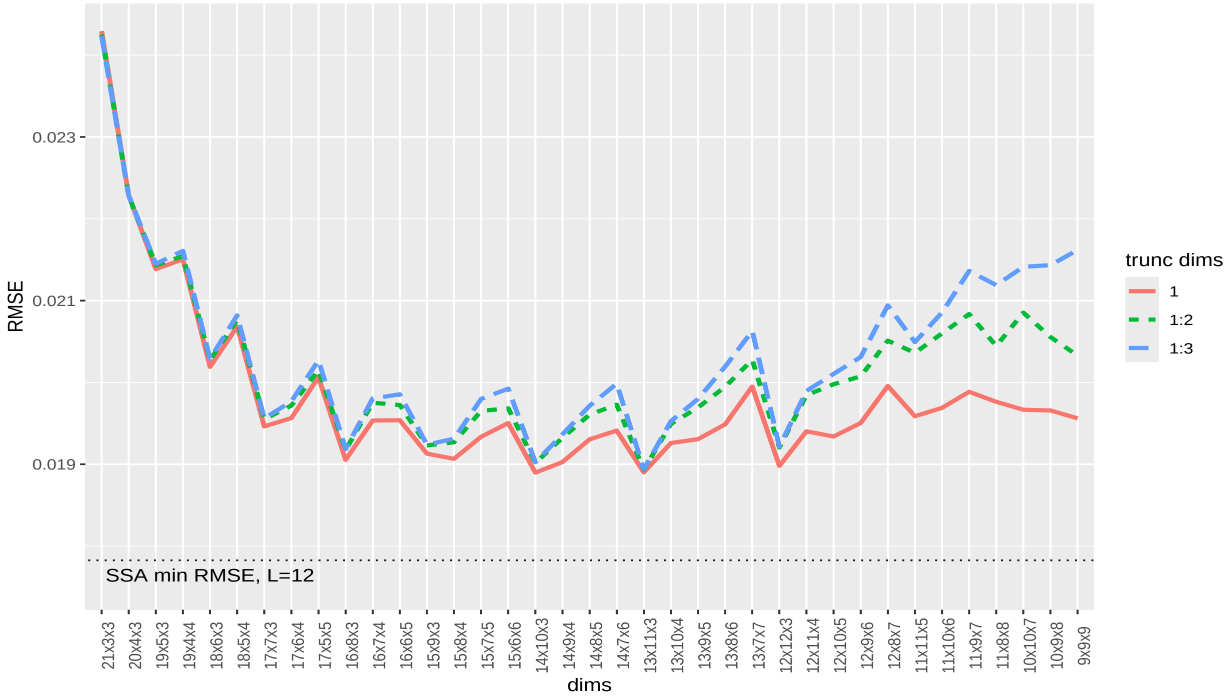


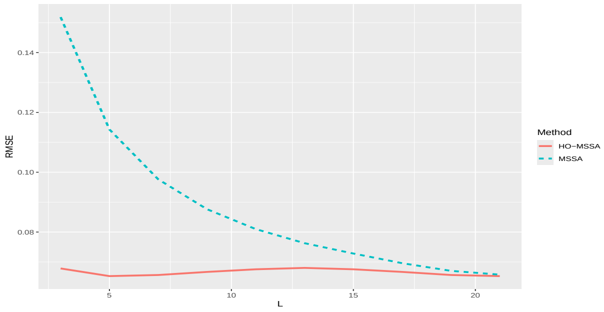
Рис. 9. Зависимость RMSE восстановленного сигнала от размеров траекторного тензора и направлений усечений.

HO-SSA оказывается существенно менее точным при любом выборе длин окна и направлений усечения, чем метод SSA. Также наиболее точные оценки сигнала получаются при выборе в качестве направления усечения направления минимальной размерности траекторного тензора ряда.

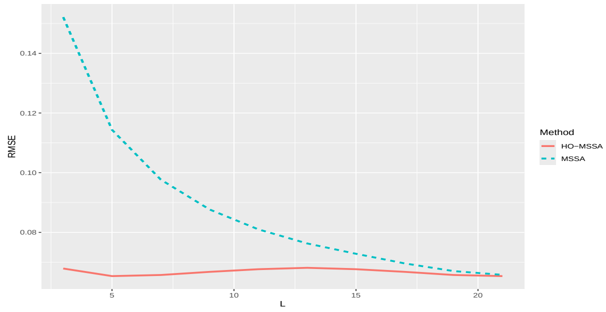
Выводы численных сравнений В отличие от задачи оценки параметров, где при выборе оптимальных длин окна тензорные методы могут давать оценки точнее, чем базовый ESPRIT, в задаче выделения сигнала при любом выборе длин окна точность восстановленных тензорными методами оценок сигналов всегда существенно меньше точности оценок, восстановленных базовым SSA.

