Теоретическая механика

Содержание

1. Обзор основных понятий и законов классической механики

1.1. Механика как часть теоретической физики

Общая (экспериментальная) физика основана на принципе индукции и поставляет теоретической физике математические модели (физические законы). Теоретическая физика использует дедукцию, и возвращает общей физике предсказания результатов экспериментов.

Определение 1.1. Механика — наука о движении материальных объектов в пространстве и времени.

Откажемся от определения, в котором сложно объяснить слова в правой части, и будем перечислять...

1. Пространство и время независимы.

2. Пространство трёхмерно, евклидово, однородно, изотропно.

3. Время однородно, однонаправленно (?).

С точки зрения современной физики эти положения неверны, но это представления классической физики. А как сделать их более корректными?

1. СТО $v \ll c$.

2. КМ $\Delta l \gg \frac{\hbar}{p}$ — длина волны де Бройля.

3. ОТО $m\varphi \ll mc^2$, φ — потенциал.

4. ВВ $t \gg t_{BB}$.

Определение 1.2. Материальная точка — тело, размерами которого при рассмотрении данного класса движение модно пренебречь.

Определение 1.3. Абсолютно твёрдое тело — набор материальных точек, расстояния между которыми не изменяются.

Задача 1.1 (Задача Кэлли (?)). Какое минимальное количество связей между материальными точками необходимо установить, чтобы их система обрела жёсткость?

1.2. Механика системы материальных точек

$$\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\};\ \underset{i=\overline{1,N}}{\{\mathbf{r}_i(t)\}}$$

1.2.1. Кинематика материальной точки.

$\mathbf{r}(t)$ — закон движения (иногда знаем траекторию и положение точки для любого момента времени).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathbf{e}_r,\\
&\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\};\\
&\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\},\\
&\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}.
\end{aligned}$$

Криволинейные координаты.

$$\begin{aligned}
&q = (q_1, q_2, q_3), x = X(q,t), y = Y(q,t), z = Z(q,t) \Rightarrow\\
&q(t) \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\mathbf{q}(t), t = \{X(q(t),t), Y(q(t),t), Z(q(t),t)\};\\
&\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t};\\
&\mathbf{v}_i = \left\{\frac{\partial X}{\partial q_i}\dot{q}_i, \frac{\partial Y}{\partial q_i}\dot{q}_i, \frac{\partial Z}{\partial q_i}\dot{q}_i\right\}.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{e}_i; (e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Пример 1.2.1 (Цилиндрические координаты). Пусть $q = (\varphi, \rho, z)$, и

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\\ y = \rho\sin\varphi\\ z, \end{cases}$$

тогда

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\varphi = \rho\dot{\varphi}\underbrace{\{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\}}_{\mathbf{e}_\varphi}\\ \mathbf{v}_\rho = \dot{\rho}\underbrace{\{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\}}_{\mathbf{e}_\rho}\\ \mathbf{v}_z = \dot{z}\{0, 0, 1\}, \end{cases}$$

значит,

$$(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi) = 0.$$

Ускорение.

$$\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau}) = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \underbrace{v\dot{\boldsymbol{\tau}}}_{=\frac{v^2}{R}\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}}$$

$$|\dot{\boldsymbol{\tau}}| = \frac{v}{R}$$

$[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}] = \mathbf{b}$ — бинормаль — по ней не может быть направлено ускорение.

1.2.2. Основные постулаты ньютоновской механики.

Сразу отметим, что количество точек в системе может быть бесконечным, или даже несчётным.

0. Пространство + Время классические (однонаправленность времени не учитываем).

1. Первый закон Ньютона: существуют инерциальные системы отсчёта, в которых изолированная точка движется равномерно и прямолинейно.

   Добавим принцип относительности Галилея, чтобы не возникало выделенных направлений из-за введения системы отсчёта: законы движения инвариантны относительно преобразования Галилея в замкнутой системе. Преобразование Галилея:

$$\begin{cases} t = t' \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}t, \qquad \mathbf{u} = const. \end{cases} \tag{1.1}$$

   Система (1.1) порождает бесконечный класс инерциальных систем, и однородность восстанавливается.

2. Второй закон Ньютона. Принцип детерминизма Ньютона «сидит» в порядке дифференциальных уравнений для описания динамики системы.

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, t)$$

   $6N$ свободных констант — по две на каждую степень свободы.

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0} \\ \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{v}_{i0}, \end{cases}$$

   существует, правда, множество меры нуль всяких исключений: диссипативные состояния равновесия, например.

   Второй закон Ньютона:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i\left(\{\mathbf{r}_i\}, \{\dot{\mathbf{r}}_i\}, t\right). \tag{1.2}$$

   Отметим, что уравнение (1.2) работает в инерциальных системах отсчёта, m_i — характеристика материальной точки, не зависящая от движения.

   Экспериментальный способ измерения:

$$\begin{cases} m_1a_1 = F \\ m_2a_2 = F \end{cases} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \begin{cases} ma_1 = F_1 \\ ma_2 = F_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Импульс.

$$\mathbf{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} m_i\mathbf{v}_i \qquad \text{— импульс,}$$

$$\mathbf{M}_i \stackrel{\text{def}}{=} m_i[\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] \qquad \text{— момент импульса,}$$

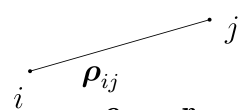
$$\mathbf{N}_i \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] \qquad \text{— момент силы.}$$

Контрпример 1.2.2. Могут быть патологические случаи. $m(t)$ — ракета и реактивная сила или, например, тележка с тающим льдом: включаем массу в систему — система с сохраняющейся массой, а потом смотрим на динамику подсистем. $\mathbf{F}$ может зависеть от разных других вещей, когда мы пытаемся описать механическим немеханические явления: $m(\dot{\mathbf{r}})$ — квазиклассические частицы в твёрдом теле, тела в СТО, $m(\ddot{\mathbf{r}})$ — присоединённая масса в гидродинамике, $F(\dddot{\mathbf{r}})$ — радиационное трение — электрон летает вокруг ядра по боровской орбите, излучает электромагнитные волны как любой движущийся заряд, теряя таким образом энергию, и падает на ядро, нарушается принцип детерминизма Ньютона — пытаемся описать электромагнитную задачу механическим языком.

