1. Сколько случаев в Брезенхеме

Если 1/8, то случаев 2:
- пойти вправо
- и пойти по диагонали

2. Как между циклами корректировать пробную функцию в алгоритме средней точки

В зависимости от выбранной точки внутри или снаружи эллипса надо корректировать пробную функцию так как она зависит от средней точки, которая вычисляется на основе координат предыдущего шага

3. Как в параметрическом уравнении выбирается шаг

Единицу делим на длину большего радиуса

Выбор шага

При достаточно большом радиусе, 2 соседние точки должны быть выбраны так, чтобы величина угла в радианах была не менее 1/R

$\sin\theta = \frac{\Delta z}{R}$; $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$; $\theta = \frac{\Delta z}{R} = \frac{1}{R}$

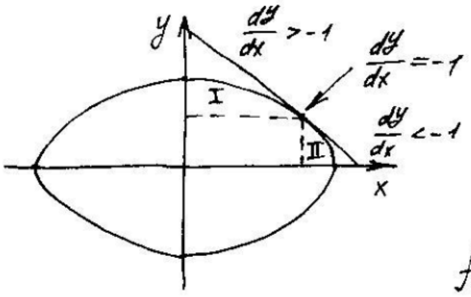
Примечание: dz = 1 потому что изображение растровое

Алгоритм средней точки

Название связано с тем, что на каждом шаге работы алгоритм выбирает ближайший к эллипсу пиксел из двух возможных, анализируя, находится ли средняя точка между этими пикселами внутри или вне эллипса. Приведенное уравнение эллипса можно использовать в качестве пробной функции (примечание: пробная функция - функция вида f(x,y), равная 0 в случае, если точка принадлежит к описываемой этой функцией фигуре).

Точка, лежащая на эллипсе, при подстановке ее координат в пробную функцию даст нулевое значение.
Если точка лежит внутри эллипса, то значение пробной функции будет отрицательно, а при расположении точки вне эллипса получим положительный результат.
Анализируя знак пробной функции для средней точки, расположенной между двумя альтернативными пикселами, выбираем один ближайший к эллипсу пиксел.
Выбор очередного пиксела может осуществляться из пары пикселов, расположенных либо на одной вертикальной, либо на одной горизонтальной линии.
Анализ вертикальной или горизонтальной пары пикселов зависит от угла наклона касательной к эллипсу, т.е. от значения производной dY/dX.При dY/dX > -1 выбор должен осуществляться между двумя вертикальными пикселами, а при dY/dX < -1 – между двумя горизонтальными пикселами.

#2 Алгоритм построения эллипса и окружности по методу средней точки.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$f_{пр}=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$$

$$f_{пр}(x,y)=\begin{cases}=0, & (x,y)\in \text{эллипе}\\ >0, & (x,y)\ \text{вне эллипса}\\ <0, & (x,y)\ \text{внутри эллипса}\end{cases}$$

<u>Поиск граничной точки:</u>

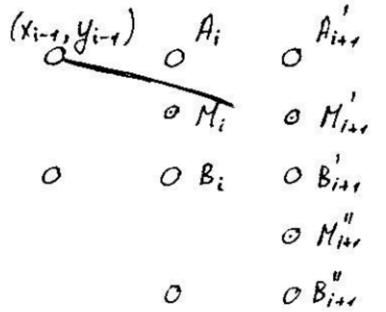
$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

$$2b^2x\,dx+2a^2y\,dy-\cancel{a^2b^2}=0$$

$$\frac{a^2y\,dy}{b^2x\,dx}=-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-b^2x}{a^2y} \Rightarrow$$ т.к. для граничной точки $\frac{dy}{dx}=-1$,

то $b^2x=a^2y$ – условие границы.

<u>I. Цикл по x слева направо:</u>



$$f_{пр\,i}=b^2(x_{i-1}+1)^2+a^2\left(y_{i-1}-\frac{1}{2}\right)-a^2b^2$$

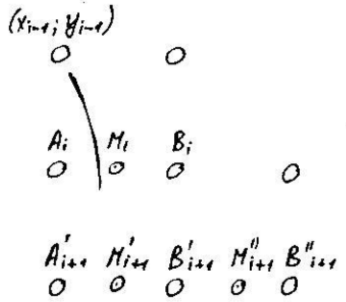
$$f_{пр\,i}=\begin{cases}<0 \Rightarrow \text{т. M внутри} \Rightarrow A\\ >0 \Rightarrow \text{т. M снаружи} \Rightarrow B\end{cases}$$

$$df=f_i-f_{i-1}=b^2(x_{i-1}+1)^2+a^2\left(y_{i-1}-\frac{1}{2}\right)^2+a^2b^2-bx_{i-1}^2-a^2\left(y_{i-1}-\frac{1}{2}\right)^2-$$
$$-a^2b^2=2b^2x_{i-1}+b^2$$

