Конспекты лекций по теоретической механике

Содержание

1. Обзор основных понятий и законов классической механики

1.1. Механика как часть теоретической физики

Общая (экспериментальная) физика основана на принципе индукции и поставляет теоретической физике математические модели (физические законы). Теоретическая физика использует дедукцию, и возвращает общей физике предсказания результатов экспериментов.

Определение 1.1. Механика — наука о движении материальных объектов в пространстве и времени.

Откажемся от определения, в котором сложно объяснить слова в правой части, и будем перечислять...

1. Пространство и время независимы.

2. Пространство трёхмерно, евклидово, однородно, изотропно.

3. Время однородно, однонаправленно (?).

С точки зрения современной физики эти положения неверны, но это представления классической физики. А как сделать их более корректными?

1. СТО $v \ll c$.

2. КМ $\Delta l \gg \frac{\hbar}{p}$ — длина волны де Бройля.

3. ОТО $m\varphi \ll mc^2$, φ — потенциал.

4. ВВ $t \gg t_{BB}$.

Определение 1.2. Материальная точка — тело, размерами которого при рассмотрении данного класса движения можно пренебречь.

Определение 1.3. Абсолютно твёрдое тело — набор материальных точек, расстояния между которыми не изменяются.

Задача 1.1 (Задача Кэлли (?)). Какое минимальное количество связей между материальными точками необходимо установить, чтобы их система обрела жёсткость?

1.2. Механика системы материальных точек

$$\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\};\ \underset{i=\overline{1,N}}{\{\mathbf{r}_i(t)\}}$$

1.2.1. Кинематика материальной точки.

$\mathbf{r}(t)$ — закон движения (иногда знаем траекторию и положение точки для любого момента времени).

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r\mathbf{e}_r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathbf{e}_r,\\
\mathbf{e}_r &= \frac{\mathbf{r}}{r} = \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\};\\
\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\},\\
\mathbf{v} &= v\boldsymbol{\tau}.
\end{aligned}$$

Криволинейные координаты.

$$
\begin{aligned}
q = (q_1, q_2, q_3), x = X(q,t), y = Y(q,t), z = Z(q,t) \Rightarrow \\
q(t) \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\mathbf{q}(t), t = \{X(q(t),t), Y(q(t),t), Z(q(t),t)\}\,; \\
\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}; \\
\mathbf{v}_i = \left\{ \frac{\partial X}{\partial q_i}\dot{q}_i, \frac{\partial Y}{\partial q_i}\dot{q}_i, \frac{\partial Z}{\partial q_i}\dot{q}_i \right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{e}_i; (e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2
$$

Пример 1.2.1 (Цилиндрические координаты). Пусть $q = (\varphi, \rho, z)$, и

$$
\begin{cases}
x = \rho\cos\varphi \\
y = \rho\sin\varphi \\
z,
\end{cases}
$$

тогда

$$
\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\} \Rightarrow
$$

$$
\begin{cases}
\mathbf{v}_\varphi = \rho\dot{\varphi}\underbrace{\{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\}}_{\mathbf{e}_\varphi} \\
\mathbf{v}_\rho = \dot{\rho}\underbrace{\{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\}}_{\mathbf{e}_\rho} \\
\mathbf{v}_z = \dot{z}\{0, 0, 1\},
\end{cases}
$$

значит,

$$
(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi) = 0.
$$

Ускорение.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &\overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\} \\
\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau}) = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \underbrace{v\dot{\boldsymbol{\tau}}}_{=\frac{v^2}{R}\mathbf{n}} \\
\mathbf{n} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{\boldsymbol{\tau}}} \\
|\dot{\boldsymbol{\tau}}| &= \frac{v}{R} \\
[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}] &= \mathbf{b} \text{ — бинормаль — по ней не может быть направлено ускорение.}
\end{aligned}
$$

1.2.2. Основные постулаты ньютоновской механики.

Сразу отметим, что количество точек в системе может быть бесконечным, или даже несчётным.

0. Пространство + Время классические (однонаправленность времени не учитываем).

1. Первый закон Ньютона: существуют инерциальные системы отсчёта, в которых изолированная точка движется равномерно и прямолинейно.

Добавим принцип относительности Галилея, чтобы не возникало выделенных направлений из-за введения системы отсчёта: законы движения инвариантны относительно преобразования Галилея в замкнутой системе. Преобразование Галилея:

$$\begin{cases} t = t' \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}t, \qquad \mathbf{u} = const. \end{cases} \tag{1.1}$$

Система (1.1) порождает бесконечный класс инерциальных систем, и однородность восстанавливается.

2. Второй закон Ньютона. Принцип детерминизма Ньютона «сидит» в порядке дифференциальных уравнений для описания динамики системы.

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, t)$$

$6N$ свободных констант — по две на каждую степень свободы.

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0} \\ \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{v}_{i0}, \end{cases}$$

существует, правда, множество меры нуль всяких исключений: диссипативные состояния равновесия, например.

Второй закон Ньютона:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \left(\{\mathbf{r}_i\}, \{\dot{\mathbf{r}}_i\}, t \right). \tag{1.2}$$

Отметим, что уравнение (1.2) работает в инерциальных системах отсчёта, m_i — характеристика материальной точки, не зависящая от движения.

Экспериментальный способ измерения:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = F \\ m_2 a_2 = F \end{cases} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \begin{cases} m a_1 = F_1 \\ m a_2 = F_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Импульс.

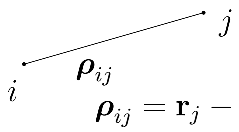
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &\overset{\text{def}}{=} m_i \mathbf{v}_i && \text{— импульс,} \\ \mathbf{M}_i &\overset{\text{def}}{=} m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] && \text{— момент импульса,} \\ \mathbf{N}_i &\overset{\text{def}}{=} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] && \text{— момент силы.} \end{aligned}$$

Контрпример 1.2.2. Могут быть патологические случаи. $m(t)$ — ракета и реактивная сила или, например, тележка с тающим льдом: включаем массу в систему — система с сохраняющейся массой, а потом смотрим на динамику подсистем. $\mathbf{F}$ может зависеть от разных других вещей, когда мы пытаемся описать механическим немеханические явления: $m(\dot{\mathbf{r}})$ — квазиклассические частицы в твёрдом теле, тела в СТО, $m(\ddot{\mathbf{r}})$ — присоединённая масса в гидродинамике, $F(\dddot{\mathbf{r}})$ — радиационное трение — электрон летает вокруг ядра по боровской орбите, излучает электромагнитные волны как любой движущийся заряд, теряя таким образом энергию, и падает на ядро, нарушается принцип детерминизма Ньютона — пытаемся описать электромагнитную задачу механическим языком.

3. Третий закон Ньютона. Чтобы его определить, придётся все силы разбить на внутренние и внешние.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)}(t, \mathbf{r}_i) + \sum \mathbf{F}_{ij}^{(i)}(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j),$$

внешняя сила может зависеть только от координаты точки (и времени), а все оставшиеся силы — внутренние. Для «всех оставшихся» предположили, что каждая из точек действует на i-ю точку независимо от всех остальных. И обрываем ряд, то есть считаем, что силы, в которой есть $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_k$ уже нет — приближение парных взаимодействий, и третий закон Ньютона справедлив только при его применении. Формулировка третьего закона Ньютона:



$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ij}^{(i)} + \mathbf{F}_{ji}^{(i)} = 0 \\ [\boldsymbol{\rho}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}] = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Контрпример 1.2.3. Третий закон Ньютона справедлив только для объектов, которые являются материальными точками, но существуют объекты нулевого размера, не являющиеся материальными точками: например, электрический диполь, у которого есть вращающий момент, который может ещё и энергию забирать...

Следствие 1.1. (a)

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} \Rightarrow \left(\sum m_i\right) \cdot \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)}, \mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i},$$

то есть центр масс системы материальных точек с попарным взаимодействием движется так же, как одна точка с суммарной массой системы в поле равнодействующей всех внешних сил.

Пример 1.2.4. Центр масс двигавшегося по параболе и разорвавшегося в некоторой точке снаряда продолжит движение по параболе.

Контрпример 1.2.5. У Карлсона, летящего по параболе, раскрылся парашют...

(b)

$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{N}_i = \sum \mathbf{N}_i^{(e)},$$

то есть суммарный момент сил, действующих на систему с попарным взаимодействием, равен суммарному моменту внешних сил. Как это можно доказать?

$$[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ij}] + [\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ji}] = [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ij}] = 0,$$

то есть сначала воспользовались первой часть третьего закона Ньютона (1.3), чтобы поменять знак, а потом — второй, чтобы приравнять к нулю.

1.2.3. Законы сохранения в механике Ньютона.

Закон сохранения импульса.

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum m_i \mathbf{v}_i \Rightarrow$$
$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)},$$

первый переход осуществлён в силу II закона Ньютона, второй — III закона Ньютона.

$$\mathbf{p} = const \Leftarrow \sum \mathbf{F}_i^{(e)} = 0,$$

согласно III закону Ньютона.

Закон сохранения момента импульса.

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i];$$
$$\dot{\mathbf{M}} = \sum m_i \big\{ [\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{v}}_i] + [\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{v}] \big\} = \mathbf{N} = \mathbf{N}^{(e)};$$
$$\begin{cases} \sum \mathbf{N}_i^{(e)} = 0, \\ \text{III закон Ньютона} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = const$$

Закон сохранения энергии.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad | \cdot \mathbf{v} \Rightarrow$$
$$m\mathbf{v}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\left(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z\right) = \frac{m}{2} \cdot 2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \Rightarrow$$
$$T = \frac{mv^2}{2}$$

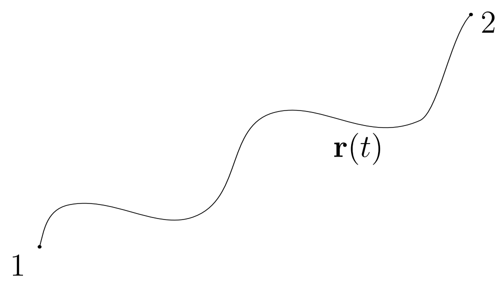


Рис. 1: Траектория материальной точки.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$
$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\, dt = T(2) - T(1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \underbrace{\mathbf{v}\, dt}_{\mathbf{dr}} = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{1}^{2} dA$$

Определение 1.4. Сила является потенциальной, если существует потенциал $U(\mathbf{r}, t)$.

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\mathbf{r}} = \left\{ -\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right\} = -\nabla U$$
$$rot\, \mathbf{F} \equiv 0 \Leftrightarrow [\nabla, \mathbf{F}] = 0,$$

но вся эта наука справедлива в односвязной стягиваемой области. Если сила потенциальная, то

$$\oint \mathbf{F}(\tau, r)\, d\mathbf{r} = 0$$

Определение 1.5.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{сила консервативная (стационарная потенциальная).}$$

Определение 1.6.

$$dA = 0,$$

значит, сила гироскопическая (сила Кориолиса, магнитная составляющая силы Лоренца).

$$(\mathbf{F}, \mathbf{v}) = 0$$

Определение 1.7. Диссипативная сила:

$$dA < 0$$

Пример 1.2.6.

$$\mathbf{F} = -k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}, \quad k > 0$$

Запишем выражение для силы $\mathbf{F}$, используя введённые определения и считая, что они покрывают все силы:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_d$$

Введём понятие полной энергии:

$$T + U = E.$$

Получим дифференциалы потенциальной и кинетической энергии:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v} + \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}; \tag{1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}; \tag{1.5}$$

Сложим (1.4) и (1.5):

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v},$$

то есть для выполнения закона сохранения энергии требуется, чтобы все потенциальные силы были консервативными, и отсутствовали диссипативные силы, а полная энергия материальной точки может изменяться за счёт работы диссипативных сил и работы потенциальных неконсервативных сил.

Закон сохранения энергии для системы материальных точек.

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \qquad | \cdot \mathbf{v}_i, \sum_i \qquad i = \overline{1, N}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i; \quad T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}$$

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\frac{\partial U^{(e)}(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_{g\,i}^{(e)} + \mathbf{F}_{d\,i}^{(e)},$$

то есть для каждой внешней силы проделали то же, что делали в случае одной материальной точки. И посчитаем:

$$\sum \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i = -\sum \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum \mathbf{F}_{d\,i}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i, \tag{1.6}$$

введём $U^{(e)}$:

$$U^{(e)} = \sum_{i=1}^{N} U_i^{(e)}(\mathbf{r}_i), \text{тогда}$$
$$\frac{\mathrm{d}U^{(e)}}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Выразим первое слагаемое в правой части (1.6) из (1.7) и соберём полные производные энергии по времени вместе:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T + U^{(e)}\right) = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} + \sum \mathbf{F}_{d\,i}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i.$$

$$U_{ij} = U_{ij}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) = U_{ij}(\rho_{ij}) \Rightarrow U_{ij} = U_{ji};$$
$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = +\frac{\partial U_{ij}(\boldsymbol{\rho}_{ij})}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}}, \mathbf{F}_j = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} = -\frac{\partial U_{ij}(\boldsymbol{\rho}_{ij})}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}};$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j);$$
$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i = \sum \underbrace{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)}_{-\dot{\boldsymbol{\rho}}_{ij}} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U^{(i)};$$

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} U^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_{ij}) \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T + U^{(e)} + U^{(i)}\right) = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} + \sum \mathbf{F}_{d\,i}^{(e)} \mathbf{v}_i}$$

З. С. Э. $E = const$:

1. Внешние силы консервативные и/или гироскопические.
2. Нет диссипативных сил.
3. Внутренние силы специальной структуры: отвечают глобальным законам симметрии пространства. $U^{(i)}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$.

