Sambor Seredyński s198035

Sprawozdanie - Układ równań liniowych

Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie i porównanie trzech metod rozwiązywania układów równań: dwóch iteracyjnych, czyli metody Jacobiego oraz Gaussa-Seidla oraz jednej bezpośredniej faktoryzacji LU. Następnie przeprowadzone zostały testy wydajnościowe każdej z metod. Oceniano zbieżność metod iteracyjnych, liczbę potrzebnych iteracji, dokładność rozwiązania oraz czas działania algorytmów w zależności od rozmiaru układu.

Opis metod

Metoda Jacobiego:

Jest to metoda iteracyjna, rozwiązania układu równań Ax = b, w której kolejne wartości wektora x są obliczane na podstawie wartości z poprzedniej iteracji.

Dla układu równań w postaci Ax = b, A = D + L + U, gdzie:

D – macierz diagonalna.

L – macierz trójkątna dolna.

U - macierz trójkątna górna.

Iteracyjna formuła ma postać:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L + U)x^{k})$$

Metoda Gaussa-Seidla:

Jest to udoskonalona metoda, która w danej iteracji używa już zaktualizowanych wartości x, część elementów podczas iteracji jest już znana, co przyśpiesza zbieżność.

Wzór iteracyjny:

$$x^{(k+1)} = (D + L)^{-1}\left(b - Ux^{(k)}\right)$$

Metoda LU:

Metoda LU to metoda bezpośrednia, polegająca na rozkładzie macierzy A na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych L i U:

A = LU

Rozwiązując układ równań Ax = b, najpierw rozwiązujemy:

1. Ly = b (podstawienie w przód)

2. Ux = y (podstawienie wstecz)

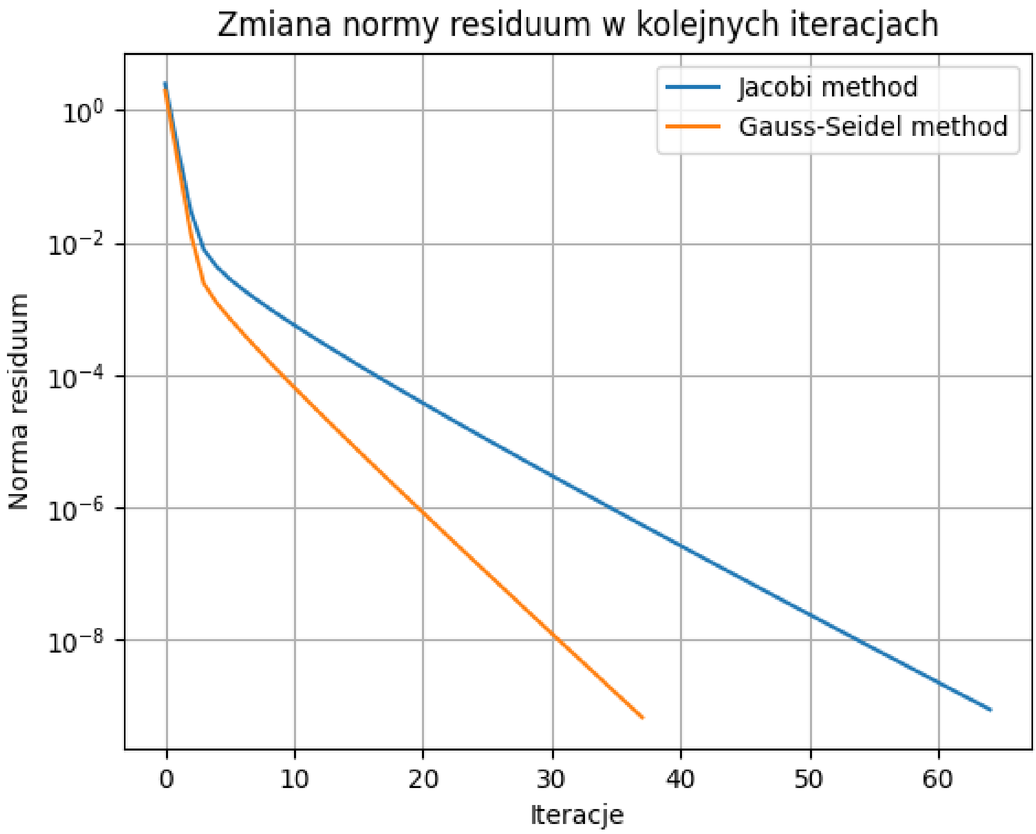
Metoda LU jest stabilna i dokładna, lecz kosztowna obliczeniowo, szczególnie przy dużych macierzach.

