Глава 1. Идеалы, аффинные многообразия и связь между ними

§1 Аффинные многообразия

1.1 Определение и примеры

**Определение 1.1***: Пусть k – некоторое поле,* *f1 , …, fs – полиномы в* *k[x1, …, xn]. Положим* *.*  *– называется аффинным многообразием, определенным полиномами f1, …, fs.*

1.2 Свойства аффинных многообразий

**Лемма 1** (Свойства аффинных многообразий): *Если* *- аффинные многообразия, то и также являются аффинными многообразиями*.

**Доказательство**: Пусть  и . Мы утверждаем, что

1. Если точка принадлежит , то как функции , так и функции обращаются в нуль в этой точке.
2. Если то все обращаются в нуль в этой точке; значит и все функции обращаются в нуль в . Таким образом, и, аналогично, . Следовательно, . С другой стороны, пусть . Если эта точка принадлежит *V*, то все доказано, если же нет, то для некоторого . Так как функции обращаются в нуль в при всех *j*, то все равны нулю в этой точке. Значит, и

Из этой леммы вытекает, что конечные объединения и пересечения аффинных многообразий являются аффинными многообразиями.

§2 Идеалы

1.1 Определение

**Определение 2.1**: *Подмножество называется идеалом, если выполнены следующие условия:*

1. *;*
2. *Если , то ;*
3. *Если и , то .*

**Определение 2.2**: *Пусть – полиномы в . Положим*

*Множество – идеал.*

**Лемма 2**: *Пусть принадлежат кольцу ; тогда множество является идеалом в . Оно называетсяы идеалом, порожденным полиномами , а полиномы – образующими этого идеала или его порождающими элементами.*

**Доказательство**: Прежде всего, , поскольку . Пусть теперь , и . Тогда из равенств

вытекает, что – идеал.

Идеал имеет интерпретацию на языке полиномиальных уравнений. Пусть . Рассмотрим систему уравнений

Из этих уравнений мы можем вывести другие, используя обычные алгебраические преобразования. Так, например, если мы умножим первое уравнение на , второе – на и т.д., а затем сложим произведения, то получим уравнение

,

которое является следствием уравнений первоначальной системы. Отметим, что левая часть этого уравнения принадлежит идеалу , т.е. идеал можно рассматривать как множество всех «полиномиальных следствий» системы .

Идеал *I* называется *конечно порожденным,* если существуют полиномы , такие, что ; при этом множествополиномов называется *базисом* идеала *I.*

**Определение 2.3**: *Пусть – аффинное многообразие. Положим*

*Оказывается, что – идеал.*