3. Третий закон Ньютона. Чтобы его определить, придётся все силы разбить на внутренние и внешние.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)}(t, \mathbf{r}_i) + \sum \mathbf{F}_{ij}^{(i)}(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j),$$

внешняя сила может зависеть только от координаты точки (и времени), а все оставшиеся силы — внутренние. Для «всех оставшихся» предположили, что каждая из точек действует на i-ю точку независимо от всех остальных. И обрываем ряд, то есть считаем, что силы, в которой есть $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ и $\mathbf{r}_k$ уже нет — приближение парных взаимодействий, и третий закон Ньютона справедлив только при его применении. Формулировка третьего закона Ньютона :



$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ij}^{(i)} + \mathbf{F}_{ji}^{(i)} = 0 \\ [\boldsymbol{\rho}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}] = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Контрпример 1.2.3. Третий закон Ньютона справедлив только для объектов, которые являются материальными точками, но существуют объекты нулевого размера, не являющиеся материальными точками: например, электрический диполь, у которого есть вращающий момент, который может ещё и энергию забирать...

Следствие 1.1. (a)

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} \Rightarrow \left(\sum m_i\right) \cdot \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)}, \mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i},$$

то есть центр масс системы материальных точек с попарным взаимодействием движется так же, как одна точка с суммарной массой системы в поле равнодействующей всех внешних сил.

Пример 1.2.4. Центр масс двигавшегося по параболе и разорвавшегося в некоторой точке снаряда продолжит движение по параболе.

Контрпример 1.2.5. У Карлсона, летящего по параболе, раскрылся парашют...

(b)

$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{N}_i = \sum \mathbf{N}_i^{(e)},$$

то есть суммарный момент сил, действующих на систему с попарным взаимодействием, равен суммарному моменту внешних сил. Как это можно доказать?

$$[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ij}] + [\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ji}] = [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ij}] = 0,$$

то есть сначала воспользовались первой часть третьего закона Ньютона (1.3), чтобы поменять знак, а потом — второй, чтобы приравнять к нулю.

1.2.3. Законы сохранения в механике Ньютона.

Закон сохранения импульса.

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum m_i \mathbf{v}_i \Rightarrow$$
$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)},$$

первый переход осуществлён в силу II закона Ньютона, второй — III закона Ньютона.

$$\mathbf{p} = const \Leftarrow \sum \mathbf{F}_i^{(e)} = 0,$$

согласно III закону Ньютона.

Закон сохранения момента импульса.

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i];$$
$$\dot{\mathbf{M}} = \sum m_i \big\{ [\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{v}}_i] + [\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{v}] \big\} = \mathbf{N} = \mathbf{N}^{(e)};$$
$$\begin{cases} \sum \mathbf{N}_i^{(e)} = 0, \\ \text{III закон Ньютона} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = const$$

Закон сохранения энергии.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad | \cdot \mathbf{v} \Rightarrow$$
$$m\mathbf{v}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\left(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z\right) = \frac{m}{2} \cdot 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \Rightarrow$$
$$T = \frac{mv^2}{2}$$

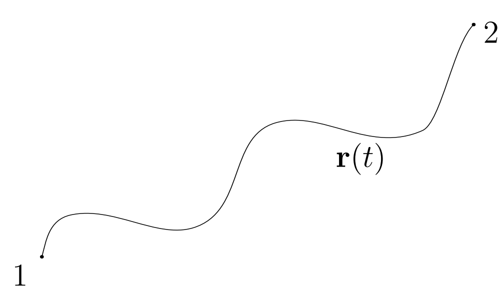


Рис. 1: Траектория материальной точки.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$
$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\, dt = T(2) - T(1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \underbrace{\mathbf{v}\, dt}_{d\mathbf{r}} = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{1}^{2} dA$$

Определение 1.4. Сила является потенциальной, если существует потенциал $U(\mathbf{r}, t)$.

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\mathbf{r}} = \left\{ -\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right\} = -\nabla U$$
$$rot\, \mathbf{F} \equiv 0 \Leftrightarrow [\nabla, \mathbf{F}] = 0,$$

но вся эта наука справедлива в односвязной стягиваемой области. Если сила потенциальная, то

$$\oint \mathbf{F}(\tau, r)\, d\mathbf{r} = 0$$

Определение 1.5.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{сила консервативная (стационарная потенциальная).}$$

Определение 1.6.

$$dA = 0,$$

значит, сила гироскопическая (сила Кориолиса, магнитная составляющая силы Лоренца).

$$(\mathbf{F}, \mathbf{v}) = 0$$

Определение 1.7. Диссипативная сила:

$$dA < 0$$

Пример 1.2.6.

$$\mathbf{F} = -k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}, \quad k > 0$$

Запишем выражение для силы $\mathbf{F}$, используя введённые определения и считая, что они покрывают все силы:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_d$$

Введём понятие полной энергии:

$$T + U = E.$$

Получим дифференциалы потенциальной и кинетической энергии:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v} + \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}; \tag{1.4}$$
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}; \tag{1.5}$$

Сложим (1.4) и (1.5):

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v},$$

то есть для выполнения закона сохранения энергии требуется, чтобы все потенциальные силы были консервативными, и отсутствовали диссипативные силы, а полная энергия материальной точки может изменяться за счёт работы и диссипативных сил и работы потенциальных неконсервативных сил.

Закон сохранения энергии для системы материальных точек.

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \qquad |\cdot \mathbf{v}_i, \sum_i \qquad i = 1, N$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i; \quad T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i\neq j} \mathbf{F}_{ij}$$

$$F_i^{(e)} = -\frac{\partial U^{(e)}(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_{g\,i}^{(e)} + \mathbf{F}_{d\,i}^{(e)},$$

то есть для каждой внешней силы проделали то же, что делали в случае одной материальной точки. И посчитаем:

$$\sum \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i = -\sum \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum \mathbf{F}_{d\,i}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i, \tag{1.6}$$

введём $U^{(e)}$:

$$U^{(e)} = \sum_{i=1}^{N} U_i^{(e)}(\mathbf{r}_i), \text{тогда}$$

$$\frac{\mathrm{d}U^{(e)}}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Выразим первое слагаемое в правой части (1.6) из (1.7) и соберём полные производные энергии по времени вместе:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T + U^{(e)}\right) = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} + \sum \mathbf{F}_{d\,i}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i.$$

$$U_{ij} = U_{ij}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) = U_{ij}\rho_{ij} \Rightarrow U_{ij} = U_{ji};$$

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = +\frac{\partial U_{ij}(\boldsymbol{\rho}_{ij})}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}}, \mathbf{F}_j = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} = -\frac{\partial U_{ij}(\boldsymbol{\rho}_{ij})}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}};$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j);$$

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i = \sum \underbrace{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)}_{-\dot{\boldsymbol{\rho}}_{ij}} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U^{(i)};$$

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} U^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_{ij}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T + U^{(e)} + U^{(i)}\right) = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} + \sum \mathbf{F}_{d\,i}^{(e)}}$$

З. С. Э. $E = const$:

1. Внешние силы консервативные и/или гироскопические.
2. Нет диссипативных сил.
3. Внутренние силы специальной структуры: отвечают глобальным законам симметрии пространства. $U^{(i)}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$.

