Práctica 2
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: métodos iterativos

27 de enero de 2014

Índice

1. Introducción

En matemáticas computacionales, un método iterativo intenta resolver un problema (por ejemplo, encontrar la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones) encontrando aproximaciones sucesivas a la solución partiendo de una estimación inicial. Este método aproximativo contrasta con los métodos directos, que tratan de resolver el problema mediante una sucesión finita de operaciones y, en ausencia de errores de redondeo, darían una solución exacta (como la resolución de un sistema de ecuaciones lineales A$\vec{x} = \vec{b}$ por eliminación gaussiana). Los métodos iterativos substituyen a los directos cuando estos no son programables o se prevee tengan un alto coste o acumulen excesivo error, pero también han demostrado su posible ventaja en la resolución de problemas lineales que involucran un gran número de variables (cientos, miles, millones...) porque la precisión de la solución puede ser determinada sin necesitar para ello un alto número de iteraciones.

Estudiaremos dos métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: el método de Jacobi y el de Gauss-Seidel. En ambos casos necesitamos que el sistema sea compatible y determinado: *el mismo número de ecuaciones que de incógnitas* y que la matriz de coeficientes tenga *rango máximo*. Además, **todos los elementos de la diagonal de la matriz de coeficientes deben ser no nulos**.

2. El método de Jacobi

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales que satisface las hipótesis antes mencionadas. Supongamos que su expresión matricial es

$$\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}.$$

Consideremos la siguiente descomposición de la matriz de coeficientes A:

$$\mathsf{A} = \mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U},$$

donde la matriz L es la «parte triangular inferior» de A, U es la «parte triangular superior» de A y D es la «parte diagonal» de A. Veamos un ejemplo con el objetivo de aclarar esta descomposición:

Ejemplo 1. Tomamos la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Entonces $\mathsf{A} = \mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}$, donde

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos la siguiente sucesión de equivalencias:

$$\begin{aligned} \text{El vector } \vec{x} \text{ es una solución del sistema } \mathsf{A}\vec{x} = \vec{b} &\Leftrightarrow (\mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U})\vec{x} = \vec{b} \\ &\Leftrightarrow \mathsf{D}\vec{x} = \vec{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{U})\vec{x} \\ &\Leftrightarrow \vec{x} = \mathsf{D}^{-1}[\vec{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{U})\vec{x}] \end{aligned} \tag{1}$$

Notamos que D es invertible porque los elementos de su diagonal son no nulos (por hipótesis). Así D^{-1} puede calcularse fácilmente porque es una matriz diagonal: D^{-1} es una matriz diagonal que tiene como entradas de la diagonal los inversos de los elementos respectivos de la diagonal de D.

El método de Jacobi es una técnica iterativa basada en la igualdad (1). Consta de los siguientes pasos: tomamos una aproximación inicial de la solución $\vec{x}_0$, la sustituimos en el primer miembro de (1) y calculamos otra aproximación $\vec{x}_1$, la sustituimos en el primer miembro de (1) y calculamos otra aproximación $\vec{x}_2$, y así sucesivamente. Haciendo esto, obtenemos una sucesión de vectores $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2, \ldots$ tal que

$$\vec{x}_{k+1} = \mathsf{D}^{-1}[\vec{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{U})\vec{x}_k], \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

El hecho importante aquí es la siguiente propiedad:

Proposición 1. Si esta sucesión de vectores es convergente, entonces el vector límite es una solución del sistema de ecuaciones lineales.

La demostración de esta propiedad es muy sencilla: sea $\vec{v}$ el vector límite de la sucesión $(\vec{x}_k)$. Tomando límites a ambos lados de la igualdad (1), obtenemos $\vec{v} = \mathsf{D}^{-1}[\vec{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{U})\vec{v}]$, que es equivalente a decir que $\vec{v}$ es una solución del sistema de ecuaciones lineales (teniendo en cuenta la anterior sucesión de equivalencias).

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} 10x + 3y + z & = & 14 \\ 2x - 10y + 3z & = & -5 \\ x + 3y + 10z & = & 14 \end{array}\right\},$$

La matriz de coeficientes de este sistema es la matriz A de el ejemplo 1. La relació de recurrencia (2) es, en este caso:

$$\vec{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}}_{\mathsf{D}^{-1}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L+U}} \vec{x}_k \right)$$

