**Sambor Seredyński 198035**

## ***<u>Sprawozdanie - Aproksymacja profilu wysokościowego</u>***

## 1 – Wstęp

Celem projektu było zastosowanie oraz porównanie dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej na podstawie rzeczywistych danych wysokościowych wybranych tras. W pierwszej z metod zastosowano wielomian interpolacyjny Lagrange'a, natomiast w drugiej funkcje sklejane trzeciego stopnia (tzw. Splajny Kubiczne). Przeprowadzona analiza miała na celu ocenę dokładności obu podejść w wyznaczaniu profilu wysokościowego oraz zbadanie wpływu liczby i rozmieszczenia węzłów interpolacyjnych na otrzymane wyniki.

## 2 – Opis metod

### *2.1.1 - Metoda Lagrange'a*

Pierwszą zaimplementowaną metodą była interpolacja metodą Lagrange'a, która polega na znalezieniu wielomianu stopnia n, przechodzącego przez n+1 punktów.

Bazą tej metody jest wzór:

$$\phi_i(x) = \Pi_{j=1,\, j\neq i}^{n+1}\left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

Następnie wielomian interpolacyjny Lagrange'a można zapisać jako:

$$F(x) = \Sigma_{i=1}^{n+1}\left(y_i \cdot \phi_i(x)\right)$$

Metoda Lagrange'a pomimo tego, że jest łatwa w implementacji jest niestety podatna na efekt **Rungego**, czyli oscylacje na krańcach przedziałów.

### *2.1.2 - Węzły Czebyszewa*

Węzły Czebyszewa służą do rozmieszczenia punktów interpolacyjnych w taki sposób, aby zminimalizować efekt Rungego, występujący przy interpolacji wielomianowej. Zamiast równomiernego rozłożenia, węzły są zagęszczone bliżej końców przedziału, co poprawia stabilność numeryczną interpolacji. Węzły Czebyszewa dla przedziału [a, b] wyznacza się według wzoru:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{2k} \cdot \pi\right),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

*2.2 - Metoda funkcji sklejanych*

Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia polega na podziale całego przedziału na mniejsze odcinki, w których funkcja aproksymująca jest wielomianem stopnia trzeciego. Funkcja ta zapewnia ciągłość wartości, pierwszej oraz drugiej pochodnej w węzłach, co gwarantuje płynność wykresu. Dla każdego przedziału $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$ funkcja wyrażona jest wzorem:

$$S_i(x) \ = \ a_i \ + \ b_i \cdot (x \ - \ x_i) + \ c_i \cdot (x - x_i)^2 + \ d_i \cdot (x - x_i)^3$$

gdzie współczynniki a, b, c oraz d są wyznaczane na podstawie warunków brzegowych, przyrównując wartości interpolowanej funkcji oraz między sobą pochodnych pierwszego i drugiego stopnia w punktach węzłowych.

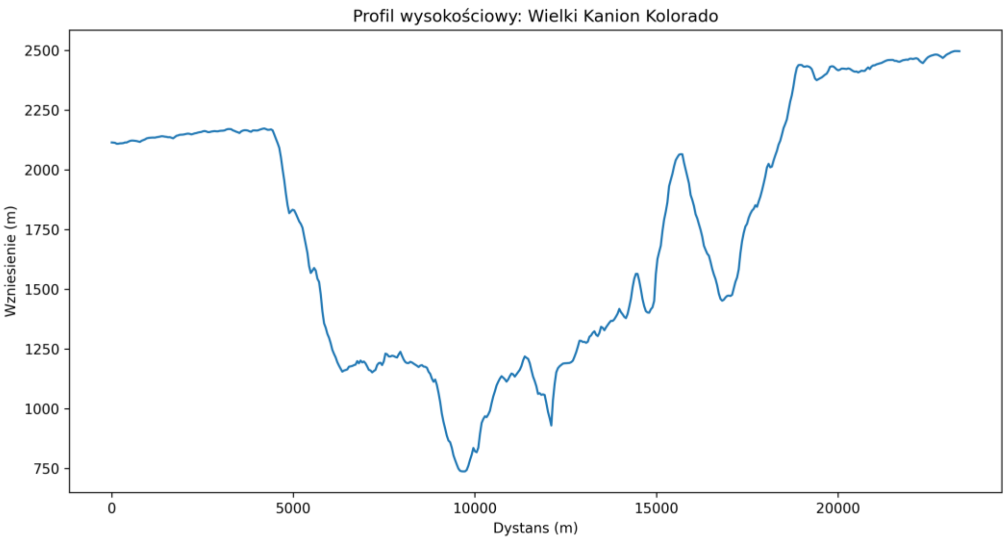
## 3 – Analizowane Dane

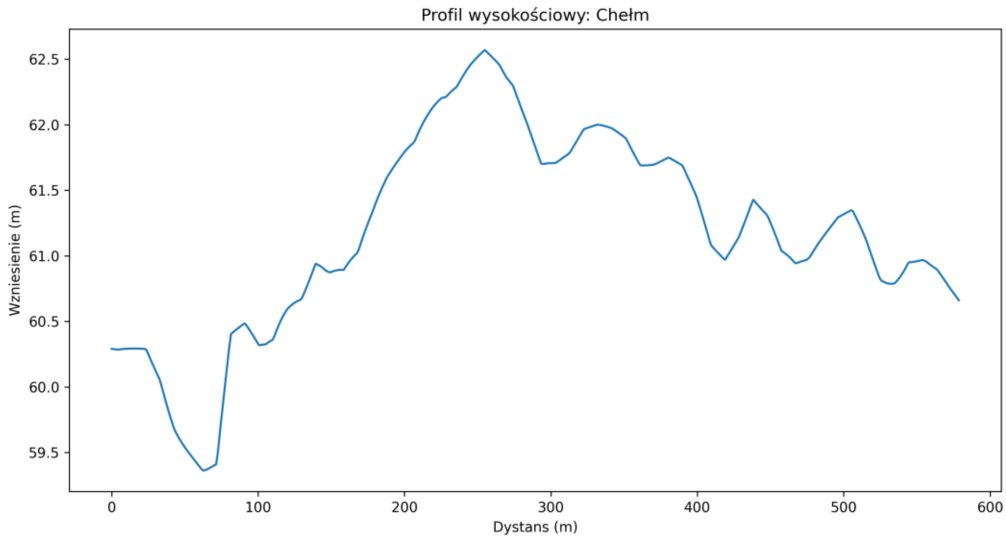
Obie metody interpolacji przyjmują jako parametr ilość węzłów, przez które mają przechodzić. Obie metody będą testowane dla równomiernie rozłożonej liczby węzłów, kolejno: n = 8, 16, 32, 64, 128

Wybrane dane do analizy to:

- WielkiKanionKolorado.csv
- Chelm.txt

Dane są różne pod względem kształtu, co pozwoli na lepszą analizę algorytmów aproksymacji. Prezentują się one następująco:

