(ex0) Cognoms, Nom:
Àlgebra. Examen de pràctiques (2a part)

Exercici 1. a) Calculeu la descomposició LU de la matriu $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, fent servir la funció `lu` de `scilab`.

b) Calculeu la descomposició LU de la matriu M pas a pas (amb l'`scilab`). (Escriviu les instruccions successives que utilitzeu i el resultat final).

c) Justifiqueu les diferències, si és que n'hi ha, entre els resultats en els apartats a) i b).

```
-->[L1 U1]=lu(M)
 U1  =

    8.    8.    5.
    0.  - 3.    2.5
    0.    0.    1.
 L1  =

    1.     0.    0.
    0.5    1.    0.
    0.5    1.    1.

-->M1=[M eye(M)]
 M1  =

    8.    8.    5.    1.    0.    0.
    4.    1.    5.    0.    1.    0.
    4.    1.    6.    0.    0.    1.

-->M2=M1;M2(2,:)=M2(2,:)-(1/2)*M2(1,:);

-->M2(3,:)=M2(3,:)-(1/2)*M2(1,:);

-->M2
 M2  =

    8.    8.    5.     1.     0.    0.
    0.  - 3.    2.5  - 0.5    1.    0.
    0.  - 3.    3.5  - 0.5    0.    1.

-->M3=M2;M3(3,:)=M3(3,:)-M3(2,:)
 M3  =

    8.    8.    5.     1.     0.    0.
    0.  - 3.    2.5  - 0.5    1.    0.
    0.    0.    1.     0.   - 1.    1.

-->U=M3(:,1:3)
 U  =

    8.    8.    5.
    0.  - 3.    2.5
    0.    0.    1.

-->L=M3(:,4:6)^(-1)
 L  =

    1.     0.    0.
    0.5    1.    0.
    0.5    1.    1.

--> (U==U1)&(L==L1)
ans =
  T T T
  T T T
  T T T
```

Exercici 2. $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 48 & 109 & 114 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 90 \end{bmatrix}$ són la matriu de coeficients i els termes independients del sistema lineal $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$.

Calculeu la solució del sistema utilitzant la comanda \. Escriviu la solució que s'hi obté i justifique si aquesta solució és correcta i si és l'única.

Si la solució no és única calculeu-les totes.

```
-->X=A\B
 X  =

    2.1315789
  - 1.7368421
    1.5526316

-->A*X-B
 ans  =

   1.0D-14 *

    0.1332268
  - 0.0444089
  - 0.3552714
  - 1.4210855

-->clean(ans)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
    0.

La solució és correcta.
És única?

-->rank(A)
 ans  =

    3.

Com es tracta d'un sistema de quatre equacions amb tres incògnites, si que és única.
```

Exercici 3. Dada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

a) És una matriu estocàstica? ¿es regular? Raoneu la resposta.

b) Si té algún vector estacionari, calculeu-lo.

c) Escriviu els tres primers termes de la cadena de Màrkov corresponent, $\{\mathsf{X}_k\}$ quan $\mathsf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.25 \\ 0.7 \end{bmatrix}$.

d) És convergent, aquesta cadena? Justifiqueu la respuesta.

e) Contradiu aquest fet la propietat segons la qual una matriu estocàstica regular és convergent? Justifiqueu la resposta.

```
-->A3=[1  1/2  1/3 \\ 0  1/2  1/3 \\ 0  0  1/3];Y=sum(A3,1)
 Y  =
!   1.    1.    1. !
a) A3 es estoc\'astica. Pero no regular, porque las potencias de una matriz triangular
siguen siendo regulares, así que siempre contienen ceros.

b) Un vector estacionario es una solución del sistema AX=X (o (A-I)X=0):

-->rref([A-eye(3,3)])
 ans  =

    0.    1.    0.
    0.    0.    1.
    0.    0.    0.

 Vector estacionario: (1,0,0).

 c) Tres pirmeras iteraciones

-->x=[0.05;0.25;0.7];


-->for i=2:4 do

-->x(:,i)=A*x(:,i-1);

-->end


-->x
 x  =

    0.05    0.4083333    0.6652778    0.8196759
    0.25    0.3583333    0.2569444    0.1543981
    0.7     0.2333333    0.0777778    0.0259259

c) Aparentemente si que converge. El término x_(20) es

-->for i=5:20 do

-->x(:,i)=A*x(:,i-1);

-->end

-->x(:,20)
 ans  =

    0.9999969
    0.0000031
    6.023D-10

(Podríamos justificarlo bien basándonos en que el valor propio dominante es 1)

d) No hay contradicción, porque se trata de una condición suficiente pero no necesaria.
```