Пример 1.2.7.

$$E_{\text{Л}} = -e\nabla\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$$

Интеграл движения.

$$I(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = const$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{F}_d$$

Помимо законов сохранения есть и другие интегралы движения; каждый ЗС и интеграл движения понижают порядок уравнения движения на единицу.

Теорема Нётер Некоторая симметрия $\Rightarrow$ инвариант.

Пример 1.2.8.

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \frac{\alpha}{x^2+y^2}\boldsymbol{\tau}, \\ \boldsymbol{\tau} = \{-y, x, 0\}, \\ x = R\cos\omega t, \\ y = R\sin\omega t, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\alpha}{R^2}\int\limits_0^T (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\, dt = \frac{\alpha}{R^2}\int\limits_0^T (R^2\omega\sin^2\omega t + R^2\omega\cos^2\omega t)\, dt = \frac{\alpha}{R^2}R^2\omega\int\limits_0^T dt = \alpha\omega T = 2\pi\alpha$$

1.3. Теорема о вириале

Теорема вириале даёт *приближённые* соотношения.

Определение 1.8. Финитное движение — движение в ограниченной области пространства с ограниченными скоростями.

$$|\vec{r}_i|, |\vec{v}_i| < const$$

Определение 1.9. Средний.

$$f(t) \to \langle f \rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} f(t')\, dt',$$

где τ — время усреднения.

Пример 1.3.1. Движение в груза в гармоническом осцилляторе финитно.

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0;$$
$$F_x = -\kappa\dot{x};$$
$$x = A\cos\omega t + \varphi;$$
$$U = \frac{\kappa x^2}{2}, \quad \langle U \rangle = \frac{1}{4}\kappa A^2.$$

А если не исключать трение, то появится «добавка»:

$$F_{\text{тр}} = -\mu\dot{x},$$
$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0.$$

Определение 1.10 (Характерное время системы)**.**

$$\tau_0 = \frac{f}{\dot{f}}$$

Определение 1.11 (Однородная функция)**.** Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется однородной с порядком однородности k, если

$$f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \ldots, x_n) \text{ при } \forall\alpha.$$

Лемма 1.2 (Лемма Эйлера (об однородной функции))**.** *Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была однородной функцией с порядком однородности k необходимо и достаточно выполнение соотношения Эйлера*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf. \tag{1.8}$$

Доказательство. Необходимость можно получить, продифференцировав (1.8) при $\alpha = 1$: в левой части получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\alpha\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha}\bigg|_{\alpha=1} = \frac{\partial f}{\partial x} x,$$

а в правой — kf.

Для доказательства достаточности возьмём функцию $\varphi(\alpha) = \alpha^{-k} f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ при фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и продифференцируем её по α:

$$\varphi'(\alpha) = -k\alpha^{-k-1} f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + \alpha^{-k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i.$$

Тогда в силу того, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\alpha\mathbf{x})}{\partial(\alpha x_i)} x_i = kf(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

получим, что $\varphi'(\alpha) = 0$, значит, $\varphi(\alpha) = const$, а эту константу найдём, рассмотрев случай $\alpha = 1$: $\varphi(1) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно,

$$\alpha^k \varphi(\alpha) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \ldots, x_n).$$ □

Перейдём непосредственно к теореме о вириале. Рассмотрим финитное движение в поле консервативных сил для одной материальной точки. Верно ли, что при сохранении энергии движение обязательно периодическое? В одномерном случае любое консервативное финитное движение обязательно периодическое (уровень энергии ограничивает доступную зону), а в многомерном случае это неверно: простейшим примером служат независимые колебания по двум различным направлениям с несоизмеримыми периодами (подвесим грузик на двум перпендикулярных пружинках разной жёсткости: при рациональном отношении периодов получим фигуры Лиссажу, при иррациональном — заметённый квадрат).

Теорема 1.3 (Теорема о вириале)**.** *Рассмотрим несколько ограничений.*

1. $|\vec{r}_i|, |\vec{v}_i| < \infty$, *то есть движение финитное.*

2. $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(\vec{r})$ — *сила, действующая на материальную точку, консервативная.*

3. $U(\alpha\vec{r}) = \alpha^k U(\vec{r})$ — *сила описывается однородным потенциалом с порядком однородности* k*.*

4. $\tau = T$*, либо* $\tau \gg \tau_0$*, либо* $\tau \sim \tau_0$ *и* $\underset{\tau_0}{\Delta T} \ll T$*, то есть усреднение происходит либо по периоду, если движение периодическое, либо по времени, которое много больше времени системы, либо по времени порядка характерного времени системы, но при этом изменение кинетической энергии за это время мало.*

Если соблюдены указанные выше условия, то справедливо следующее усреднённое равенство:

$$\langle T \rangle \approx \frac{k}{2} \langle U \rangle .$$

Эквивалентные формы:

$$\langle T \rangle \approx \frac{k}{k+2} E,$$
$$\langle U \rangle \approx \frac{2}{k+2} E.$$

Доказательство.

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{r}\right) - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{r}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$$

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{F}\mathbf{r} \rangle + \frac{1}{2\tau}\mathbf{p}\mathbf{r}\Big|_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \tag{1.9}$$

Скалярное произведение в первом слагаемом правой части уравнения (1.9) принято называть вириалом или вириалом Клаузиуса. Покажем, что пункт 4 условия теоремы позволяет пренебречь «добавкой» — вторым слагаемым.

$\tau = T$ Периодическое движение в с периодом T — подстановка даёт ноль, и равенство даже не приближённое, а строгое.

$\tau \to \infty$ При математически бесконечном времени усреднения добавка устремляется к нулю.

$\tau \gg \tau_0$ Физически бесконечное время усреднения. Оценим $\vec{p}\cdot\vec{r}$. Оценка, «как на природоведении в четвёртом классе»: $v \sim \frac{r}{\tau_0}, \vec{p}\cdot\vec{r} \sim \tau_0 pv, \frac{1}{2}\frac{\tau_0}{\tau}pv = \frac{\tau_0}{\tau}T$. Получили кинетическую энергию умноженную на малый параметр.

$\tau \sim \tau_0$ Если понять предыдущий пункт, то всё уже просто: второе слагаемое можно оценить как $\frac{1}{2}\frac{\tau_0}{\tau}\Delta T$, а малость изменения кинетической энергии мы предусмотрительно потребовали в условии.

Запишем полученное приближённое равенство; воспользуемся условиями 2 и 3:

$$\begin{cases} \langle T \rangle \approx -\frac{1}{2}\langle \mathbf{F}\mathbf{r} \rangle \\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} \overset{(2)}{=} -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{r} \overset{(3)}{=} -kU \end{cases} \Rightarrow \langle T \rangle \approx \frac{k}{2}\langle U \rangle$$

□

Пример 1.3.2. $U = -\frac{\alpha}{r} \Rightarrow k = -1, \langle T \rangle = -E, \langle U \rangle = 2E$ — если в системе возможно финитное движение, то оно отвечает отрицательной полной энергии.

Пример 1.3.3 (Теорема о вириале для слабо диссипативной системы)*.* Несколько изменим условия теоремы о вириале.

2. $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_d$

4. $\tau \gg \tau_0$, или $\tau \sim \tau_0 \ll \tau_T$, $\tau_T = \tau_0 \frac{T}{\Delta T}$.

5. $\tau_0 \ll \tau_E$ $(\Delta E \ll E)$

Доказательство. До вывода приближённого равенства для средней кинетической энергии всё аналогично предыдущему доказательству, дальше изменения:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{r} + \mathbf{F}_d \mathbf{r} = -kU + \mathbf{F}_d \mathbf{r},$$

и последним слагаемымв этом равнестве хотим пренебречь;

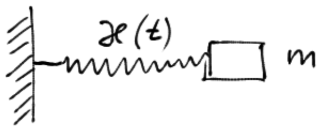
$$\frac{E}{\tau_E} \sim \frac{U}{\tau_U} + \frac{r}{\tau_0} F_d \Rightarrow$$
$$r F_d \sim \frac{\tau_0}{\tau_E} E \sim \frac{\tau_0}{\tau_E} U \Rightarrow$$
$$\langle T \rangle \approx \frac{k}{2} \langle U \rangle, \langle T \rangle \approx \frac{k}{k+2} \langle E \rangle .$$

□

Пример 1.3.4. $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\mu \dot{x}^2 = -\frac{2\mu}{m} T = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$
$$k = 2 \Rightarrow \langle - \rangle \frac{\mu}{m} \langle E \rangle \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle E \rangle = -\frac{\mu}{m} \langle E \rangle}$$
$$\langle E \rangle = \mathcal{E} \exp\left\{-\frac{\mu}{m} t\right\}$$

Пример 1.3.5. $\tau_\varkappa \gg \dfrac{2\pi}{\omega}, \omega^2 = \dfrac{\varkappa}{m}$



$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U(tx)}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \varkappa}\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\varkappa}x^2}{2},$$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \left\langle \frac{\dot{\varkappa}x^2}{2} \right\rangle,$$

$U = \dfrac{\varkappa x^2}{2}$, при этом $\left\langle \dfrac{\varkappa x^2}{2} \right\rangle = \dfrac{\varkappa}{2}\left\langle x^2 \right\rangle$, так как $\tau_T \gg \tau_0$, то есть $\varkappa(t)$ меняется сильно медленнее, а

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2}\langle E \rangle \text{ по теореме о вириале,}$$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right\rangle \stackrel{?}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle E \rangle = \frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa}\langle U \rangle = \frac{\dot{\varkappa}}{2\varkappa}\langle E \rangle \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\langle E \rangle = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\varkappa = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\sqrt{\varkappa} \Rightarrow$$

$$\langle E \rangle = E_0\sqrt{\frac{\varkappa(t)}{\varkappa_0}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\langle E \rangle}{\omega(t)} \simeq const}$$

Теорема 1.4 (Теорема о вириале для системы частиц)**.**

Доказательство. Аналогично тому, как это было проделано в доказательстве теоремы о вириале дя одной материальной точки, получим следующее утверждение:

$$\langle T \rangle \approx -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\mathbf{r}_i, \text{сумма в правой части — вириал Клаузиуса.}$$

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}U^{(e)},$$

$$\mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\frac{\partial U_{ij}^{(i)}}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \rho_{ij}},$$

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^{(e)}\mathbf{r}_i = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \mathbf{r}_i}\mathbf{r}_i = -k^{(e)}U^{(e)},$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\mathbf{F}_{ij}^{(i)}\mathbf{r}_i = -\sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\frac{\partial U_{ij}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{ij}}\boldsymbol{\rho}_{ij} = -k^{(i)}U^{(i)}$$

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{k^{(i)}}{2}\left\langle U^{(i)}\right\rangle + \frac{k^{(e)}}{2}\left\langle U^{(e)}\right\rangle}$$

$$E = T + U^{(i)} + U^{(e)}$$

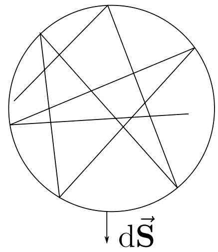
$\square$

Пример 1.3.6 (Твёрдое тело).

$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = const \Rightarrow U^{(i)} = const, k^{(i)} = 0$$

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{k^{(e)}}{2} \left\langle U^{(e)} \right\rangle}$$

Пример 1.3.7 (Эргодическая гипотеза).



$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \right\rangle = \frac{p}{2} \int\limits_{S_V} \mathbf{r}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{3}{2} pV$$

$$\mathbf{F}_i = -p\, \mathrm{d}\mathbf{S}_i \,, U_i^{(i)} = 0$$

$$\oint \mathbf{r}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} a a^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = 4\pi a^3 = 3V$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \Rightarrow \oint \mathbf{r}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r}\, \mathrm{d}V = 3 \int \mathrm{d}V = 3V.$$

Пример 1.3.8 (Термодинамическое равновесие в звезде). Пусть теперь внешних сил нет — только внутренние. Рассмотрим две звезды одной плотности, но отличающиеся по размерам в два раза. Какая из них горячее?

$$U^{(e)} = 0,$$

$$U_{ij}^{(i)} = -\frac{\alpha}{\rho_{ij}} \Rightarrow k^{(i)} = -1,$$

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle U^{(i)} \right\rangle,$$

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} k_{\text{Б}} \frac{m}{\mu} T_\star,$$

$$\left\langle U^{(i)} \right\rangle = -G \frac{m^2}{R} \Rightarrow$$

$$T_\star \sim \frac{m}{R} \sim R^2 \rho.$$

2. Механика Лагранжа

Стартуем с механики Ньютона:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \ldots, \vec{r}_N, t),\ i = \overline{1, N},$$

но беда в том, что для ряда сил мы знаем результат их действия, а не сами силы.