Zadanie A

W zadaniu A należało utworzyć układ równań liniowych mający postać $Ax = b$, gdzie A to macierz pasmowa o rozmiarze N x N, wartość N w przypadku numeru indeksu 198035 wynosi 1235. Macierz ta zawiera pięć pasm: pasmo główne z wartościami a1 = 5 + e, gdzie e w moim przypadku wynosi 0, dwa pasma sąsiednie z wartościami równymi a2 = -1 oraz dwa pasma odległe o dwie pozycje od pasma głównego o wartościach a3 = -1. Wektor b jest rozmiaru N, którego n-ty element ma wartość $\sin\left(n \cdot (f + 1)\right)$, gdzie w moim przypadku jest to $\sin(8n)$.

Zadanie B

Zadanie B polegało na przeprowadzeniu analizy dwóch metod iteracyjnych – Jacobiego oraz Gaussa-Seidla. Użyłem ich do wyznaczenia rozwiązania układu równań z zadania A. Granica normy residuum rozwiązania była równa 10^{-9} . Wykres zmiany residuum w kolejnych iteracjach, gdzie oś Y jest w skali logarytmicznej zamieszczony jest poniżej razem z porównaniem obu algorytmów.



Metoda	Liczba iteracji	Czas
Jacobi	65	0.11 s
Gauss-Seidel	38	0.95 s

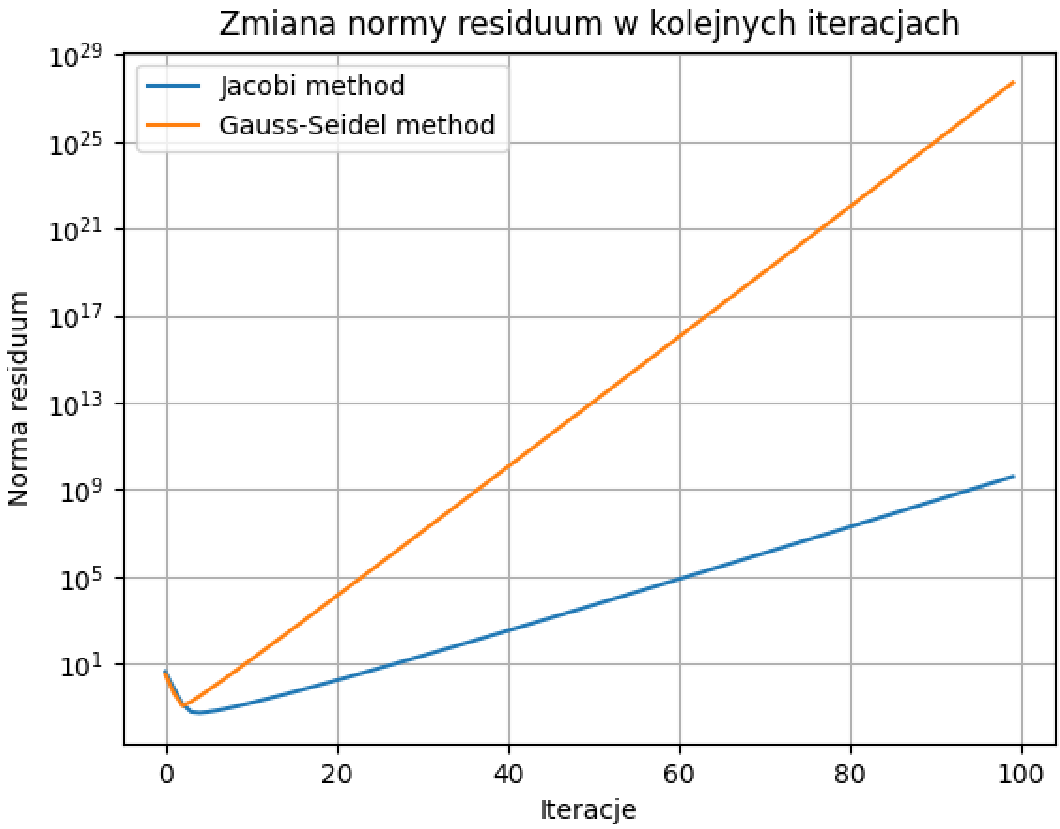
Można zauważyć, że obydwie metody znalazły wektor przybliżonych rozwiązań. Metoda Gaussa, potrzebowała mniej iteracji jednak była wolniejsza w ogólnym rozrachunku, z powodu złożoności obliczeń w każdej iteracji, ta metoda wymaga kolejnych obliczeń zależnych od wcześniej zaktualizowanych wartości . Metoda Jacobiego wykonuje mniej złożone operacje dlatego, pomimo większej liczby iteracji była ona szybsza.

