Práctica 7
Hoja de actividades

Soluciones

Actividad 1. Determina una solución por mínimos cuadrados de $A\vec{x} = \vec{b}$, construyendo las ecuaciones normales, y calcula el error de la aproximación siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Actividad 2. Encuentra la ecuación $y = \beta_0 + \beta_1 x$ de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos $(2,3)$, $(3,2)$, $(5,1)$ y $(6,0)$. Calcula la norma del vector residual.

Actividad 3. Para medir el rendimiento del motor de un avión durante el despegue de un avión, se midió su posición horizontal cada segundo, desde $t = 0$ hasta $t = 12$. Las posiciones obtenidas fueron 0; $8{,}8$; $29{,}9$; $62{,}0$; $104{,}7$; $159{,}1$; $222{,}0$; $294{,}5$; $380{,}4$; $471{,}1$; $571{,}7$; $686{,}8$ y $809{,}2$. Determina la curva cúbica de mínimos cuadrados $y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$ para éstos datos. Utiliza el resultado para estimar la velocidad del avión cuando $t = 4{,}5$.

Actividad 4. Cuando las ventas mensuales de un cierto producto están sujetas a fluctuaciones a lo largo de la temporada, una curva que aproxima los datos de ventas podría tener la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \sin(\pi x/6)$, donde x es el tiempo en meses. Determina la curva de mínimos cuadrados a lo largo de 6 meses, sabiendo que las fluctuaciones respectivas son: $0{,}80$; $0{,}66$; $0{,}64$; $0{,}73$; $0{,}78$ y $0{,}67$. Calcula la norma del vector residual correspondiente.

Actividad 1

Introducimos la matriz A y el vector columna b en Scilab.

El sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ es INCOMPATIBLE (podemos comprobarlo calculando los rangos: $\begin{cases} \text{rank}(A) = 2 \\ \text{rank}([A\ b]) \overset{*}{=} 3 \end{cases}$
(luego $A \cdot \vec{x} \neq \vec{b}$, para todo $\vec{x}$)

Nos piden que calculemos una solución por mínimos cuadrados (es decir, un vector $\vec{x_M}$ que luego minimice la norma: $\|A \cdot \vec{x_M} - \vec{b}\|$).
Esa solución se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones normales asociado: $\boxed{A^t \cdot A \cdot \vec{x} = A^t \cdot \vec{b}}$

Luego basta con calcular $A^t \cdot A$ y $A^t \cdot b$ y resolver el sistema, utilizando, por ejemplo el operador \ :

```
An = A'*A ↵
bn = A'*b ↵
x = An\bn ↵
```

NOTA: En este caso, el sistema $An \cdot \vec{x} = \vec{bn}$ es COMP. INDET. luego tiene infinitos soluciones. El operador \ nos devuelve 1 de ellas.

Obtenemos $\boxed{x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ← es una solución por mínimos cuadrados del sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

- El error residual es la norma $\|A \cdot \vec{x} - \vec{b}\|$, donde $\vec{x}$ es la solución por mínimos cuadrados.

Con Scilab lo calculamos usando "norm":

```
e=norm(A*x-b) ↵
```

$\rightsquigarrow \boxed{e = 4.4721}$

NOTA: Si calculamos A\b obtenemos también $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ porque el operador "\" aplica mínimos cuadrados.

• Actividad 2

Dados los puntos: (2,3), (3,2), (5,1) y (6,0) nos piden la recta por mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los datos.

La ecuación de la recta será $\boxed{y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x}$ donde β_0 y β_1 son números reales que tenemos que determinar.

Si sustituimos la "x" y la "y" de cada uno de los puntos en la ecuación de la recta, obtenemos un sistema de 4 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}}_{\text{MATRIZ DE DISEÑO (DE LA RECTA)}} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \overset{\text{"y"}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

"x"

Al obtener una solución por mínimos cuadrados de este sistema, estamos obteniendo el β_0 y β_1 de la recta que mejor ajuste esos datos.

Para introducir la matriz de coef. y la columna de T.I. en Scilab, lo más cómodo es hacer:

```
x=[2;3;5;6]
A=[ones(4,1) x]
y=[3;2;1;0]
```

Para hallar la solución por mínimos cuadrados de $A \cdot \vec{z} = \vec{y}$, tendremos que resolver el sistema de ecuaciones normales: $\boxed{A^t \cdot A \cdot \vec{z} = A^t \cdot \vec{y}}$

$\vec{z} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$

An = A' * A $\boxed{\hookleftarrow}$

yn = A' * y $\boxed{\hookleftarrow}$

z = An\yn $\boxed{\hookleftarrow}$ $\rightsquigarrow$ Obtenemos $z = \boxed{\begin{pmatrix} 4.3 \\ -0.7 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$

Luego la recta que mejor ajusta los datos es: $\boxed{y = 4.3 - 0.7 \cdot x}$ (ver gráfica en la última página)

y el error residual cometido es:

e = norm(A*z - y) $\rightsquigarrow$ $\boxed{e = 0.316227}$

NOTA: De nuevo si calculamos $\boxed{\text{A\textbackslash y}}$ obtenemos también la solución por mínimos cuadrados anterior, ya que el operador "\" al ser el sistema $A \cdot z = y$ incompatible aplica el método de mínimos cuadrados.