Exercici 4. Siga $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ -30 \end{bmatrix}$ i $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Aplicarem els mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel per a resoldre el sistema lineal $AX = b$, començant amb el vector $\vec{X}_0$.

a) La matriu A és diagonalment dominant? b) Calculeu, amb el mètode de Jacobi les sis primeres iteracions. c) Calculeu, amb el mètode de Gauss-Seidel les sis primeres iteracions. d) Convergeixen, els dos processos? Justifiqueu la resposta.

```
a) y d) A2=[5 1 -1;1 -5 2;1 -2 10];dgA2=diag(A2);t2=abs(dgA2);s1=abs(A2(1,2))+abs(A2(1,3));
s2=abs(A2(2,1))+abs(A2(2,3));s3=abs(A2(3,1))+abs(A2(3,2));s=[s1;s2;s3];t2>=s
 ans  =
! T !
! T !
! T !
Luego A es diagonalmente dominante y ambos métodos convergerán.
b) D2=diag([diag(A2)]);L2=tril(A2)-D2;U2=triu(A2)-D2;TJ2=inv(D2)*(L2+U2);B2=[14;-9;-30];S2=A2\B2
 S2  =
!   2. !
!   1. !
! - 3. !  Es la solución del sistema
X=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->X(:,1)=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->for i=1:6
-->X(:,i+1)=inv(D2)*B2-TJ2*X(:,i)
-->end
X  =
!   0.    2.8    1.84    1.984    2.0096    1.99712    1.999936  !
!   0.    1.8    1.16    1.       1.016     1.00256    1.00032   !
!   0.  - 3.   - 2.92  - 2.952  - 2.9984  - 2.99776  - 2.9992    !
c) X=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->X(:,1)=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->for i=1:6
-->X(:,i+1)=inv(L2+D2)*(B2-U2*X(:,i))
-->end
X  =
!  0.    2.8      1.7664      1.9998592    1.9981273    1.9999464    1.9999835  !
!  0.    2.36     1.03008     1.0117222    1.0005689    1.0001097    1.0000076  !
!  0.  - 2.808  - 2.970624  - 2.9976415  - 2.999699   - 2.9999727  - 2.9999968  !
```

Exercici 5. a) Determineu el subespai ortogonal a $F = \langle (1,1,0),(0,2,-1)\rangle$. b) Calculeu la projecció ortogonal del vector $(1,1,1)$ sobre $F^\perp$.

L'ortogonal de F és l'espai nul de la matriu que té els vectors generadors de F com a files.

```
-->F=[1 1 0;0 2 -1]';y=[1 1 1]';


-->U=kernel(F')
 U  =

  - 0.4082483
    0.4082483
    0.8164966
```

$F^\perp = \langle (-0.4082483, 0.4082483, 0.8164966)\rangle$

Com que la funció `kernel` ja ens dóna vectors unitaris, la projecció ortogonal és

```
-->yp=(y'*U)*U
 yp  =

  - 0.3333333
    0.3333333
    0.6666667
```

és a dir, $y_p = (-1/3, 1/3, 2/3)$.

Exercici 6. Troba amb l'Scilab una solució per mínims quadrats per al sistema $AX = b$, construint les equacions normals i calcula l'error d'aproximació, essent

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & 8 \\ 2 & -4 & 5 \\ 4 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
A=[-2 2 -3;4 -6 8;2 -4 5;4 -4 6;0 -2 2];b=[1;0;1;2;2];Am=A'*A;bm=A'*b;xm=Am\bm
Advertencia :
la matriz esta cerca de la singularidad o mal escalada. rcond =    0.0000D+00
calculando la solución de mínimos cuadrados.
xm  =
  - 2.
    0.
    1.
```

Por otra parte,

```
 x=pinv(A)*b
x  =
  - 1.5555556
  - 0.8888889
    0.1111111
```

El error de mínimos cuadrados será

```
norm(b-A*xm)
 ans  =
    1.663D-14
```

Exercici 7. Donada la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, estudia si és diagonalitzable i calcula, amb l'Scilab

a) Valors propis

b) Vectors propis

c) Valors singulars

En cas que siga diagonalitzable, calcula també

d) Les matrius P i D tals que $A = PDP^{-1}$

e) La potència d'ordre 10 de A.

