Práctica 1

Hoja de actividades

Curso 2013–2014

Actividad 1. *Estudia el número de soluciones de estos sistemas de ecuaciones lineales y resuélvelos en el caso que sean compatibles utilizando la función **rref**.*

$$a)\quad \left.\begin{array}{rcl} 3x+4y-7t+5u+3v &=& -9 \\ x-3y-7z+8t+9u-12v &=& 1 \\ 2x-4y+7z-11t-v &=& 2 \\ x-y+2z-3t+5u-3v &=& -2 \\ 2x+2y-4z+2t+u+v &=& -5 \\ x+2y+z-4t-7u+3v &=& 2 \end{array}\right\} \quad b)\quad \left.\begin{array}{rcl} 3x+4y-7t+5u+3v &=& -9 \\ x-3y-7z+8t+9u-12v &=& 1 \\ 2x-4y+7z-11t-v &=& 2 \\ x-y+2z-3t+5u-3v &=& -2 \\ 2x+2y-4z+2t+u+v &=& -5 \\ x+2y+z-4t-7u+3v &=& 2 \\ 2x-6y-7z-5t-15u-11v &=& 8 \end{array}\right\}.$$

Solución

a) Introducimos la matriz A de coeficientes del sistema, la columna b de términos independientes y calculamos la escalonada reducida de la matriz ampliada $[A\ b]$

```
-->A=[3 4 0 -7 5 3;1 -3 -7 8 9 -12;2 -4 7 -11 0 -1;1 -1 2 -3 5 -3;2 2 -4 2 1 1;1 2 1 -4 -7 3 ]
 A  =

    3.    4.    0.  - 7.     5.    3.
    1.  - 3.  - 7.    8.     9.  - 12.
    2.  - 4.    7.  - 11.    0.  - 1.
    1.  - 1.    2.  - 3.     5.  - 3.
    2.    2.  - 4.    2.     1.    1.
    1.    2.    1.  - 4.   - 7.    3.

-->b=[-9;1;2;-2;-5;2]
 b  =

  - 9.
    1.
    2.
  - 2.
  - 5.
    2.

-->R=rref([A b])
 R  =

    1.    0.    0.    0.    0.    0.  - 1.7325784
    0.    1.    0.    0.    0.    0.  - 0.5007919
    0.    0.    1.    0.    0.    0.  - 0.5246278
    0.    0.    0.    1.    0.    0.  - 0.5818023
    0.    0.    0.    0.    1.    0.  - 0.7336079
    0.    0.    0.    0.    0.    1.  - 0.7345581
```

A la vista del resultado, el sistema es compatible determinado y su solución es

```
-->sol=R(:,7)
 sol  =
  - 1.7325784
  - 0.5007919
  - 0.5246278
  - 0.5818023
  - 0.7336079
  - 0.7345581
```

b) Al igual que en el apartado anterior introducimos la matriz $A1$ de coeficientes del sistema, la columna $b1$ de términos independientes y calculamos la escalonada reducida de la matriz ampliada $[A1\ b1]$

```
-->A1=[A;2 -6 -7 -5 -15 -11]
 A1  =

    3.    4.    0.  - 7.     5.     3.
    1.  - 3.  - 7.    8.     9.   - 12.
    2.  - 4.    7.  - 11.    0.   - 1.
    1.  - 1.    2.  - 3.     5.   - 3.
    2.    2.  - 4.    2.     1.     1.
    1.    2.    1.  - 4.   - 7.     3.
    2.  - 6.  - 7.  - 5.   - 15.  - 11.

-->b1=[b;8]
 b1  =

  - 9.
    1.
    2.
  - 2.
  - 5.
    2.
    8.

-->R1=rref([A1 b1])
 R1  =

    1.    0.    0.    0.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    1.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    0.    1.    0.
    0.    0.    0.    0.    0.    0.    1.
```

En este caso el sistema es incompatible (observa que hay un uno principal en la última columna).

