

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.12

КОЛЕБАНИЯ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение деформации кручения и определение крутильной жесткости проволоки с помощью крутильного маятника

ЗАДАЧИ

1. Измерить зависимость периода колебаний крутильного маятника от положения грузов на его штанге.
2. Построить график зависимости квадрата периода колебаний маятника от квадрата расстояния грузов от его оси и найти угловой коэффициент наклона этого графика.
3. Определить крутильную жесткость проволочного подвеса.

ВВЕДЕНИЕ

Маятником называется система, совершающая механические колебания. Необходимым условием возникновения таких колебаний является наличие силы, возвращающей систему в положение равновесия. В качестве такой «возвращающей» силы может выступать, например, сила тяжести (обычный маятник) или сила упругости (пружинный маятник). Движение тела, совершающего колебания, может быть как поступательным, так и вращательным. В крутильном маятнике, как следует из его названия, тело периодически меняет направление вращения.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad (1)$$

где M – проекция на ось вращения момента сил, действующих на тело, I – момент инерции тела относительно той же оси и $d\omega/dt$ – угловое ускорение. Уравнение динамики вращательного движения (1) аналогично второму закону Ньютона для поступательного движения $m \frac{dv}{dt} = F$.

В обоих уравнениях ускорение пропорционально величине воздействия, а момент инерции в (1) играет ту же роль, что и масса в законе Ньютона.

Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси можно найти суммированием моментов инерции его малых частей:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (2)$$

где m_i – масса малого элемента тела, находящегося на расстоянии r_i от оси вращения. При одной и той же массе момент инерции зависит от формы и размеров тела: чем больше расстояние от частей тела до оси вращения, тем больше момент инерции. В лабораторной установке исследуется вращение штанги с двумя грузами, момент инерции такого тела можно изменять, перемещая грузы по штанге.

Вращение штанги с грузами происходит на проволочном подвесе. При повороте штанги вокруг оси происходит скручивание проволоки и возникает момент сил, стремящийся вернуть ее в положение равновесия. Если при деформации проволоки выполняется закон Гука, этот момент будет пропорционален углу поворота:

$$M = -k \cdot \varphi \quad (3)$$

Здесь k – постоянная величина для данного подвеса, называемая крутильной (или угловой) жесткостью. Знак « - » в правой части показывает, что момент, возникающий при повороте штанги на угол φ , стремится повернуть ее в противоположном направлении.

С учетом (3) уравнение вращательного движения (1) переходит в:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k \cdot \varphi \quad (4)$$

Уравнение (4) является уравнением гармонических колебаний, его решение:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (5)$$

описывает гармонические крутильные колебания с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$ и периодом T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (6)$$

Уравнение (6) может быть использовано для измерения крутильной жесткости подвеса k . Момент инерции штанги с грузами равен сумме моментов инерции штанги и грузов относительно оси вращения. Моменты инерции грузов могут быть вычислены по теореме Штейнера: $I = ml^2 + I_c$, где l - расстояние от центра инерции груза до оси вращения, m - масса груза, а I_c - его момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции.

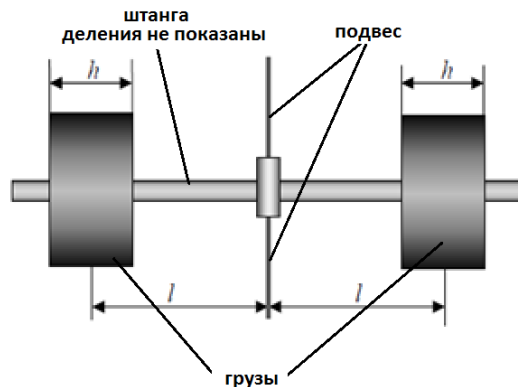


Рис. 1 Схема расположения грузов на штанге

Таким образом, полный момент инерции крутильного маятника равен:

$$I = 2ml^2 + 2I_c + I_0 \quad (7)$$

Здесь I_0 - момент инерции штанги.

