EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

$3x + 2^4$ $\quad 4x^5 + 6x^3 - \frac{1}{4}$ $\quad x^2 + \sqrt{2x}$ $\quad \frac{x^6 - 10}{x^2}$

Los números son los **coeficientes**, y las letras, las **variables** o **indeterminadas**.

Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios**. De los ejemplos anteriores, los dos últimos no son polinomios.

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas antes es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado n**. Los monomios a_kx^k que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

▼ Suma y resta de polinomios

Sumamos y **restamos** polinomios usando las propiedades de números reales que vimos en la Sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (esto es, términos con las mismas variables elevados a las mismas potencias) usando la Propiedad Distributiva. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Para restar polinomios, tenemos que recordar que si un signo menos precede a una expresión en paréntesis, entonces se cambia el signo de cada término dentro del paréntesis cuando quitemos el paréntesis:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Éste es simplemente el caso de la Propiedad Distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

(a) Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.
(b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

SOLUCIÓN

(a) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4$ Agrupe términos semejantes

$= 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ Combine términos semejantes

(b) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x$ Propiedad Distributiva

$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4$ Agrupe términos semejantes

$= -11x^2 + 9x + 4$ Combine términos semejantes

▼ Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

En general, podemos multiplicar dos expresiones algebraicas usando para ello la Propiedad Distributiva y las Leyes de Exponentes.

EJEMPLO 2 | Multiplicación de binomios

$(2x + 1)(3x - 5) = \underset{F}{6x^2} - \underset{O}{10x} + \underset{I}{3x} - \underset{L}{5}$ Propiedad Distributiva

$= 6x^2 - 7x - 5$ Combine términos semejantes

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio de **n** términos es expresarlo como un **producto** de polinomios **primos**.

▼ Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

EJEMPLO | Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^2 - 6x$ **(b)** $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$
(c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

SOLUCIÓN

(a) El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

(b) Observamos que

8, 6 y −2 tienen el máximo factor común 2
x^4, y^3 y x tienen el máximo factor común x
y^2, y^3 y y^4 tienen el máximo factor común y^2

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 = (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2)$$
$$= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)$$

(c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) = [(2x + 4) - 5](x - 3)$ Propiedad Distributiva

$= (2x - 1)(x - 3)$ Simplifique

▼ Factorización por agrupación de términos

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

EJEMPLO | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ **(b)** $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

SOLUCIÓN

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$ Agrupe términos

$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$ Factorice factores comunes

$= (x^2 + 4)(x + 1)$ Factorice $x + 1$ de cada término

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$ Agrupe términos

$= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$ Factorice factores comunes

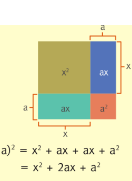
$= (x^2 - 3)(x - 2)$ Factorice $x - 2$ de cada término

▼ Trinomio cuadrado perfecto

$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$ → **Cuadrado de un binomio:** expresión factorizada del trinomio cuadrado perfecto.

Trinomio cuadrado perfecto:
Es el desarrollo del cuadrado del binomio.

$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a).(x \pm a) = (x \pm a)^2$



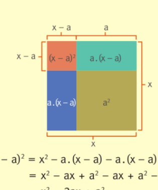
$(x + a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2$
$= x^2 + 2ax + a^2$

$P(x) = x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 . x . 5 + 5^2 = (x + 5)^2$
↓ x ↓ 5

$Q(x) = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 . x . 3 + 3^2 = (x - 3)^2$
↓ x ↓ 3

$R(x) = x^2 + 12x + 16 = x^2 + 2 . x . 6 + 4^2$
↓ x ↓ 4 $\quad 6 \neq 4$

No es trinomio cuadrado perfecto.



$(x - a)^2 = x^2 - a.(x - a) - a.(x - a) - a^2$
$= x^2 - ax + a^2 - ax + a^2 - a^2$
$= x^2 - 2ax + a^2$

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{o} \quad A^2 - 2AB + B^2$$

Por lo tanto, **reconocemos un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o $-2AB$) es más o menos dos veces el producto de las raíces cuadradas de los dos términos externos.