Пример 1.2.7.

$$E_{\text{Л}} = -e\nabla\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$$

Интеграл движения.

$$I(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = const$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{F}_d$$

Помимо законов сохранения есть и другие интегралы движения; каждый ЗС и интеграл движения понижают порядок уравнения движения на единицу.

Теорема Нётер Некоторая симметрия $\Rightarrow$ инвариант.

Пример 1.2.8.

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \frac{\alpha}{x^2+y^2}\boldsymbol{\tau}, \\ \boldsymbol{\tau} = \{-y, x, 0\}, \\ x = R\cos\omega t, \\ y = R\sin\omega t, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\alpha}{R^2}\int\limits_0^T (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\,dt = \frac{\alpha}{R^2}\int\limits_0^T (R^2\omega\sin^2\omega t + R^2\omega\cos^2\omega t)\,dt = \frac{\alpha}{R^2}R^2\omega\int\limits_0^T dt = \alpha\omega T = 2\pi\alpha$$

1.3. Теорема о вириале

Теорема вириале даёт *приближённые* соотношения.

Определение 1.8. Финитное движение — движение в ограниченной области пространства с ограниченными скоростями.

$$|\vec{r}_i|, |\vec{v}_i| < const$$

Определение 1.9. Средний.

$$f(t) \to \langle f \rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} f(t')\,dt',$$

где τ — время усреднения.

Пример 1.3.1. Движение в груза в гармоническом осцилляторе финитно.

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0;$$
$$F_x = -\kappa\dot{x};$$
$$x = A\cos\omega t + \varphi;$$
$$U = \frac{\kappa x^2}{2}, \quad \langle U\rangle = \frac{1}{4}\kappa A^2.$$

А если не исключать трение, то появится «добавка»:

$$F_{\text{тр}} = -\mu\dot{x},$$
$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0.$$

Определение 1.10 (Характерное время системы)**.**

$$\tau_0 = \frac{f}{\dot{f}}$$

Определение 1.11 (Однородная функция)**.** Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется однородной с порядком однородности k, если

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n) \text{ при } \forall\alpha.$$

Лемма 1.2 (Лемма Эйлера (об однородной функции))**.** *Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ была однородной функцией с порядком однородности k необходимо и достаточно выполнение соотношения Эйлера*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf. \tag{1.8}$$

Доказательство. Необходимость можно получить, продифференцировав (1.8) при $\alpha = 1$: в левой части получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\alpha\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \left.\frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=1} = \frac{\partial f}{\partial x} x,$$

а в правой — kf.

Для доказательства достаточности возьмём функцию $\varphi(\alpha) = \alpha^{-k} f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ при фиксированных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и продифференцируем её по α:

$$\varphi'(\alpha) = -k\alpha^{-k-1} f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + \alpha^{-k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i.$$

Тогда в силу того, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\alpha\mathbf{x})}{\partial(\alpha x_i)} x_i = kf(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

получим, что $\varphi'(\alpha)$, значит, $\varphi'(\alpha) = const$, а эту константу найдём, рассмотрев случай $\alpha = 1$: $\varphi(1) = f(x_1, \dots, x_n)$. Следовательно,

$$\alpha^k \varphi(\alpha) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n). \qquad \square$$

Перейдём непосредственно к теореме о вириале. Рассмотрим финитное движение в поле консервативных сил для одной материальной точки. Верно ли, что при сохранении энергии движение обязательно периодическое? В одномерном случае любое консервативное финитное движение обязательно периодическое (уровень энергии ограничивает доступную зону), а в многомерном случае это неверно: простейшим примером служат независимые колебания по двум различным направлениям с несоизмеримыми периодами (подвесим грузик на двум перпендикулярных пружинках разной жёсткости: при рациональном отношении периодов получим фигуры Лиссажу, при иррациональном — заметённый квадрат).

Теорема 1.3 (Теорема о вириале)**.** *Рассмотрим несколько ограничений.*

1. $|\vec{r}_i|, |\vec{v}_i| < \infty$, *то есть движение финитное.*
2. $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(\vec{r}\,)$ *— сила, действующая на материальную точку, консервативная.*
3. $U(\alpha\vec{r}) = \alpha^k\, U(\vec{r}\,)$ *— сила описывается однородным потенциалом с порядком однородности* k.
4. $\tau = T$, *либо* $\tau \gg \tau_0$, *либо* $\tau \sim \tau_0$ *и* $\underset{\tau_0}{\Delta T} \ll T$, *то есть усреднение происходит либо по периоду, если движение периодическое, либо по времени, которое много больше времени системы, либо по времени порядка характерного времени системы, но при этом изменение кинетической энергии за это время мало.*

Если соблюдены указанные выше условия, то справедливо следующее усреднённое равенство:

$$\langle T \rangle \approx \frac{k}{2} \langle U \rangle\,.$$

Эквивалентные формы:

$$\langle T \rangle \approx \frac{k}{k+2} E,$$
$$\langle U \rangle \approx \frac{2}{k+2} E.$$

Доказательство.

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\mathbf{pv} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{pr}\right) - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{pr}\right) - \frac{1}{2}$$
$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{Fr} \rangle + \frac{1}{2\tau}\mathbf{pr}\Big|_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \tag{1.9}$$

Скалярное произведение в первом слагаемом правой части уравнения (1.9) принято называть вириалом или вириалом Клаузиуса. Покажем, что пункт 4 условия теоремы позволяет пренебречь «добавкой» — вторым слагаемым.

$\tau = T$ Периодическое движение в с периодом T — подстановка даёт ноль, и равенство даже не приближённое, а строгое.

$\tau \to \infty$ При математически бесконечном времени усреднения добавка устремляется к нулю.