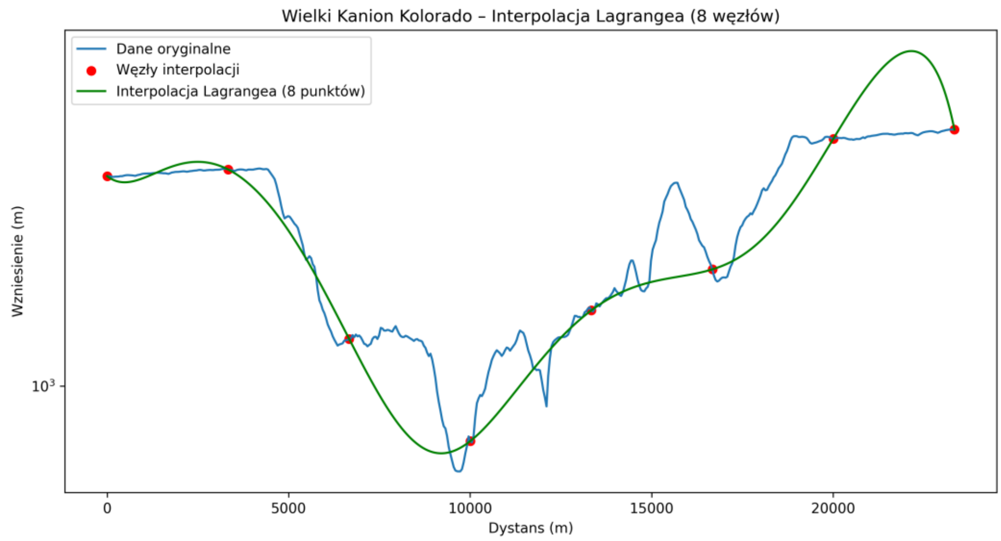


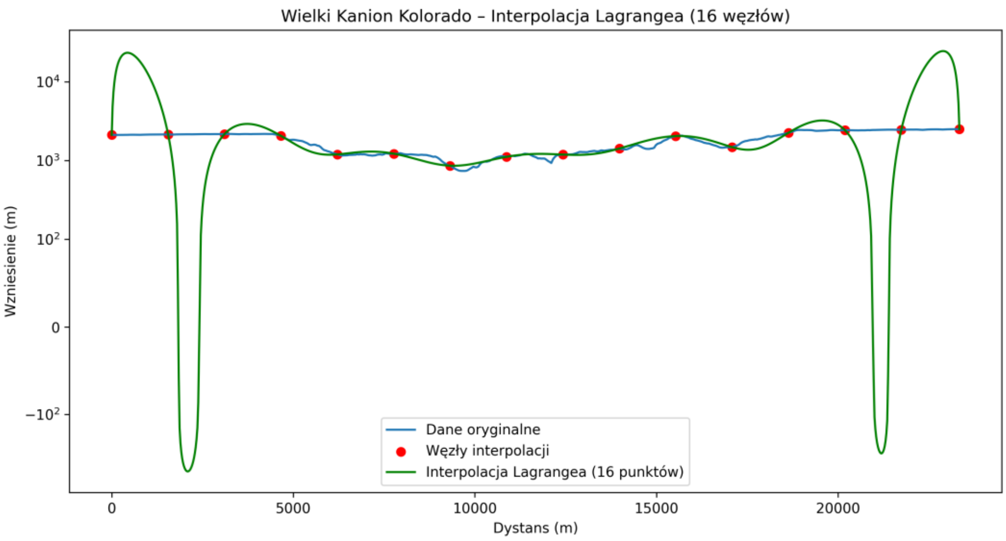



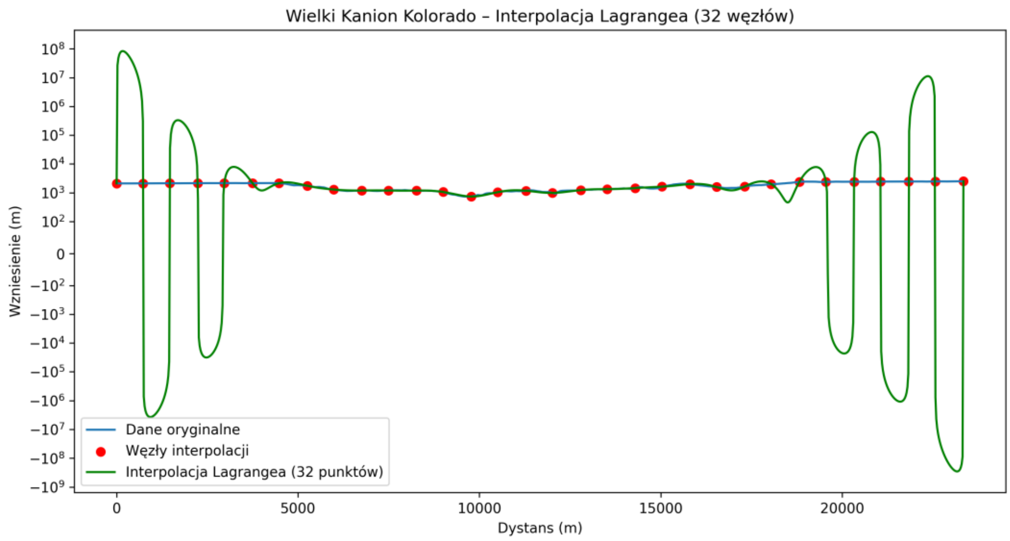

## 4 – Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a

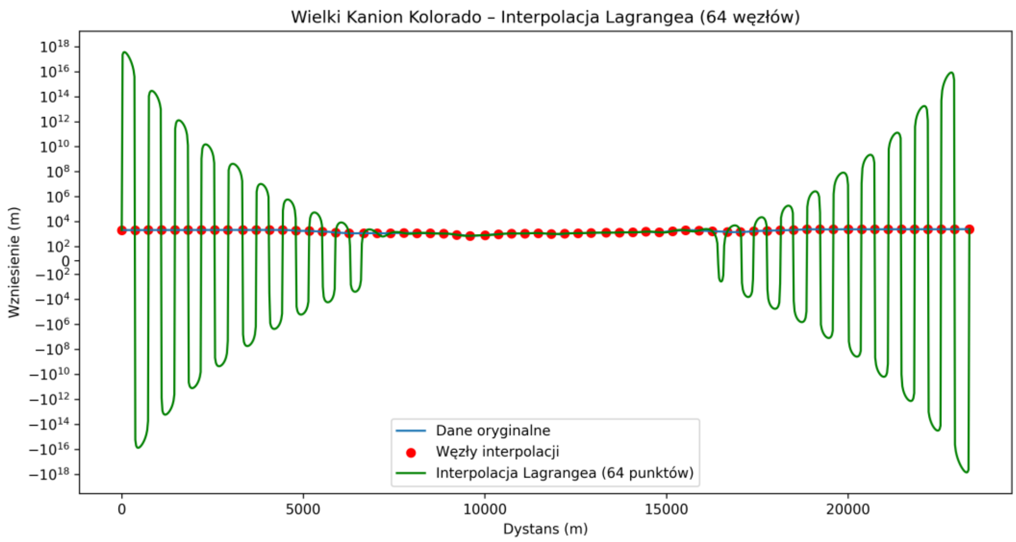
### *4.1 - Wielki Kanion Kolorado*

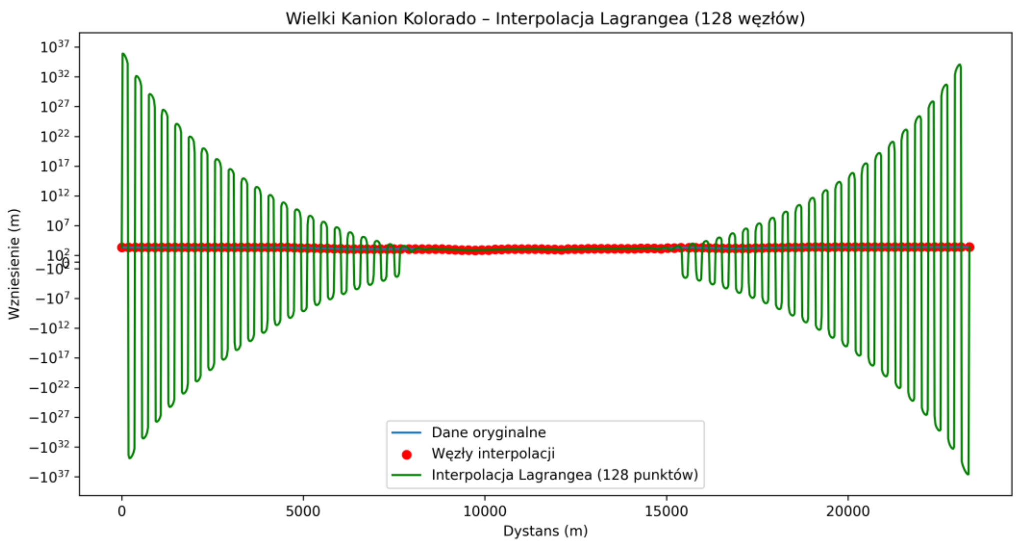
Wyniki interpolacji Lagrange'a dla Wielkiego Kanionu Kolorado


Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea (8 węzłów)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea (8 punktów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)


Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea (16 węzłów)
$10^4$
$10^3$
$10^2$
0
$-10^2$
Wzniesienie (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea (16 punktów)
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)


Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea (32 węzłów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea (32 punktów)

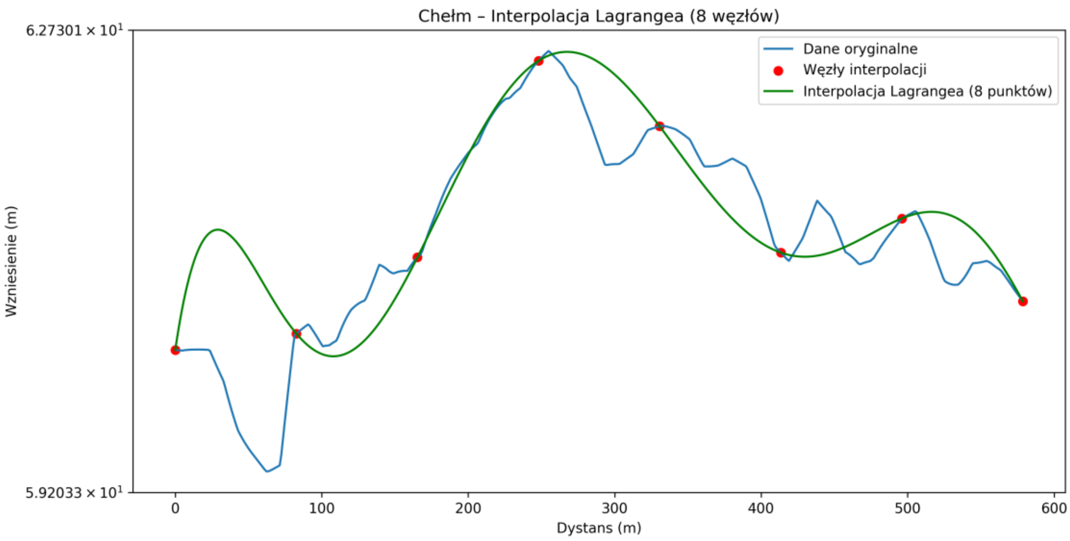

Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea (64 węzłów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea (64 punktów)

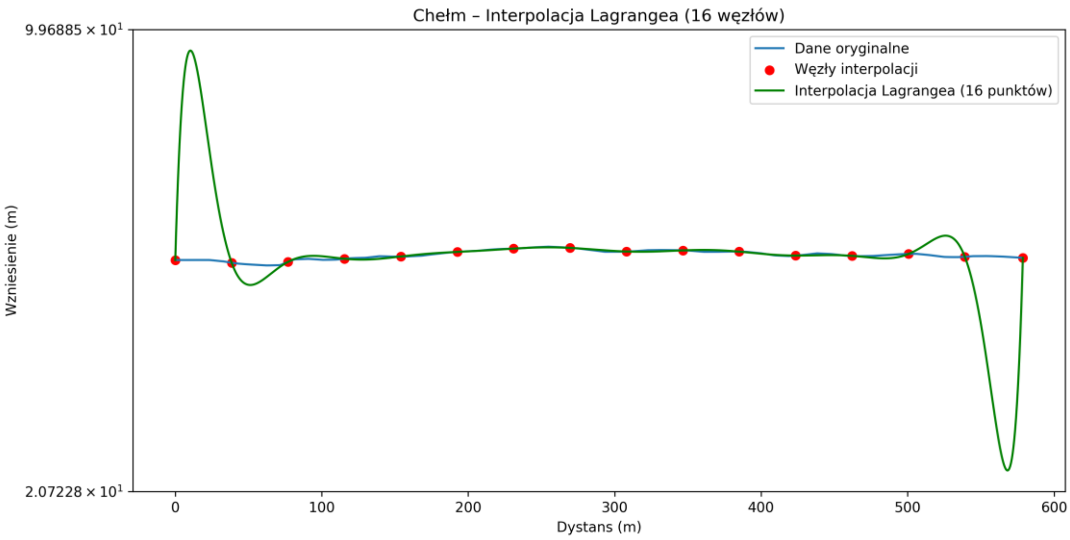

Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea (128 węzłów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea (128 punktów)

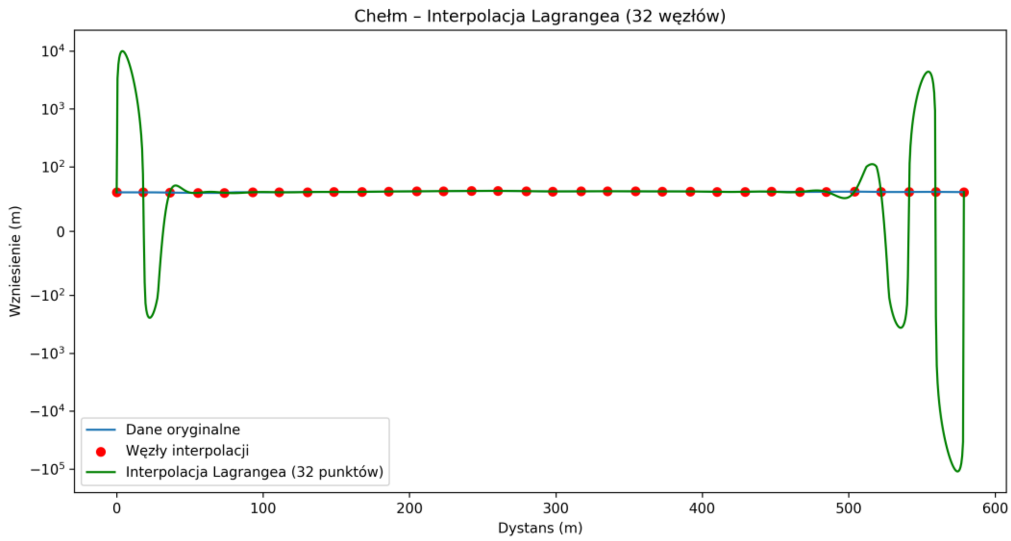
Analizując powyższe wykresy można zauważyć, że dla coraz większej ilości węzłów, wyniki nie przybliżają dobrze oryginalnych danych oraz zaburzone są one przez efekt Rungego. Już dla 16 węzłów zauważalne są oscylacje a zwiększenie liczby węzłów tylko pogorsza jakość interpolacji, ponieważ różnica między rzeczywistym profilem wysokościowym, a aproksymacją jest coraz większa.