```
A1=[1 2 -1 1;2 0 1 -1;-1 1 1 0;1 -1 0 1]; [evals,X]=spec(A1)
X  =
! - 2.6457513    0.    0.    0.        !
!   0.           1.    0.    0.        !
!   0.           0.    2.    0.        !
!   0.           0.    0.    2.6457513 !
a) Valores propios {1, 2, - 2.6457513, 2.6457513}
b) Vectores propios = las columnas de evals  =
!   0.5576897  - 1.366D-17  - 1.805D-16    0.8300495 !
! - 0.6777326    4.876D-16    0.5773503    0.4553517 !
!   0.3388663    0.7071068    0.5773503  - 0.2276759 !
! - 0.3388663    0.7071068  - 0.5773503    0.2276759 !
c) Valores singulares
svd(A1)
!   2.6457513 !
!   2.6457513 !
!   2.        !
!   1.        !
d) Las matrices D1=X;P1=evals
e) Potencia de orden 10
 pot10=P1*(D1)^10*inv(P1)
 pot10  =
!   16807.       0.        1.364D-12  - 1.364D-12 !
!   2.728D-12    11546.  - 5261.        5261.     !
!   2.274D-12  - 5261.     3143.      - 3142.     !
! - 9.095D-13    5261.   - 3142.        3143.     !
```

(ex1) Cognoms, Nom:
Àlgebra. Examen de pràctiques (2a part)

Exercici 1. Calculeu, de dues maneres diferents, la inversa de la matriu $M = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. En cada cas, escriviu les instruccions o les funcions que feu servir, el resultat que obteniu i els missatges que escriu l'`scilab` (si n'escriu algun).

Si algun dels resultats que heu obtingut és incorrecte explique per què.

Un possible mètode:

```
-->inv(M)

ans  =

    0.125      0.171875     0.03125   - 0.28125
    0.4375   - 0.7421875    0.046875    0.578125
  - 0.1875     0.2734375    0.140625  - 0.265625
  - 0.375      0.484375   - 0.09375   - 0.15625

-->
```

Un altre mètode:

```
-->rref([M eye(M)])
 ans  =

    1.    0.    0.    0.    0.125      0.171875     0.03125   - 0.28125
    0.    1.    0.    0.    0.4375   - 0.7421875    0.046875    0.578125
    0.    0.    1.    0.  - 0.1875     0.2734375    0.140625  - 0.265625
    0.    0.    0.    1.  - 0.375      0.484375   - 0.09375   - 0.15625


-->ans(:,5:8)
 ans =

    0.125      0.171875     0.03125   - 0.28125
    0.4375   - 0.7421875    0.046875    0.578125
  - 0.1875     0.2734375    0.140625  - 0.265625
  - 0.375      0.484375   - 0.09375   - 0.15625
```

La matriu és regular. Les dues solucions són correctes.

Exercici 2. $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ són la matriu de coeficients i els termes independients del sistema lineal $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$.

Calculeu la solució del sistema utilitzant la comanda \. Escriviu la solució que s'hi obté i justifique si aquesta solució és correcta i si és l'única.

Si la solució no és única calculeu-les totes.

```
-->X=A\B
 X  =

    2.1315789
  - 1.7368421
    1.5526316

-->A*X-B
 ans  =

  0.2593250
- 0.1532375
- 0.0943000
- 0.8722751

La solució no sembla corecta
És única?

