Práctica 1
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: métodos directos

27 de enero de 2014

Índice

1. Operaciones elementales por filas

Sabemos que hay tres tipos de operaciones elementales por filas:

1. Intercambio de filas: una fila de la matriz se puede intercambiar con otra.
2. Multiplicación de una fila: cada elemento de una fila puede ser multiplicado por una constante no nula.
3. Suma de una fila: una fila puede ser sustituida por la suma de esta fila y un múltiplo de otra fila.

Los comandos de Scilab que se pueden utilizar para efectuar estas operaciones elementales en una matriz A son los siguientes:

1. Intercambio de filas aplicado a las filas i y j:

```
A ([i , j ],:) = A ([j , i ],:)
```

2. La fila i-ésima se multiplica por p:

```
A (i ,:) = p*A (i ,:)
```

3. La fila i se cambia por la suma de la fila i y p veces la fila j:

```
A (i ,:) = A (i ,:) + p *A (j ,:)
```

Ejemplo 1. Consideramos la siguiente matriz

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 9 \\ -4 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Efectuaremos, utilizando Scilab, las siguientes operaciones elementales:

1. intercambiamos las filas 1 y 3,
2. multiplicamos por $1/2$ la segunda fila,
3. sumamos la primera fila a la segunda.

La secuencia de comandos utilizados y las salidas obtenidas son:

```
-->A=[0 -2 3 9;-4 6 0 -4;2 -5 5 17]
 A  =

    0.  - 2.    3.    9.
  - 4.    6.    0.  - 4.
    2.  - 5.    5.    17.

-->B=A;

-->B([1,3],:)=B([3,1],:)
 B  =

    2.  - 5.    5.    17.
  - 4.    6.    0.  - 4.
    0.  - 2.    3.    9.

-->C=B;

-->C(2,:)=(1/2)*C(2,:)
 C  =
```

```
   2.  - 5.    5.    17.
 - 2.    3.    0.  - 2.
   0.  - 2.    3.    9.

-->D(2,:)=D(2,:)+D(1,:)
 D  =

   2.  - 5.    5.    17.
   0.  - 2.    5.    15.
   0.  - 2.    3.    9.
```

2. Forma escalonada reducida de una matriz

La función **rref** proporciona la forma escalonada reducida de una matriz cualquiera. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rrrcr} & -2y & +3z & = & 9 \\ -4x & +6y & & = & -4 \\ 2x & -5y & +5z & = & 17 \end{array}\right\}$$

cuya matriz ampliada es la del ejemplo 1. Calculamos ahora la forma escalonada reducida de esta matriz:

```
-->A=[0 -2 3 9;-4 6 0 -4;2 -5 5 17];

-->rref(A)
 ans  =

   1.    0.    0.    1.
   0.    1.    0.    0.
   0.    0.    1.    3.
```

Por tanto la solución única del sistema es:

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 3.$$

3. Resolución de sistemas lineales con el operador $\backslash$

3.1. Descripción del operador $\backslash$

Un procedimiento comúnmente utilizado para resolver un sistema de ecuaciones lineales A$\vec{x} = \vec{b}$ con Scilab consiste en introducir la matriz de coeficientes A y el vector de términos independientes $\vec{b}$ y escribir A\b. Este operador funciona de la siguiente manera:

1. Si el sistema es compatible determinado entonces A\b proporciona la solución única del sistema.

2. Si el sistema es compatible indeterminado entonces A\b proporciona una de las soluciones (elige una con, a lo sumo, r componentes no nulas, donde r es el rango de A).

3. Si el sistema es incompatible Scilab calcula un vector, llamado **aproximación por mínimos cuadrados** de la solución, es decir, un vector $\vec{x}'$ tal que el valor de la norma $||\mathrm{A}\vec{x}' - \vec{b}||$ es el mínimo posible de entre todos los posibles valores de $\vec{x}'$ (notamos que este vector no es necesariamente único); Scilab elige uno con, a lo sumo, r componentes no nulas, donde r es el rango de A.

Notamos que, si el sistema es compatible, Scilab proporciona una de las soluciones. Si el sistema no es compatible, Scilab nos presenta un vector que **no es una solución**. Esto quiere decir que debemos ser muy cuidadosos con el operador \.