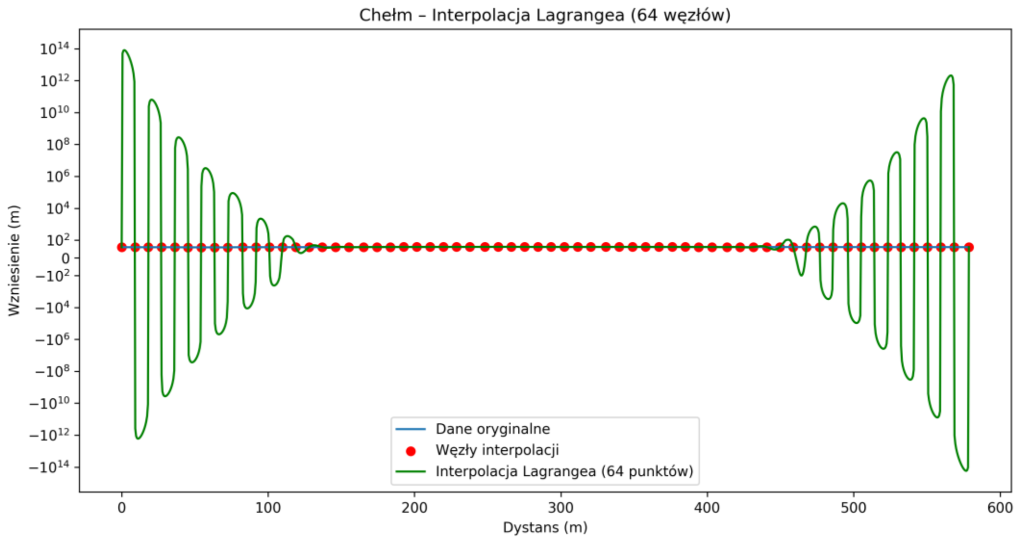
### *4.2 - Chełm*

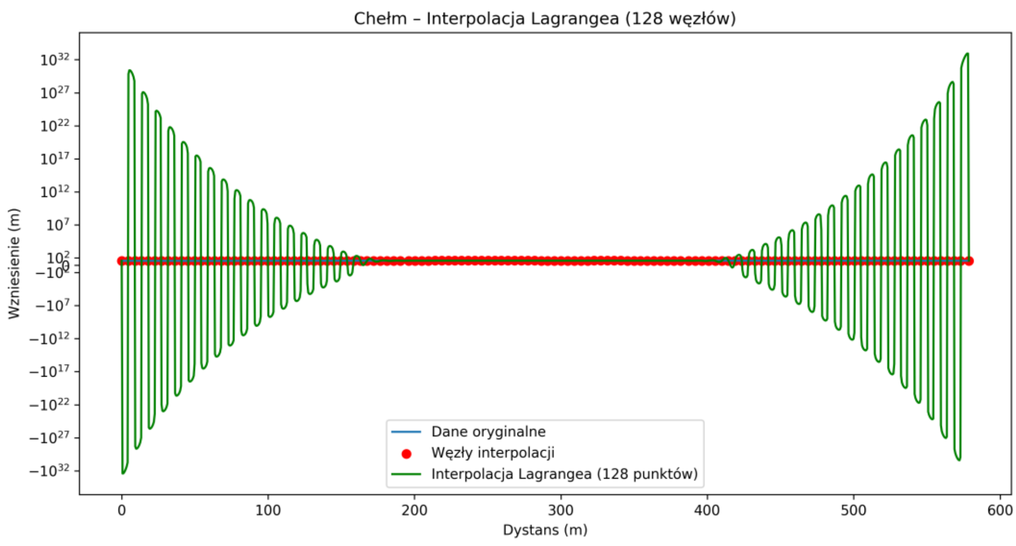
Wyniki interpolacji Lagrange'a dla Chełmu




Chełm – Interpolacja Lagrangea (32 węzłów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea (32 punktów)


Chełm – Interpolacja Lagrangea (64 węzłów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea (64 punktów)

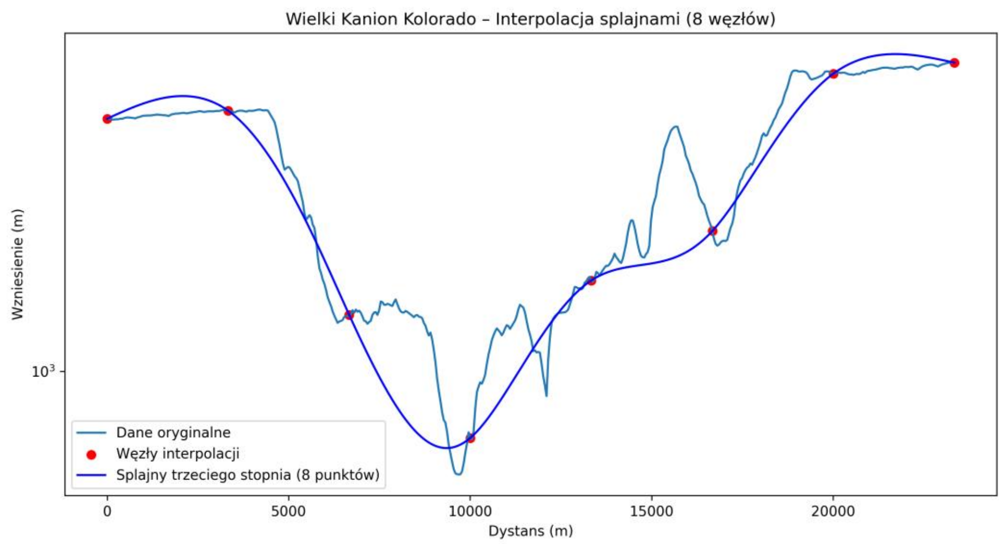

Chełm – Interpolacja Lagrangea (128 węzłów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea (128 punktów)

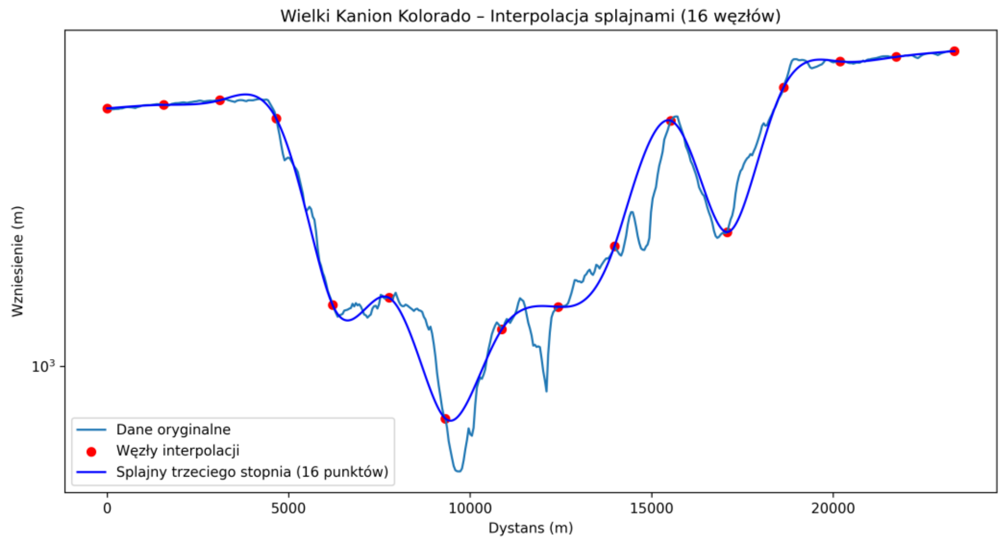
Również w tym przypadku wyniki nie są zadowalające. Tak jak dla Kanionu Kolorado, już dla 16 węzłów pojawia się efekt Rungego, a różnica między aproksymacją a rzeczywistym profilem wysokościowym rośnie dla większej liczby węzłów.