$\tau \gg \tau_0$ Физически бесконечное время усреднения. Оценим $\vec{p}\cdot\vec{r}$. Оценка, «как на природоведении в четвёртом классе»: $v \sim \frac{r}{\tau_0}, \vec{p}\cdot\vec{r} \sim \tau_0 pv, \frac{1}{2}\frac{\tau_0}{\tau}pv = \frac{\tau_0}{\tau}T$. Получили кинетическую энергию умноженную на малый параметр.

$\tau \sim \tau_0$ Если понять предыдущий пункт, то всё уже просто: второе слагаемое можно оценить как $\frac{1}{2}\frac{\tau_0}{\tau}\Delta T$, а малость изменения кинетической энергии мы предусмотрительно потребовали в условии.

Запишем полученное приближённое равенство; воспользуемся условиями 2 и 3:

$$\begin{cases} \langle T \rangle \approx -\frac{1}{2}\langle \mathbf{Fr} \rangle \\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} \overset{(2)}{=} -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{r} \overset{(3)}{=} -kU \end{cases} \Rightarrow \langle T \rangle \approx \frac{k}{2}\langle U \rangle$$

□

Пример 1.3.2. $U = -\frac{\alpha}{r} \Rightarrow k = -1, \langle T \rangle = -E, \langle U \rangle = 2E$ — если в системе возможно финитное движение, то оно отвечает отрицательной полной энергии.

Пример 1.3.3 (Теорема о вириале для слабо диссипативной системы). Несколько изменим условия теоремы о вириале.

2. $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_d$
4. $\tau \gg \tau_0$, или $\tau \sim \tau_0 \ll \tau_T,\ \tau_T = \tau_0\frac{T}{\Delta T}$.
5. $\tau_0 \ll \tau_E$ $(\Delta E \ll E)$

Доказательство. До вывода приближённого равенства для средней кинетической энергии всё аналогично предыдущему доказательству, дальше изменения:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{r} + \mathbf{F}_d\mathbf{r} = -kU + \mathbf{F}_d\mathbf{r},$$

и последним слагаемымв этом равнестве хотим пренебречь;

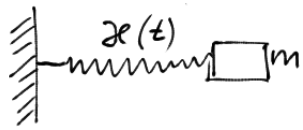
$$\begin{aligned} &\frac{E}{\tau_E} \sim \frac{U}{\tau_U} + \frac{r}{\tau_0}F_d \Rightarrow \\ &rF_d \sim \frac{\tau_0}{\tau_E}E \sim \frac{\tau_0}{\tau_E}U \Rightarrow \\ &\langle T \rangle \approx \frac{k}{2}\langle U \rangle, \langle T \rangle \approx \frac{k}{k+2}\langle E \rangle. \end{aligned}$$

□

Пример 1.3.4. $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\mu\dot{x}^2 = -\frac{2\mu}{m}T = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \\ &k = 2 \Rightarrow \langle - \rangle \frac{\mu}{m}\langle E \rangle \Rightarrow \\ &\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle E \rangle = -\frac{\mu}{m}\langle E \rangle} \\ &\langle E \rangle = \mathcal{E}\exp\left\{-\frac{\mu}{m}t\right\} \end{aligned}$$

Пример 1.3.5. $\tau_\varkappa \gg \frac{2\pi}{\omega}, \omega^2 = \frac{\varkappa}{m}$



$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U(tx)}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \varkappa}\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\varkappa}x^2}{2},$$
$$\left\langle \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \left\langle \frac{\dot{\varkappa}x^2}{2} \right\rangle,$$
$U = \dfrac{\varkappa x^2}{2}$, при этом $\left\langle \dfrac{\varkappa x^2}{2} \right\rangle = \dfrac{\varkappa}{2}\left\langle x^2 \right\rangle$, так как $\tau_T \gg \tau_0$, то есть $\varkappa(t)$ меняется сильно медленнее, а

$\langle U \rangle = \dfrac{1}{2}\langle E \rangle$ по теореме о вириале,

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right\rangle \stackrel{?}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle E \rangle = \frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa}\langle U \rangle = \frac{\dot{\varkappa}}{2\varkappa}\langle E \rangle \Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\langle E \rangle = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\varkappa = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\sqrt{\varkappa} \Rightarrow$$
$$\langle E \rangle = E_0\sqrt{\frac{\varkappa(t)}{\varkappa_0}} \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{\langle E \rangle}{\omega(t)} \simeq const}$$

Теорема 1.4 (Теорема о вириале для системы частиц)**.**

Доказательство. Аналогично тому, как это было проделано в доказательстве теоремы о вириале дя одной материальной точки, получим следующее утверждение:

$\langle T \rangle \approx -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\mathbf{r}_i$, сумма в правой части — вириал Клаузиуса.

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}U^{(e)},$$
$$\mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\frac{\partial U_{ij}^{(i)}}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \rho_{ij}},$$
$$\sum_{i=1}^{3N}\mathbf{F}_i^{(e)}\mathbf{r}_i = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \mathbf{r}_i}\mathbf{r}_i = -k^{(e)}U^{(e)},$$
$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\mathbf{F}_{ij}^{(i)}\mathbf{r}_i = -\sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\frac{\partial U_{ij}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}}\boldsymbol{\rho}_{ij} = -k^{(i)}U^{(i)}$$
$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{k^{(i)}}{2}\left\langle U^{(i)} \right\rangle + \frac{k^{(e)}}{2}\left\langle U^{(e)} \right\rangle}$$
$$E = T + U^{(i)} + U^{(e)}$$

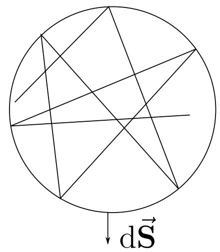
□

Пример 1.3.6 (Твёрдое тело).

$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = const \Rightarrow U^{(i)} = const, k^{(i)} = 0$$

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{k^{(e)}}{2} \left\langle U^{(e)} \right\rangle}$$

Пример 1.3.7 (Эргодическая гипотеза).