EJEMPLO 12 | Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

(a) $x^2 + 6x + 9$ **(b)** $4x^2 - 4xy + y^2$

SOLUCIÓN

(a) Aquí $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

(b) Aquí $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Como el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

▼ Diferencia de cuadrados

Es una de las formas de factorización que más usaremos, y se aplica cuando tenemos una resta de dos términos:

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ Diferencia de cuadrados

Por ejemplo:

$P(x) = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2) . (x + 2)$
$R(x) = x^4 - 64 = (x^2)^2 - 8^2 = (x^2 - 8) . (x^2 + 8)$
$R(x) = x^6 - 16 = (x^3)^2 - 4^2 = (x^3 - 4) . (x^3 + 4)$

EJEMPLO | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente.

(a) $4x^2 - 25$ **(b)** $(x + y)^2 - z^2$

SOLUCIÓN

(a) Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$
$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

(b) Usamos la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

ECUACIONES

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

la letra x es la variable. Consideramos x como la "incógnita" de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación.**

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo "igual". A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, A, B y C representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo ⇔ significa "es equivalente a".)

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad	Descripción
1. $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.
2. $A = B \Leftrightarrow CA = CB \quad (C \neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que el estudiante *ejecute la misma operación en ambos lados de una ecuación* al resolverla. Entonces, si decimos "*sume* −7" al resolver una ecuación, es una forma breve de decir "*sume* −7 a cada lado de la ecuación".

▼ Solución de ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	Ecuaciones no lineales	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	No lineal; contiene el cuadrado de la variable
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable
$x - 6 = \frac{x}{3}$	$\frac{3}{x} - 2x = 1$	No lineal; contiene el recíproco de la variable

EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

SOLUCIÓN Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constante en el otro.

$7x - 4 = 3x + 8$ Ecuación dada

$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$ Sume 4

$7x = 3x + 12$ Simplifique

$7x - 3x = (3x + 12) - 3x$ Reste $3x$

$4x = 12$ Simplifique

$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$ Multiplique por $\frac{1}{4}$

$x = 3$ Simplifique

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 3$:

LI $= 7(3) - 4 = 17$ $\quad (x = 3)$

LD $= 3(3) + 8 = 17$ $\quad (x = 3)$

Ecuaciones no lineales

▼ Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

Ecuaciones cuadráticas

$x^2 - 2x - 8 = 0$
$3x + 10 = 4x^2$
$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Ecuaciones incompletas

- Si $b = 0$, la ecuación de segundo grado es incompleta de la forma $\mathbf{ax^2 + c = 0}$.
Para resolver este tipo de ecuaciones, se despeja el valor de la x teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2} = |x|$.

$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$
$|x| = 4$
$x_1 = 4 \wedge x_2 = -4$

$-3x^2 + 27 = 0$
$-3x^2 = -27$
$x^2 = 9$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$
$|x| = 3$
$x_1 = 3 \wedge x_2 = -3$

$\frac{1}{5}x^2 - 5 = 0$
$\frac{1}{5}x^2 = 5$
$x^2 = 25$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$
$|x| = 5$
$x_1 = 5 \wedge x_2 = -5$

- Si $c = 0$, la ecuación de segundo grado es incompleta de la forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$.
Para resolver este tipo de ecuaciones, se debe tener en cuenta que

PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$AB = 0$ si y sólo si $A = 0$ o $B = 0$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

$x^2 - 2x = 0$
$x . (x - 2) = 0$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$

$-5x^2 + x = 0$
$x . (-5x + 1) = 0$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -5x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$

EJEMPLO 2 | Solución de una ecuación

Resuelva la ecuación $(x - 3)(x + 8) = 0$

SOLUCIÓN $(x - 3)(x + 8) = 0$

$x - 3 = 0$ o $x + 8 = 0$ Propiedad de Producto Cero

$x = 3$ $\quad x = -8$ Resuelva

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

Ecuaciones completas

Si la ecuación es completa, o sea que ninguno de sus coeficiente es igual a cero, los valores de x que la satisfacen se encuentran aplicando una fórmula en la cual estos intervienen.