Ejemplo 3. Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} & -2y & +3z & = & 9 \\ -4x & +6y & & = & -4 \\ 2x & -5y & +5z & = & 17 \end{array}\right\}$$

Utilizaremos el operador \:

```
-->A=[0 -2 3; -4 6 0; 2 -5 5]; b=[9; -4; 17];

-->x=A\b
 x  =

    1.
    0.
    3.
```

Ésta es la única solución del sistema lineal porque A es una matriz cuadrada invertible (tiene rango máximo):

```
-->rank(A)
 ans  =

    3.
```

Ejemplo 4. Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & +2y & +2z & = & 3 \end{array}\right\}$$

que es, evidentemente, incompatible

```
-->A=[1 1 1; 1 1 1; 2 2 2]; b=[1; 2; 3];

-->x=A\b
warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond =    0.0000D+00

 x  =

    1.5
    0.
    0.
```

Scilab da un resultado que no es una solución del sistema.

Ejemplo 5. Consideramos el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & +2y & +2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

que tiene, evidentemente, una cantidad infinita de soluciones.

```
-->A=[1 1 1; 1 1 1; 2 2 2]; b=[1; 1; 2];

-->x=A\b
warning :
matrix close to singular or badly scaled. rcond =    0.0000D+00

 x  =

    1.
    0.
    0.
```

En este caso hemos obtenido una solución particular del sistema. De hecho,

```
-->A*x
 ans  =

    1.
    1.
    2.
```

3.2. Solución general de un sistema utilizando \ y kernel

Si un sistema tiene una cantidad infinita de soluciones, hemos visto que el operador \ proporciona sólo una de las soluciones del sistema. No obstante, es posible obtener **todas** las soluciones de una manera fácil calculando el **núcleo** de la matriz de coeficientes. Primero debemos aclarar este concepto:

El **núcleo** de una matriz A es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A, es decir, $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$. Por ejemplo, el núcleo de la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 10 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El núcleo de una matriz se puede calcular fácilmente con Scilab utilizando la función **kernel**:

```
-->A=[1 2 -3; 2 4 -6; 5 10 -15];

-->kernel(A)
 ans  =

  - 0.1195229     0.9561829
    0.8440132   - 0.0439019
    0.5228345     0.2894597
```

El núcleo de la matriz es el conjunto de combinaciones lineales de los vectores columna de la matriz obtenida, es decir:

$$\mathrm{Ker}\,\mathsf{A} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -0{,}1195229 \\ 0{,}8440132 \\ 0{,}5228345 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0{,}9561829 \\ -0{,}0439019 \\ 0{,}2894597 \end{bmatrix} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Esto también puede expresarse diciendo que los vectores columna de la matriz forman un **sistema de generadores** del núcleo).

Ahora enunciaremos un teorema que muestra como obtener la solución general de un sistema de ecuaciones lineales a partir de

- una solución particular, y
- el núcleo de la matriz de coeficientes.

Teorema. Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema de ecuaciones lineales compatible y sea $\vec{x}_0$ una solución particular. Entonces la solución general del sistema es:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

donde $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es un sistema de generadores del núcleo de A.[1]

Ejemplo 6. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Aplicamos, con Scilab, el operador \ para estudiar la compatibilidad del sistema:

```
-->A=[1 0 2 3; 7 1 1 1 ; 8 1 3 4; 9 1 5 7]; b=[6; 10; 16; 22];

-->x=A\b
warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond =    2.2204D-18

 x  =

    1.2
    0.
    0.
    1.6

-->clean(A*x-b)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
    0.
```

De los resultados anteriores podemos ver que el sistema es compatible y que el vector $\vec{x}_0 = (1{,}2, 0, 0, 1{,}6)$ es una solución particular. Ahora calculamos el núcleo de la matriz de coeficientes:

```
-->kernel(A)
 ans  =
```

[1] La demostración es muy fácil: $\vec{x}$ es una solución del sistema $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} - A\vec{x}_0 = \vec{b} - A\vec{x}_0$ $\Leftrightarrow$ $A(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$ (porque $A\vec{x}_0 = \vec{b}$) $\Leftrightarrow$ $\vec{x} - \vec{x}_0$ pertenece al núcleo de A.

```
- 0.1490641  - 0.0418627
  0.8434185    0.5144634
  0.4510273  - 0.7061368
- 0.2509968    0.4847121
```

Esto quiere decir que el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones y que su solución general es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1{,}2\\0\\0\\1{,}6\end{bmatrix}}_{\vec{x}_0} + \lambda_1 \begin{bmatrix}-0{,}1490641\\0{,}8434185\\0{,}4510273\\-0{,}2509968\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}-0{,}0418627\\0{,}5144634\\-0{,}7061368\\0{,}4847121\end{bmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 7. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales (con la misma matriz de coeficientes que antes)

$$\begin{bmatrix}1&0&2&3\\7&1&1&1\\8&1&3&4\\9&1&5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\5\end{bmatrix}.$$

Como antes, utilizando \ para estudiar la compatibilidad del sistema:

```
-->b=[1; 2; 3; 5];

-->clean(A*x-b)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
  - 1.
```

De estos resultados vemos que el operador \ nos da un vector que **no es una solución**. Esto implica que **el sistema es incompatible**.