$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \right\rangle = \frac{p}{2} \int\limits_{S_V} \mathbf{r} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{3}{2} pV$$

$$\mathbf{F}_i = -p \, \mathrm{d}\mathbf{S}_i \,, U_i^{(i)} = 0$$

$$\oint \mathbf{r} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} a a^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = 4\pi a^3 = 3V$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \Rightarrow \oint \mathbf{r} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r} \, \mathrm{d}V = 3 \int \mathrm{d}V = 3V.$$

Пример 1.3.8 (Термодинамическое равновесие в звезде). Пусть теперь внешних сил нет — только внутренние. Рассмотрим две звезды одной плотности, но отличающиеся по размерам в два раза. Какая из них горячее?

$$U^{(e)} = 0,$$
$$U_{ij}^{(i)} = -\frac{\alpha}{\rho_{ij}} \Rightarrow k^{(i)} = -1,$$
$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle U^{(i)} \right\rangle,$$

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} k_{\text{Б}} \frac{m}{\mu} T_\star,$$
$$\left\langle U^{(i)} \right\rangle = -G \frac{m^2}{R} \Rightarrow$$

$$T_\star \sim \frac{m}{R} \sim R^2 \rho.$$

2. Механика Лагранжа

Стартуем с механики Ньютона:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i,\ i = \overline{1, N},$$

но беда в том, что для ряда сил мы знаем результат их действия, а не сами силы.

Определение 2.1. Связи — не вытекающие из уравнения движения ограничения на $\{\vec{r}_i, \vec{v}_i\}$.

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{R}_i$$

Так, выше указана несвободная система — на неё наложены связи. $\vec{F}_i^{(a)}$ — активные силы (их знаем), $\vec{R}_i$ — силы реакции (знаем связи).

2.1. Связи и их классификация.

$$f(t, \{\vec{r}_i\}, \{\vec{v}_i\}) = 0,$$

связи в виде равенств — удерживающие связи.

$f(\dots) \geqslant 0$— неудерживающиие, ненапряжённые связи.

Неудерживающие связи впервые появились только в теории атомного ядра; математически их можно представить в виде удерживающей связи, подставив в степ-функцию. ...[1]

$$f(t, \{\vec{r}_i\}) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i}\vec{v}_i = 0. \tag{2.10}$$

Конечные, дифференцируемы, недифференцируемые, интегрируемые, голономные (2.10). Стационарные (склерономные)($\cancel{t}$), нестационарные (реаномные)(t) связи.

Пример 2.1.1.

$\boxed{\text{WILL BE COMPLEMENTED}}$

[1]см. [1], с. 204, [2], с. 201.

2.2. Линейные колебания в лагранжевых системах

Начнём потихонечку искать решения уравнений Лагранжа.

2.2.1. Одномерное движение

Пусть нам дана одномерная (s =1) натуральная лагранжева система. Будем временно использовать букву x вместо q. Имеем полином не выше второй степени (в силу натуральности системы):

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\alpha(x)\dot{x}^2 + \beta(x)\dot{x} - U(x),$$

уже есть некоторая нестыковка, потому что α, β могут зависеть от времени — сделаем упрощения.

1. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

2. Член линейный по скорости — гироскопическая сила, но в одномерном случае никаких гироскопических сил не существует, поэтому можем этот член выкинуть, потому что

$$\beta\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \beta \,\mathrm{d}x\,.$$

Определение 2.2 (Состояние равновесия)**.** Состояние равновесия — решение уравнения движения — тождественная константа. $x = x_0 = const(\dot{x} = \ddot{x} = \cdots = 0$

3. Диссипативных сил нет, то есть $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \alpha(x)\dot{x} \Rightarrow \alpha\ddot{x} + \alpha'\dot{x}^2 = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}\alpha'\dot{x}^2 - U'$$

.

$$\alpha(x)\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\dot{x}^2 = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

получили уравнение двжиения. Подставим условие существования стационарного решения в точке x_0:

$$\frac{\partial U(x_0)}{\partial x} = 0$$

Опишем формально двжиение в окрестности точки x_0:

$$x = x_0 + q \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(x_0) + \dots; \quad \alpha(x_0) = m$$

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)q + \frac{1}{2}U''(x_0)^2 + \approx \frac{1}{2}kq^2; \quad k = U''(x_0) \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

Возникает вопрос, что значит "мало". Поэкспериментировав, можно проверить, что неважно, где делать разложение: в функции Лагранжа или в уравнениях движения. Если будем учитывать следующие поправки, то у нас буду появляться следующие поправки к силе, которая уже учтена, и они по сравнению с ней должны быть малы. Второе замечание: коэфффициенты k и q должны быть невырожденными, иначе должны учитывать следующие члены в разложении, но тогда колебания уже будут нелинейными. Перепишем лагранжиан в эквивалентной форме:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2, \quad \omega^2 = k/m$$

соответствующее уранение движения

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

линейное ОДУ с постоянными коэффициентами, порождаемое квадратичной формой. Есть стандартный способ решения таких уравнений:

$$q = Ce^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 Ce^{\lambda t} + \omega^2 Ce^{\lambda t} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega \Rightarrow$$
$$q = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

оптребуем

$$q \in \mathrm{Re} \Rightarrow C_2 = C_1^* \Leftrightarrow q = C_1 e^{i\omega t} + \text{к. с.} = 2\,\mathrm{Re}\,C_1 e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\,Ce^{i\omega t}, \quad C \in \mathbb{C}$$
$$C = ce^{i\varphi} \Rightarrow q = c\cos(\omega t + \varphi)$$

Теорема 2.1.

$$\hat{D}q = 0, \quad \hat{D} \in \mathbb{R},$$

тогда мы всегда можем рассмотреть некое решение $X \in \mathbb{C}$, $\hat{D}X = 0$, *автоматически*

$$\begin{cases} \hat{D}(\mathrm{Re}\,X) = 0 \\ \hat{D}(\mathrm{Im}\,X) = 0 \end{cases}$$

Доказательство.

$$\hat{D}(\mathrm{Re}\,X + i\,\mathrm{Im}\,X) = 0 \Rightarrow$$
$$\hat{D}(\mathrm{Re}\,X) + i\hat{D}(\mathrm{Im}\,X) = 0$$

текст крупнее 12pt латех □

$$q = Ce^{\lambda t}$$
$$\ddot{q} + \omega^2 q = Ce^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0 \Rightarrow q = Ce^{i\omega t} \Rightarrow q = \mathrm{Re}\,Ce^{i\omega t}$$
$$\omega^2 > 0 \quad q = c\cos(\omega t + \varphi) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

через комплексные амплитуды:

$$C = ce^{i\varphi}$$

Квадрат омеги больше нуля, когда ка больше нуля, потому что м мы получаем из законов нбютона и оно больше нуля, а вот ка выползает из потенциала, и может быть меньше нуля. Положительный квадрат частоты отвечает минимуму потенциальной энергии.

$$\omega^2 < 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{|\omega|} \in \mathbb{R}$$
$$q = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t} = a\,\mathrm{sh}\,\lambda t + b\,\mathrm{ch}\,\lambda t \underset{H/w}{\overset{?}{=}} c\,\mathrm{sh}(\lambda t + \varphi) \underset{H/w}{\overset{?}{=}} \tilde{c}\,\mathrm{ch}(\lambda t + \varphi)$$
$$\omega = 0 \quad q = c_1 t + c_2 \quad \ddot{q} = 0$$

Продемонстрируем всю мощь метода комплексных амплитуд. В этих нескольких примерах будем выходить за рамки консервативных ($L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$, $H = \frac{m}{2}(\dot{q} + \omega^2 q^2) = const$) систем.