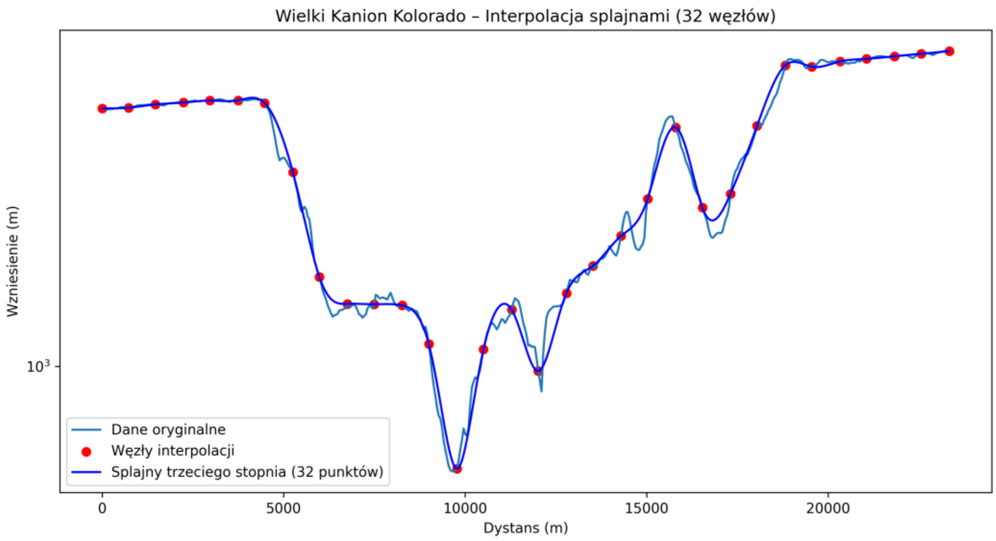
## 5 – Wyniki interpolacji metodą funkcji sklejanych

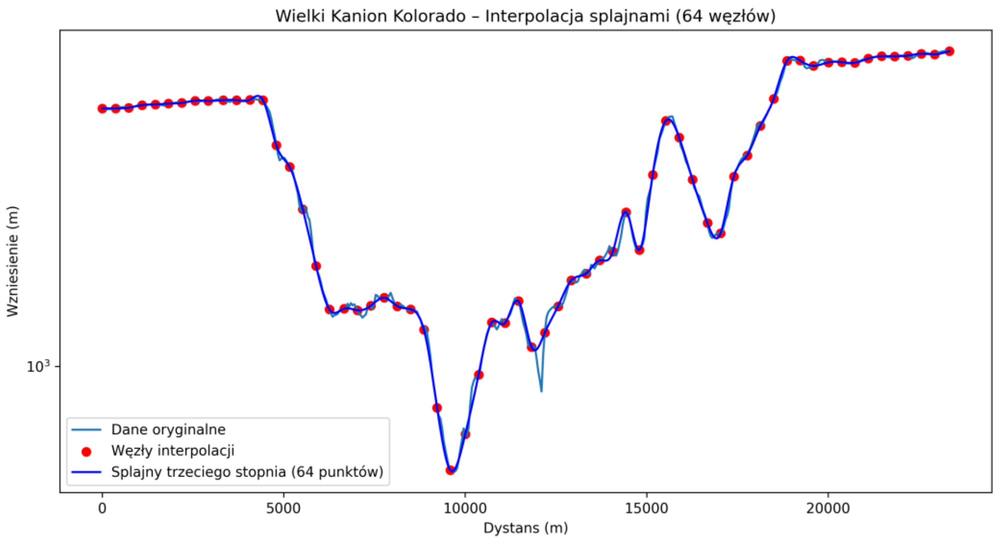
### *5.1 - Wielki Kanion Kolorado*

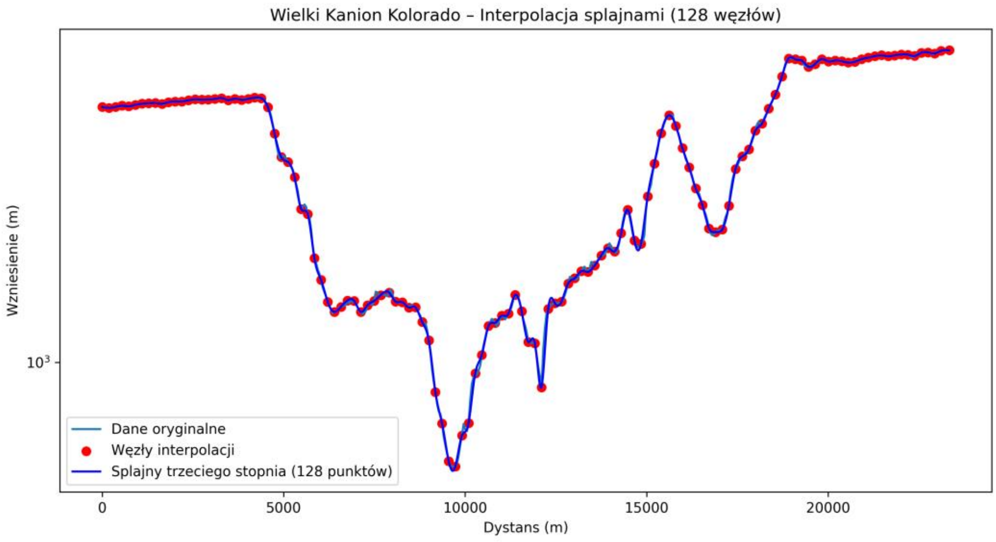
Wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi dla Wielkiego Kanionu Kolorado




Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja splajnami (32 węzłów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Splajny trzeciego stopnia (32 punktów)
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)

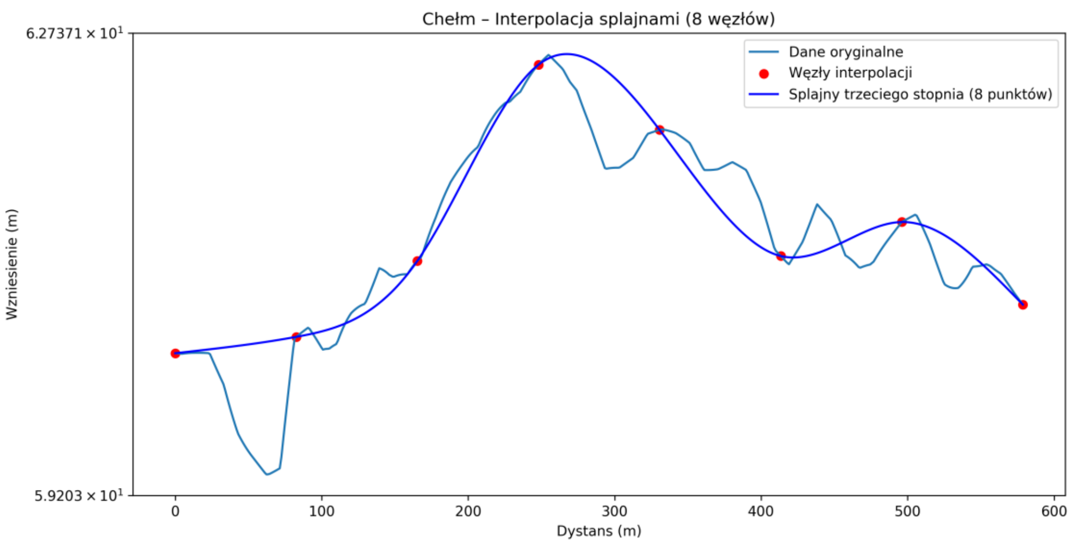

Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja splajnami (64 węzłów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Splajny trzeciego stopnia (64 punktów)
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)

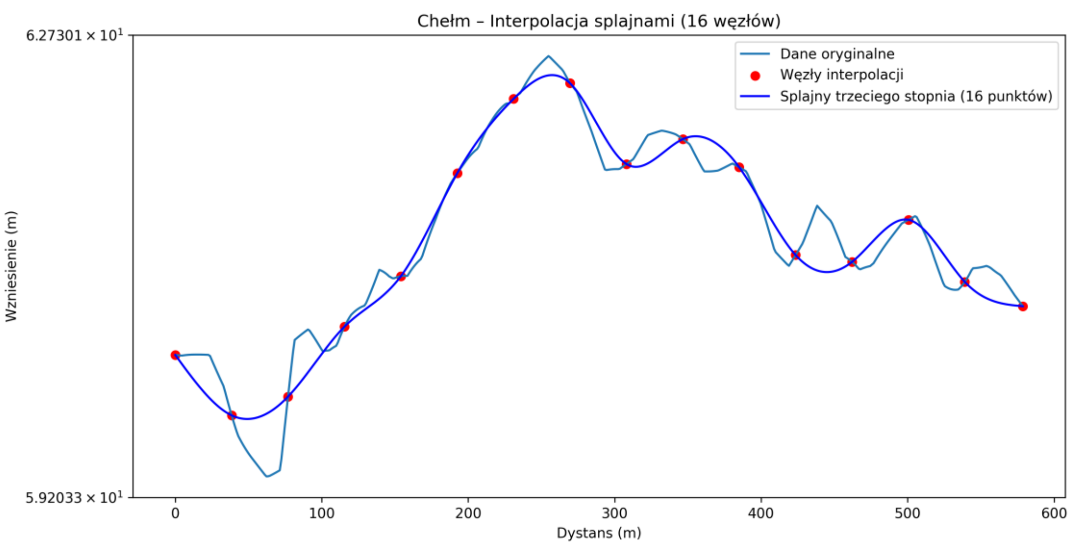

Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja splajnami (128 węzłów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Splajny trzeciego stopnia (128 punktów)
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)