Если выбрана т.B $(y_i=y_{i-1}-1)$, то значение пробной ф-ции надо скорректировать, т.к. для случая A пробная точка была бы: $(x_{i-1}+1;\ y_{i-1}+\frac{1}{2})$, для случая B: $(x_{i-1}+1;\ y_{i-1}-\frac{1}{2})$.

$$\Delta f=b^2(x_{i-1}+1)^2+a^2\left(y_{i-1}-\frac{1}{2}\right)^2-a^2b^2-b^2(x_{i-1}+1)^2-a^2\left(y_{i-1}+\frac{1}{2}\right)^2+$$
$$+a^2b^2=-2a^2y_{i-1}$$

Ⅱ. Цикл по y сверху вниз



$$f_{пр\, i} = b^2(x_{i-1}+\tfrac{1}{2})^2 + a^2(y_{i-1}-1)^2 - a^2b^2;$$

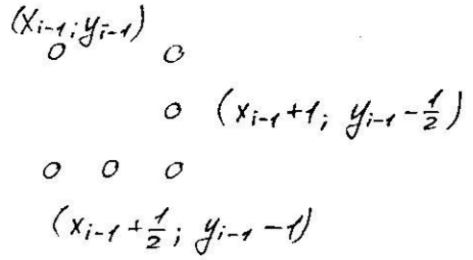
$$f_{пр\, i} = \begin{cases} <0 \Rightarrow M \text{ внутри} \Rightarrow B \\ >0 \Rightarrow M \text{ снаружи} \Rightarrow A \end{cases}$$

$$df = f_i - f_{i-1} = b^2(x_{i-1}+\tfrac{1}{2})^2 + a^2(y_{i-1}-1)^2 - a^2b^2 - b^2(x_{i-1}+\tfrac{1}{2})^2 - a^2y_{i-1}^2 + a^2b^2 = -2a^2y_{i-1} + a^2$$

Если выбрана т.B, то пробную функцию надо скорректировать, т.к. для случая A пробная точка была бы: $(x_{i-1}-\frac{1}{2}; y_{i-1}-1)$, а для B: $(x_{i-1}+\frac{1}{2}; y_{i-1}-1)$.

$$\Delta f = b^2(x_{i-1}+\tfrac{1}{2})^2 + a^2(y_{i-1}-1)^2 - a^2b^2 - b^2(x_{i-1}-\tfrac{1}{2}) - a^2(y_{i-1}-1)^2 + a^2b^2 = 2b^2x_{i-1}$$

Переход от I к II



$$\Delta f = b^2(x_{i-1}+\tfrac{1}{2})^2 + a^2(y_{i-1}-1)^2 - a^2b^2 - b^2(x_{i-1}+1)^2 - a^2(y_{i-1}-\tfrac{1}{2})^2 + a^2b^2 =$$
$$= b^2(x_{i-1}^2 + x_{i-1} + \tfrac{1}{4}) + a^2(y_{i-1}^2 - 2y_{i-1} + 1) - b^2(x_{i-1}^2 + 2x_{i-1} + 1) - a^2(y_{i-1}^2 - y_{i-1} + \tfrac{1}{4}) =$$
$$= b^2(-x_{i-1} - \tfrac{3}{4}) + a^2(-y_{i-1} + \tfrac{3}{4}) = \tfrac{3}{4}(a^2 - b^2) - (b^2x_{i-1} + a^2y_{i-1})$$

Первый шаг

$i-1$: $x=0$, $b=y$ $\Rightarrow$ i: $f_{пр\, i} = b^2 + a^2(b-\frac{1}{2})^2 - a^2b^2 = b^2 - a^2b + \frac{a^2}{4}$; ...

$$f_i - f_{i-1} = 2b^2x_{i-1} + b^2 \Rightarrow f_i = f_{i-1} + 2b^2x_{i-1} + b^2$$

Брезейнхем

$$\Delta_i = (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 \qquad 4$$

1) $\Delta_i < 0 \Rightarrow$ пиксель лежит внутри окр.
   Выбираем диаг. или горизонт. пикс. (случай 1 или 2)
2) $\Delta_i = 0 \Rightarrow$ диаг. пиксель лежит на окр. (шаг по диагонали)
3) $\Delta_i > 0 \Rightarrow$ диаг. пиксель лежит вне окр.
   Выбираем диаг. или вертик. пиксель (случай 3 или 4)

Требования:
Если рисуете 1/8 окружности и зеркалите - нужно переделать брезенхем, чтобы обрабатывать только 2 случая

Спектр эллипсов должен быть концентрическим - они имеют общий центр и один и тот же эксцентриситет

x+=step
y+=step*rb/ra