Zadanie C

Dla zadania C należało przeprowadzić podobną analizę oraz zmodyfikować układ równań z zadania A, w następujący sposób: a1 = 3, a2 = a3 = -1.

Należało teraz zbadać, czy dla podanej macierzy, dane metody iteracyjne będą się zbiegać.

Poniżej zamieszczony został wykres przedstawiający wynik analizy, maksymalna liczba iteracji została ustawiona na 100, aby pokazać trend wzrostowy.



Jak widać, dla podanej macierzy metody iteracyjne nie zbiegają się, ponieważ norma residuum rośnie, a nie maleje, co oznacza, że oddalamy się od rozwiązania. Zatem metodom nie udało się wyznaczyć rozwiązania.

Zadanie D

W zadaniu D należało zaimplementować bezpośrednią metodę rozwiązywania układów równań liniowych, metodę rozkładu LU. Należało podaną metodą wyznaczyć rozwiązanie dla macierzy C oraz obliczyć normę residuum dla tego przypadku.

Program działał **3.55** sekundy i uzyskałem normę residuum równą **$8.305 * 10^{-13}$**.

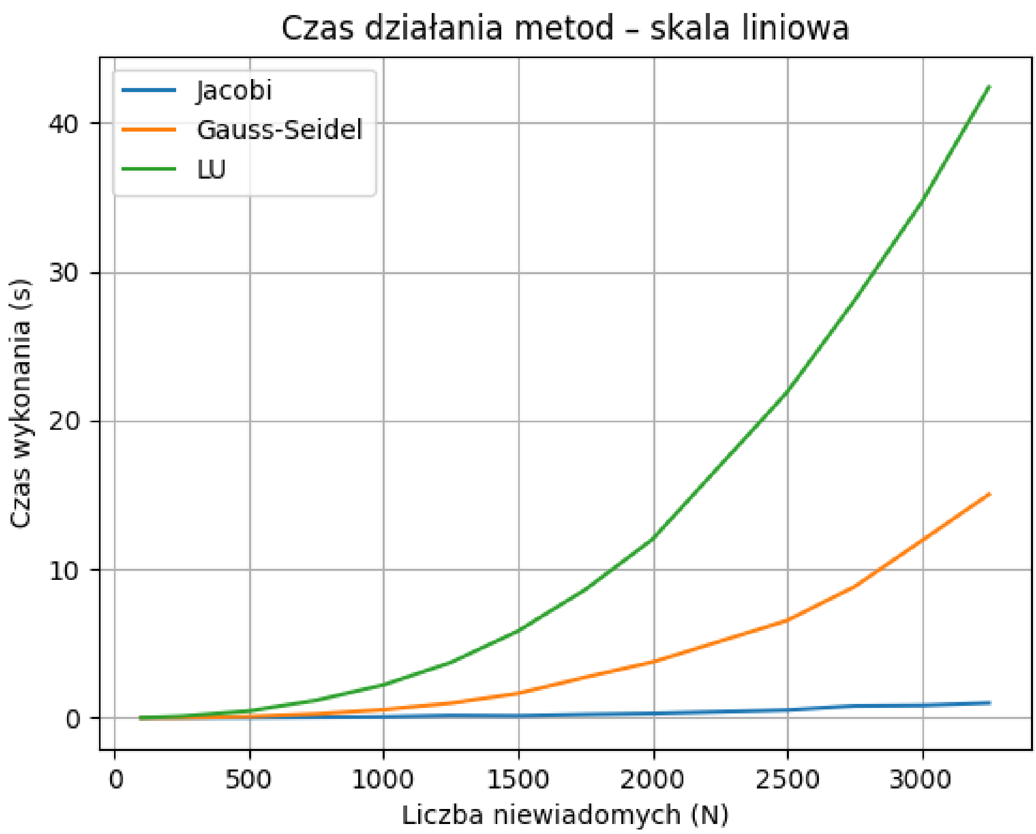
Co oznacza, że przybliżony wynik uzyskany dzięki metodzie LU został obliczony poprawnie. W przeciwieństwie do metod iteracyjnych, które dla tej macierzy nie zbiegały się, metoda LU pozwoliła uzyskać stabilne i dokładne rozwiązanie. Potwierdza to jej przydatność w przypadkach, gdzie metody iteracyjne zawodzą lub mają problemy ze zbieżnością.