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 3 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

(a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **(c)** $x^2 + 2x + 2 = 0$

SOLUCIÓN

(a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$$\underset{a = 3}{3x^2} \overset{b = -5}{- 5x} \underset{c = -1}{- 1} = 0$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \quad \text{y} \quad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

(b) Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y está dada por el símbolo D. Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definida y la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el Ejemplo 7(c). Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene sólo una solución real, como en el Ejemplo 7(b). Por último, si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el Ejemplo 7(a). El recuadro siguiente resume estas observaciones.

EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

EJEMPLO 4 | Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

(a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **(c)** $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

SOLUCIÓN

(a) El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
(b) El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene una solución real.
(c) El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.

DESIGUALDADES

Algunos problemas en álgebra llevan a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. A continuación veamos un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 < 19$$

Resolver una desigualdad que contenga una variable significa hallar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene un infinito de soluciones, que forma un intervalo o una unión de intervalos en la recta real.

Para resolver desigualdades, usamos las reglas siguientes para aislar la variable en un lado del signo de desigualdad. Estas reglas nos dicen cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo ⇔ significa "es equivalente a"). En estas reglas los símbolos A, B y C representan números reales o expresiones algebraicas. A continuación expresamos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\leq$, pero aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

REGLAS PARA DESIGUALDADES

Regla	Descripción
1. $A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \leq B \Leftrightarrow A - C \leq B - C$	**Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \leq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \geq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma *cantidad negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$	**Tomar** recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

▼ Solución de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal, aislamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

EJEMPLO 5 | Resolver una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución.

SOLUCIÓN

$3x < 9x + 4$ Desigualdad dada

$3x - 9x < 9x + 4 - 9x$ Reste $9x$

$-6x < 4$ Simplifique

$(-\frac{1}{6})(-6x) > (-\frac{1}{6})(4)$ Multiplique por $-\frac{1}{6}$ e invierta la desigualdad

$x > -\frac{2}{3}$ Simplifique

Multiplicar por el número negativo $-\frac{1}{6}$ *invierte* la dirección de la desigualdad.

El conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $(-\frac{2}{3}, \infty)$. Está graficada en la Figura 1.

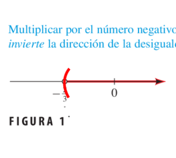


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 21

EJEMPLO 6 | Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$.

SOLUCIÓN El conjunto solución está formado por todos los valores de x que satisfacen las desigualdades $4 \leq 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Usando las Reglas 1 y 3, vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$4 \leq 3x - 2 < 13$ Desigualdad dada

$6 \leq 3x < 15$ Sume 2

$2 \leq x < 5$ Divida entre 3

FIGURA 2

Por lo tanto, el conjunto de solución es $[2, 5)$, como se ve en la Figura 2.

▼ Solución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable, usamos factorización, junto con el principio siguiente.

EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE

Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad $x^2 - 5x \leq -6$, primero movemos todos los términos al lado izquierdo y factorizamos para obtener

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

Esta forma de la desigualdad nos dice que el producto $(x - 2)(x - 3)$ debe ser negativo o cero, de modo que, para resolver la desigualdad, debemos determinar en dónde cada factor es negativo o positivo (porque el signo de un producto depende del signo de los factores).

GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

1. **Pase todos los términos a un lado.** Si es necesario, reescriba la desigualdad de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
2. **Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
3. **Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
4. **Haga una tabla o diagrama.** Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$.

La técnica de factorización que se describe en esta guía funciona sólo si todos los términos diferentes de cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no se escribe en esta forma, primero la reescribimos, como se indica en el Paso 1.

EJEMPLO 7 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x^2 \geq -2x + 15$.

