Examen final de

Fundamentos Lógicos y Algebraicos

– Parte I: Reescritura –

19 de Noviembre de 2018

El siguiente SRT (terminante) $\mathcal{R}$ permite extender la operación de suma sobre números naturales representados mediante la notación de Peano a números *enteros* donde un número negativo $-n$ se representa como $p^n(0)$. Las reglas son:

$$add(0,n) \rightarrow n \tag{1}$$
$$add(s(m),n) \rightarrow s(add(m,n)) \tag{2}$$
$$add(p(m),n) \rightarrow p(add(m,n)) \tag{3}$$

donde m y n son variables.

1. **(15 %)** Obtener la forma normal de la expresión $add(s(0), p(p(0)))$, indicando en cada paso la posición del redex contraido, la regla aplicada y la sustitución de ajuste empleada.

2. **(25 %)** El SRT $\mathcal{R}$, ¿es localmente confluente? ¿Y confluente? Justifica tu respuesta.

La representación anterior tiene el inconveniente de que un entero admite un número *infinito* de representaciones resultantes de aplicar las funciones s o p a 0 en distintos órdenes. Por ejemplo, 1 puede representarse como $s(0)$, pero también como $p(s(s(0)))$, $s(p(s(0)))$, $s(p(s(p(s(0)))))$, etc. Con el fin de obtener una *representación normalizada* podemos añadir las siguientes reglas:

$$p(s(n)) \rightarrow n \tag{4}$$
$$s(p(n)) \rightarrow n \tag{5}$$

que *colapsan* todas esas representaciones en una única que sólo emplea s y 0 (para números positivos) y p y 0 (para números negativos).

Se obtiene así un nuevo SRT $\mathcal{R}'$ que contiene las reglas (1) a (5). Se pide:

3. **(10 %)** Comprobar que la adición de las reglas (4)-(5) mejora la representación de valores enteros mostrando la secuencia de normalización de $add(s(0), p(p(0)))$ con $\mathcal{R}'$ (indicar qué reglas se han utilizado).

4. **(50 %)** El SRT $\mathcal{R}'$ es *terminante* y puede ser útil para mejorar el uso de $\mathcal{R}$, pero ¿tiene pares críticos triviales?¿Es débilmente ortogonal? ¿Es localmente confluente?¿Y confluente? Justificar la respuesta enumerando los resultados (o contraejemplos) en que te apoyas y realizando los cálculos auxiliares necesarios para aplicarlos.