Пример 2.2.1 (Осциллятор с трением.).

$$\ddot{q} + \omega_0 q + 2\gamma\dot{q} = 0,$$

то есть рассматриваем линейный осциллятор с трением.

$$q = Ce^{\lambda t} \Rightarrow (\underbrace{\lambda^2 + \omega_0^2 + 2\gamma\lambda}_{0})Ce^{\lambda t} = 0$$
$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

в комплексном ваиде записали, чтобы был перезод к незатухающему осцуиллятору.

$$q = ce^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t + \varphi\right),$$

получили общее решение. H/w $\omega_0 = \gamma,\ \omega_0 < \gamma,\ \omega_0 > \gamma$ (движение в меду).

Пример 2.2.2 (Осциллятор, на который действует внешняя сила.).

$$\begin{aligned}
&\ddot{q} + \omega^2 q = f(t) \\
&\dot{q} + i\omega t = a(t)e^{i\omega t}, \qquad (2.11)\\
&a(t) \in \mathbb{C} \Rightarrow q(t) = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im} ae^{i\omega t} \\
&\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q} + i\omega t\right) = (\dot{a} + i\omega a)e^{i\omega t} \\ (2.11) * i\omega: \quad -i\omega\dot{q} + \omega^2 q = -i\omega a e^{i\omega t} \end{cases} \quad \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = \dot{a}e^{i\omega t} = f(t) \Rightarrow a(t) = \int^t f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Обратим ванимание, что $a(t)$ очень похоже на преобразование Фурье.

Теорема 2.2 (Появляющаяся сила.). *Пусть в некоторый момент на осцилллятор подействовала сила с конечным спектром (см. рисунок)* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} fe^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = F$, *тогда* $H(+\infty) - H(-\infty) = \frac{m}{2}|F|^2$, *где* F *— спектральная компонента силы.*

Доказательство. H/w □

Задача 2.1.

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t)$$

В частности, когда сила сама осциллирует: $f(t) = A\cos\omega t \Rightarrow q(t) = ?$.

2.2.2. Многомерные системы

$$L = \sum_{i,j}\frac{1}{2}\alpha_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j + \sum_i \beta_i(x)\dot{x}_i - U(x)$$

Построим уравнение движения: скажем, что x — тождественная константа отвечает случаю локального экстремума функции $U(x)$:

$$x = x_0 = const \Leftrightarrow \frac{\partial U(x_0)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = \overline{1, s}$$

$$x = x_0 + q \Rightarrow \alpha_{ij}(x) \approx m_{ij} = \alpha ij(x_0)$$

$$U(x) \approx \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{ij} q_i q_j; \quad k_{ij} = \frac{\partial^2 U(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Что можем сказать про коэффициенты m_{ij}, k_{ij}?

1. m_{ij} симметричная ($m_{ij} = mji$) и положительно определённая, α — положительно определённая квадратичная форма, потому что произошла из кинетической энергии, и матрица постоянных коэффициентов m унаследовала эти свойства.

2. $k_{ij} = k_{ji}$: появилась по определению как смешанная производная, положительная определённость не гарантируется (достигается в случае локального минимума потенциала).

Осталось рассмотреть гироскопические силы. К полной производной, как в одномерном случае они сводиться не обязаны. Заметим, что

$$\sum_i \beta_i(x_0)\dot{x}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum \beta_i(x_0)x_i), \text{ поэтому}$$

$$\beta_i(x) \approx \cancel{\beta_i(x_0)} + \sum_j \frac{\partial \beta_i(x_0)}{\partial x_j} q_j; \quad g_{ij} = \frac{\partial \beta_i(x_0)}{\partial x_j},$$

подставим это всё в лагранжиан:

$$\boxed{L = \sum_{i,j=1}^{s} \{\frac{1}{2} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + g_{ij}q_j\dot{q}_i - \frac{1}{2}k_{ij}q_iq_j\}}. \tag{2.12}$$

Пример 2.2.3 ($g_{ij} = 0$). Рассмотрим лагранжиан (2.12) в частном случае, когда нет гиротропных сил, то есть$g_{ij} = 0$:

$$L = \sum_{i,j=1} \frac{1}{2} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}k_{ij}q_iq_j.$$

Его можно рассматривать как две квадратичные формы, соответствующие двум слагаемым: первая симметричная и положительно определённая, вторая симметричная. Теорема из линейной алгебры утверждает, что такие кв. формы диагонализируемы одновременно.

Теорема 2.3.

$$\left\{ \begin{array}{r} \textit{симм.}(+) \\ \textit{симм.} \end{array} \right. \Rightarrow \textit{всегда диагонализуемы одновременно!}$$

То есть $\exists$ *линейное преобразование* $a_{ik} \mid q_i = \sum_i a_{ik}\theta_k, \dot{q}_i = \sum a_{ik}\dot{\theta}_k$.

тогда

$$L = \sum_k^s \{\frac{1}{2}m_k\dot{\theta}_k^2 - \frac{1}{2}k_k\theta_k^2\} = \sum_k \frac{m_k}{2}\{\dot{\theta}_k^2 - \omega_k^2\theta_k^2\}, \tag{2.13}$$

где $\omega_k^2 = k_k/m_k$, то есть система распадается на s штук невзаимодействующих подсистем, каждая из которых есть одномерный гармонический осциллятор. Уравнение движения соответствующее (2.13):

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2\theta_k = 0 \Rightarrow$$
$$\theta(t) = C_k\cos(\omega t + \varphi_k) \approx \operatorname{Re} C_k e^{i\omega_k t}$$

Определение 2.3. $\{\omega_k\}$ — спектр нормальных частот $\omega_k,\ k = \overline{1, s}$.

Определение 2.4. $\{\theta_k\}$ — нормальные координаты.

Как выглядит решение?