Определение 2.1. Связи — не вытекающие из уравнения движения ограничения на положения точек $\{\vec{r}_i, \vec{v}_i\}$.

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{R}_i$$

Так, выше указана несвободная система — на неё наложены связи. $\vec{F}_i^{(a)}$ — активные силы (их знаем), $\vec{R}_i$ — силы реакции (знаем связи)[1].

2.1. Связи и их классификация.

Различают голономные и неголономные, удерживающие и неудерживающие, стационарные и нестационарные связи.

Определение 2.2. Голономными (или интегрируемыми) связями называют связи, уравнения которых всегда можно свести к уравнениям вида

$$f(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0,$$

где f является функцией только координат точек и времени. Эти связи накладывают ограничения не только на положение, но и на скорости и ускорения точек системы.

Определение 2.3. Неголономными (неинтегрируемыми) связями называют связи, уравнения которых нельзя свести к уравнениям, содержащим только координаты точек и время. Неголономной, например, является связь, налагаемая на шар, катящийся по шероховатой поверхности.

$$f(t, \{\vec{r}_i\}, \{\vec{v}_i\}) = 0,$$

связи в виде равенств — удерживающие связи.

$$f(\ldots) \geqslant 0\text{— неудерживающиие, ненапряжённые связи.}$$

Неудерживающие связи впервые появились только в теории атомного ядра; математически их можно представить в виде удерживающей связи, подставив в степ-функцию. ...[2]

$$f(t, \{\vec{r}_i\}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i}\vec{v}_i = 0. \tag{2.10}$$

Конечные, дифференцируемые, недифференцируемые, интегрируемые, голономные (2.1). Стационарные (склерономные)($\not{t}$), нестационарные (реаномные)(t) связи.

Пример 2.1.1.

[1] Силы, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на точки системы называются реакциями связей.
[2] см. [?], с. 204, [?], с. 201.

2.2. Основная задача механики. Идеальные связи

2.3. Идеальные связи и уравнения Лагранжа первого рода

Есть $\{\mathbf{r}_i\}$. Договорились, что

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}, \quad i = \overline{1, N},$$

то есть поделили на активные силы и силы реакции связей, но плохо то, что знаем не все силы правой части. Из-за R_i-ых возникают $3N$ новых величин, связи дают лишь K величин, и мы хотим выяснить, когда у нас задача согласована. Вспомним про голономные связи, которые могут быть представлены в виде

$$f_j(\{\mathbf{r}_i\}, t) = 0, \quad j = \overline{1, K}.$$

Определение 2.4. Возможное перемещение — произвольное бесконечно малое перемещение точек системы, которое согласовано со связями. Формально

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i}\mathbf{v}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} \equiv 0 \Big| \cdot \mathrm{d}t\,,$$

то есть умножаем на $\mathrm{d}t$ интегрируемую связь, тогда

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i}\,\mathrm{d}\mathbf{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} \equiv 0,$$

и решение этой системы K уравнений является совокупностью всех возможных перемещений.

Определение 2.5. Действительное перемещение — бесконечно малое перемещение, совместимое со связями и уравнениями движения (и оно единственно как решение задачи Коши).

Если «заморозить» время, то есть «забыть» про частную производную $\frac{\partial f}{\partial t}$, то

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i}\mathbf{v}_i = 0 \Big| \cdot \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i}\delta\mathbf{r}_i = 0$$ [3]

Определение 2.6. Виртуальное перемещение — бесконечно малое перемещение, совместимое со связями при замороженном времени.

Виртуальному перемещению можем сопоставить виртуальную работу:

$$\{\delta\mathbf{r}_i\} \longrightarrow \delta A = \sum_i \mathbf{F}_i\delta\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}\delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{R}_i\delta\mathbf{r}_i.$$

И оказывается, что почти в любом идеализированном механизме без трения $\delta A_R = 0$.

Определение 2.7. Связь называется идеальной, если $\delta A_R = 0 \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\}$, то есть если виртуальная работа сил реакции связей равна нулю при любом виртуальном перемещении.

Примером идеальной связи может служить движение по гладкой неподвижной поверхности.

Эмпирическое утверждение. Почти все связи в механике являются идеальными. Но трение (попытка учесть немеханическое явление в механике) разрушает идеальность, и мы не знаем, как устроены связи, то есть мы обычно идеализируем задачи и почти всегда угадываем, но при этом сядем в лужу, если уйдём в очень большие масштабы — в космологию, или в очень малые...

[3] $\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i\,\mathrm{d}t$ — дифференциал при замороженном времени.

Теорема 2.1. *Пусть дана идеальная связь:*

$$\begin{cases} \sum_i \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0, \\ \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = 0 \end{cases} \iff \exists\ \lambda_j(t):\ \mathbf{R}_i = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i},$$

то есть решили основную задачу механики.

Перед доказательством применим сформулированную теорему, рассмотрим следствие из неё.

Следствие 2.2. Посмотрим, как будут записываться уравнения движения.

$$\begin{cases} m_i \ddot{r}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1}^{K} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \\ f_j(t, \{\mathbf{r}_i\}) = 0, \end{cases}$$

и эта задача уже математически корректна: в ней число переменных соответствует числу уравнений: $3N + K$ неизвестных, $3N + K$ соотношений. Уравнения движения в такой форме для несвободной системы называют *уравнениями Лагранжа первого рода.*

И как эти уравнения можно решать? Метод Лагранжа.

1. $\forall \lambda(t) \Rightarrow \mathbf{r}(t, \lambda)$ из уравнений движения.

2. $f(\{\mathbf{r}(t, \lambda\}, t) \equiv 0 \Rightarrow \lambda.$

Замечание 2.3.1. $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial f} = 0$

2.4. Линейные колебания в лагранжевых системах

Начнём потихонечку искать решения уравнений Лагранжа.

2.4.1. Одномерное движение

Пусть нам дана одномерная (s =1) натуральная лагранжева система. Будем временно использовать букву x вместо q. Имеем полином не выше второй степени (в силу натуральности системы):

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\alpha(x)\dot{x}^2 + \beta(x)\dot{x} - U(x),$$

уже есть некоторая нестыковка, потому что α, β могут зависеть от времени — сделаем упрощения.

1. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

2. Линейный по скорости член — гироскопическая сила, но в одномерном случае никаких гироскопических сил не существует, поэтому можем этот член выкинуть, поскольку всегда найдётся β, т. ч.
$$\beta\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \beta \,\mathrm{d}x\,.$$

   Определение 2.8 (Состояние равновесия)**.** Состояние равновесия — решение уравнения движения — тождественная константа. $x = x_0 = const$ ($\dot{x} = \ddot{x} = \cdots = 0$).

3. Диссипативных сил нет, то есть $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$.

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \alpha(x)\dot{x} \Rightarrow \alpha\ddot{x} + \alpha'\dot{x}^2 = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}\alpha'\dot{x}^2 - U' \Rightarrow$$

$$\alpha(x)\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\dot{x}^2 = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial U(x_0)}{\partial x} = 0.$$

Используем ещё существования стационарного решения в точке x_0:

$$\frac{\partial U(x_0)}{\partial x} = 0$$

Опишем формально двжиение в окрестности точки x_0:

$$x = x_0 + q \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(x_0) + \ldots; \quad \alpha(x_0) = m$$
$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)q + \frac{1}{2}U''(x_0)q^2 + \approx \frac{1}{2}kq^2; \quad k = U''(x_0) \Rightarrow$$
$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

Возникает вопрос, что значит «мало», когда говорим о малости отклонения от положения равновесия. Поэкспериментировав, можно проверить, что неважно, где делать разложение: в функции Лагранжа или в уравнениях движения. Если будем учитывать следующие поправки, то у нас буду появляться следующие поправки к силе, которая уже учтена, и они по сравнению с ней должны быть малы. Второе замечание: коэфффициенты k и q должны быть невырожденными, иначе должны учитывать следующие члены в разложении, но тогда колебания уже будут нелинейными. Перепишем лагранжиан в эквивалентной форме:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2), \quad \omega^2 = k/m,$$

соответствующее уранение движения

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

линейное ОДУ с постоянными коэффициентами, порождаемое квадратичной формой. Есть стандартный способ решения таких уравнений:

$$\begin{gathered} q = Ce^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 Ce^{\lambda t} + \omega^2 Ce^{\lambda t} = 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega \Rightarrow \\ q = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \end{gathered}$$

потребуем, чтобы

$$\begin{gathered} q \in \mathbb{R} \Rightarrow C_2 = C_1^* \Leftrightarrow q = C_1 e^{i\omega t} + \text{к. с.} = 2\operatorname{Re} C_1 e^{i\omega t} = \operatorname{Re} C e^{i\omega t}, \quad C \in \mathbb{C} \\ C = ce^{i\varphi} \text{ — комплексная амплитуда} \Rightarrow q = c\cos(\omega t + \varphi) \end{gathered}$$

Теорема 2.3. *Пусть $\hat{D}$ — дифференциальный оператор, имеем*

$$\hat{D}q = 0, \quad \hat{D} \in \mathbb{R},$$

тогда мы всегда можем рассмотреть некое решение $X \in \mathbb{C}$, $\hat{D}X = 0$, автоматически

$$\begin{cases} \hat{D}(\operatorname{Re} X) = 0 \\ \hat{D}(\operatorname{Im} X) = 0 \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered} \hat{D}(\operatorname{Re} X + i\operatorname{Im} X) = 0 \Rightarrow \\ \hat{D}(\operatorname{Re} X) + i\hat{D}(\operatorname{Im} X) = 0 \end{gathered}$$

□

$$\begin{gathered} q = Ce^{\lambda t} \\ \ddot{q} + \omega^2 q = Ce^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0 \Rightarrow q = Ce^{i\omega t} \Rightarrow q = \operatorname{Re} Ce^{i\omega t} \\ \omega^2 > 0 \quad q = c\cos(\omega t + \varphi) = a\sin\omega t + b\cos\omega t, \end{gathered}$$

через комплексные амплитуды:

$$C = ce^{i\varphi}.$$

Квадрат ω больше нуля, когда k больше нуля, потому что m мы получаем из законов Ньютона и оно больше нуля, а вот k «выползает» из потенциала, и может быть меньше нуля. Положительный квадрат частоты отвечает минимуму потенциальной энергии.

$$\begin{gathered} \omega^2 < 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{|\omega|} \in \mathbb{R} \\ q = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t} = a\operatorname{sh}\lambda t + b\operatorname{ch}\lambda t \underset{H/w}{\overset{?}{=}} c\operatorname{sh}(\lambda t + \varphi) \underset{H/w}{\overset{?}{=}} \tilde{c}\operatorname{ch}(\lambda t + \varphi) \\ \omega = 0 \quad q = c_1 t + c_2 \quad \ddot{q} = 0 \end{gathered}$$

Продемонстрируем всю мощь метода комплексных амплитуд. В этих нескольких примерах будем выходить за рамки консервативных ($L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$, $H = \frac{m}{2}(\dot{q} + \omega^2 q^2) = const$) систем.

Пример 2.4.1 (Осциллятор с трением.).

$$\ddot{q} + \omega_0 q + 2\gamma\dot{q} = 0,$$

то есть рассматриваем линейный осциллятор с трением.

$$q = Ce^{\lambda t} \Rightarrow (\underbrace{\lambda^2 + \omega_0^2 + 2\gamma\lambda}_{0})Ce^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

в комплексном виде записали, чтобы был переход к незатухающему осциллятору.

$$q = ce^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t + \varphi\right),$$

получили общее решение. H/w $\omega_0 = \gamma$, $\omega_0 < \gamma$, $\omega_0 > \gamma$ (движение в меду).

Пример 2.4.2 (Осциллятор, на который действует внешняя сила.).

$$\begin{gathered}\ddot{q} + \omega^2 q = f(t) \\ \dot{q} + i\omega t = a(t)e^{i\omega t}, \\ a(t) \in \mathbb{C} \Rightarrow q(t) = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im} ae^{i\omega t}\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q} + i\omega t) = (\dot{a} + i\omega a)e^{i\omega t} \\ (2.4.2) * i\omega : \quad -i\omega\dot{q} + \omega^2 q = -i\omega a e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = \dot{a}e^{i\omega t} = f(t) \Rightarrow a(t) = \int^t f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Обратим внимание, что $a(t)$ очень похоже на преобразование Фурье.

Теорема 2.4 (Появляющаяся сила.). *Пусть в некоторый момент на осцилллятор подействовала сила с конечным спектром (см. рисунок)* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} fe^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = F$, *тогда* $H(+\infty) - H(-\infty) = \frac{m}{2}|F|^2$, *где* F *— спектральная компонента силы.*

Доказательство. H/w □

Задача 2.1.

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t)$$

В частности, когда сила сама осциллирует: $f(t) = A\cos\omega t \Rightarrow q(t) =?$.