Возводя в квадрат уравнение (6) для периода T и подставляя момент инерции из (7), получим:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{k} = \frac{8\pi^2 m}{k} l^2 + \frac{4\pi^2}{k} (2I_c + I_0) = al^2 + b \quad (8)$$

Оказывается, что квадрат периода линейно зависит от квадрата расстояния грузов до оси вращения, а угловой коэффициент этой зависимости равен $a = \frac{8\pi^2 m}{k}$. Проводя измерения периода крутильных колебаний для различных положений грузов, можно определить коэффициент a и найти крутильную жесткость подвеса:

$$k = \frac{8\pi^2 m}{a} \quad (9)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Общий вид экспериментальной установки показан на рис. 2. Установка включает в себя крутильный маятник, в котором на проволоочном подвесе совершает колебания штанга с двумя грузами. К штанге прикреплен металлический флажок, который дважды за период колебания пересекает световой барьер, т.е. луч света, идущий от светодиода к фотоприемнику. При каждом пересечении луча фотоприемник вырабатывает электрический импульс, а каждый второй импульс регистрируется в счетчике периодов колебаний. Время, прошедшее после первого импульса, отсчитывается электронным

секундомером, и отсчет останавливается при прохождении заданного числа периодов. На штанге нанесены риски с шагом 1 см, которые могут использоваться для определения положения грузов на штанге.



Рис. 2 Общий вид экспериментальной установки

ПОРЯДОК РАБОТЫ

1. Установите грузы вблизи центра штанги так, чтобы наружные края грузов находились на ближайших к оси рисках.
2. Включите питание электронного секундомера.
3. Измерьте расстояние l от центров грузов до оси вращения, запишите результаты в таблицу 1.

Табл. 1 Результаты измерений периода колебаний крутильного маятника.

	$l, \text{м}$	N	$t, \text{с}$	$T=t/N, \text{с}$	$X=l^2, \text{м}^2$	$Y=T^2, \text{с}^2$
1						
2						
3						
...						
...						
10						

4. Отклоните маятник из положения равновесия на угол, примерно равный 90° , нажмите кнопку «СБРОС» на электронном секундомере и отпустите маятник. После прохождения маятником светового барьера секундомер начнет отсчет времени и счет периодов. Для повышения точности измеряйте длительность не одного, а 10-20 колебаний по указанию преподавателя. Дождавшись показаний счетчика периодов колебаний, на единицу меньше заданного, и нажмите кнопку «СТОП». После завершения последнего из заданного числа колебаний счет времени прекратится. Запишите в таблицу 1 число колебаний N и показания секундомера t .

5. Повторите измерения пп.3-4 для 8-10 различных положений грузов, каждый раз отодвигая оба груза к краям штанги на 1 см. Следите, чтобы оба груза находились на одинаковом расстоянии от оси.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Вычислите значения T , X и Y в таблице 1. Примеры вычислений приведите в п.9 отчета.
2. Постройте на миллиметровке график зависимости $Y(X)$; убедитесь, что зависимость имеет линейный характер $Y = aX + b$.
3. Методом парных точек (см. пособие [«Практическая обработка экспериментальных данных»](#)) определите угловой коэффициент наклона зависимости $Y(X)$; используйте для вычислений таблицу 2. Таблицу 2 и пример вычисления a_{ij} приведите в п.9 отчета.

Табл. 2 Вычисление углового коэффициента наклона зависимости $Y(X)$ методом парных точек.

i	j	$X_i, \text{м}^2$	$X_j, \text{м}^2$	$Y_i, \text{с}^2$	$Y_j, \text{с}^2$	$a_{ij} = \Delta Y / \Delta X, \text{с}^2/\text{м}^2$	$a_{ij} - \langle a \rangle, \text{с}^2/\text{м}^2$	$(a_{ij} - \langle a \rangle)^2, \text{с}^4/\text{м}^4$
1	6							
2	7							

$\langle a \rangle = \dots$

$\Sigma(a_{ij} - \langle a \rangle)^2 = \dots$

4. Найдите среднее значение углового коэффициента наклона $\langle a \rangle$ и СКО для него $\sigma_{\langle a \rangle}$. Для вычислений СКО воспользуйтесь данными таблицы 2. Вычисление СКО приведите в п.10 отчета.
5. Найдите случайную абсолютную погрешность углового коэффициента наклона Δa . Вычисление погрешности приведите в п.10 отчета.
6. По формуле [12.7] найдите крутильную жесткость подвеса k (вычисление приведите в п.9 отчета) и ее относительную погрешность, используя формулу:

$$\delta C = \sqrt{(\delta m)^2 + (\delta a)^2}.$$

Вычисление погрешности приведите в п.10 отчета.

7. Вычислите абсолютную погрешность крутильной жесткости подвеса Δk и вместе с ее средним значением k поместите в п.12 отчета.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Почему момент инерции сплошного цилиндра относительно его оси меньше момента инерции трубы такой же массы и такого же радиуса?
2. В каких единицах измеряется крутильная жесткость?
3. В результате смещения грузов к краям штанги, момент инерции маятника увеличился в 2 раза. Как изменился период колебаний?