-->rank(A)==rank([A B])
 ans  =

    F

Incompatible.
```

Exercici 3. Dada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.13 \\ 0.1 & 0.82 & 0.12 \\ 0.1 & 0.03 & 0.75 \end{bmatrix}$

a) És una matriu estocàstica regular? Raoneu la resposta.

b) Si té algún vector estacionari, calculeu-lo.

c) Escriviu els tres primers termes de la cadena de Màrkov corresponent, $\{\mathsf{X}_k\}$ quan $\mathsf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

d) És convergent, aquesta cadena? Justifiqueu la resposta.

```
-->A2=[0.8 0.15 0.13;0.1 0.82 0.12;0.1 0.03 0.75];Y2=sum(A2,1)
 Y2  =
!   1.    1.    1. !
A2 es estoc\'astica regular
-->I=eye(3,3);Q2=A2-I;rref(Q2)
 ans  =
!   1.    0.  - 1.9714286 !
!   0.    1.  - 1.7619048 !
!   0.    0.    0.        !
u=[1.9714286;1.7619048;1];u2=sum(u,1)
  u2  =
    4.7333334
-->v2=(1/u2)*u
 v2  =
!   0.4164990 !
!   0.3722334 !
!   0.2112676 !
-->A2*v2-v2
 ans  =
   1.0D-12 *
!   0.0000555 !
! - 845.0704  !
!   845.0704  !
v2 es vector estacionario
-->X0=[0.3;0.2;0.5];X1=A2*X0
 X1  =
!   0.335 !
!   0.254 !
!   0.411 !
-->X2=A2*X1
X2  =
!   0.35953 !
!   0.2911  !
!   0.34937 !
-->X3=A2*X2
 X3  =
!   0.3767071 !
!   0.3165794 !
!   0.3067135 !
Converge a v2 por ser A2 estoc\'astica regular y v2 vector estacionario
->conv=A2*v2
 conv  =
!   0.4164990 !
!   0.3722334 !
!   0.2112676 !
```

Exercici 4. Siga $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Aplicarem els mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel per a resoldre el sistema lineal $AX = b$, començant amb el vector $\vec{X}_0$.

a) La matriu A és diagonalment dominant? b) Calculeu, amb el mètode de Jacobi les sis primeres iteracions. c) Calculeu, amb el mètode de Gauss-Seidel les sis primeres iteracions. d) Convergeixen, els dos processos? Justifiqueu la resposta.

```
a) y d) A4=[4 -1 0;-1 4 -1;0 -1 4];dgA4=diag(A4);t4=abs(dgA4);s1=abs(A4(1,2))+abs(A4(1,3));
s2=abs(A4(2,1))+abs(A4(2,3));s3=abs(A4(3,1))+abs(A4(3,2));s=[s1;s2;s3];t4>=s
ans  =
! T !
! T !
! T !
 Luego A es diagonalmente dominante y ambos procesos convergen.
b) D4=diag([diag(A4)]);L4=tril(A4)-D4;U4=triu(A4)-D4;TJ4=inv(D4)*(L4+U4);B4=[2;6;2];S4=A4\B4
 S4  =
!   1. !
!   2. !
!   1. ! Es la solución del sistema
X=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->X(:,1)=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->for i=1:4
-->X(:,i+1)=inv(D4)*B4-TJ4*X(:,i)
-->end
X  =
!   0.    0.5    0.875    0.9375    0.984375
!   0.    1.5    1.75     1.9375    1.96875
!   0.    0.5    0.875    0.9375    0.984375
c) X=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->X(:,1)=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->for i=1:4
-->X(:,i+1)=inv(L4+D4)*(B4-U4*X(:,i))
-->end
X  =
!   0.    0.5        0.90625      0.9882812     0.9985352 !
!   0.    1.625      1.953125     1.9941406     1.9992676 !
!   0.    0.90625    0.9882812    0.9985352     0.9998169 !
```

Exercici 5. a) Determineu si el conjunt de vectors següent és ortogonal, ortonormal o cap de les dues coses.

$$S = \{(-3,-2,1,3),(-1,3,-3,4),(3,8,7,0)\}$$

b) Calculeu la projecció ortogonal del vector $y = (-1,4,3)$ sobre el subespai generat pels vectors u i v, essent $u = (1,1,1)$ i $v = (-1,3,2)$.

