Práctica 5

Hoja de actividades

Curso 2013–2014

Actividad 1. *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcula la matriz A^2.
b) Sin hacer ningún cálculo, determina quién es la inversa de A.

Solución
a) Introducimos la matriz A y calculamos A^2.

```
-->A=[-2 4 2 1;4 2 1 -2;2 1 -2 4;1 -2 4 2]
 A  =
   - 2.     4.     2.     1.
     4.     2.     1.   - 2.
     2.     1.   - 2.     4.
     1.   - 2.     4.     2.

-->A^2
 ans  =

     25.     0.      0.      0.
     0.      25.     0.      0.
     0.      0.      25.     0.
     0.      0.      0.      25.
```

b) En virtud del resultado anterior, se tiene que $A \cdot A = 25I$, siendo I la identidad de orden 4. Así pues, $A \cdot (\frac{1}{25}A) = I$. Por consiguiente, $A^{-1} = \frac{1}{25}A$.

Actividad 2. *Calcula de dos formas distintas las inversas de las siguientes matrices. Si alguno de los resultados que has obtenido no es correcto explica por qué.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Solución
Introducimos la matriz A y calculamos la inversa con la instrucción inv

```
-->A=[1 -1 2;-1 2 -1;2 -3 1]
 A  =

     1.   - 1.     2.
   - 1.     2.   - 1.
     2.   - 3.     1.
```

```
-->inv(A)
 ans  =

    0.5    2.5    1.5
    0.5    1.5    0.5
    0.5  - 0.5  - 0.5
```

Esta matriz es la inversa de A.

Ahora calcularemos la inversa de A obteniendo la escalonada reducida de la matria $(A\ I)$

```
-->rref([A eye(3,3)])
 ans  =

    1.    0.    0.    0.5    2.5    1.5
    0.    1.    0.    0.5    1.5    0.5
    0.    0.    1.    0.5  - 0.5  - 0.5
```

Dado que la reducida de A es la identidad, la inversa de A es bloque determinado por las tres últimas columnas de ans, es decir,

```
-->ans(:,4:6)
 ans  =

    0.5    2.5    1.5
    0.5    1.5    0.5
    0.5  - 0.5  - 0.5
```

Introducimos la matriz B

```
->B=[2 1 0 1;1 1 1 2; 2 1 3 1;4 3 5 5]
 B  =

    2.    1.    0.    1.
    1.    1.    1.    2.
    2.    1.    3.    1.
    4.    3.    5.    5.

-->inv(B)
       !--error 19
El problema es singular.
```

Este mensaje indica que la matriz B es singular, es decir, no tiene inversa. En efecto, podemos comprobar que B no tiene rango 4:

```
-->rank(B)
 ans  =

    3.
```

Veamos que sucede si utilizamos rref:

```
-->rref([B eye(4,4)])
 ans  =

   1.    0.    0.  - 1.    0.6666667    0.    0.8333333  - 0.5
   0.    1.    0.    3.  - 0.3333333    0.  - 1.6666667    1.
   0.    0.    1.    0.  - 0.3333333    0.    0.3333333    0.
   0.    0.    0.    0.    0.           1.    0.5        - 0.5
```

Ell bloque formado por las 4 primeras columnas de esta matriz es la forma escalonada reducida de B que no es la identidad, por tanto B no es invertible. Observar que este resultado nos indica que el rango de B es 3.

Introducimos la matriz C :

```
-->C=[2 4 6;8 10 12;14 16 18]
 C  =
   2.     4.     6.
   8.     10.    12.
   14.    16.    18.

-->inv(C)
Advertencia :
la matriz esta cerca de la singularidad o mal escalada. rcond =    0.0000D+00
 ans  =

 10^15 *
  - 2.2517998    4.5035996  - 2.2517998
    4.5035996  - 9.0071993    4.5035996
  - 2.2517998    4.5035996  - 2.2517998
```

Este mensaje nos indica que la matriz puede no ser invertible. Para ver si el resultado que nos ha proporcionado es correcto multiplicamos C por dicha matriz

```
-->C*ans
 ans  =

   2.     0.    2.
   8.     0.    0.
   16.    0.    8.
```

Dado que la matriz obtenida no es la identidad, el resultado es incorrecto. Calculando el rango de B, se tiene que

```
-->rank(C)
 ans  =
   2.
```

por lo que podemos concluir que C no es invertible.

Veamos con rref que obtendríamos:

```
-->rref([C eye(3,3)])
 ans  =

   1.    0.  - 1.    0.  - 1.3333333    0.8333333
   0.    1.    2.    0.    1.1666667  - 0.6666667
   0.    0.    0.    1.  - 2.                  1.
```

Como el bloque formado por las tres primeras columnas no es la identidad podemos concluir que C no es invertible.

Actividad 3. *Sea la matriz*

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcula la matriz T tal que $TD = R$ siendo R la forma escalonada reducida de D.
b) Resuelve la ecuación matricial $TX + X = DD^t$.