2.4.2. Многомерные системы

$$L = \sum_{i,j}\frac{1}{2}\alpha_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j + \sum_i \beta_i(x)\dot{x}_i - U(x)$$

Построим уравнение движения. Скажем, что x — тождественная константа — отвечает случаю локального экстремума функции $U(x)$:

$$x = x_0 \equiv const \Leftrightarrow \frac{\partial U(x_0)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = \overline{1, s}$$

$$x = x_0 + q \Rightarrow \alpha_{ij}(x) \approx m_{ij} = \alpha_{ij}(x_0)$$

$$U(x) \approx \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{ij} q_i q_j; \quad k_{ij} = \frac{\partial^2 U(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Что можем сказать про коэффициенты m_{ij}, k_{ij}?

1. m_{ij} симметричная ($m_{ij} = mji$) и положительно определённая, α — положительно определённая квадратичная форма, потому что произошла из кинетической энергии, и матрица постоянных коэффициентов m унаследовала эти свойства.

2. $k_{ij} = k_{ji}$: появилась по определению как смешанная производная, положительная определённость не гарантируется (достигается в случае локального минимума потенциала).

Осталось рассмотреть гироскопические силы. К полной производной, как в одномерном случае они сводиться не обязаны. Заметим, что

$$\sum_i \beta_i(x_0)\dot{x}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum \beta_i(x_0) x_i\right), \text{ поэтому}$$

$$\beta_i(x) \approx \beta_i(x_0) + \sum_j \frac{\partial \beta_i(x_0)}{\partial x_j} q_j; \quad g_{ij} = \frac{\partial \beta_i(x_0)}{\partial x_j},$$

подставим это всё в лагранжиан:

$$\boxed{L = \sum_{i,j=1}^{s} \left\{ \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + g_{ij} q_j \dot{q}_i - \frac{1}{2} k_{ij} q_i q_j \right\}}. \tag{2.12}$$

Пример 2.4.3 ($g_{ij} = 0$). Рассмотрим лагранжиан (2.4.2) в частном случае, когда нет гиротропных сил, то есть $g_{ij} = 0$:

$$L = \sum_{i,j=1} \left\{ \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} k_{ij} q_i q_j \right\}.$$

Его можно рассматривать как две квадратичные формы, соответствующие двум слагаемым: первая симметричная и положительно определённая, вторая симметричная. Теорема из линейной алгебры утверждает, что такие кв. формы диагонализируемы одновременно.

Теорема 2.5.

$$\begin{cases} \textit{симм.}(+) \\ \textit{симм.} \end{cases} \Rightarrow \textit{всегда диагонализуемы одновременно!}$$

То есть $\exists$ линейное преобразование a_{ik} | $q_i = \sum_i a_{ik}\theta_k, \dot{q}_i = \sum a_{ik}\dot{\theta}_k$.

тогда

$$L = \sum_{k}^{s} \{\frac{1}{2} m_k \dot{\theta}_k^2 - \frac{1}{2} k_k \theta_k^2\} = \sum_k \frac{m_k}{2} \{\dot{\theta}_k^2 - \omega_k^2 \theta_k^2\}, \tag{2.13}$$

где $\omega_k^2 = k_k/m_k$, то есть система распадается на s штук невзаимодействующих подсистем, каждая из которых есть одномерный гармонический осциллятор. Уравнение движения соответствующее (2.4.3):

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = 0 \Rightarrow$$

$$\theta(t) = C_k \cos(\omega t + \varphi_k) \approx \operatorname{Re} C_k e^{i\omega_k t}$$

Определение 2.9. $\{\omega_k\}$ — спектр нормальных частот ω_k, $k = \overline{1, s}$.

Определение 2.10. $\{\theta_k\}$ — нормальные координаты.

Как выглядит решение?

Определение 2.11. Частное решение при $\theta_k = 0$, кроме $k = k^* \Rightarrow$

$$q_j = a_{jk^*}\theta_{k^*}(t)$$

называют нормальными колебаниями.

Общее решение:

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}\theta_k(t).$$

Замечание 2.4.1. Если мы возбудили одно нормальное колебание, то каждая степень свободы колеблется в одной и той же фазе. То есть, если у нас есть сложная многомерная система, и одна степень свободы проходит через ноль или экстремум, то остальные степени свободы тоже проходят через ноль или экстремум соответственно.

Замечание 2.4.2. Если мы живём на дне потенциального рельефа, то в (2.4.3) две положительно определённые квадратичные формы, значит, $\omega_k^2 > 0\ \forall k$, и у нас действительно колебания, то есть можем получить решения в виде синусов и косинусов, а не только экспонент.

Построим уравнение движения для лагранжиана (2.4.3):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \{\frac{1}{2}m_{ik}\dot{q}_i + \frac{1}{2}m_{kj}\dot{q}_j + g_{kj}q_j\} = \sum_i \{m_{ik}\dot{q}_i + g_{ki}q_i\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum \{g_{ik}\dot{q}_i - k_{ik}q_i\} \overset{!!!!!}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \sum_i \{m_{ij}\ddot{q}_i + (g_{ij} - g_{ji})\dot{q}_i + k_{ij}q_i\} = 0.$$

Замечание 2.4.3. $G_{ij} = -G_{ji}$.

Ищем решение в виде

$$q_i = \operatorname{Re} C_i e^{\lambda t},$$

тогда

$$\operatorname{Re}\sum_i \{m_{ij}\lambda^2 + G_{ij}\lambda + k_{ij}\}C_i e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_i \{m_{ij}\lambda^2 + G_{ij}\lambda + k_{ij}\}C_i = 0. \tag{2.14}$$

Эта линейная однородная алгебраическая система имеет невырожденное решение, когда детерминант матрицы её коэффициентов равен нулю:

$$\det\left(m_{ij}\lambda^2 + G_{ij}\lambda + k_{ij}\right) = 0 \text{ — характеристическое уравнение.}$$

Поразмышляем о структуре решения. По размерности $P_{2s}(\lambda) = 0$, плюс, если λ — корень, то λ^* — тоже корень, так как $P_{2s} \in \mathbb{R}$, то есть все коэффициенты этого полинома действительные. На самом деле, уравнение движения консервативной системы накладывает ещё одно ограничение, и если расписать детерминант, то можно получить, что решение имеет вид $P_s(\lambda^2) = 0$. Свойство чётности степеней — свойство обратимости времени. Покажем, что решения действительно идут парами. Пусть λ — корень исходного характеристического уравнения, рассмотрим это же уравнение относительно $-\lambda$:

$$\det\left(m_{ij}(-\lambda)^2 + G_{ij}(-\lambda) + k_{ij}\right) \Leftrightarrow$$

$$\det\left(m_{ij}\lambda^2 + G_{ji}\lambda + k_{ij}\right) \Leftrightarrow$$

$$\det\left(m_{ji}\lambda^2 + G_{ji}\lambda + k_{ji}\right),$$

поскольку m_{ji} и k_{ji} симметричные, и мы получили уравнение, выполняющееся тождественно, потому что λ — корень — свойство антисимметричности члена, отвечающщего за гиротропию. А это означает, что $-\lambda$ — тоже корень, что в точности и означает, что характеристическое уравнение имеет вид

$$P_s(\lambda^2) = 0.$$

Для консервативной системы каждый корень порождает ещё три:

$$\lambda \longrightarrow \lambda^*, -\lambda, -\lambda^*.$$

Поразмышляем, при каких условиях реализуются устойчивые колебания, а не какие-то экспоненты, описывающие неустойчивые состояния равновесия. Вернёмся к (2.4.2). Для анализа таких уравнений существует стандартный приём: умножим каждое уравнение на C_j^*, учтём, что

$$C_i C_j^* = (c_i' + ic_i'')(c_j' - ic_j'') = (\underbrace{c_i'c_j' + c_i''c_j''}_{S_{ij}}) + i(\underbrace{c_i''c_j' - c_i'c_j''}_{A_{ij}}),$$

$\bullet$:

$$\sum_{i,j} \boxed{m_{ij}S_{ij}\lambda^2 + iG_{ij}A_{ij}\lambda + k_{ij}S_{ij} = 0}$$

1. гиротропии нет $k_{ij}(+); G_{iJ} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k_{ij}S_{ij}}{m_{ij}S_{iJ}} < 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega$ — ситуация, когда существуют нормальные частоты и нормальные колебания в смысле именно колебаний.
2. Нет $(+)k_{ij} \Rightarrow \lambda^2 > 0 \Rightarrow \pm\lambda \Rightarrow c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$ — состояние равновесия типа седло.
3. Можно показать, что гиротропия не может разрушить устойчивое состояние равновесия. $k_{ij}(+) \& G_i \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 < 0$, то есть колебания устойчивые.

Допустим, что мы научились решать характеристическое уравнение. Получим общее решение уравнения движения лагранжевой системы вблизи положения равновесия.

$$P_s(\lambda^2) = 0 \Rightarrow \{\lambda_k^2\} k = \overline{1, s}$$

$$\lambda_k^2 < 0 \Rightarrow \lambda_k = \pm i\omega_k$$

$$q_j^{(k)} = \operatorname{Re} C_{jk} e^{i\omega_k t}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \left(m_{ij}\lambda^2 + G_{ij}\lambda + k_{ij}\right) C_i = 0 \quad j = \overline{1, s} \Rightarrow C_{jk} = a_{jk} e^{i\varphi_{jk}} B_k$$

$$\forall B_k = b_k e^{i\varphi_{0_k}}$$

Строим общее решение для q, которое есть сумма всех нормальных колебаний:

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} q_j^{(k)} = \sum_k \operatorname{Re} b_k a_{jk} e^{i\omega_k t + i\varphi_{jk} + i\varphi_{0_k}}$$

$\varphi_{jk} = 0$, если $G = 0$ (нет гиротропии), тогда

$$q_j = \sum_k a_{jk} \underbrace{\operatorname{Re} B_k e^{i\omega_k t + i\varphi_{0_k}}}_{\theta_k(t)},$$

то есть свели ответ к предыдущему.

Вообще,

$$q_j = \sum_k \operatorname{Re}\left\{B_k C_{jk} e^{i\omega_k t}\right\}.$$

Рассмотрим пару простых примеров.

Пример 2.4.4 (Чашечка). Пусть у нас есть движение в поле тяжести в окрестности минимума какой-то ямки $z = h(x, y)$. Заметим, что если $x = y = 0$ отвечают $\min h(x, y)$, то

$$z = h(x, y) = \frac{x^2}{2\rho_1^2} + \frac{y^2}{2\rho_2^2} + \ldots \quad \rho_{1,2} \text{ — главные радиусы кривизны.}$$

Составим лагранжиан:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mg\left(\frac{x^2}{2\rho_1^2} + \frac{y^2}{2\rho_2^2}\right), \tag{2.15}$$

$\dot{z}^2$ нас не интересует, потому что речь идёт о малых колебаниях, поэтому (2.4.4) можно переписать в виде

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 - \Omega_1^2 x^2 + \dot{y}^2 - \Omega_2^2 y^2\right\}, \quad \Omega_{1,2} = \frac{g}{\rho_{1,2}^2}.$$

$$x = a\cos(\Omega_1 t + \varphi_1),$$

$$y = b\cos(\Omega_2 t + \varphi_2), \text{и эти колебания независимые.}$$

Пример 2.4.5 (Вращающаяся чашечка). Перейдём в систему координат x, y, которая прибита к чашке, и в ней уравнение чашки не изменится, но при этом в подвижной системе координат появятся дополнительные члены, связанные с вращением:

$$\mathbf{v}_{co} = [\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} - \Omega y \\ v_y = \dot{y} + \Omega x \end{cases} \Rightarrow L = \frac{m}{2}\left\{(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 - \Omega_1^2 x^2 - \Omega_2^2 y^2\right\},$$

этот лагранжиан квадратичен по всем координатам и скоростям, и он содержит гироскопически члены (вида произведение координаты на скорость), а мы его перепишем:

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\Omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - (\underbrace{\Omega_1^2 - \Omega^2}_{\widetilde{\Omega}_1^2})x^2 - (\underbrace{\Omega_2^2 - \Omega^2}_{\widetilde{\Omega}_2^2})y^2\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - m\Omega\dot{y} = \frac{\partial L}{\partial x} = m\Omega\dot{y} - m\widetilde{\Omega}_1^2 x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} + m\Omega\dot{x} = \frac{\partial L}{\partial y} = -m\Omega\dot{x} - m\widetilde{\Omega}_2^2 y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \widetilde{\Omega}_1^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \widetilde{\Omega}_2^2 y = 0 \end{cases}$$

$$x = C_1 e^{i\Omega t}$$

$$y = C_2 e^{i\Omega t}$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \widetilde{\Omega}_1^2\right) C_1 - 2\Omega i\omega C_2 = 0 \\ 2\Omega i\omega C_1 + \left(-\omega^2 + \widetilde{\Omega}_2^2\right) C_2 = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