Определение 2.5. Частное решение при $\theta_k = 0$, кроме $k = k^* \Rightarrow$

$$q_j = a_{jk^*}\theta_{k^*}(t)$$

называют нормальными колебаниями.

Общее решение:

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^s a_{jk}\theta_k(t).$$

Замечание 2.2.1. Если мы возбудили одно нормальное колебание, то каждая степень свободы колеблется в одной и той же фазе. То есть, если у нас есть сложная многомерная система, и одна степень свободы проходит через ноль или экстремум, то остальные степени свободы тоже проходят через ноль или экстремум соответственно.

Замечание 2.2.2. Если мы живём на дне потенциального рельефа, то в (2.13) две положительно определённые квадратичные формы, значит, $\omega_k^2 > 0\ \forall k$, и у нас действительно колебания, то есть можем получить решения в виде синусов и косинусов, а не только экспонент.

Построим уравнение движения для лагранжиана (2.13):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \{\frac{1}{2}m_{ik}\dot{q}_i + \frac{1}{2}m_{kj}\dot{q}_j + g_{kj}q_j\} = \sum_i\{m_{ik}\dot{q}_i + g_{ki}q_i\},$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum\{g_{ik}\dot{q}_i - k_{ik}q_i\}!!!!! \Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \sum_i\{m_{ij}\ddot{q}_i + (g_{ij} - g_{ji})\dot{q}_i + k_{ij}q_i\} = 0.$$

Замечание 2.2.3. же и жи же жи и

Ищем решение в виде

$$q_i = \operatorname{Re} C_i e^{\lambda t},$$

тогда

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\sum_i \{m_{ij}\lambda^2 + G_{ij}\lambda + k_{ij}\}C_i e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \\ &\sum_i \{m_{ij}\lambda^2 + G_{ij}\lambda + k_{ij}\}C_i = 0.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Эта линейная однородная алгебраическая система имеет невырожденное решение, когда детерминант матрицы её коэффициентов равен нулю:

$$\det\left(m_{ij}\lambda^2 + G_{ij}\lambda + k_{ij}\right) = 0 \text{ — характеристическое уравнение.}$$

Поразмышляем о структуре решения. По размерности $P_{2s}(\lambda) = 0$, плюс, если λ — корень, то λ^* — тоже корень, так как $P_{2s} \in \mathbb{R}$, то есть все коэффициенты этого полинома действительные. На самом деле, уравнение движения консервативной системы накладывает ещё одно ограничение, и если расписать детерминант, то можно получить, что решение имеет вид $P_s(\lambda^2) = 0$. Свойство чётности степеней — свойство обратимости времени. Покажем, что решения действительно идут парами. Пусть λ — корень исходного характеристического уравнения, рассмотрим это же уравнение относительно $-\lambda$:

$$\begin{aligned}&\det\left(m_{ij}(-\lambda)^2 + G_{ij}(-\lambda) + k_{ij}\right) \Leftrightarrow \\ &\det\left(m_{ij}\lambda^2 + G_{ji}\lambda + k_{ij}\right) \Leftrightarrow \\ &\det\left(m_{ji}\lambda^2 + G_{ji}\lambda + k_{ji}\right),\end{aligned}$$

поскольку m_{ji} и k_{ji} симметричные, и мы получили уравнение, выполняющееся тождественно, потому что λ — корень — свойство антисимметричности члена, отвечающщего за гиротропию. А это означает, что $-\lambda$ — тоже корень, что в точности и означает, что характеристическое уравнение имеет вид

$$P_s(\lambda^2) = 0.$$

Для консервативной системы каждый корень порождает ещё три:

$$\lambda \longrightarrow \lambda^*, -\lambda, -\lambda^*.$$

Поразмышляем, при каких условиях реализуются устойчивые колебания, а не какие-то экспоненты, описывающие неустойчивые состояния равновесия. Вернёмся к (2.14). Для анализа таких уравнений существует стандартный приём: умножим каждое уравнение на C_j^*, учтём, что

$$C_i C_j^* = (c_i' + ic_i'')(c_j' - ic_j'') = (\underbrace{c_i'c_j' + c_i''c_j''}_{S_{ij}}) + i(\underbrace{c_i''c_j' - c_i'c_j''}_{A_{ij}}),$$

•:

$$\sum_{i,j} \boxed{m_{ij}S_{ij}\lambda^2 + iG_{ij}A_{ij}\lambda + k_{ij}S_{ij} = 0}$$

1. гиротропии нет $k_{ij}(+); G_{iJ} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k_{ij}S_{ij}}{m_{ij}S_{iJ}} < 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega$ — ситуация, когда существуют нормальные частоты и нормальные колебания в смысле именно колебаний.

2. Нет $(+)k_{ij} \Rightarrow \lambda^2 > 0 \Rightarrow \pm\lambda \Rightarrow c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$ — состояние равновесия типа седло.

3. Можно показать, что гиротропия не может разрушить устойчивое состояние равновесия. $k_{ij}(+)\&G_i \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 < 0$, то есть колебания устойчивые.

Допустим, что мы научились решать характеристическое уравнение. Получим общее решение уравнения движения лагранжевой системы вблизи положения равновесия.

$$P_s(\lambda^2) = 0 \Rightarrow \{\lambda_k^2\} k = \overline{1, s}$$
$$\lambda_k^2 < 0 \Rightarrow \lambda_k = \pm i\omega_k$$
$$q_j^{(k)} = \operatorname{Re} C_{jk} e^{i\omega_k t}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \left(m_{ij}\lambda^2 + G_{ij}\lambda + k_{ij}\right) C_i = 0 \quad j = \overline{1, s} \Rightarrow C_{jk} = a_{jk} e^{i\varphi_{jk}} B_k$$
$$\forall B_k = b_k e^{i\varphi_{0_k}}$$

Строим общее решение для q, которое есть сумма всех нормальных колебаний:

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} q_j^{(k)} = \sum_k \operatorname{Re} b_k a_{jk} e^{i\omega_k t + i\varphi_{jk} + i\varphi_{0_k}}$$

$\varphi_{jk} = 0$, если $G = 0$ (нет гиротропии), тогда

$$q_j = \sum_k a_{jk} \underbrace{\operatorname{Re} B_k e^{i\omega_k t + i\varphi_{0_k}}}_{\theta_k(t)},$$

то есть свели ответ к предыдущему.

Вообще

$$q_j = \sum_k \operatorname{Re}\left\{B_k C_{jk} e^{i\omega_k t}\right\}.$$

Рассмотрим пару простых примеров.