Actividad 2. *Estudia el número de soluciones de estos sistemas de ecuaciones lineales y resuélvelos en el caso que sean compatibles utilizando la función **rref**. Escribe las soluciones en forma vectorial.*

$$a)\quad \left.\begin{array}{rcl} x-y &=& 2\\ x+2y &=& 8\\ x-y+z &=& 3 \end{array}\right\} \quad b)\quad \left.\begin{array}{rcl} x+y-z+2t &=& 1\\ 2x+3y+4t &=& 2\\ y+z+3t &=& -4\\ -x-2y-z-2t &=& -1 \end{array}\right\} \quad c)\quad \left.\begin{array}{rcl} x-2z &=& 2\\ -x-2y+2z &=& -2\\ 2x+2y-4z &=& 3 \end{array}\right\}.$$

$d)$ *Determina si los vectores* $\vec{s_1} = (33/2, -11, 5/2, 1/2)$ *y* $\vec{s_2} = (33/2, -11, 11/2, 1/2)$ *son soluciones del sistema de ecuaciones del apartado* $b)$.

Solución

a) Introducimos la matriz A de coeficientes del sistema, la columna $b1$ de términos independientes y calculamos la escalonada reducida de la matriz ampliada $[A\ b1]$

```
-->A=[1 -1 0;1 2 0;1 -1 1]
 A  =

    1.  - 1.    0.
    1.    2.    0.
    1.  - 1.    1.

-->b1=[2;8;3]
 b1  =

    2.
    8.
    3.

-->R1=rref([A b1])
 R1  =

    1.    0.    0.    4.
    0.    1.    0.    2.
    0.    0.    1.    1.
```

El sistema es compatible determinado y su solucion es $x = 4,\ y = 2,\ z = 1,$ es decir, el vector $(4, 2, 1)$.

b) Introducimos la matriz B de coeficientes del sistema, la columna $b2$ de términos independientes y calculamos la escalonada reducida de la matriz ampliada $[B\ b2]$

```
-->B=[1 1 -1 2;2 3 0 4;0 1 1 3;-1 -2 -1 -2]
 B  =

    1.    1.  - 1.    2.
    2.    3.    0.    4.
    0.    1.    1.    3.
  - 1.  - 2.  - 1.  - 2.

-->b2=[1;2;-4;-1]
```

```
 b2  =

    1.
    2.
  - 4.
  - 1.
-->R2=rref([B b2])
 R2  =

    1.    0.    0.  - 7.    13.
    0.    1.    0.    6.  - 8.
    0.    0.    1.  - 3.    4.
    0.    0.    0.    0.    0.
```

Observando esta matriz se concluye que el sistema es compatible indeterminado (x, y, z son variables principales y t es parámetro). Así pues, el conjunto de soluciones de este sistema es

$$\{(13 + 7\lambda, -8 - 6\lambda, 4 + 3\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = (13, -8, 4, 0) + \{\lambda(7, -6, 3, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

c) Introducimos la matriz C de coeficientes del sistema, la columna $b3$ de términos independientes y calculamos la escalonada reducida de la matriz ampliada $[C\ b3]$

```
-->C=[1 0 -2 ; -1 -2 2;2 2 -4]
 C  =

    1.    0.  - 2.
  - 1.  - 2.    2.
    2.    2.  - 4.

-->b3=[2;-2;3]
 b3  =

    2.
  - 2.
    3.

-->R3=rref([C b3])
 R3  =

    1.    0.  - 2.    0.
    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    0.    1.
```

El sistema es incompatible.

d) Introducimos los vectores $\vec{s_1}$ y $\vec{s_2}$ y efectuamos los productos $B\vec{s_1}$ y $B\vec{s_2}$

```
-->s1=[33/2; -11; 5/2; 1/2]
 s1  =
    16.5
  - 11.
    2.5
    0.5
```

```
-->B*s1
 ans  =

    4.
    2.
  - 7.
    2.

-->s2=[33/2; -11;11/2;1/2]
 s2  =

    16.5
  - 11.
    5.5
    0.5

-->B*s2
 ans  =

    1.
    2.
  - 4.
  - 1.
```

A la vista de los resultados obtenidos se tiene que $\vec{s_1}$ no es solución y $\vec{s_2}$ sí es solución de este sistema.