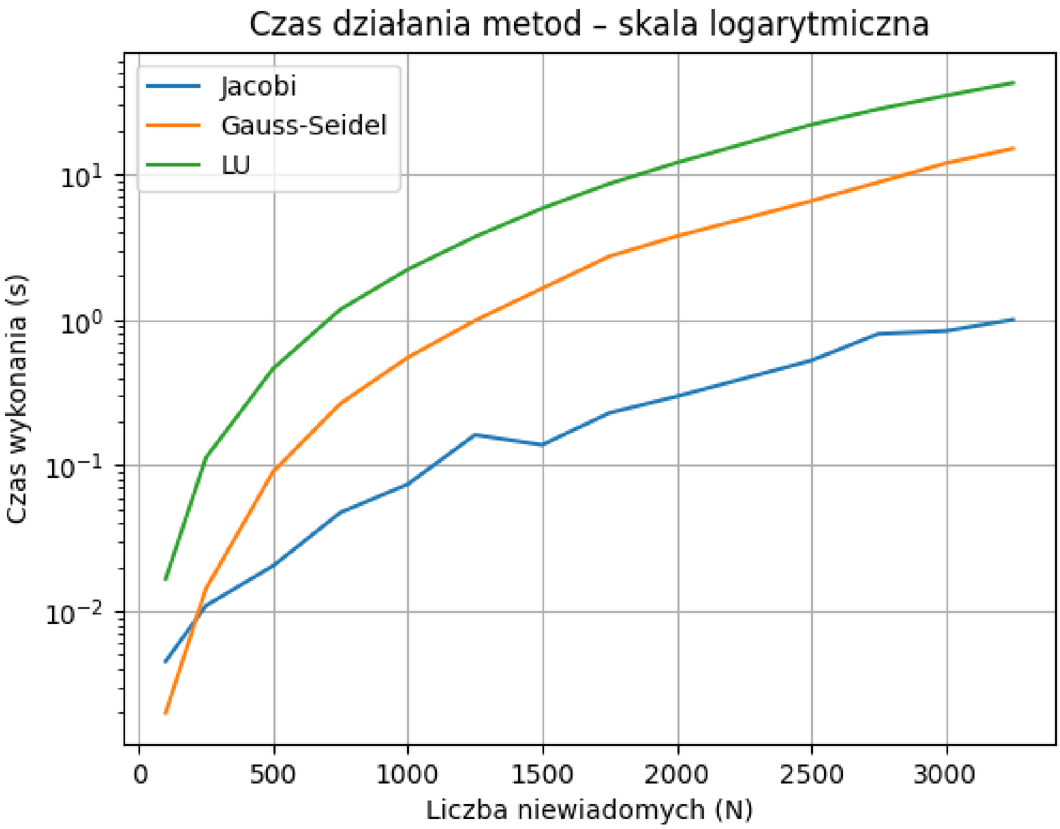
Zadanie E

Dla zadanie E, należało zobrazować na wykresach, z których jeden miał mieć oś Y w skali liniowej, a drugi w logarytmicznej zależności czasu działania, każdej poszczególnej metody od liczby niewiadomych N. Ograniczyłem zbiór badanych N następująco

N = [100, 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 2750, 3000, 3250]

Wyniki znajdują się na poniższych wykresach.





Z wykresów wynika, że metoda Jacobiego okazała się najwydajniejsza czasowo, dla małych oraz średnich wartości N. Wynika to z jej prostoty obliczeń, pomimo większej liczby iteracji od metody Gaussa-Seidla, jest szybsza.

Gauss-Seidel, zbiegał się w mniejszej liczbie iteracji, ale ponieważ wymagał on bardziej złożonych obliczeń, to był z tego powodu wyraźnie wolniejszy.

Metoda LU jest najwolniejsza dla dużych wartości N. Jest to metoda bezpośrednia, wymagająca pełnej faktoryzacji macierzy, co wiąże się z dużym kosztem obliczeniowym.

W praktyce dla małych rozmiarów N, metoda LU może być preferowana ze względu na jej wysoką dokładność, jednak dla dużych wartości N, to metody iteracyjne są bardziej pożądane oczywiście jeżeli zachodzi zbieżność.

Podsumowanie

Na podstawie wykonanych zadań oraz ich analiz można stwierdzić, że metody iteracyjne są szybsze od metody bezpośredniej. Wynika to z złożoności obliczeń. Jednak jak widać w zadaniu C, metody iteracyjne zawiodły i nie przyniosły odpowiedniego rezultatu, za to metoda bezpośrednia wykazuje się wysoką dokładnością i pozwoliła na rozwiązanie tego samego układu równań, co zostało przedstawione w zadaniu D. Z analizy powyższych metod można wyciągnąć wniosek, że ostatecznie wybór metody powinien być uzależniony od charakterystyki konkretnego układu: jego rozmiaru, struktury oraz wymagań dotyczących dokładności i wydajności.