система (2.4.5) имеет нетривиальное решение, когда определитель матрицы коэффициентов перед искомыми C_1 и C_2 равен нулю, тогда

$$\boxed{\left(\omega^2 - \widetilde{\Omega}_1^2\right)\left(\omega^2 - \widetilde{\Omega}_2^2\right) = 4\Omega^2\omega^2}.$$

Получили биквадратное уравнение относительно нормальных частот ω. Проанализируем случай, когда

$$\omega \ll \widetilde{\Omega}_1, \widetilde{\Omega}_2.$$

До сих пор у нас был консервативный случай, и обобщённая энергия сохранялась:

$$H = const \quad H = \sum \frac{1}{2}\left\{m_{iJ}\dot{q}_i\dot{q}_j + k_{ij}q_i q_j\right\}.$$

$$H/w \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow P_s(\lambda^2) = 0 \text{ или } \lambda \text{ и } -\lambda \text{ — корни одновременно.}$$

2.4.3. Малые колебания в диссипативных системах

Диссипативная функция Рэлея. Линейное трение в лагранжевых системах обычно вводится следующим образом:

$$\mathbf{F}_i = -\sum_j \mu_{ij}\mathbf{v}_j,$$

и такие силы можно пересчитать в обобщённые силы, которые войдут в уравнение Лагранжа, с помощью этакого потенциала в пространстве скоростей, с помощью функции Рэлея $R(t, \{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{v}_i\}$, например, такой функции:

$$\mathbf{F}_i = -\sum_j \mu_{ij}\mathbf{v}_j = -\frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}_i} \quad R = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mu_{ij}\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = \frac{1}{2}\gamma_{iJ}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

и в этом случае

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}_i}\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}\dot{q}_i,$$

и отличие от гироскопических сил только в том, что матрица коэффициентов здесь симметричная (по построению):

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}.$$

А уравнение Лагранжа выглядит следующим образом:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0}.$$

$$H/w \Rightarrow \sum_{j=1}^{s}\{m_{ij}\dot{q}_j + (G_{ij} + \gamma_{ij})\,\dot{q}_j k_{ij} q_j\} = 0,$$

причём G_{ij} — антисимметричная часть (порождается функцией Лагранжа), гарантирует, что $P_s(\lambda^2) = 0$; $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$; λ_{ij} — симметричная часть (порождается функцией Рэлея, и $P_{2s}(\lambda) = 0$ — есть нечётные степени, диссипация, и направления времени не эквиваленты, диссипация работает в обе стороны, система не может двигаться «по кругу», $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum Q_j\dot{q}_j = -\sum\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = -2R$, то есть физический смысл функции Рэлея в том, что она отвечает мощности потерь на соответствующей силе, которую она определяет, и в этом случае мы будем получать решения, как для осциллятора с трением, в виде

$$e^{\lambda t};\ \lambda = \lambda' + i\lambda'' \Rightarrow$$
$$e^{\lambda' t}\cos(\lambda'' t + \varphi),$$

действительная часть корня характеристического уравнения описывает затухание в случае диссипации, а мнимая часть — действительную часть частоты, свойство одновременной принадлежности к корням λ и λ^* сохраняется (потому что это свойство действительности коэффициентов), а λ и $-\lambda$ — нет.

2.5. Вариационная форма механики Лагранжа

2.5.1. Введение в принцип наименьшего действия

Раньше, получая уравнения Ньютона, мы исходили из принципа малых шажков. Математически это выражалось тем, что мы рассматривали дифференциальные уравнения Ньютона, и получали решения (уравнения движения как бесконечную сумму бесконечно малых шажков). Введение принципа уравнения Лагранжа и понятия идеальных связей позволили нам исключить из уравнений Ньютона силы реакции связей, которые мы не знаем, и мы получили уравнения Лагранжа второго рода. Это был дифференциальный подход.

Вариационная формулировка подразумевает рассмотрение траекторий как некое целое — "интегральный подход".

$$L(t, q, \dot{q}, q = (q_1, \ldots, q_s), s = 3N - k,$$

и нет непотенциальных обобщённых сил

$$Q^{\text{НП}} = 0,$$

то есть наша система полностью описывается уравнением

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right).$$

Определение 2.12. $\{q\}$ — конфигурационное пространство.

Линия $q(t)$ в конфигурационном пространстве — то, что мы ищем — траектория системы, эволюция её состояний во времени. Принцип наименьшего действия позволяет отсортировать настоящие и ненастоящие траектории. Истинная траектория — «прямой путь».

$$q_1 = q(t_1),$$
$$q_2 = q(t_2).$$

Как отличить истинную траекторию, которая отвечает уравнения Лагранжа, от всех остальных? В фазовом пространстве траектории не пересекаются нигде, кроме особых точек, пересечения (самопересечения) кривых в конфигурационном пространстве ничему не противоречат.

2.5.2. Вариационный принцип Гамильтона для обобщенно-потенциальных систем

Давайте каждой из траекторий по какому-то закону припишем число, а потом скажем, что истинной траектории отвечает конкретное число.

Отображение функций в числа

$$q(t) \xrightarrow{S} \mathbb{R}$$

называют функционалом.Чтобы не путать с функциями, пишут аргумент в квадратных скобках

$$S[q(t)] \to \mathbb{R}.$$

Длина кривой не позволяет выделять истинные траектории. Рассмотрим функционал

$$\boxed{S[q(t)] = \int L(t, q, \dot{q}(t))\,\mathrm{d}t},$$

этот функционал называют функционалом действия (иногда просто действием). Конфигурационное пространство является общим для большого семейства систем с разными лагранжианами, но общими обобщёнными координатами.

Постулат 2.1. *Пусть*

1. $q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2$,

2. $\exists M : \; |q_1 - q_2| < M$,

тогда $q(t)$, *удовлетворяющее уравнению движения, отвечает наименьшему значению функционала действия* $S[q(t)] \to min$ *— аналог того, что первая производная равна нулю, вторая производная знакоопределена.*

Постулат 2.2 (Вариационный принцип Гамильтона). *Пусть $q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2$, тогда между этими положениями система движется так, что ФЛ принимает стационарные значения $S[q(t)] \to stat$ — аналог того, что первая производная равна нулю.*

Давайте рассмотрим малое возмущение (бесконечно близкую траекторию с невозмущённым концами) $q(t) + \delta q(t)$, где $\delta q(t_1) = 0,\ \delta q(t_2) = 0,\ \forall \delta q(t)$.

$$S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] \geqslant 0$$

Мы не умеем находить экстремумы в пространстве функций, но умеем в пространстве чисел. Предположим, что

$$\begin{gathered} \delta q(t) = \alpha \cdot h(t), \\ h(t_1) = h(t_2) = 0, \end{gathered}$$

введём понятие

$$S(\alpha) = S[q(t) + \alpha \cdot h(t)] \geqslant,$$

последнее неравенство ... то есть переформулировали ПНД в терминах задачи на экстремум в обычных переменных. На физическом уровне строгости напишем необходимое условие существования экстремума в точке $\alpha = 0$

$$S(\alpha) \to \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \,|_{\alpha=0}.$$

Распишем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int\limits_{t_1}^{t_2} L(t, q + \alpha h, \dot{q} + \alpha \dot{h}) \,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right\}_{|\alpha=0} \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} h(t) \,\mathrm{d}t + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \bigg|_{t_1}^{t_2}}_{=0} =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\} h_j(t) dt = 0 \quad \text{по ПНД для } \forall h_j(t). \Rightarrow$$

$$\forall\, j = 1, s \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0},$$

то есть мы получили, что принцип наименьшего действия гарантирует, что движение по истинным траекториям удовлетворяет уравнению Лагранжа (или, что то же самое, что необходимое условие экстремума — в точности то же, что уравнение Лагранжа).

Займёмся тем же, что проделали только что, однако не переходя к дифференцированию в числах,

$$S[q + \delta q] - S[q] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \{ L(t, q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - L(t, q, \delta q) \} \,\mathrm{d}t \,,$$

зафиксируем момент времени и применим разложение в ряд Тейлора, тогда

$$S[q + \delta q] - S[q] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \dots \right\} \mathrm{d}t =,$$

и проинтегрируем по частям

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} \delta q \,\mathrm{d}t + \ldots.$$

Написанное нами слагаемое называют *первой вариацией функционала действия*, обозначают как $\delta S[q, \delta q]$.

Согласно ВПГ

$$\delta S = 0 \Longleftrightarrow \text{ ур-ю Лагранжа II рода при фиксированных концах траектории.}$$

А ПНД говорит, что

$$\text{ур-е Лагранжа II рода} \Longrightarrow \begin{cases} \delta S = 0, \\ \delta^2 S \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{при фиксированных концах, близости } q_1, q_2.$$

Замечание 2.5.1 (Обобщение на случай систем, не являющихся обобщённо-потенциальными). Хотим, чтобы первая вариация приводила к уравнению $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$. Первые два слагаемые получаются из кинетической энергии $T(t, q, \dot{q})$, второе — из $\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} Q \,\mathrm{d}t$, при этом

$$Q = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(a)} \delta \mathbf{r}_i = \delta A^{(a)},$$

значит,

$$S[q(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(T + A^{(a)} \right) \mathrm{d}t\,.$$

Частный случай, когда мы имеем дело с обобщённо-потенциальными силами в натуральных системах, в качестве работы активных сил может выступать обобщённый потенциал, то есть

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - U) \,\mathrm{d}t\,.$$

H/w показать, что, варьируя такой функционал, получим то же, что при варьировании такого функционала с функцией с Лагранжа в качестве аргумента.

2.5.3. Вариационный принцип для гармонического осциллятора

Почему выбрали именно гармонический осциллятор? Задача на равенство нулю первой производной гораздо проще задачи на определение знака второй производной...

Пусть у нас одномерная система, которая задана лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q.$$

Для это этой системы мы всё знаем:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q,$$
$$q = a \sin(\omega t + \varphi).$$

Рассмотрим малое возмущение $q + \delta q$, посчитаем

$$S[q + \delta q] - S[q]. \tag{2.17}$$

Будем считать $t_1 = 0$, $t_2 = \tau$, и если $\tau \neq nT/2$, то по q_1 и q_2, соответствующим заданным моментам времени мы траекторию однозначно определяем, иначе, при времени $\tau = nT/2$ ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), называемом *кинетическим фокусом* , получим бесконечно много решений, и все они будут удовлетворять уравнению движения.

Определение 2.13. Кинетический фокус сопряжённый некой начальной точке — точка, в которую сходятся две любые бесконечно близкие (пущенные с разными скоростями) траектории.

Пример 2.5.1 (Кинетический фокус на сфере). На глобусе между двумя точками есть наикратчайшее расстояние, но если мы рассмотрим две точки на диаметрально противоположные точки , то таких траекторий с наименьшей длиной будет бесконечно много, и диаметрально противоположная точка будет кинетическим фокусом.

Нам надо определить

$$\begin{cases} \delta q(0) = 0 \\ \delta q(\tau) = 0, \forall \delta q(t) \end{cases} \Rightarrow \delta q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi}{\tau}t\right), \ \forall a_n \in \mathbb{R}.$$

Вернёмся к (2.5.3)

$$S[q+\delta q] - S[q] = \int_0^\tau \frac{1}{2}\left((\dot q + \delta\dot q)^2 - \omega^2(q+\delta q)^2 - \dot q^2 + \omega^2 q\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\tau \frac{1}{2}\left\{\underbrace{2\dot q\delta\dot q - 2\omega^2 q\delta q}_{\dot q\delta\dot q + \ddot q\delta q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot q\delta q)} + \delta\dot q^2 - \omega^2\delta q^2\right\} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\tau \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left\{(n\frac{\pi}{\tau})^2\cos^2(n\frac{\pi}{\tau}t) - \omega^2\sin^2(\frac{n\pi}{\tau}t)\right\} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(n^2\Omega^2 - \omega^2),$$

и вся эта штука отвечает минимуму, если $\Omega > \omega$, что равносильно тому, что $\tau < T/2$. То есть, если траектория не содержит кинетического фокуса, то реализуется принцип наименьшего действия[4].

Повторим общее утверждение. Если на действительной траектории не лежит кинетический фокус исходной точки, то функционал действия отвечает наибольшему (или наименьшему[5]) значению.

Если мы рассматриваем траекторию с кинетическим фокусом, то её можно разбить на кусочки без кинетических фокусов, и на каждом куске будет реализован минимум.

Если проводить вариацию только по траекториям, проходящим через кинетический фокус, то будет принцип наименьшего действия.

2.5.4. Следствия вариационного принципа

Чем же так хорош вариационный принцип? У вариационного принципа есть два аспекта, которые сделали его в некоторой мере центральным для современной теоретической физики.

Сформулировав вариационный принцип, мы сумели абстрагироваться от системы координат — технической вспомогательной конструкции, которая нужна уже при решении уравнений движения. Неизменность уравнений Лагранжа при изменении координат — следствие вариационного принципа.

[4] Подробнее, но без доказательств, см. [?], §5, Гл. 7.

[5] Зависит от того, какой знак мы поставили перед лагранжианом.