Aplicamos ahora el método de Jacobi eligiendo un vector inicial cualquiera. Tomamos, por ejemplo, $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}_0 \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1/2 \\ 7/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos ahora $\vec{x}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &= \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}_1 \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1/2 \\ 7/5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 111/100 \\ 6/5 \\ 111/100 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Queremos continuar haciendo iteraciones para «ver» si el proceso es convergente o no. Con Scilab es más fácil:

```
-->A=[10 3 1; 2 -10 3; 1 3 10];
-->D=diag([diag(A)])
 D  =
    10.    0.     0.
    0.   - 10.    0.
    0.     0.     10.
-->L=tril(A)-D
 L  =
    0.    0.    0.
    2.    0.    0.
    1.    3.    0.
-->U=triu(A)-D
 U  =
    0.    3.    1.
    0.    0.    3.
    0.    0.    0.
```

Con la ayuda de las funciones **diag**, **tril** y **triu** hemos calculado fácilmente las matrices L, D y U.

```
-->F=inv(D)
 F  =
    0.1    0.     0.
    0.   - 0.1    0.
    0.     0.     0.1
-->R=L+U
 R  =
    0.    3.    1.
    2.    0.    3.
    1.    3.    0.
-->x0=[0; 0; 0];x1=F*(b-R*x0)
 x1  =
    1.4
    0.5
    1.4
-->x2=F*(b-R*x1)
 x2  =
    1.11
    1.2
    1.11
-->x3=F*(b-R*x2)
 x3  =
    0.929
    1.055
```

```
    0.929
-->x4=F*(b-R*x3)
 x4  =
    0.9906
    0.9645
    0.9906
-->x5=F*(b-R*x4)
 x5  =
    1.01159
    0.9953
    1.01159
-->x6=F*(b-R*x5)
 x6  =
    1.000251
    1.005795
    1.000251
```

«Vemos» que el proceso parece ser convergente al vector $(1, 1, 1)$. Podéis comprobar que este es, de hecho, una solución del sistema.

Podemos hacer lo mismo pero usando un código de Scilab más eficiente (más corto) (con la ayuda de la función **for**):

```
-->for i=1:6
-->x=F*(b-R*x);
-->end;

-->x
 x  =
    1.000251
    1.005795
    1.000251
```

El vector que nos retorna después del bucle es, directamente, $\vec{x}_6$. Si queremos estar «más seguros» de la convergencia, podemos aplicar más iteraciones:

```
-->for i=1:50
-->x=F*(b-R*x);
-->end;

-->x
 x  =
    1.
    1.
    1.
```

3. El método de Gauss-Seidel

Este método es una ligera modificación del método de Jacobi. En la mayoría de los casos, el número de iteraciones necesario para obtener una solución aproximada es más pequeño que para el método de Jacobi.

Dado un sistema de ecuaciones lineales $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ (que satisfaga la hipótesis establecida a comienzos de la sección), se usa la misma descomposición de la matriz A :

$$\mathsf{A} = \mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}.$$

Pero ahora rescribimos la igualdad $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ como

$$(\mathsf{L} + \mathsf{D})\vec{x} = \vec{b} - \mathsf{U}\vec{x}. \tag{3}$$

Esta es la igualdad crucial del método de Gauss-Seidel. Comenzamos con un vector inicial cualquiera $\vec{x}_0$ y calculamos $\vec{x}_1$ de manera que

$$(\mathsf{L} + \mathsf{D})\vec{x}_1 = \vec{b} - \mathsf{U}\vec{x}_0.$$

Entonces, calculamos $\vec{x}_2$ de manera que

$$(\mathsf{L} + \mathsf{D})\vec{x}_2 = \vec{b} - \mathsf{U}\vec{x}_1,$$

y así sucesivamente: para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$ calculamos $\vec{x}_{k+1}$ de manera que

$$(\mathsf{L} + \mathsf{D})\vec{x}_{k+1} = \vec{b} - \mathsf{U}\vec{x}_k \tag{4}$$

Como la matriz L+D es triangular inferior, las componentes del vector $\vec{x}_{k+1}$ se calculan a partir de las componentes de $\vec{x}_k$ por **sustitución progresiva**. Como en el caso del método de Jacobi, si la sucesión de vectores $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1, \ldots$ es convergente, entonces el vector límite es la solución del sistema. Aclaremos estos hechos con un ejemplo.