```
a)-->v1=[-3 -2 1 3];v2 =[-1 3 -3 4];v3=[3 8 7 0];
-->v1*v2'
ans  =0
-->v1*v3'
ans  =0
-->v2*v3'
ans  =0
-->norm(v1)
ans  =
    4.7958315                    Es un sistema ortogonal
b)-->u=[1 1 1]';v=[-1 3 2]';y=[-1 4 3]';
-->[Q R]=qr([u v]); Q=Q(:,1:2)
 Q  =

  - 0.5773503    0.7925939
  - 0.5773503  - 0.5661385
  - 0.5773503  - 0.2264554
-->yp=Q*Q'*y
 yp  =

  - 0.9615385
    4.1153846
    2.8461538
```

Exercici 6. Troba l'equació del polinomi de mínims quadrats $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ que millor ajuste els punts $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Calcula la norma del vector residual. Et sembla una aproximació apropiada?

```
X=[1 1 1;1 1 1;1 -1 1;1 0 0;1 1 1];y=[-1;1;1;1;0];X1=X'*X;y1=X'*y;b=X1\y1
 b  =
    1.
  - 0.5
  - 0.5
```

Luego $y = 1 - 0.5x - 0.5x^2$ La norma del vector residual será

```
norm(y-X*b)
ans  =
    1.4142136
```

Exercici 7. Donada la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, estudia si és diagonalitzable i calcula, amb l'Scilab

a) Valors propis

b) Vectors propis

c) Valors singulars

En cas que siga diagonalitzable, calcula també

d) Les matrius P i D tals que $A = PDP^{-1}$

e) La potència d'ordre 10 de A.

```
A1=[1 2 -1 1;2 0 1 -1;-1 1 1 0;1 -1 0 1]; [evals,X]=spec(A1)
X  =
! - 2.6457513    0.    0.    0.        !
!   0.           1.    0.    0.        !
!   0.           0.    2.    0.        !
!   0.           0.    0.    2.6457513 !
a) Valores propios {1, 2, - 2.6457513, 2.6457513}
b) Vectores propios = las columnas de evals  =
!   0.5576897  - 1.366D-17  - 1.805D-16    0.8300495 !
! - 0.6777326    4.876D-16    0.5773503    0.4553517 !
!   0.3388663    0.7071068    0.5773503  - 0.2276759 !
! - 0.3388663    0.7071068  - 0.5773503    0.2276759 !
c) Valores singulares
svd(A1)
!   2.6457513 !
!   2.6457513 !
!   2.        !
!   1.        !
d) Las matrices D1=X;P1=evals
e) Potencia de orden 10
 pot10=P1*(D1)^10*inv(P1)
 pot10  =
!   16807.       0.         1.364D-12  - 1.364D-12 !
!   2.728D-12    11546.  - 5261.         5261.     !
!   2.274D-12  - 5261.      3143.      - 3142.     !
! - 9.095D-13    5261.   - 3142.         3143.     !
```

(ex2) Cognoms, Nom:
Àlgebra. Examen de pràctiques (2a part)

Exercici 1. Calculeu, de dues maneres diferents, la inversa de la matriu $M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & -4 & -3 & -4 \\ -9 & 6 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. En cada cas, escriviu les instruccions o les funcions que feu servir, el resultat que obteniu i els missatges que escriu l'`scilab` (si n'escriu algun).

Si algun dels resultats que heu obtingut és incorrecte explique per què.

```
Un possible mètode:

-->inv(M)

ans  =

    0.5151515    0.6363636    0.3333333  - 0.3333333
    0.7474747    0.8939394    0.6111111  - 0.4444444
  - 0.1515152  - 0.3636364  - 0.3333333    0.3333333
    0.0101010  - 0.0757576    0.0555556  - 0.2222222

-->

Un altre mètode:



-->rref([M eye(M)])
--> ans  =


         column 1 to 6

    1.    0.    0.    0.    0.5151515    0.6363636
    0.    1.    0.    0.    0.7474747    0.8939394
    0.    0.    1.    0.  - 0.1515152  - 0.3636364
    0.    0.    0.    1.    0.0101010  - 0.0757576

         column 7 to 8

    0.3333333  - 0.3333333
    0.6111111  - 0.4444444
  - 0.3333333    0.3333333
    0.0555556  - 0.2222222