1. Пусть у нас есть $L(t, q, \dot{q})$, рассмотрим $L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Phi}(t, q)$. L порождает функционал действия

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t \to \delta S[q, \delta q] = 0 \Leftrightarrow \text{ур. Лагранжа на } q(t).$$

   А теперь для L'

$$S'[q] = \int_{t_1}^{t_2} L'\,\mathrm{d}t = S[q] + \Phi(t, q)\big|_{t_1}^{t_2} \to \delta S' = \delta S\,,$$

   поскольку последняя подстановка не даёт вклада в вариацию, и вариации зануляются на одних и тех же значения q и t.

2. Рассмотрим преобразование координат в уравнении Лагранжа.

$$L(t, q, \dot{q}) \to$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \overset{q^* = \varphi(t,q)}{\longrightarrow} \text{как будет выглядеть уравнение } q^*(t)?$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial q^*}\dot{q}^*, \quad q = \tilde{\varphi}(t, q^*)\right)$$

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t \equiv \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{L\left(t, \tilde{\varphi}(t, q^*), \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}}{\mathrm{d}t}\right)}_{L^*(t, q^*, \dot{q}^*)} \mathrm{d}t = S^*[q^*(t)]$$

$$\delta S[q] = \delta S^*[q^*] = 0$$

   Замечание 2.5.2. Если система была натуральной $L = L_0 + L_1 + L_2$, то она останется натуральной при замене координат.

3. Замена координат и времени. Была Лагранжева задача

$$L(t, q, \dot{q}) \to \text{ур. Лагранжа} \to \begin{cases} q^* = \varphi(t, q) \\ t^* = \psi(t, q) \end{cases} \to \text{? ур-я } q^*(t^*)$$

$$\begin{cases} q = \tilde{\varphi}\,(t^*, q^*) \\ t = \widetilde{\psi}(t^*, q^*) \end{cases}$$

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q})\,\mathrm{d}t = \int_{t_1^*}^{t_2^*} \underbrace{L\left(\widetilde{\psi}, \tilde{\varphi}, \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}}\right)\frac{\mathrm{d}\widetilde{\psi}}{\mathrm{d}t^*}}_{L^*\left(t^*, q^*, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}\right)} \mathrm{d}t^* = S^*[q^*(t^*)],$$

   но этот функционал тождественно связан с исходным, поэтому

$$\delta S \equiv \delta S^*\,,$$

   следовательно, L^* порождает уравнения Лагранжа, которые в точности равны исходным, в которых произведена замена «*».

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}q &= \tfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t^*}\,\mathrm{d}t^* + \tfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial q^*}\,\mathrm{d}q^* \\ \mathrm{d}t &= \tfrac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial t^*}\,\mathrm{d}t^* + \tfrac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial q^*}\,\mathrm{d}q^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow L^* = L\left(\widetilde{\psi}, \tilde{\varphi}, \frac{\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t^*} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial q^*}\frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}}{\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial t^*} + \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial q^*}\frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}}\right) \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial t^*} + \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial q^*}\frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}}_{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^*}}\Bigg) \tag{2.18}$$

   Замечание 2.5.3. Система не остаётся натуральной!

Пример 2.5.2.

Натуральная система (Ньютоновская механика).

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \Rightarrow L = \frac{mv^2}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned} &H = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L = L \\ &H = T \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = T \text{ (натуральность)}$$

Не натуральная система (релятивистская механика). H/w

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \Rightarrow L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$H = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L = \frac{mv^2 + mc^2}{\sqrt{\cdots}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$H = T \Rightarrow L \neq T \text{ (ненатур.)}$$

2.5.5. Вариационный принцип и законы сохранения (теорема Нётер)

Связь уравнений, которые следуют из вариационного принципа, с законами сохранения — вторая глобальная фишка, делающая ВП центральным в современной теоретической физике, первая — уравнения, следующие из ВП ковариантны, то есть не зависят от ввода системы координат.

Существует неразрывная связь симметрий в системе и уравнений движения. Теорема Нётер позволяет связать симметрии и следующие их них интегралы движения способом, не зависящим от способа ввода координат.

Теорема 2.6 (Теорема Нётер)**.** *Каждому преобразованию координат и времени, оставляющему функционал действия инвариантным, отвечает первый интеграл уравнения движения.*

Математически, если дано преобразование координат и времени

$$q^* = \varphi(t, q, \alpha)$$
$$t^* = \psi(t, q, \alpha),$$

которое удовлетворяет следующим трём пунктам условий,

1. $q = q^*$, $t = t^*$ *при* $\alpha = 0$.
2. *При* $|\alpha| < \varepsilon$ *существуют обратные преобразования* $\tilde{\varphi}(t^*, q^*, \alpha) = q$, $\widetilde{\psi}(t^*, q^*, \alpha) = t$.
3. *(Симметрии.)* Φ*-инвариантность*[6] $L^*\left(t^*, q^*, \frac{dq^*}{dt^*}\right) = L\left(t^*, q^*, \frac{dq^*}{dt^*}\right) + \frac{d}{dt^*}\Phi(t^*, q^*, \alpha)$. [7]

то на решениях системы существует первый интеграл уравнения Лагранжа

$$I(t, q, \dot{q}) \left\{ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha} - H\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=0} = const.$$

Пример 2.5.3 (Преобразование сдвига).

$$x^* = x + \alpha, \Phi = 0 \Rightarrow I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial X^*}{\partial x}\right)_{\alpha=0} = p_x.$$

Пример 2.5.4 (Поворот).

$$\begin{cases} x^* = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y^* = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases} \qquad \Phi = 0 \Rightarrow I = p_x\frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + p_y\frac{\partial y^*}{\partial \alpha} = yp_x - xp_y = M_z$$

Пример 2.5.5 (Винтовая симметрия). К повороту из предыдущего примера добавим сдвиг $z^* = z + \frac{h}{2\pi}\alpha$, тогда $I = M_z + p_z\frac{h}{2\pi}$.

[6] Используемая дальше функция L^* определяется уравнением (3).

[7] Эквивалентное утверждение для действия $S[q] = S^*[q^*] = S[q^*] + \Phi|_{t_1^*}^{t_2^*}$.

Пример 2.5.6.
$$t^* = t + \alpha \Rightarrow I = -H.$$
Пример 2.5.7 (Преобразования Галилея).
$$\begin{cases} x^* = x - \alpha t \quad (\alpha = u) \\ t^* = t \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial x^*}{\partial \alpha} = -t,$$
при этом
$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2, \ \dot{x} = \dot{x}^* + \alpha,$$
$$L^* = L(\dot{x}^* + \alpha) = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^*}_{L^*(\dot{x}^*)} + \underbrace{m\alpha\dot{x}^* + \frac{m}{2}\alpha^2}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha m x^* + \frac{m\alpha^2}{2}t\right)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = p_x(-t) + mx = const \ (= 0),$$
$$p_x = m\frac{x}{t}.$$
Доказательство теоремы Нётер. Попробуем свойства Ф-инвариантности записать в пределе $\alpha \to 0$. Разложим в ряды преобразования координат и времени
$$q^* = \varphi(t, q, \alpha) = q + \alpha \cdot Q + \ldots \qquad Q_j = \left.\frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$
$$t^* = \psi(t, q, \alpha) = t + \alpha \cdot T + \ldots \qquad T = \left.\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}.$$
Заметим, что
$$\frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\dot{q} + \alpha\dot{Q} + \ldots}{1 + \alpha\dot{T} + \ldots} = \dot{q} + \alpha(\dot{Q} - \dot{q}\dot{T}) + \ldots.$$
По формуле (3) получим выражение для L^*
$$L^* = L\left(t^* - \alpha T, q^* - \alpha Q, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*} - \alpha(\dot{Q} - \dot{q}\dot{T})\right) \cdot \left(1 - \alpha\dot{T}\right) =$$
$$= L(t^*, q^*, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}) - \alpha\left\{ \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=-\dot{H}T} T + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}Q}_{\dot{p}Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\dot{Q} - \dot{q}\dot{T}\right) + L\dot{T} \right\} =$$
$$= L(*) - \alpha\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(HT) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(pQ)\right\} + \ldots, \tag{2.19}$$
так как $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{Q} = p\dot{Q}$, а $-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\dot{T} + L\dot{T} = \dot{T}(L - \dot{q}p) = -H\dot{T}$. А дальше воспользуемся Ф-инвариантностью, и перепишем полученное для L^* выражение (2.5.5)
$$L^* = L(*) + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^*}\Phi(t^*, q^*, \alpha)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} + \ldots\right)}.$$
Приравняем одинаковые порядки, тогда
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{pQ - HT + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right\} = 0,$$
а дифференцируемое выражение в точности и есть сохраняющийся интеграл движения. □

2.5.6. Как вариационная формулировка работает в приближенных к реальным условиях?

$$L(t,q,\dot q) \Rightarrow S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q(t), \dot q(t)\right) \mathrm{d}t$$

$$\text{ур. Лагранжа } \Leftrightarrow \begin{cases} \delta S = 0 \\ \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \end{cases} \quad \text{(ВПГ)} \quad \oplus \quad \begin{cases} q_1, q_2 \text{ близки так, что нет кин. фокусов,} \\ \text{сопряжённых с началом (концом) траектории} \\ S \to min\ (max) \end{cases}$$

Что мы выигрываем, зная, что уравнения Лагранжа следуют из решения вариационной экстремальной задачи?

1. Ковариантность относительно замены координат.

2. Теорема Нётер.

$$\begin{cases} q^* = q + \alpha \cdot Q(t,q) + O(\alpha^2) \\ t^* = t + \alpha \cdot T(t,q) + O(\alpha^2) \end{cases} \quad + \Phi\text{-инфариантность } L^* = L\left(t^*, q^*, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^*}\Phi(t^*, q^*, \alpha),$$

$$\big(t \text{ и } q \text{ не равны нулю одновременно, } \Phi = \Phi_0 + \alpha \cdot \Xi + O(\alpha^2)\big)\,,$$

тогда существует интеграл движения

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q} Q + H \cdot T + \Xi = const \text{ на реш. ур. Лагранжа.}$$

Замечание 2.5.4.

$$\begin{cases} q^* = \varphi(q,t) \\ t^* = \psi(q,t) \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}, \\ T = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}, \\ \Xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \end{cases}$$

2.5.7. Лагранжиан свободной материальной точки.

В Ньютоновской механике из дифференциального подхода для свободной материальной точки мы знаем

$$L = \frac{mv^2}{2},$$

но можно стартовать с вариационного принципа, и последний не утверждает, что $L = T - U$, стартуем с того, что система описывается $L(t, q, \dot q)$, выведем механику сил. Воспользуемся теми же принципами, что и для Ньютоновской механики.

1. Пространство однородно и изотропно. Время однородно. $\Rightarrow L(\cancel{t}, \cancel{\mathbf{r}}, \mathbf{v}) = L(v^2)$. Зная, что у нас $L(v^2)$, можем доказать первый закон Ньютона:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial v^2} \cdot 2\mathbf{v} = const \text{ } (\mathbf{r} \text{ — цикл.}) \Rightarrow v = const, \mathbf{v} = const$$

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = 2v^2 \frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} - L = const \text{ } (t \text{ — цикл.}),$$

двумя способами получили :)

2. Чтобы воспользоваться теоремой Нётер, надо придумать какое-то преобразование, оставляющее уравнение движения инвариантным, вспомним про преобразование Галилея, которое тоже как бы свойство пространства-времени, делающее эквивалентными все инерциальные системы отсчёта в Ньютоновской механике.

$$\begin{cases} t^* = t \\ r^* = \mathbf{r} - \mathbf{u}\cdot t;\ \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{n}_{const} \end{cases} \xrightarrow{Th.\,Noether} \begin{cases} T = 0 \\ Q = -\mathbf{n}\cdot t \end{cases} \Rightarrow \boxed{-\frac{\partial L}{\partial v^2} 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})t = F(t,\mathbf{r})} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^2}\cdot 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) = \frac{\partial F(t,\mathbf{r})}{\partial t} + \frac{\partial F(t,\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v},$$

но левая часть полученного равенства не зависит от времени и координат, поэтому правая тоже от них не зависит, значит,

$$\frac{\partial L}{\partial v^2}\cdot 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) = \frac{\partial F(t,\mathbf{r})}{\partial t} + \frac{\partial F(t,\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v} = a + (\mathbf{b},\mathbf{n}) \overset{\mathbf{b}=\mathbf{n}\cdot m}{=} m(\mathbf{n},\mathbf{v})$$

$$(H/w \quad (\mathbf{n},\mathbf{v}) = a + (\mathbf{b},\mathbf{v}) \Rightarrow a = 0, \mathbf{b} = \mathbf{n})$$

и мы, хитро подобрав константы, получили то, что нам надо в ответе:

$$\frac{\partial L}{\partial v^2} = \frac{m}{2} \Rightarrow L = \frac{mv^2}{2} + const.$$

Ландау и Лифшиц дальше для несвободной материальной точки постулируют силы, то есть к лагранжиану свободной материальной точки аддитивно добавляют взаимодействие с внешними полями

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(t,\mathbf{r},\mathbf{v})\ldots,$$

возможность так делать постулируется.