Пример 2.2.4 (Чашечка). Пусть у нас есть движение в поле тяжести в окрестности минимума какой-то ямки $z = h(x, y)$. Заметим, что если $x = y = 0$ отвечают $\min h(x, y)$, то

$$z = h(x, y) = \frac{x^2}{2\rho_1^2} + \frac{y^2}{2\rho_2^2} + \ldots \quad \rho_{1,2} \text{ — главные радиусы кривизны.}$$

Составим лагранжиан:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mg\left(\frac{x^2}{2\rho_1^2} + \frac{y^2}{2\rho_2^2}\right), \tag{2.15}$$

$\dot{z}^2$ нас не интересует, потому что речь идёт о малых колебаниях, поэтому (2.15) можно переписать в виде

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 - \Omega_1^2 x^2 + \dot{y}^2 - \Omega_2^2 y^2\right\}, \quad \Omega_{1,2} = \frac{g}{\rho_{1,2}^2}.$$
$$x = a\cos(\Omega_1 t + \varphi_1),$$
$$y = b\cos(\Omega_2 t + \varphi_2), \text{и эти колебания независимые.}$$

Пример 2.2.5 (Вращающаяся чашечка). Перейдём в систему координат x, y, которая прибита к чашке, и в ней уравнение чашки не изменится, но при этом в подвижной системе координат появятся дополнительные члены, связанные с вращением:

$$\mathbf{v}_{co} = [\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}] \Rightarrow$$
$$\begin{cases} v_x = \dot{x} - \Omega y \\ v_y = \dot{y} + \Omega x \end{cases} \Rightarrow L = \frac{m}{2} \left\{ (\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 - \Omega_1^2 x^2 - \Omega_2^2 y^2 \right\},$$

этот лагранжиан квадратичен по всем координатам и скоростям, и он содержит гироскопически члены (вида произведение координаты на скорость), а мы его перепишем:

$$L = \frac{m}{2}\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\Omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - (\underbrace{\Omega_1^2 - \Omega^2}_{\widetilde{\Omega}_1^2})x^2 - (\underbrace{\Omega_2^2 - \Omega^2}_{\widetilde{\Omega}_2^2})y^2\}.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - m\Omega\dot{y} = \frac{\partial L}{\partial x} = m\Omega\dot{y} - m\widetilde{\Omega}_1^2 x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} + m\Omega\dot{x} = \frac{\partial L}{\partial y} = -m\Omega\dot{x} - m\widetilde{\Omega}_2^2 y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \widetilde{\Omega}_1^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \widetilde{\Omega}_2^2 y = 0 \end{cases}$$
$$x = C_1 e^{i\Omega t}$$
$$y = C_2 e^{i\Omega t}$$
$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \widetilde{\Omega}_1^2\right) C_1 - 2\Omega i\omega C_2 = 0 \\ 2\Omega i\omega C_1 + \left(-\omega^2 + \widetilde{\Omega}_2^2\right) C_2 = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

система (2.16) имеет нетривиальное решение, когда определитель матрицы коэффициентов перед искомыми C_1 и C_2 равен нулю, тогда

$$\boxed{\left(\omega^2 - \widetilde{\Omega}_1^2\right)\left(\omega^2 - \widetilde{\Omega}_2^2\right) = 4\Omega^2\omega^2}.$$

Получили биквадратное уравнение относительно нормальных частот ω. Проанализируем случай, когда

$$\omega \ll \widetilde{\Omega}_1, \widetilde{\Omega}_2.$$

До сих пор у нас был консервативный случай, и обобщённая энергия сохранялась:

$$H = const \quad H = \sum \frac{1}{2}\left\{m_{iJ}\dot{q}_i\dot{q}_j + k_{ij}q_i q_j\right\}.$$

$$H/w \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow P_s(\lambda^2) = 0 \text{ или } \lambda \text{ и } -\lambda \text{ — корни одновременно.}$$

2.2.3. Малые колебания в диссипативных системах

Диссипативная функция Рэлея. Линейное трение в лагранжевых системах обычно вводится следующим образом:

$$\mathbf{F}_i = -\sum_j \mu_{ij}\mathbf{v}_j,$$

и такие силы можно пересчитать в обобщённые силы, которые войдут в уравнение Лагранжа, с помощью этакого потенциала в пространстве скоростей, с помощью функции Рэлея $R(t, \{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{v}_i\}$, например, такой функции:

$$\mathbf{F}_i = -\sum_j \mu_{ij}\mathbf{v}_j = -\frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}_i} \quad R = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mu_{ij}\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = \frac{1}{2}\gamma_{iJ}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

и в этом случае

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}_i}\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}\dot{q}_i,$$

и отличие от гироскопических сил только в том, что матрица коэффициентов здесь симметричная (по построению):

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}.$$

А уравнение Лагранжа выглядит следующим образом:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0}.$$

$$H/w \Rightarrow \sum_{j=1}^{s}\left\{m_{ij}\dot{q}_j + (G_{ij} + \gamma_{ij})\,\dot{q}_j k_{ij} q_j\right\} = 0,$$

причём G_{ij} — антисимметричная часть (порождается функцией Лагранжа), гарантирует, что $P_s(\lambda^2) = 0$; $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$; λ_{ij} — симметричная часть (порождается функцией Рэлея, и $P_{2s}(\lambda) = 0$ — есть нечётные степени, диссипация, и направления времени не эквиваленты, диссипация работает в обе стороны, система не может двигаться «по кругу», $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum Q_j\dot{q}_j = -\sum\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = -2R$, то есть физичесий смысл функции Рэлея в том, что она отвечает мощности потерь на соответствующей силе, которую она определяет, и в этом случае мы будем получать решения, как для осциллятора с трением, в виде

$$e^{\lambda t};\ \lambda = \lambda' + i\lambda'' \Rightarrow$$
$$e^{\lambda' t}\cos(\lambda'' t + \varphi),$$

действительная часть корня характеристического уравнения описывает затухание в случае диссипации, а мнимая часть — действительную часть частоты, свойство одновременной принадлежности к корням λ и λ^* сохраняется (потому что это свойство действительности коэффициентов), а λ и $-\lambda$ — нет.

Предметный указатель

Список литературы

1. Ольховский И. И. *Курс теоретической механики для физиков.* М.: Наука, 1970.
2. Гантмахер Ф. Р. *Лекции по аналитической механике.* М.: Наука, 1966.