-->ans(:,5:8)
 ans =

    0.5151515    0.6363636      0.3333333  - 0.3333333
    0.7474747    0.8939394      0.6111111  - 0.4444444
  - 0.1515152  - 0.3636364    - 0.3333333    0.3333333
    0.0101010  - 0.0757576      0.0555556  - 0.2222222


La matriu és regular. Les dues solucions són correctes.
```

Exercici 2. $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ són la matriu de coeficients i els termes independients del sistema lineal $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$.

Calculeu la solució del sistema utilitzant la comanda \. Escriviu la solució que s'hi obté i justifique si aquesta solució és correcta i si és l'única.

Si la solució no és única calculeu-les totes.

```
-->X=A\B
 X  =

    2.1315789
  - 1.7368421
    1.5526316

-->A*X-B
 ans  =

  0.2593250
- 0.1532375
- 0.0943000
- 0.8722751

La solució no sembla corecta
És única?

-->rank(A)==rank([A B])
 ans  =

    F

Incompatible.
```

Exercici 3. Dada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.85 & 0.5 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.85 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$

a) És una matriu estocàstica regular? Raoneu la resposta.

b) Si té algún vector estacionari, calculeu-lo.

c) Escriviu els tres primers termes de la cadena de Màrkov corresponent, $\{\mathsf{X}_k\}$ quan $\mathsf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}$.

d) És convergent, aquesta cadena? Justifiqueu la resposta.

```
-->A3=[0.05 0.85 0.5;0.1 0.05 0.1;0.85 0.1 0.4];Y=sum(A3,1)
 Y  =
!   1.    1.    1. !
A3 es estoc\'astica regular
-->I=eye(3,3);Q3=A3-I;rref(Q3)
 ans  =
!   1.    0.  - 0.6850153 !
!   0.    1.  - 0.1773700 !
!   0.    0.    0.        !
-->u3=[0.6850153;0.1773700;1];Y3=sum(u3,1)
 Y3  =
    1.8623853
-->v3=(1/Y3)*u3
 v3  =
!   0.3678161 !
!   0.0952381 !
!   0.5369458 !
-->Y3=sum(v3,1)
 Y3  =
    1.
v3 es vector estacionario
-->X0=[0.3;0.5;0.2];X1=A3*X0
 X1  =
!   0.54  !
!   0.075 !
!   0.385 !
-->X2=A3*X1
 X2  =
!   0.28325 !
!   0.09625 !
!   0.6205  !
-->X3=A3*X2
 X3  =
!   0.406225  !
!   0.0951875 !
!   0.4985875 !
La cadena converge a v3 por ser A3 estoc\'astica regular y v3 su vector estacionario
```

Exercici 4. Siga $A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 \\ -3 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ i $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Aplicarem els mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel per a resoldre el sistema lineal $AX = b$, començant amb el vector $\vec{X}_0$.

a) La matriu A és diagonalment dominant? b) Calculeu, amb el mètode de Jacobi les sis primeres iteracions. c) Calculeu, amb el mètode de Gauss-Seidel les sis primeres iteracions. d) Convergeixen, els dos processos? Justifiqueu la resposta.

```
a)  y d) A3=[10 3 0;-3 10 -2;0 -2 10];dgA3=diag(A3);t3=abs(dgA3);s1=abs(A3(1,2))+abs(A3(1,3));
s2=abs(A3(2,1))+abs(A3(2,3));s3=abs(A3(3,1))+abs(A3(3,2));s=[s1;s2;s3];t3>=s
 ans  =
! T !
! T !
! T !
A es diagonalmente dominante y ambos métodos convergen.
b) D3=diag([diag(A3)]);L3=tril(A3)-D3;U3=triu(A3)-D3;TJ3=inv(D3)*(L3+U3);B3=[2;3;5];S3=A3\B3
 S3  =
!   0.0685714 !
!   0.4380952 !
!   0.5876190 ! Es la solución del sistema
>X=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->X(:,1)=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->for i=1:4
-->X(:,i+1)=inv(D3)*B3-TJ3*X(:,i)
-->end
X  =
!   0.    0.2    0.11    0.062    0.0665    !
!   0.    0.3    0.46    0.445    0.437       !
!   0.    0.5    0.56    0.592    0.589     !
c) X=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->X(:,1)=[0;0;0]
 X  =
!   0. !
!   0. !
!   0. !
-->for i=1:4
-->X(:,i+1)=inv(L3+D3)*(B3-U3*X(:,i))
-->end
X  =