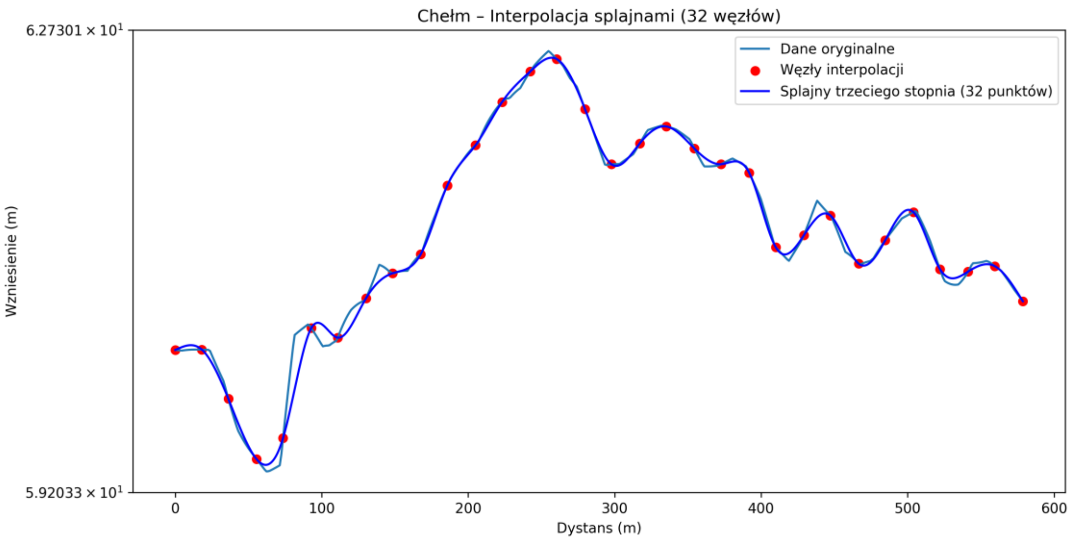
Analizując powyższe wykresy można zauważyć, że dla małej liczby węzłów aproksymacja nie jest zbytnio dokładna, tak samo jak w metodzie Lagrange'a, jednak kiedy zwiększymy liczbę węzłów zauważyć można brak efektu Rungego. Już dla 16 węzłów aproksymacja bardzo dobrze oddaje dane podstawowe, a zwiększając liczbę węzłów jej dokładność rośnie, a nie maleje tak jak w metodzie Lagrange'a, jest to spowodowane tym, że każdy podprzedział jest aproksymowany osobnym wielomianem trzeciego stopnia, co pozwala na lepsze odwzorowanie kształtu funkcji i eliminuje problemy oscylacji.

*5.2 - Chełm*

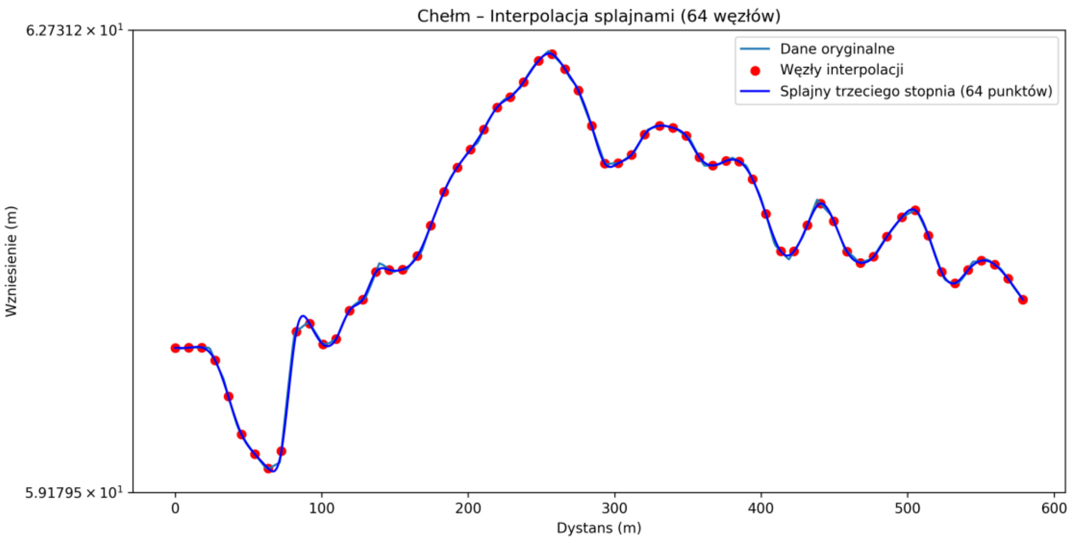
Wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi dla Chełmu



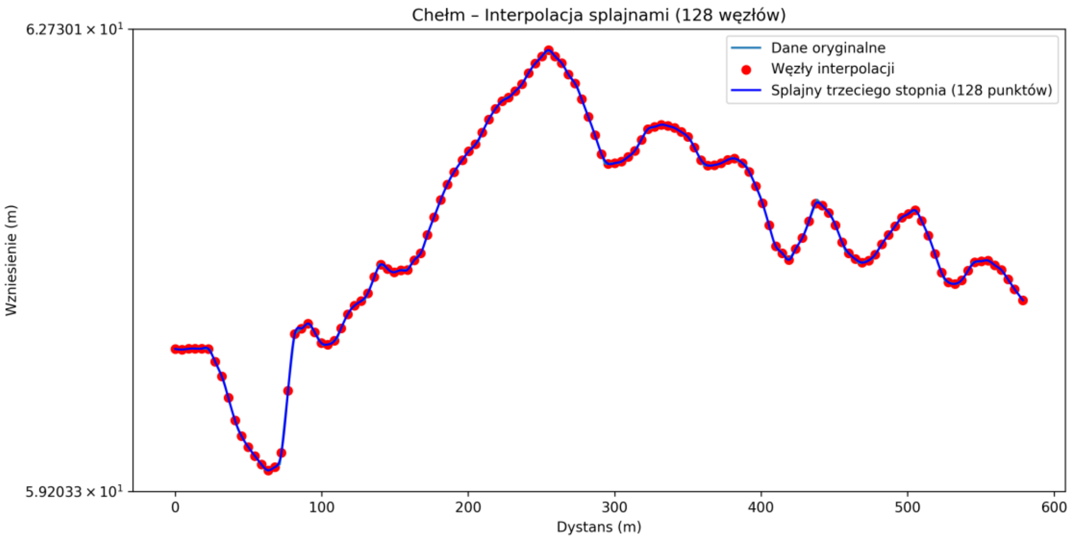





Chełm – Interpolacja splajnami (32 węzłów)
$6.27301 \times 10^1$
$5.92033 \times 10^1$
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Splajny trzeciego stopnia (32 punktów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
0
100
200
300
400
500
600

Chełm – Interpolacja splajnami (64 węzłów)
$6.27312 \times 10^1$
$5.91795 \times 10^1$
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Splajny trzeciego stopnia (64 punktów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
0
100
200
300
400
500
600

Chełm – Interpolacja splajnami (128 węzłów)
$6.27301 \times 10^1$
$5.92033 \times 10^1$
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Splajny trzeciego stopnia (128 punktów)
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
0
100
200
300
400
500
600