Ejemplo 3. Aplicaremos el método de Gauss-Seidel al sistema del ejemplo 2.

$$\mathsf{L} + \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Comenzamos también con el vector inicial $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$. La primera iteración es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}+\mathsf{D}} \vec{x}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_0} \tag{5}$$

Si llamamos

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

la igualdad (5) se puede escribir como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}}_{\text{L+D}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Y este es un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es triangular inferior:

$$\left.\begin{array}{rcl} 10x & = & 14 \\ 2x - 10y & = & -5 \\ x + 3y + 10z & = & 14 \end{array}\right\}.$$

Ahora, por sustitución progresiva obtenemos $x = 7/5$, $y = 39/50$ y $z = 513/500$, o sea:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 39/50 \\ 513/500 \end{bmatrix}.$$

La segunda iteración es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}}_{\text{L+D}} \vec{x}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7/5 \\ 39/50 \\ 513/500 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_1} \tag{6}$$

Si llamamos ahora

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

la anterior igualdad puede escribirse como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}}_{\text{L+D}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5317/500 \\ -4039/500 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Y este es un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es triangular inferior:

$$\left.\begin{array}{rcl} 10x & = & 5317/500 \\ 2x - 10y & = & -4039/500 \\ x + 3y + 10z & = & 14 \end{array}\right\}.$$

Ahora, por sustitución progresiva, obtenemos $x = \frac{5317}{5000}$, $y = \frac{3189}{3125}$ y $z = \frac{246879}{250000}$, es decir:

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 5317/5000 \\ 3189/3125 \\ 246879/250000 \end{bmatrix}.$$

Y así sucesivamente...

Hagamoslo con Scilab. Primero, hemos de **ejecutar** el fichero *SustitucionProgresiva.sci*, donde hemos definido una función, **SustitucionProgresiva**, que calcula la solución **por sustitución progresiva** de un sistema T$\vec{x} = \vec{b}$, donde T es una matriz triangular inferior invertible. La sintaxis es **SustitucionProgresiva(*T*,*b*)**, donde *T* es la matriz de coeficientes y *b* es el vector de términos independientes.

```
-->M=L+D; x0=[0; 0; 0];
-->x1=SustitucionProgresiva(M,b-U*x0)
 x1  =
    1.4
    0.78
    1.026
-->x2=SustitucionProgresiva(M,b-U*x1)
 x2  =
    1.0634
    1.02048
    0.987516
-->x3=SustitucionProgresiva(M,b-U*x2)
 x3  =
    0.9951044
    0.9952757
    1.0019069
-->x4=SustitucionProgresiva(M,b-U*x3)
 x4  =
    1.0012266
    1.0008174
    0.9996321
-->x5=SustitucionProgresiva(M,b-U*x4)
 x5  =
    0.9997916
    0.9998480
    1.0000665
-->x6=SustitucionProgresiva(M,b-U*x5)
 x6  =
    1.000039
    1.0000277
    0.9999878
```

Con la función **for** podemos efectuar más iteraciones, si queremos:

```
-->x=x0;

-->for(i=1:50) x=SustitucionProgresiva(M,b-U*x); end;
```

```
-->x
 x  =
    1.
    1.
    1.
```

4. Criterio de convergencia

Es posible que, cuando se aplique el método de Jacobi o Gauss-Seidel, la sucesión de vectores obtenida sea divergente. No obstante, cuando la matriz de coeficientes es de un tipo especial, podemos garantizar la convergencia de ambos métodos.

Definición 1. Una matriz cuadrada A es **estrictamente diagonalmente dominante** (por filas) si en todas las filas el valor absoluto del elemento de la diagonal es más grande que la suma de los valores absolutos del resto de los elementos de esta fila. Es decir, para todo i

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|;$$

o (por columnas) si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$$

Cuando la matriz de coeficientes no es estrictamente diagonal dominante (ni por filas ni por columnas) a veces es posible manipular el sistema (multiplicándolo por matrices elementales) para obtener un sistema equivalente cuya matriz de coeficientes sí sea estrictamente diagonalmente dominante. No vamos a indicar aquí como conseguirlo, pero es interesante que ensayes métodos (permutar filas o columnas, multiplicar o dividir una fila o una columna por alguna cantidad...) pues es la condición que asegura la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel:

Teorema 1. Si una matriz cuadrada A es estrictamente diagonalmente dominante, entonces los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes.

Nota 1: Comprobando que la matriz cuadrada A es estrictamente diagonalmente dominante quedan además garantizadas todas las condiciones iniciales asumidas en la Sección 1: el sistema es *compatible y determinado* porque A tiene rango máximo y las *entradas diagonales* no pueden ser nulas!

Nota 2: Si la matriz original no es estrictamente diagonalmente dominante pero has encontrado alguna manipulación del sistema en la que la matriz de coeficientes *sí es estrictamente diagonalmente dominante*, puedes resolver ese nuevo sistema con los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel pues está garantizada su convergencia.

Nota 3: En caso contrario, es decir, cuando la matriz “no puede ser estrictamente diagonalmente dominante", los métodos iterativos estudiados pueden ser caóticos. Como ejemplo de este caso aplica el método de Jacobi con la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e intenta deducir a qué “tiende” el vector de soluciones $\vec{x}_k$.