Solución

a) Para obtener la matriz T calcularemos la forma escalonada reducida de la matriz $(D\ I)$ siendo I la identidad de orden 4.

```
-->D=[7 1 2;4 2 1;0 1 -2;0 4 2]
 D  =

    7.    1.    2.
    4.    2.    1.
    0.    1.  - 2.
    0.    4.    2.
 -->R1=rref([D eye(4,4)])
  R1=

    1.    0.    0.    0.    0.25  - 1.388D-17  - 0.125
    0.    1.    0.    0.    0.      0.2          0.2
    0.    0.    1.    0.    0.    - 0.4          0.1
    0.    0.    0.    1.  - 1.75    0.6          0.475
```

Este resultado nos indica que la reducida de D es la matriz formada por las tres primeras columnas de $R1$ y que la matriz T es la matriz formada por las cuatro últimas columnas de $R1$. Es decir,

```
-->T=R1(:,4:7)
 T  =

    0.    0.25   - 1.388D-17  - 0.125
    0.    0.        0.2                0.2
    0.    0.      - 0.4                0.1
    1.  - 1.75    0.6                0.475
```

Podemos "limpiar"T para que redondee el elemento próximo a cero:

```
-->T=clean(T)
 T  =

    0.    0.25    0.    - 0.125
    0.    0.      0.2     0.2
    0.    0.    - 0.4     0.1
    1.  - 1.75    0.6     0.475
```

b) $TX + X = DD^t \iff (T + I)X = DD^t$. Así pues, si la matriz $(T + I)$ es invertible, podremos despejar X. Comprobamos que $(T + I)$ es invertible viendo que su rango es máximo:

```
-->rank(T+eye(4,4))
 ans  =

   4.
```

Así pues, $X = (T + I)^{-1}DD^t$ que lo calculamos con Scilab:

```
-->X=inv(T+eye(4,4))*D*D'
 X  =

   47.840909    28.568182  - 3.0681818    8.4090909
   30.909091    19.181818  - 1.1818182    7.0909091
 - 7.0909091  - 1.8181818    8.8181818  - 2.9090909
   12.545455    10.909091  - 2.9090909    17.454545
```

Actividad 4. *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 13 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Calcula (a mano) una descomposición LU de A.
b) Resuelve (a mano) el sistema siguiente utilizando la descomposición LU que has obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 2 \\ x - y - z &= -2 \\ -3x + 13y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

c) Calcula con Scilab la descomposición LU de la matriz A. Si no es la misma que has obtenido en el apartado a), explica por qué.
d) Calcula la inversa de A y su determinante utilizando la factorización LU que has obtenido en el apartado anterior. Comprueba que sale el mismo resultado que utilizando las instrucciones inv(A) y det(A), respectivamente.

Solución
a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 13 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 13 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = U$$

Interpretando matricialmente este proceso se tiene que $E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1)A = U$. Despejando A obtenemos que $A = (E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1))^{-1}U$. Por tanto,

$$L = (E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1))^{-1} = E_{21}(1)^{-1}E_{31}(-3)^{-1}E_{32}(-2)^{-1} = E_{21}(-1)E_{31}(3)E_{32}(2) =$$

$$= E_{21}(-1)E_{31}(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}(-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) En primer lugar resolvemos por sustitución progresiva el sistema $L\vec{y} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es:

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -2 + y_1 = 0, \quad y_3 = -2 - 3y_1 - 2y_2 = -2 - 6 = -8.$$

Es decir, $\vec{y} = (2, 0, -8)$.

Ahora resolvemos por sustitución progresiva el sistema $U\vec{x} = \vec{y}$. Esta solución será la solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$z = -8/-4 = 2, \quad y = -z/2 = -2/2 = -1, \quad x = -2 + 3y + 2z = -2 - 3 + 4 = -1.$$

c)

```
-->A=[-1 3 2;1 -1 -1;-3 13 4]
 A  =

  - 1.    3.     2.
    1.  - 1.   - 1.
  - 3.    13.    4.

-->[L,U]=lu(A)
 U  =

  - 3.    13.           4.
    0.    3.3333333   0.3333333
    0.    0.            0.8
 L  =

    0.3333333  - 0.4    1.
  - 0.3333333    1.      0.
    1.           0.      0.
```

La descomposición LU de A que proporciona Scilab no es la misma que la obtenida en el apartado a). Ello es debido a que Scilab utiliza pivotación parcial para calcular la matriz U.

d) Dado que $A = LU$, se tiene que $det(A) = det(L)det(U)$. Lo comprobamos:

```
-->det(L)*det(U)
 ans  =

    8.

-->det(A)
 ans  =

    8.
```

La matriz A es invertible $(det(A) \neq 0)$ y $A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$. Lo comprobamos:

```
-->inv(U)*inv(L)
 ans  =

    1.125    1.75  - 0.125
  - 0.125    0.25    0.125
    1.25     0.5   - 0.25


-->inv(A)
 ans  =

    1.125    1.75  - 0.125
  - 0.125    0.25    0.125
    1.25     0.5   - 0.25
```