Solución Primero reescribimos la desigualdad con todos los términos a la izquierda del símbolo de desigualdad y el 0 a la derecha. Por las propiedades de las desigualdades,

$$x^2 \geq -2x + 15 \quad \text{equivale a} \quad x^2 + 2x - 15 \geq 0.$$

Después de factorizar, la última expresión es igual a $(x + 5)(x - 3) \geq 0$.

A continuación indicamos en la recta numérica en qué punto cada factor es 0, en este caso, $x = -5$ y $x = 3$. Como se ilustra en la **FIGURA 3.7.1**, esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección: $(-\infty, -5)$, $(-5, 3)$ y $(3, \infty)$. Observe también que, puesto que la desigualdad requiere que el producto no sea negativo, es decir, "mayor o *igual a* 0", los números -5 y 3 son dos soluciones. A continuación, debemos determinar los signos de los factores $x + 5$ y $x - 3$ en cada uno de los tres intervalos. Necesitamos intervalos en los que los dos factores sean positivos o los dos negativos, porque sólo así su producto será positivo. Puesto que los factores lineales $x + 5$ y $x - 3$ no pueden cambiar de signo dentro de estos intervalos, basta obtener el signo de cada factor en sólo *un* número de prueba elegido dentro de cada intervalo. Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, -5)$, si usamos $x = -10$ como número de prueba, entonces

FIGURA 3.7.1 Tres intervalos disjuntos del ejemplo 1

Véase (3) sobre las propiedades de los signos de los productos.

Intervalo	$(-\infty, -5)$	
Signo de $x + 5$	−	← en $x = -10$, $x + 5 = -10 + 5 < 0$
Signo de $x - 3$	−	← en $x = 10$, $x - 3 = -10 - 3 < 0$
Signo de $(x + 5)(x - 3)$	+	← (−)(−) es (+)

Continuando de esta manera con los dos intervalos restantes, obtenemos la tabla de signos de la **FIGURA 3.7.2**. Como se observa en la tercera línea de esta figura, el producto $(x + 5)(x - 3)$ no es negativo en ninguno de los intervalos disjuntos no acotados $(-\infty, -5]$ o $[3, \infty)$. Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

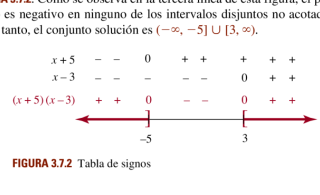


FIGURA 3.7.2 Tabla de signos

EJEMPLO 8 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x < 10 - 3x^2$.

Solución Primero reescribimos la desigualdad poniendo todos los términos diferentes de 0 en el mismo lado: $3x^2 + x - 10 < 0$. Al factorizar este polinomio cuadrático tenemos

$$(3x - 5)(x + 2) < 0.$$

En el diagrama de signos de la **FIGURA 3.7.3** vemos (en rojo) que este producto es negativo para los números del intervalo abierto $(-2, \frac{5}{3})$. Por el símbolo estricto "menor que" de la desigualdad, los extremos de los números del intervalo no se incluyen en el conjunto solución.

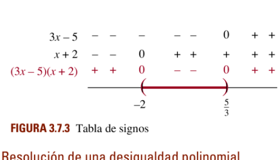


FIGURA 3.7.3 Tabla de signos

EJEMPLO 9 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $(x - 4)^2(x + 8)^3 > 0$

Solución En vista de que la desigualdad dada ya tiene la forma apropiada para el método de la tabla de signos (una expresión factorizada a la izquierda del símbolo de desigualdad y 0 a la derecha), primero debemos hallar los números donde cada factor es 0, en este caso, $x = 4$ y $x = -8$. Colocamos estos números en la recta numérica y determinamos tres intervalos. Luego, en cada intervalo consideramos los signos de las potencias de cada factor lineal. Debido a la potencia par, nos damos cuenta de que $(x - 4)^2$ nunca es negativo. Sin embargo, debido a la potencia impar, $(x + 8)^3$ tiene el mismo signo que el factor $x + 8$. Observe que los números $x = 4$ y $x = -8$ no son soluciones de la desigualdad por el estricto símbolo de desigualdad "mayor que". Por tanto, como se observa (en rojo) en la **FIGURA 3.7.4**, el producto de los factores $(x - 4)^2(x + 8)^3$ no es negativo para los números del conjunto $(-8, 4) \cup (4, \infty)$.