Ejemplo 8. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

Como antes, aplicamos primero el operador \:

```
-->A=[1 2 3; -1 0 1; 0 3 1]; b=[1; 2; 3];
```

```
-->x=A\b
 x  =

  - 1.7
    0.9
    0.3

-->clean(A*x-b)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
```

Los resultados muestran que el sistema es compatible y que el vector $\vec{x}_0 = (-1{,}7, 0{,}9, 0{,}3)$ es una solución. Ahora calculamos el núcleo de la matriz de coeficientes:

```
-->kernel(A)
 ans  =

     []
```

Esto quiere decir que el núcleo es trivial, es decir, $\mathrm{Ker}\,\mathsf{A} = \{\vec{0}\}$. Por consiguiente la única solución del sistema es $\vec{x}_0$, la obtenida utilizando $\backslash$.

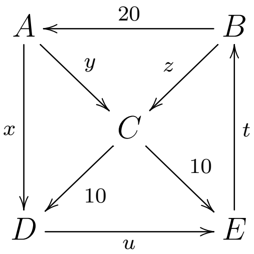
4. Redes de flujo

Cuando investigamos el flujo de una cantidad a través de una red nos aparecen sistemas de ecuaciones lineales. Estas redes las podemos encontrar en diversos campos de la ciencia, economía, estadística o ingeniería. Dos ejemplos de este tipo son los patrones de flujo de tráfico a través de una ciudad y la distribución de productos de los fabricantes a los consumidores por medio de una red de distribuidores y vendedores.

Una red consta de un conjunto de puntos, llamados nodos (o vértices), y arcos dirigidos que conectan todos o parte de los nodos. El flujo está indicado por un número o una variable. Un flujo de redes tiene que cumplir las siguientes condiciones:

- El flujo total que entra a un nodo es igual al flujo total que sale del nodo.
- El flujo total que entra dentro de la red es igual al flujo total que sale de la red.

Ejemplo 9. Consideremos una pequeña red cerrada de tubos a través de los cuales fluye un líquido como se describe en el siguiente grafo:



Los arcos representan los tubos, y las intersecciones entre los tubos corresponden a los nodos de la red. El peso de cada arco indica la cantidad de litros de líquido que fluye por hora y las flechas indican las direcciones de los flujos.

A partir de las condiciones básicas de todo flujo de redes y de la descripción de la red concreta, podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones: cada nodo da lugar a una ecuación lineal.

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Nodo } A: & x+y & = & 20 \\ \text{Nodo } B: & z+20 & = & t \\ \text{Nodo } C: & y+z & = & 20 \\ \text{Nodo } D: & x+10 & = & u \\ \text{Nodo } E: & u+10 & = & t \end{array}\right\},$$

Para resolver el sistema, escribimos su matriz ampliada

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -10 \end{bmatrix}.$$

y calculamos, con Scilab, la forma escalonada reducida de M:

```
-->M=[1 1 0 0 0 20;0 0 1 -1 0 -20;0 1 1 0 0 20;
-->       1 0 0 0 -1 -10;0 0 0 -1 1 -10]); rref(M)
 ans  =

    1.    0.    0.    0.  - 1.  - 10.
    0.    1.    0.    0.    1.    30.
    0.    0.    1.    0.  - 1.  - 10.
    0.    0.    0.    1.  - 1.    10.
    0.    0.    0.    0.    0.    0.
```

Como se puede ver, el sistema es compatible indeterminado y la solución paramétrica del sistema es: $x = -10 + \lambda$, $y = 30 - \lambda$, $z = -10 + \lambda$, $t = 10 + \lambda$, $u = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Como los valores de las incógnitas son litros de líquido, han de cumplir $x, y, z, t, u \geq 0$ y, por lo tanto, $10 \leq \lambda \leq 30$. Concluimos, entonces, que hay una cantidad infinita de posibilidades para la distribución de flujos (una para cada valor de λ en el intervalo $[10, 30]$).