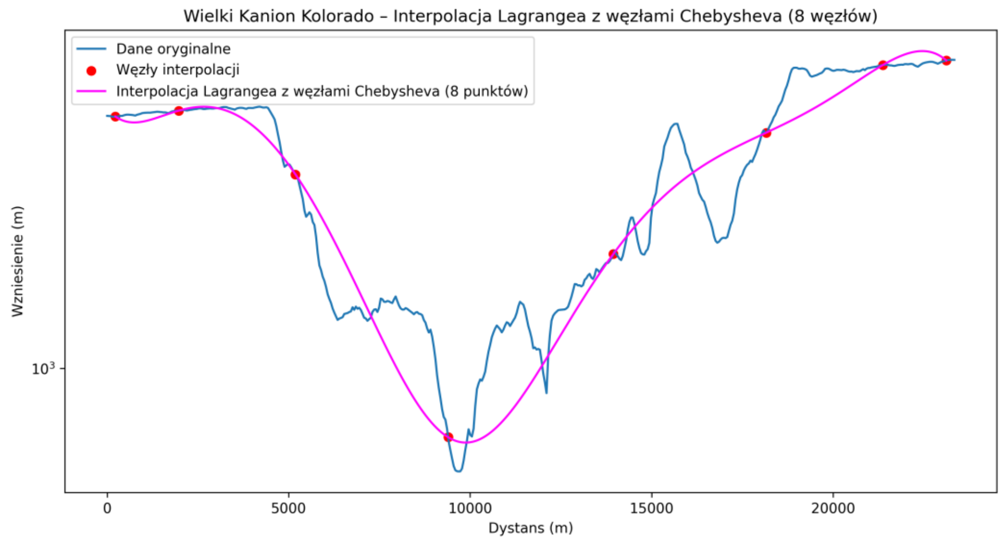
Tak jak dla Kanionu Kolorado, już dla 16 węzłów aproksymacja nieźle odwzorowuje podstawowe dane, a zwiększanie liczby węzłów daje jeszcze lepsze efekty, a efekt Rungego nie jest zauważalny.

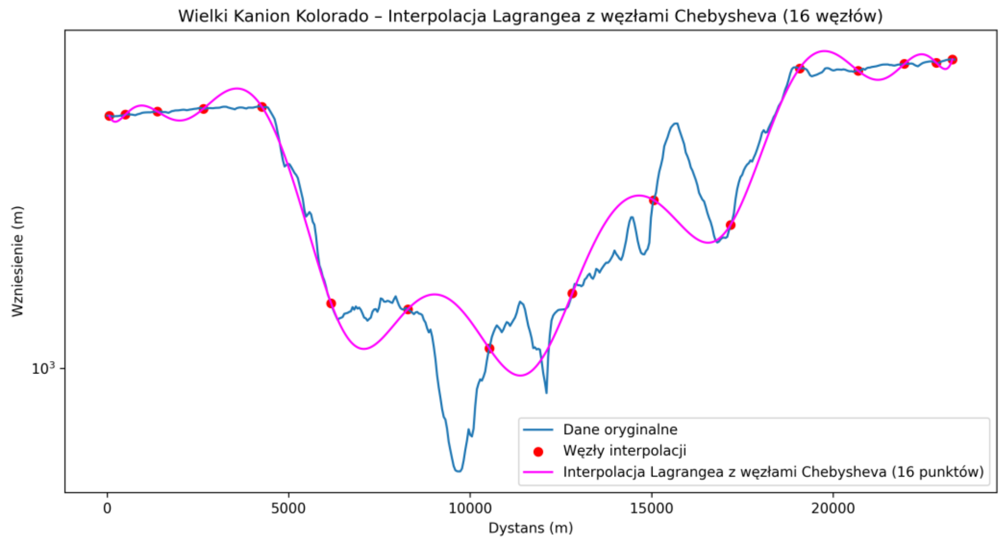
## 6 – Analiza Dodatkowa

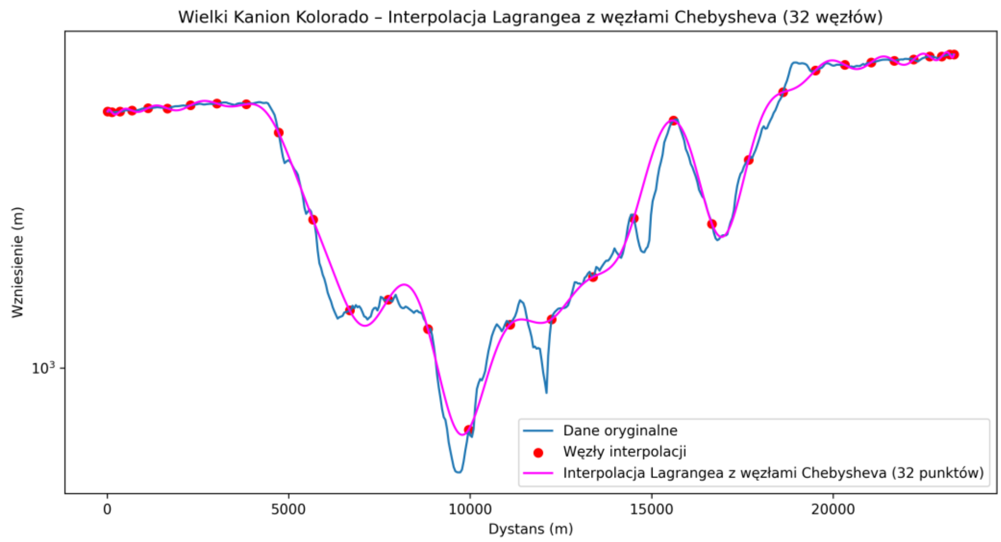
Jako analizę dodatkową przeprowadziłem użycie jeszcze raz metody Lagrange'a, ale tym razem używając węzłów Czebyszewa. Podczas analizy można było zauważyć, że węzły rozmieszczone równomiernie nie pomagały w interpolacji, dlatego można użyć węzłów Czebyszewa, które są rozmieszczone gęściej na krańcach przedziału.