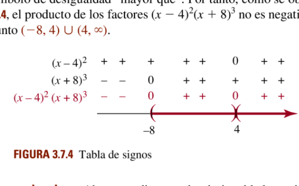


FIGURA 3.7.4 Tabla de signos

■ **Desigualdades racionales** Ahora estudiaremos las desigualdades racionales del tipo que se muestra en (2). Las desigualdades racionales pueden resolverse mediante el procedimiento anterior, excepto que colocamos los ceros tanto del numerador $P(x)$ como del denominador $Q(x)$ en la recta numérica y usamos las **propiedades de los signos de un cociente**.

El cociente de dos números reales es positivo (negativo) si y sólo si los números tienen los signos iguales (opuestos). (4)

EJEMPLO 10 Resolución de una desigualdad racional

Resuelva $\frac{x + 1}{x + 3} \leq -1$.

Solución Para utilizar las propiedades de los signos de un cociente (4) debemos tener todos los términos diferentes de cero en el mismo lado de la desigualdad (exactamente de la misma forma como lo hicimos en las desigualdades polinomiales). Así, agregamos 1 en ambos lados de la desigualdad y luego combinamos términos para obtener una desigualdad racional equivalente:

$$\frac{x + 1}{x + 3} + 1 \leq 0$$

$$\frac{x + 1}{x + 3} + \overbrace{\frac{x + 3}{x + 3}}^{1} \leq 0 \quad \leftarrow \text{denominador común}$$

$$\frac{2x + 4}{x + 3} \leq 0.$$

Utilizando el hecho de que $2x + 4 = 0$ cuando $x = -2$ y $x + 3 = 0$ cuando $x = -3$, preparamos la tabla de signos que se muestra en la figura 3.7.5. En esta tabla vemos que el número -3 no es una solución, ya que $(2x + 4) / (x + 3)$ no está definida para $x = -3$, pero el número -2 se incluye en el conjunto solución debido a que $(2x + 4) / (x + 3)$ es cero para $x = -2$. El conjunto solución es el intervalo $(-3, -2]$.

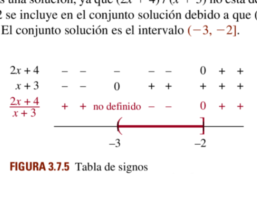


FIGURA 3.7.5 Tabla de signos

EJEMPLO 11 Resolución de una desigualdad racional

Resuelva $x \leq 3 - \frac{6}{x + 2}$.

Solución Para empezar, reescribimos la desigualdad con todas las variables y constantes diferentes de cero a la izquierda y 0 a la derecha del signo de desigualdad:

$$x - 3 + \frac{6}{x + 2} \leq 0.$$

Ahora colocamos los términos sobre un común denominador,

$$\frac{(x - 3)(x + 2) + 6}{x + 2} \leq 0 \quad \text{y simplificamos a} \quad \frac{x(x - 1)}{x + 2} \leq 0. \qquad (5)$$

Ahora los números que componen los tres factores lineales en la última expresión igual a 0 son -2, 0 y 1. En la recta numérica, estos tres números determinan cuatro intervalos. Por la condición "menor o *igual a* 0" vemos que 0 y 1 pertenecen al conjunto solución. Sin embargo, -2 se excluye porque al sustituir este valor en la expresión fraccionaria resulta un denominador de cero (y la fracción no estaría definida). Como se ve en la tabla de signos de la **FIGURA 3.7.6**, el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$.

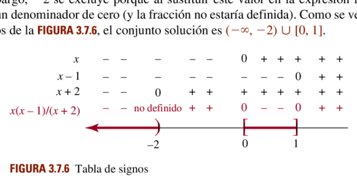


FIGURA 3.7.6 Tabla de signos