• Actividad 3

En esta actividad los datos que nos dan corresponden a la posición de un avión en cada segundo del despegue (desde $t=0$ hasta $t=12$). Nos piden calcular la curva cúbica de mínimos cuadrados:

$$\boxed{y = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \beta_2 \cdot t^2 + \beta_3 \cdot t^3}$$

que mejor se ajusta a esos datos.

De nuevo si sustituimos la "t" y la "y" de cada uno de los datos en la ecuación de esa curva obtenemos un sistema de 13 ecuaciones y 4 incógnitas ($\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y β_3). Tenemos que hallar una solución por mínimos cuadrados de este sistema.

Si introducimos el vector de "t" y de "y":

t=[0;1;2;3;4;.....;12] ↵

y=[0;8.8;29.9;.....;809.2] ↵

entonces la matriz de coeficientes del sistema será:

(las funciones que multiplican a los coef. β_i en la ecuación de la curva)

A=[ones(13,1) t t^2 t^3] ↵

y resolvemos por mínimos cuadrados $A \cdot \vec{z} = \vec{y}$:

An=A'*A

yn=A'*y

z=An\yn ⟶ obtenemos
$$\boxed{z = \begin{pmatrix} -0.8557 \\ 4.7024 \\ 5.5553 \\ -0.0273 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \leftarrow \beta_0 \\ \leftarrow \beta_1 \\ \leftarrow \beta_2 \\ \leftarrow \beta_3 \end{matrix}$$

Por tanto, la curva cúbica que mejor

ajuste esos datos será:

$$\boxed{y = -0.8557 + 4.7024 \cdot t + 5.5553 \cdot t^2 - 0.0273 \cdot t^3}$$

(ver gráfica en la última página)

- Nos piden también que estimemos la velocidad del avión cuando $t = 4.5$ segundos

Como la velocidad, v, es la derivada de la posición (y) respecto del tiempo (t), derivando podemos obtener v:

$$v = 4.7024 + 11.1106 \cdot t - 0.0819 \cdot t^2$$

sustituyendo t por 4.5 obtenemos:

$$\boxed{v = 53.041 \text{ m/seg.}}$$

• Actividad 4

De nuevo tenemos unos datos de la forma (x,y) donde "x" es el tiempo en meses (de 1 a 6) e "y" es el dato de ventas de un producto en ese mes. Nos dicen que hallemos la curva de mínimos cuadrados de la forma:

$$\boxed{y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$$

para esos datos.

x = [1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6]

y = [0.8 ; 0.66 ; ..... ; 0.67]

} Introducimos los "x" y los "y" en vectores columna

La matriz de coeficientes del sistema que se obtiene si sustituimos cada par (x,y) de los datos en la ecuación de la curva será:

$$A = [\text{ones}(6,1)\quad x\quad \sin(\underbrace{\%pi}_{\pi \text{ en Scilab}} * x/6)]$$

(SE LLAMA MATRIZ DE DISEÑO)

Resolvemos por mínimos cuadrados $A \cdot \vec{z} = \vec{y}$:

An = A' * A

yn = A' * y

z = An \ yn ⇝ obtenemos

$$\boxed{z = \begin{pmatrix} 0.8144 \\ -0.0144 \\ -0.0814 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \beta_0 \\ \leftarrow \beta_1 \\ \leftarrow \beta_2 \end{matrix}}$$

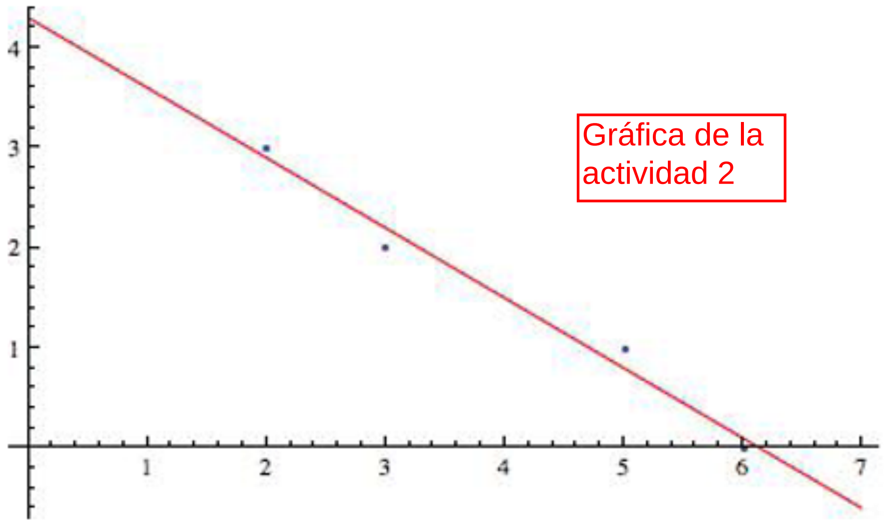
Así, la curva pedida es:

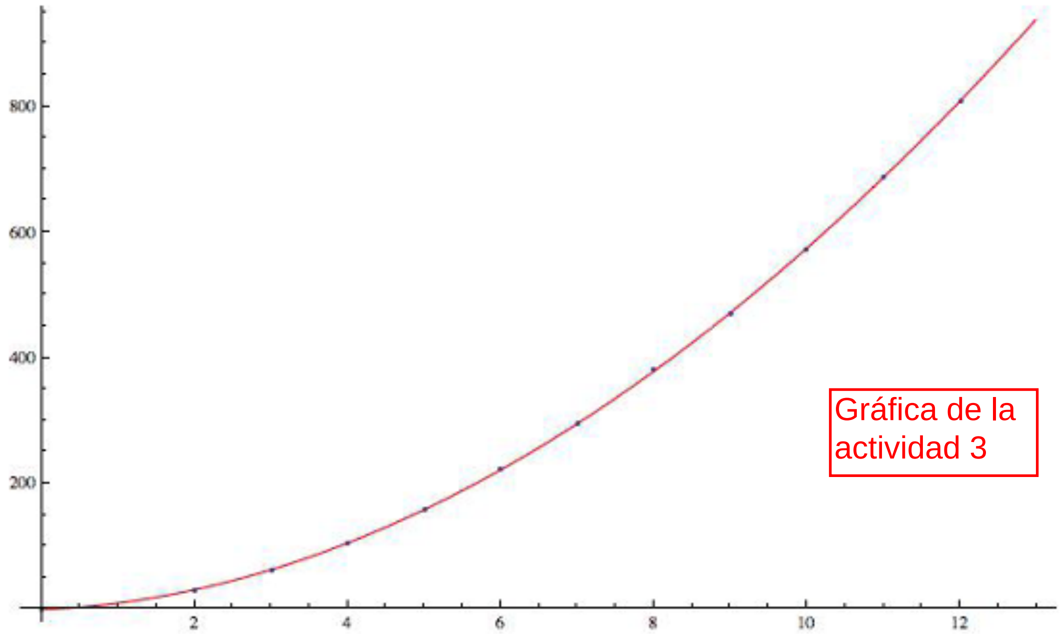
$$\boxed{y = 0.8144 - 0.0144 \cdot x - 0.0814 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$$

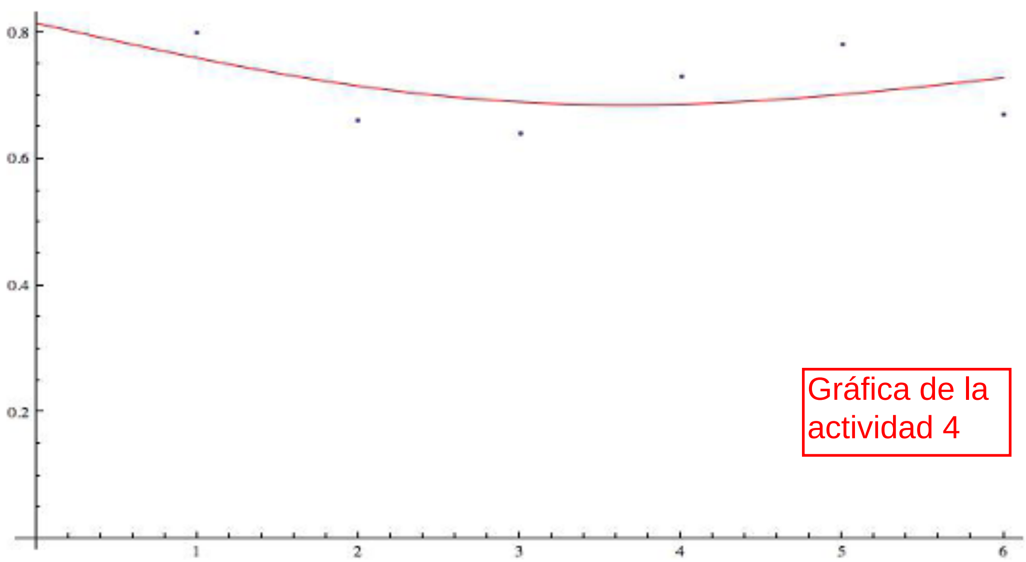
(ver gráfica en la última página)

y el error residual cometido:

e = norm(A*z − y) ⇝ $\boxed{e = 0.13629}$


Gráfica de la actividad 2
1
2
3
4
5
6
7


Gráfica de la actividad 3
200
400
600
800
2
4
6
8
10
12


Gráfica de la actividad 4
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
3
4
5
6