Actividad 3. *Estudia el número de soluciones de los sistemas de la actividad anterior y obtén las soluciones (si existen) utilizando el operador* $\backslash$ *y la función* ***kernel****. Compara los resultados con los obtenidos en el ejercicio anterior.*

Solución

a) Para ver si el sistema es compatible calculamos el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliadada y vemos si coinciden

```
-->rank(A)
 ans  =

    3.

-->rank([A b1])
 ans  =

    3.
```

El sistema es compatible y determinado. Su solución s la calculamos con el operador $\backslash$

```
-->s=A\b1
 s  =

    4.
    2.
    1.
```

b) Calculamos los rangos de B y de $[B\ b2]$:

```
-->rank(B)
 ans  =

    3.

-->rank([B b2])
 ans  =

    3.
```

El sistema es compatible indeterminado

Para calcular una solución particular S utilizamos el operador $\backslash$

```
-->S=B\b2
 warning
 matrix is close to singular or badly scaled. rcond =    0.0000D+00
computing least squares solution. (see lsq)

 S  =

    0.
    3.1428571
  - 1.5714286
  - 1.8571429
```

Dado que Scilab nos informa que la matriz B es casi singular, es conveniente comprobar que esta solución es correcta. Para ello probamos que $BS = b2$

```
-->clean(B*S-b2)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
    0.
```

Para obtener el conjunto de todas las soluciones del sistema calculamos el núcleo o espacio nulo de la matriz B con la función kernel de Scilab:

```
-->k=kernel(B)
 k  =

  - 0.7181848
    0.6155870
  - 0.3077935
  - 0.1025978
```

La solución general del sistema es $S + \lambda k, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

c) Calculamos los rangos de C y de $[C\ b3]$

```
-->rank(C)
 ans  =

    2.
```

```
-->rank([C b3])
 ans  =

    3.
```

El sistema es incompatible.

Actividad 4. *Una empresa de transportes tiene tres camiones (C1, C2 y C3), en los que caben contenedores de tres tipos (A, B y C). En el camión C1 caben 5 del tipo A, 2 del tipo B y 4 del tipo C. En el camión C2 caben 3 del tipo A, 5 del tipo B y 3 del tipo C. En el camión C3 caben 4 del tipo A, 5 del tipo B y 6 del tipo C. Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 46 del tipo B y 54 del tipo C ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión si todos los viajes los efectúan totalmente llenos?*

Solución

Si denotamos por x_i el número de viajes que tiene que hacer el camión C_i, se trata de resolver el sistema de ecuaciones

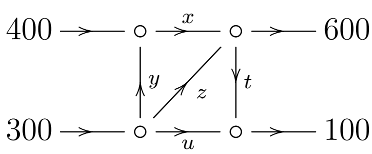
$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 46 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Lo podemos hacer utilizando la instrucción rref

```
-->A=[5 3 4; 2 5 5;4 3 6]
 A  =

    5.    3.    4.
    2.    5.    5.
    4.    3.    6.

-->b=[45;46;54]
 b  =

    45.
    46.
    54.
-->R=rref([A b])
 R  =

    1.    0.    0.    3.
    0.    1.    0.    2.
    0.    0.    1.    6.
```

El sistema es compatible determinado y la solución es $x_1 = 3, \ x_2 = 2, \ x_3 = 6$.

Actividad 5. *En la figura siguiente se muestra el flujo de tráfico (en vehículos por hora) en una red de calles (los nodos del grafo representan las intersecciones). Encuentra las dependencias entre los flujos de tráfico de las calles. ¿Cuál es el flujo de tráfico cuando $u = 50$, $z = 150$?*



Solución

Las dependencias entre los flujos de tráfico las proporciona la solución del siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 400+y & = & x \\ 300 & = & y+z+u \\ t+u & = & 100 \\ x+z & = & 600+t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} x-y & = & 400 \\ y+z+u & = & 300 \\ t+u & = & 100 \\ x+z-t & = & 600 \end{array}\right\}$$

La calculamos con la instrucción rref

```
-->rref([1 -1 0 0 0 400;0 1 1 0 1 300;0 0 0 1 1 100;1 0 1 -1 0 600])
 ans  =

    1.    0.    1.    0.    1.    700.
    0.    1.    1.    0.    1.    300.
    0.    0.    0.    1.    1.    100.
    0.    0.    0.    0.    0.    0.
```

La solución es $x = 700 - \lambda - \mu, \; y = 300 - \lambda - \mu, \; z = \lambda, \; t = 100 - \mu, \; u = \mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Si $u = 50 (\mu = 50)$ y $z = 150 (\lambda = 150)$, el flujo de tráfico es $x = 500, \; y = 100, \; z = 150, \; t = 50, \; u = 50.$