В СТО то же, что в предыдущем пункте, но с преобразованиями Лоренца

$$\begin{cases} \mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{u}t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ t^* = \frac{t-(\mathbf{u},\mathbf{r})/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{cases} \overset{\mathbf{u}=\alpha\cdot\mathbf{n}}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{cases} \mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \alpha\mathbf{n}\cdot t + \ldots \\ t^* = t - \alpha(\mathbf{n},\mathbf{r})/c^2 + \ldots \end{cases}}.$$

По-прежнему время и пространство однородны, пространство изотропно. Значит, как и раньше,

$$\mathbf{p} = 2\mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial t^2}; H = 2v^2\frac{\partial L}{\partial v^2} - L \Rightarrow \mathbf{p} = const, \mathbf{v} = const, v = const.$$

Чтобы узнать форму $L(v^2)$, воспользуемся теоремой Нётер

$$\mathbf{p}Q - H\cdot T = -F(t,\mathbf{r})$$

$$-2(\mathbf{n},\mathbf{v})\frac{\partial L}{\partial v^2}\cdot t + \left(2v^2\frac{\partial L}{\partial v^2} - L\right)\frac{(\mathbf{n},\mathbf{r})}{c^2} = F(t,\mathbf{r}) \ \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$(\mathbf{n},\mathbf{v})\left\{\left(2v^2\frac{\partial L}{\partial v^2} - L\right)\frac{1}{c^2} - 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\right\} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}}_{\parallel\mathbf{n}}\mathbf{v} = (\mathbf{n},\mathbf{v})\cdot\underbrace{\frac{L_0}{c^2}}_{const}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial v^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2c^2}(L - L_0)$$

$$\frac{\partial \ln(L - L_0)}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{v^2 - c^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v^2}\ln\left|v^2 - c^2\right|$$

$$L = L_0 + A\sqrt{c^2 - v^2} \to \frac{mv^2}{2} \text{ при } v \to 0 \overset{cA=-mc^2}{\Rightarrow} \boxed{L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + mc^2} \Rightarrow$$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \neq L,$$

то есть $L \neq T$, система ненатуральная; $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

2.6. Электромеханические аналогии

(Смешанные электромеханические системы в механике Лагранжа)

Пример 2.6.1.

$$U = \mathcal{E},\ U = \frac{q}{C},\ \mathcal{E} = -L\dot{I} = -L\ddot{q} \Rightarrow$$

$$L\ddot{I} + \frac{1}{C}q = 0 \ \text{— гармонический осциллятор с } \omega^2 = \frac{1}{LC},$$

$$L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \ |\cdot CL \implies CL^2\ddot{I} + LI = 0.$$

Будем рассматривать заряд на обкладках в качестве обобщённой координаты, тогда, рассматривая индуктивность в роли массы, запишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2 = T - U : \begin{cases} T = \frac{1}{2}LI^2 \text{ — энергия магнитного поля в катушке,} \\ U = \frac{1}{2C}q^2 \text{ — энергия энергия электрического поля в конденсаторе.} \end{cases}$$

Точно так же в качестве обобщённой координаты можно рассматривать ток (тогда роль массы играет выражение CL^2):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}CL^2\dot{I}^2 - \frac{1}{2}LI^2 = T - U, \begin{cases} T = \frac{1}{2}CU^2, \\ U = \frac{1}{2}LI^2, \end{cases}$$

и, когда контур замкнутый, разницы никакой нет. Разница возникает, если контур разомкнуть. H/w

Пример 2.6.2.

$$\mathcal{L}_{\text{мех}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \mathrm{mg}\, x$$
$$\mathcal{L}_{\text{эл}} = \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2 - \frac{1}{2C(x)}q^2,$$
$$\left(C(x) = \frac{S_C}{4\pi x}, L(x) = 4\pi\frac{N^2 S_L}{L - x}\right)$$
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{мех}} + \mathcal{L}_{\text{эл}}$$

Получим уравнения Лагранжа.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\ddot{x} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -kx - mg + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\dot{q}^2 - \frac{q^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{C}$$ [8]

У нас теперь две степени свободы. Найти q и $\dot{q}$ можно из второго уравнения движения:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(L(x)\dot{q}) = L\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}\dot{q} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = \frac{q}{C}.$$

3. Интегрируемые задачи механики

3.1. Интегрирование уравнения движения систем с одной степенью свободы

Мы будем интересоваться решением ДУ вида $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$.[9]

[8] $-\frac{q^2}{2}\frac{4\pi}{S_C} = -2\pi\sigma q = Eq$ — в точности электрическая сила взаимодействия двух пластин конденсатора. Можно показать, что в точности совпадает с силой сопротивления сжатию соленоида предыдущий член, да и все слагаемые могут быть получены из первых принципов.

[9] $x = 1;\ \dim x = 1, s = 1$

3.1.1. Классификация состояний равновесия автономной системы на плоскости

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Состояние равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Рассматриваемое малое возмущение

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi \\ y = y_0 + \eta \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{xi} = \alpha\xi + \beta\eta \\ \dot{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta, \end{cases} \quad \alpha = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}, \beta = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}, \dots, \delta = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}.$$ [10]

Будем искать решение в виде

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{cases} \lambda a = \alpha a + \beta \\ \lambda b = \gamma a + \delta b \end{cases} \quad \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \alpha)(\lambda - \delta) = \gamma\beta,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)^2 - \gamma\beta}.$$

1. $\lambda = \pm i\omega$ — состояние равновесия типа центр, устойчивое, не асимптотически устойчивое. Фазовые кривые — эллипсы.

2. $\lambda p \pm i\omega$ — состояние равновесия типа фокус, может быть в зависимости от знака p как устойчивым, так и неустойчивым[11], устойчивое равновесие асимптотически устойчиво. Фазовые кривые «сжимаются» или «раскручиваются».

3. $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ —состояние равновесия типа узел — равновесие типа фокус при очень сильном трении. Асимптотически устойчиво либо неустойчиво.

4. $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ — состояние равновесия типа седло, неустойчиво.

H/w Как найти направления асимптот?

Пример 3.1.1.

$$\ddot{x} = f(x, v), v = 0, m = 1$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f_0(x) - \mu \cdot v = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} - \mu \cdot x \end{cases}$$

$$\frac{\partial U(x_0)}{\partial x} = 0; \frac{\partial^2 U(x_0)}{\partial x^2} = U'' \neq 0; \begin{cases} x = x_0 + \xi \\ v = \eta \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = -U'' \cdot \xi - \mu \cdot v \end{cases} \quad \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -U'' & -\lambda - \mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + \mu\lambda + U'' = 0} \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - U''}$$

Чередуются состояние равновесия типа седло, узел и фокус, центры превращаются в диссипативные состояния равновесия, фокусы отвечают случаям малого трения, при её увеличении превращаются в узлы.

[10] Рассматриваем линейное состояние равновесия.
[11] Устойчиво при $p < 0$.

3.1.2. Интегрирование уравнения движения консервативных одномерных систем

Будем рассматривать лагранжеву задачу, в которой существует интеграл энергии.

$$L(x, \dot{x}) \text{ — уравнения Лагранжа решаются в квадратурах.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(x, \dot{x}) = const \text{ на решениях.}$$

Фазовый портрет — линии уровня $H(x, \dot{x})$.

$$H(x, \dot{x}) = E = const \Rightarrow \dot{x} = V(x, E)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V(x, E) \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{V(x, E)} \Rightarrow \boxed{t = \int^x \frac{\mathrm{d}x}{V(x, E)}},$$

аддитивная константа в нижнем пределе интегрирования отвечает заданному E, его линии уровня, и такие точки надо различать, поэтому на самом деле везде в решении вместо $V(x, E)$ должно быть $V_i(x, E)$, где i определяет *ветку однозначности.*

Определение 3.1. x — ограниченная область — движение финитное; x — неограниченная область — движение инфинитное.

Постулат 3.1. *Всякое финитное движение в одномерной консервативной системе обязательно является периодическим.*

Частный случай — натуральная система.

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m(x) \dot{x}^2 - U(x)$$

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}$$

$$\boxed{t = \pm \int^x \sqrt{\frac{m(x)}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}}},$$

знак в начале определяется начальными условиями, меняется в точке разворота, где знаменатель обращается в нуль, то есть $U(x) = E$.

$$p(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(x) \dot{x} = \pm \sqrt{2m(E - U)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U}} \Rightarrow t = \pm \frac{\partial}{\partial E} \int^x p(x, E) \, \mathrm{d}x \,,$$

а интеграл — площадь под графиком $p(x)$.

Определение 3.2. $U(x) < E$ — область возможного движения, иначе мы переходим в комплексное время, что запрещено в классической механике.

Определение 3.3. $U(x) = E$ — точки разворота.

Фазовый портрет обладает зеркальной симметрией относительно оси x. $[x_3, \infty]$ — инфинитное движение.

$$\dot{x} \sim \sqrt{E - U(x)} \sim \pm \sqrt{x - x_1}$$

$\dot{x} \sim \pm \sqrt{(x - x_0)^2} = \pm |x - x_0|$ — в состоянии равновесия с асимптотами $\left(\frac{\partial U(x_0)}{\partial x} = 0 \right)$.

3.1.3. Диссипативные одномерные системы

В общем случае способа решения в квадратурах для диссипативных систем нет. И оказывается, что все известные интегрируемые диссипативные системы на самом деле не по-настоящему диссипативные. Поясним, о чём идёт речь. Вспомним консервативную задачу $L = \frac{1}{2}m(x)\dot{x}^2 - U(x)$ и посмотрим, какому уравнению движения такой лагранжиан соответствует (а интересует нас уравнение вида $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$).

$$L = \frac{1}{2}m(x)\dot{x}^2 - U(x) \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial x}\dot{x}^2 = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = f(x) - \mu(x)\dot{x}^2, \text{ где} \\ f(x) = -\frac{1}{m(x)}\frac{\partial U}{\partial x}, \text{ а} \\ \mu(x) = \frac{1}{2m}\frac{\partial m}{\partial x}, \end{cases}$$

и мы можем получить решение в квадратурах для любых $f(x)$ и $\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{1}{2m}\frac{\partial m}{\partial x} \Rightarrow \mu = \frac{\partial}{\partial x}(\ln\sqrt{m}) \Rightarrow m = \left(e^{\int \mu \mathrm{d}x}\right)^2, \\ f(x) &= -\frac{1}{m(x)}\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow U = -\int mf\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Задачи вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu\dot{x}^n = 0$, где $n = 2k$, допускают решение в квадратурах, в системе «псевдотрение». При $n = 2k+1$ трение уже истинное, поскольку «штука» $\dot{x}\cdot\mu\dot{x}^n$ знакоопределена, а она управляет скоростью вытекания энергии:

$$H_0 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}H_0}{\mathrm{d}t} = -\mu\dot{x}^{n+1}.$$

Но можно и при $n = 2k$ сделать трение: достаточно добавить сигнум $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}\cdot\dot{x}^n = 0$, при $n = 2k$ получаем трение, при $n = 2k+1$ — псевдотрение.

Пример 3.1.2 (n= 0). Как выглядит фазовый потрет системы $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu = 0$? А если добавить сигнум, как увидеть, что задача стала диссипативной? Как выглядит настоящее диссипативное решение? Сшиваем по непрерывности два решения. Зона застоя.

Когда рисуем сигнум скорости, говорим, что фазовой фазовый портрет системы получается из фазового портрета системы без сигнума путём склейки: разрезаем по горизонтальной прямой, с помощью сигнума разворачиваем и склеиваем по непрерывности.

H/w $\mathrm{sgn}\,\dot{x}\cdot\dot{x}$ — задача с трением — нарисовать фазовый портрет, зная ФП консервативной системы.

Тривиальные случаи $\dot{x} = F(v) \Rightarrow \dot{v} = F(v) \Rightarrow v(t) \Rightarrow x(t) \int v\,\mathrm{d}t$

3.1.4. Качественный анализ на фазовой плоскости

...

Пример 3.1.3 (Линейное трение в системе можно учитывать с помощью чисто лагранжевой задачи с нестационарным лагранжианом).

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - U(x) \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = f(x),$$

и в эту задачу мы можем добавить линейное трение:

$$L = \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - U\right)e^{2\gamma t} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}e^{2\gamma t} \\ \dot{p} &= (\ddot{x} + 2\gamma\dot{x})e^{2\gamma t} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}e^{2\gamma t} \end{aligned}$$

И последнее равенство, которое можно сократить на $e^{2\gamma t}$, является следствием одной теоремы...

Постулат 3.2.

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} = F(t,x,\dot{x})\\ s=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists \begin{array}{c} L(t,x,\dot{x}) \\ \mu(t,x,\dot{x}) \neq 0 \end{array}\Bigg| \; (\ddot{x}-F)\cdot\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}$$

Постулат 3.3.

$$\ddot{x} = F(x,\dot{x}) \Rightarrow \exists \begin{array}{c} L(x,\dot{x}) \\ \mu(x,\dot{x}) \end{array} \quad \ldots$$

Пример 3.1.4.