9. Численные сравнения в задаче выделения многомерных комплексных сигналов

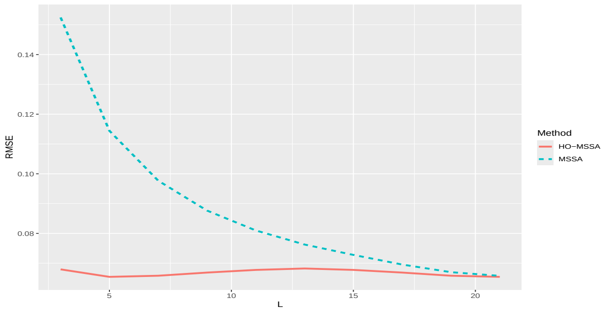
Пусть многомерный временной ряд X имеет тот же вид, что и ряд, рассматриваемый в разделе 7.2. Рассмотрим задачу выделения сигнала из этого временного ряда.



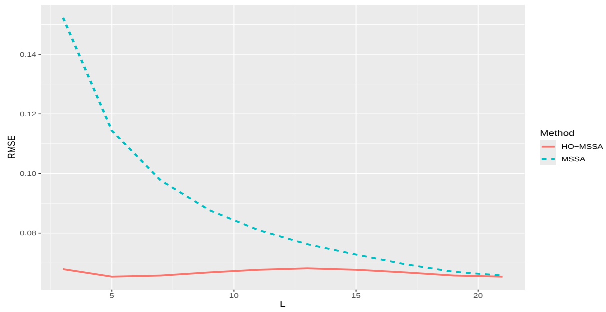
(*а*) α_1 и α_2 из случая 1.



(*б*) α_1 и α_2 из случая 2.



(*в*) α_1 и α_2 из случая 3.



(*г*) α_1 и α_2 из случая 4.

Рис. 10. Зависимость RMSE оценок многомерного сигнала от длины окна.

Ранг этого сигнала в терминах MSSA при всех рассматриваемых вариантах параметров α_1 и α_2 равен 2, поэтому параметр R в алгоритме MSSA и параметры R_1 и R_2 в алгоритме 7 были взяты равными 2. 3-ранг этого сигнала в терминах HO-MSSA равен 2, поэтому параметр R_3 в алгоритме 7 был взят равным 2.

На рисунках 10 приведены графики зависимости RMSE оценок сигнала методами MSSA и HO-MSSA от выбора длины окна L для различных параметров степеней затухания α_1 и α_2.

Из графиков видно, что во всех случаях метод HO-MSSA выделяет комплексный сигнал более точно, чем метод MSSA, причём преимущество велико для большинства значений длины окна L. Однако RMSE обоих методов при оптимальном выборе L довольно близки. Этот результат совпадает с результатами численного сравнения методов MSSA и HO-MSSA в задаче выделения вещественных сигналов.

10. Заключение

TODO

Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure. — Chapman and Hall/CRC, 2001.
2. Kouchaki S., Sanei S. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
3. Improved Tensor-Based Singular Spectrum Analysis Based on Single Channel Blind Source Separation Algorithm and Its Application to Fault Diagnosis / Yang D., Yi C., Xu Z., Zhang Y., Ge M., and Liu C. // Applied Sciences. — 2017. — Vol. 7, no. 4.
4. Papy J.M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
5. Roy R., Paulraj A., Kailath T. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT // MILCOM 1986 - IEEE Military Communications Conference: Communications-Computers: Teamed for the 90's. — IEEE. — 1986. — P. 41.6.1–41.6.5.
6. Harshman R.A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
7. Carroll J.D., Chang J.-J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35, no. 3. — P. 283–319.
8. Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. — 1966. — Vol. 31, no. 3. — P. 279–311.
9. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
10. Хромов Н. А. Выпускная квалификационная работа «Тензорный анализ сингулярного спектра». — 2024. — научный руководитель Голяндина Н.Э.
11. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin Heidelberg, 2020.
12. Степанов Д.В., Голяндина Н.Э. Варианты метода «Гусеница»–SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Иден-

тификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.

13. Multivariate and 2D Extensions of Singular Spectrum Analysis with theRssaPackage / Golyandina N., Korobeynikov A., Shlemov A., and Usevich K. // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67, no. 2.
14. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares / Van Huffel S., Chen H., Decanniere C., and Van Hecke P. // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
15. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Rev. — 2009. — Vol. 51, no. 3. — P. 455–500.
16. Savostyanov D. V., Tyrtyshnikov E.E. Approximate multiplication of tensor matrices based on the individual filtering of factors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49, no. 10. — P. 1662–1677.
17. Kazeev V. A., Tyrtyshnikov E.E. Structure of the Hessian matrix and an economical implementation of Newton's method in the problem of canonical approximation of tensors // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, no. 6. — P. 927–945.
18. Осинский А.И. Оценки аппроксимации тензорных поездов по норме Чебышёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 211–216.
19. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. On the Best Rank-1 and Rank-$(R_1, R_2, ..., R_N)$ Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
20. Sheehan B., Saad Y. Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Relation to PCA and GLRAM // Proceedings of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining. — Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2007.
21. Eldén L., Savas B. A Newton–Grassmann Method for Computing the Best Multilinear Rank-$(r_1,\ r_2,\ r_3)$ Approximation of a Tensor // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 31, no. 2. — P. 248–271.
22. Nie J., Ye K. Hankel tensor decompositions and ranks. — 2017.
23. Tse David, Viswanath Pramod. Fundamentals of Wireless Communication. — Cambridge University Press, 2005.