!   0.    0.2      0.092     0.0674     0.06863  !
!   0.    0.36     0.442     0.4379     0.438105 !
!   0.    0.572    0.5884    0.58758    0.587621 !
```

Exercici 5. a) Determineu si el conjunt de vectors següent és ortogonal, ortonormal o cap de les dues coses.

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{20}}, \frac{3}{\sqrt{20}} \right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{20}}, \frac{-1}{\sqrt{20}} \right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

b) Calculeu la projecció ortogonal del vector $y = (6, 3, -2)$ sobre el subespai generat pels vectors u i v, essent $u = (3, 4, 0)$ i $v = (-4, 3, 0)$.

```
a) v1=[(1/sqrt(10)) (3/sqrt(20)) (3/sqrt(20))];
v2=[(3/sqrt(10)) (-1/sqrt(20)) (-1/sqrt(20))];
v3=[0  (-1/sqrt(2)) (-1/sqrt(2))];
v1*v2'
ans  =0
v1*v3'=0
ans  =0
v2*v3'
ans  =0
norm(v1)
ans  =1
norm(v2)
ans  =1
norm(v3)
ans  =1                         Es un sistema ortonormal
b)-->u=[3 4 0]';v=[-4 3 0]';y=[6 3 -2]';
-->[Q R]=qr([u v]);
-->Q=Q(:,1:2)
 Q  =

  - 0.6  - 0.8
  - 0.8    0.6
    0.     0.
-->yp=Q*Q'*y
 yp  =

    6.
    3.
    0.
```

Exercici 6. Troba l'equació del polinomi de mínims quadrats $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ que millor ajuste els punts $(2, -2)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(0, 2)$ y $(2, 0)$. Calcula la norma del vector residual. Et sembla una aproximació apropiada?

```
X=[1 2 4;1 2 4;1 -2 4;1 0 0;1 2 4];y=[-2;2;2;2;0];
X1=X'*X;y1=X'*y;b=X1\y1
 b  =
    2.
  - 0.5
  - 0.25
```

Luego $y = 2 - 0.5x - 0.25x^2$ La norma del vector residual será

```
norm(y-X*b)
 ans  =
    2.8284271
```

Exercici 7. Donada la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, estudia si és diagonalitzable i calcula, amb l'Scilab

a) Valors propis

b) Vectors propis

c) Valors singulars

En cas que siga diagonalitzable, calcula també

d) Les matrius P i D tals que $A = PDP^{-1}$

e) La potència d'ordre 10 de A.

```
A1=[1 2 -1 1;2 0 1 -1;-1 1 1 0;1 -1 0 1]; [evals,X]=spec(A1)
X  =
! - 2.6457513    0.    0.    0.        !
!   0.           1.    0.    0.        !
!   0.           0.    2.    0.        !
!   0.           0.    0.    2.6457513 !
a) Valores propios {1, 2, - 2.6457513, 2.6457513}
b) Vectores propios = las columnas de evals  =
!   0.5576897  - 1.366D-17  - 1.805D-16    0.8300495 !
! - 0.6777326    4.876D-16    0.5773503    0.4553517 !
!   0.3388663    0.7071068    0.5773503  - 0.2276759 !
! - 0.3388663    0.7071068  - 0.5773503    0.2276759 !
c) Valores singulares
svd(A1)
!   2.6457513 !
!   2.6457513 !
!   2.        !
!   1.        !
d) Las matrices D1=X;P1=evals
e) Potencia de orden 10
 pot10=P1*(D1)^10*inv(P1)
 pot10  =
!   16807.       0.         1.364D-12  - 1.364D-12 !
!   2.728D-12    11546.   - 5261.        5261.     !
!   2.274D-12  - 5261.      3143.      - 3142.     !
! - 9.095D-13    5261.    - 3142.        3143.     !
```