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2\gamma\dot{x} = 0 \Leftarrow L = \frac{\dot{x}+\gamma x}{\gamma x}\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}+\gamma x}{\omega x} - \frac{\omega}{2\gamma}\ln\left(\omega^2x^2 + (\dot{x}+\gamma x)^2\right)$$ [12]

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \gamma) \\ p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \text{ уходит в бесконечность за конечное время,} \end{cases}$$

движение инфинитно.

3.1.5. Периодическое движение в одномерных консервативных системах

Консервативная система — система, которая задаётся лагранжианом $L(x,\dot{x})$, но мы ограничим круг задач натуральными системами, то есть будем считать, что $L(x,\dot{x}) = \frac{m(x)}{2}\dot{x}^2 - U(x)$, и часть времени будет полагать, что m — константа. Ранее мы договорились, что в таких системах всякое финитное движение периодическое: это видно по графику потенциальной энергии: движение сосредоточено между точками разворота, где энергия $U(x) < E$, E — константа, определяемая начальными условиями задачи . Выпишем формулы, которые у нас получились,

$$U(x_{1,2}) = E,$$

$$T(E) = 2\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t = \left|\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v(x)} = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}}\right| = \int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\sqrt{2m}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}}\text{[13]}, \tag{3.20}$$

и дальше этот раздел будет в основном посвящён анализу формулы (3.1.5).

Вспомним, как дифференцировать неопределённые интегралы. Сначала надо прокоммутировать интеграл и производную, а потом вспомнить, что пределы зависят от параметра:

$$\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)} f(x,E)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial E}f(x,E)\,\mathrm{d}x - \frac{\partial x_2}{\partial E}f(x_2,E) - \frac{\partial x_1}{\partial E}f(x_1,E).$$

Понять, что несобственный интеграл в формуле (3.1.5) сходится, можно, разложив подынтегральную функцию в ряд, который сходится равномерно. Если же первых член разложения становится равным нулю, то интеграл перестаёт сходиться.

Отметим ещё один интересный факт: $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{E-U}} = 2\frac{\partial}{\partial E}\sqrt{m}\sqrt{E-U}$, и тогда несложно заметить, что

$$\boxed{T(E) = 2\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_{x_1}^{x_2}\underbrace{\sqrt{2m(E-U)}}_{p(x)\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}}\mathrm{d}x}, \tag{3.21}$$

[12] H/w проверить. См. статью [?].

[13] Не забываем, что $\frac{m\dot{x}^2}{2} + U = E$.

построив график, получим ещё одну замечательную формулу:

$$T(E) = \frac{\partial}{\partial E} \oint p(x, E)\,\mathrm{d}x\,,$$

то есть выбранный уровень энергии определяет на фазовой плоскости замкнутую кривую, и скорость изменения площади изменения площади внутри этой кривой, в зависимости от энергии, это и есть период.[14]

3.1.6. Теория возмущений для периодического движения

Пусть есть некоторая задача, про которую мы всё знаем... Рассмотрим новую задачу в потенциале $U(x)+\delta U(x)$, где $\delta U(x)$ — малая (в смысле неисчезновения в ряде Тейлора) поправка. Можем ли мы найти новый период, не решая задачу заново? То есть, как найти часть $\delta T(E)$ в первом неисчезающем приближении по $\delta U(x)$. Прежде, чем ответить на этот вопрос, рассмотрим более простую задачу — попробуем найти, как изменятся точки разворота. Вспомним, что в исходной задаче $U(x_1) = E$, а $x(t)$ и $T(E)$ мы знаем. Тогда мы можем сказать, что

$$U(x_1 + \delta x_1) + \delta U(x_1 + \delta x_1) = E,$$

то есть в потенциале с возмущением новая точка разворота, и будем пользоваться малостью, раскладывая слагаемые в левой части:

$$\begin{gathered} U(x_1 + \delta x_1) = U(x_1) + U'(x_1)\delta x_1 + \ldots, \\ \delta U(x_1 + \delta x_1) = \delta U(x_1) + \ldots, \end{gathered}$$

но $U(x_1)$ это в точности E, как было упомянуто ранее, поэтому

$$\delta x_1 \approx -\frac{\delta U(x_1)}{U'(x_1)},$$

но это, очевидно, не работает при $U'(x_1) = 0$, и нам нужен следующий член в разложении...

... Стартуем с выражения (3.1.5), которое будем раскладывать, подставив $U(x) + \delta U(x)$ вместо U:

$$T(E) + \delta T(E) = 2\frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \sqrt{2m(E - U - \delta U)}\,\mathrm{d}x\,,$$

и начинаем раскладывать:

$$\delta T(E) = 2\frac{\partial}{\partial E} \left\{ \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m} \left(-\frac{\delta U}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U}} + \delta x_2 \left.\sqrt{2m(E - U - \delta U)}\right|_{x_2} - \delta x_1 \left.\sqrt{2m(E - U - \delta U)}\right|_{x_1} \right\},$$

интеграл, как нам бы и хотелось, оказывается пропорционален δU[15], интегральные подстановки оказываются более высокого порядка малости ... поэтому, если получаем ненулевое первое слагаемое, то подстановки можем выкинуть, тогда

$$\boxed{\delta T(E) = \frac{\partial}{\partial E} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m}\,\delta U}{\sqrt{E-U}}\,\mathrm{d}x + o(\delta U)}.$$

[14] $\oint p\,\mathrm{d}x$ — адиабатический инвариант.

[15] $\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m} \left(-\frac{\delta U}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U}} \sim \delta U$, $\delta x_2 \left.\sqrt{2m(E - U - \delta U)}\right|_{x_2} = \frac{1}{2}\delta x_2 \sqrt{2m\delta U|_{x_2}} \sim \delta U^{3/2}$

При этом $\dfrac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E-U}}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$, и

$$\Rightarrow \delta T(E) = -\frac{\partial}{\partial E}\int_{t_1}^{t_2} \delta U 2\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial}{\partial E}\int_{0}^{T(E)} \delta U\left(x(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

Раскладывая до первого неисчезающего члена, получим

$$\boxed{\delta T = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial E^n}\left(T\left\langle \delta U^n\right\rangle\right)}.$$

$\boxed{!}$

3.1.7. Колебания математического маятника

4. Движение материальной точки в центральном поле

Определение 4.1. Силовое поле называется центральным, если потенциал имеет вид $U(r)$, то есть обладает сферической симметрией.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(r) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r},$$
$$\boldsymbol{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \ldots, \ldots \right\} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Определение 4.2. $\boxed{\mathbf{F} = F(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}} \Rightarrow \exists\, U(r) = -\int F\,\mathrm{d}r.$

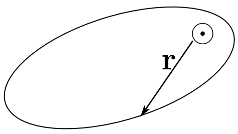
*H/w*Доказать, что если сила $\mathbf{F} = F(\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r}$ ещё и потенциальна, то она центральная.

Задача движения материальной точки в центральном поле интегрируется в квадратурах.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

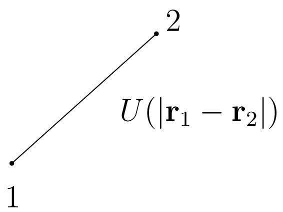
Почему эта задача вообще важна?

1. Первая решённая Кеплером задача о движении двух тел.



$U(r) = -G\frac{m_\odot m_\oplus}{r}$

2. К задаче движения в центральном поле можно сводить задачу двух тел (при условии выполнения третьего закона Ньютона).
   Рассматриваем 6 скалярных ДУ второго порядка.



$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \end{cases} \Bigg|\, \oplus \Rightarrow m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = (\underbrace{m_1 + m_2}_{m_\Sigma})\mathbf{R} \Rightarrow m_\Sigma \ddot{\mathbf{R}} = 0$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\ \ddot{\boldsymbol{\rho}} = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{=\frac{1}{m_{\text{eff}}}}\mathbf{F},\ m_{\text{eff}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_{\text{eff}}\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathrm{d}U(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho},$$
$$\begin{cases} m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{R} \\ \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{\rho} \end{cases}$$

3. Здесь появляется теория рассеяния. Вероятность столкновения двух м. т. значительно больше, чем одновременное столкновение $N \geqslant 3$ частиц.

В плазме $U = \frac{e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_\text{d}}\right)$, где r_d — радиус Дебая.

Попробуем вытащить максимум информации из сферической симметрии.

$$\mathbf{M} = m[\mathbf{r}, \mathbf{v}],$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = F\left[\mathbf{r}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right] = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = const \Rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{M}) = 0,$$

здесь мы перешли в плоское движение, использованы 3 начальных условия из 6.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad M_z = (x\dot{y} - y\dot{x})m = mrv\sin\alpha = mrv_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = M.$$
$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}.$$

Второй закон Кеплера:

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r \cdot r\,\mathrm{d}\varphi \Rightarrow \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{M}{2m} = const.$$

Если орбита замкнута, то $S = \frac{M}{2m}T$.

Отметим, что полёт в центральном поле с петлёй, которая не захватывает центр, невозможен: в некоторый момент перед разворотом лучевая скорость станет равна полной, что означает уход на бесконечность.

Теперь получим те же результаты, пользуясь механикой Лагранжа. Используем закон сохранения энергии.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r),$$

$$\begin{cases} p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = M \\ H = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) = E \end{cases} \quad \Rightarrow {}^{16}\dot{\varphi} = \frac{M}{2mr^2}, \quad \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}}_{U_\text{eff}{}^{17}} = E \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_\text{eff}\right)},$$
$$t = \pm\int^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}}, \boxed{r_0},$$
$$\varphi(t) = \int^t \frac{M}{mr^2(t)}\,\mathrm{d}t\,, \boxed{\varphi_0}.$$

4.1. Форма траектории

$\dot{\varphi}$ знакоопределена, $\varphi(t)$ монотонна, (дифференцирование по времени можно заменить дифференцированием по φ), следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi},$$
$$E = \frac{M^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E,$$
$$\varphi = \pm\int \frac{M\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}}.$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(x), \quad x = \frac{1}{r},$$
$$\frac{M^2}{2m}\left(\dot{x}^2 + x^2\right) + U(x) = E, \quad \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Пример 4.1.1.

$$U = 0 \Rightarrow x(\varphi)$$

$\boxed{\text{Will be complemented}}$

5. Механика Гамильтона

Самая сильная сторона механики Гамильтона в том, что она позволяет решить уравнения движения.

5.1. Канонические уравнения Гамильтона

Стартуем с механики Лагранжа и получим её в формулировке Гамильтона. Итак, пусть есть функция Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, все связи идеальные и голономные, $q = (q_1, \ldots, q_s)$ — имеем s уравнений второго порядка. Порядок ДУ можно понизить. Например,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x. \end{cases}$$

В нашем случае хотим получить $2s$ уравнений первого порядка из s уравнений Лагранжа, и Гамильтон предложил самый эффективный способ это сделать, переходя к переменным (q, p):

$$p_j = \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow (1), \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial q_j} \Rightarrow (2),$$

$$\begin{cases} \dot{q}_j - \varphi_j(t, q, p), \\ \dot{p}_j = \psi_j(t, q, p). \end{cases}$$

5.1.1. Преобразование Лежандра.

Пусть есть функция $f(x, y) : \mathrm{d}f = u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y$, с «потребительской» точки зрения мы определили $u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. Например, в термодинамике $T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}H$,

$$H(S, p) \Rightarrow T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p, \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S.$$

Заметим, что

$$\mathrm{d}f - \mathrm{d}(vy) = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y - v\mathrm{d}y - y\mathrm{d}v = \mathrm{d}(\underbrace{f - vy}_{g(x,v)}), \quad -y = \frac{\partial g}{\partial v}.$$

В термодинамике

$$-S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}(\underbrace{H - TS}_{G(T,p)}), \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T.$$

Компактные ответы.

1. $L(t, q, \dot{q})$.
2. $p_j(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \dot{q}_j(t, q, p)$.
3. $H = \sum \dot{q}_j p_j - L = H(t, q, \dot{q})$[18].
4. Канонические уравнения Гамильтона.

Выкладки.

$$-\,\mathrm{d}L = -\frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\mathrm{d}\dot{q}_j\right) =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{s}\left(\dot{p}_j\,\mathrm{d}q_j + p_j\,\mathrm{d}\dot{q}_j\right).$$

$$\mathrm{d}\left(\sum p_j \dot{q}_j\right) = \sum_j \left(p_j\,\mathrm{d}\dot{q}_j + \dot{q}_j\,\mathrm{d}p_j\right),$$

$$\mathrm{d}\left(\sum p_j \dot{q}_j\right) - \mathrm{d}L = \mathrm{d}H \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}H = -\frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \sum_j \left(\dot{q}_j\,\mathrm{d}p_j - \dot{p}_j\,\mathrm{d}q_j\right),$$

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\,\mathrm{d}p_j\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p}{}_j, \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases}$$

Предметный указатель