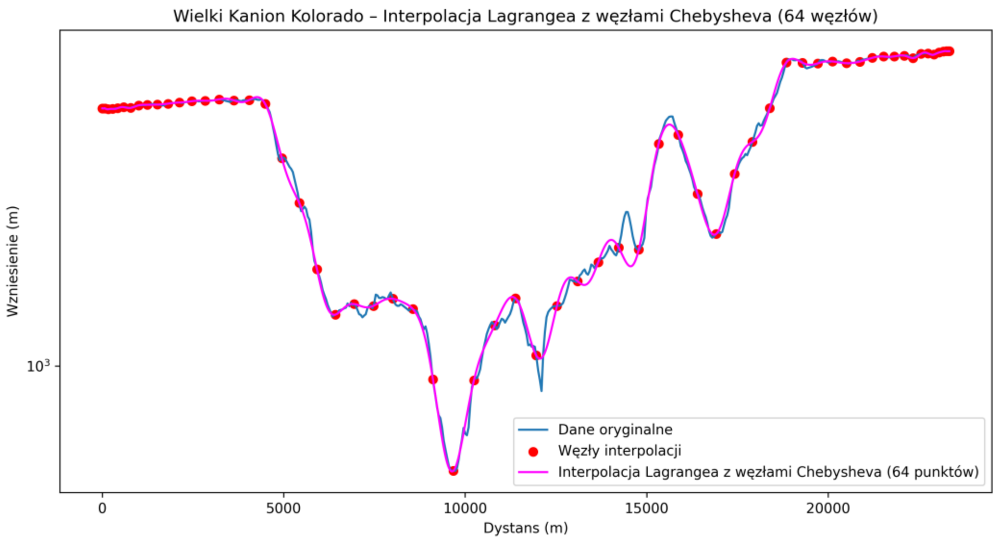
### *6.1 - Wielki Kanion Kolorado*

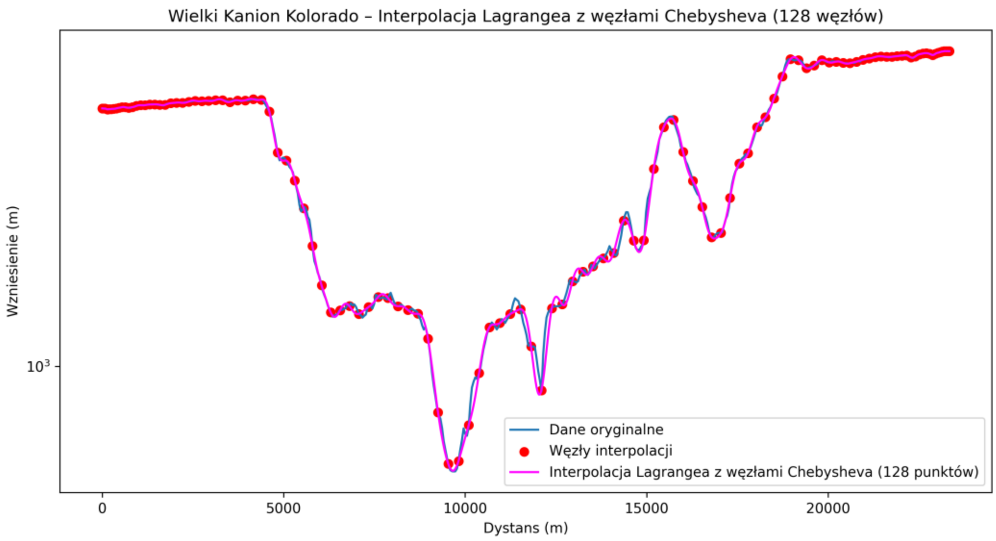
Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a z węzłami Czebyszewa dla Wielkiego Kanionu Kolorado


Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (8 węzłów)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (8 punktów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)


Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (16 węzłów)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (16 punktów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)

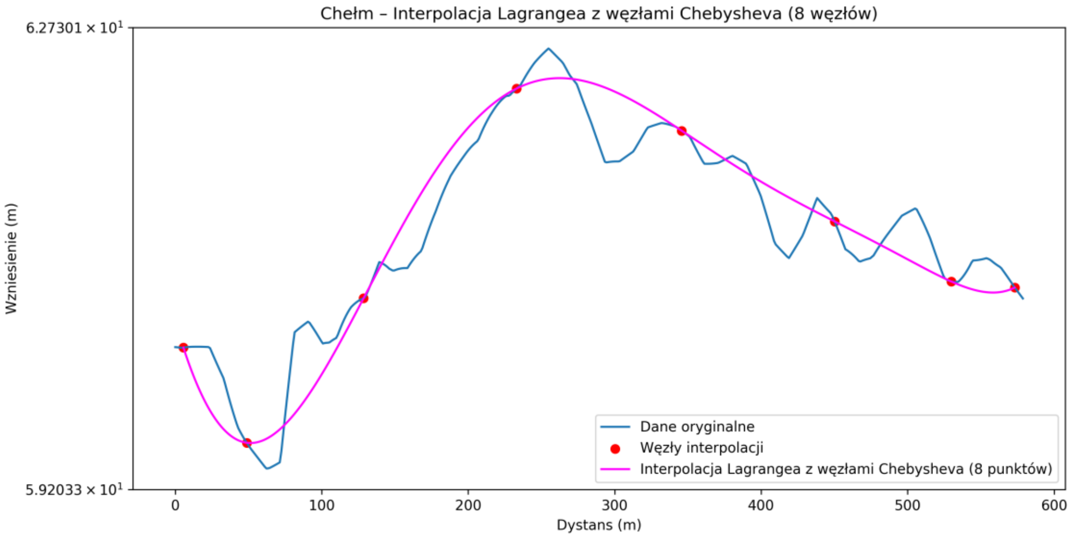

Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (32 węzłów)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (32 punktów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)

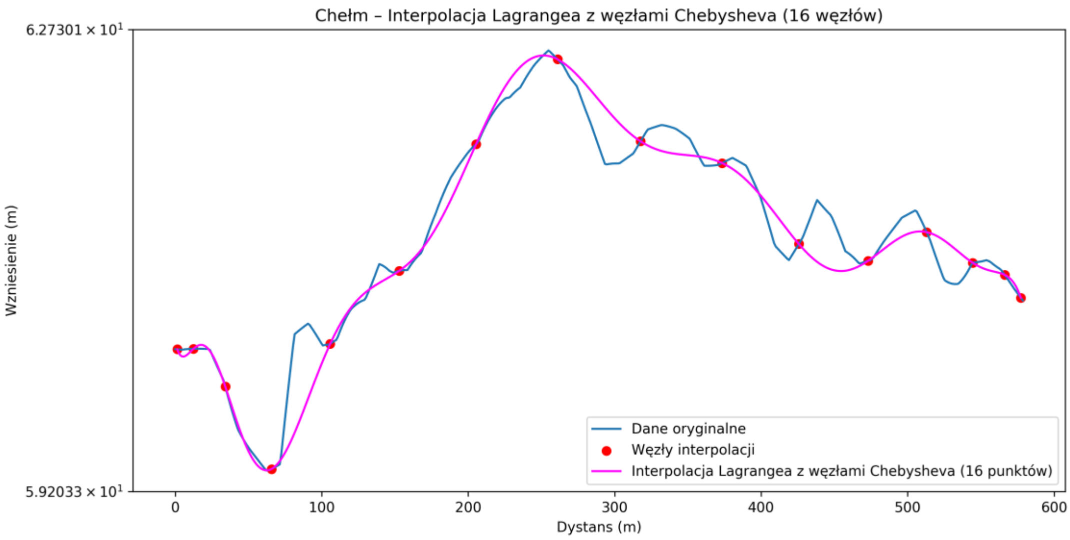

Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (64 węzłów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (64 punktów)

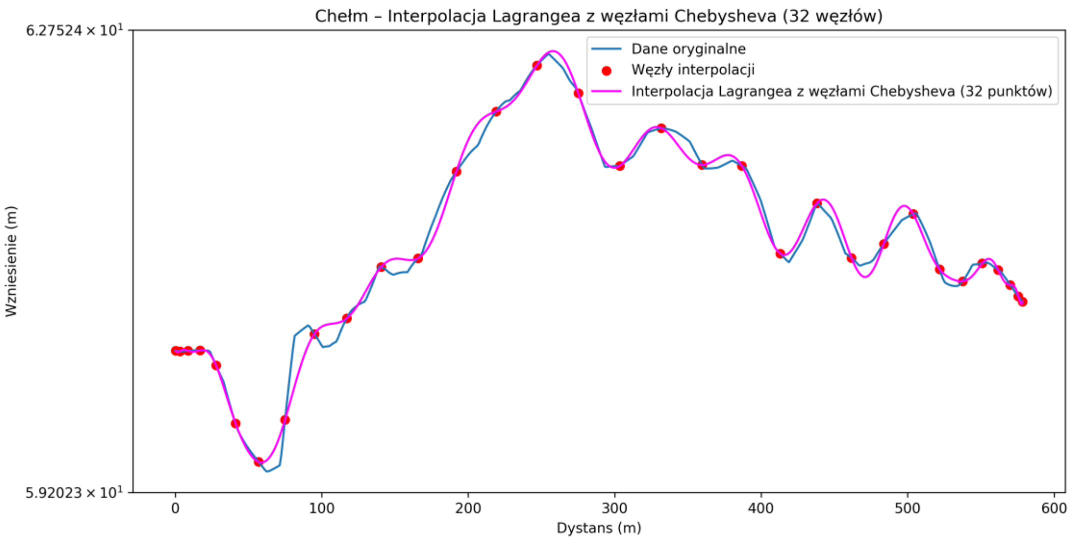

Wielki Kanion Kolorado – Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (128 węzłów)
Wzniesienie (m)
$10^3$
0
5000
10000
15000
20000
Dystans (m)
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (128 punktów)

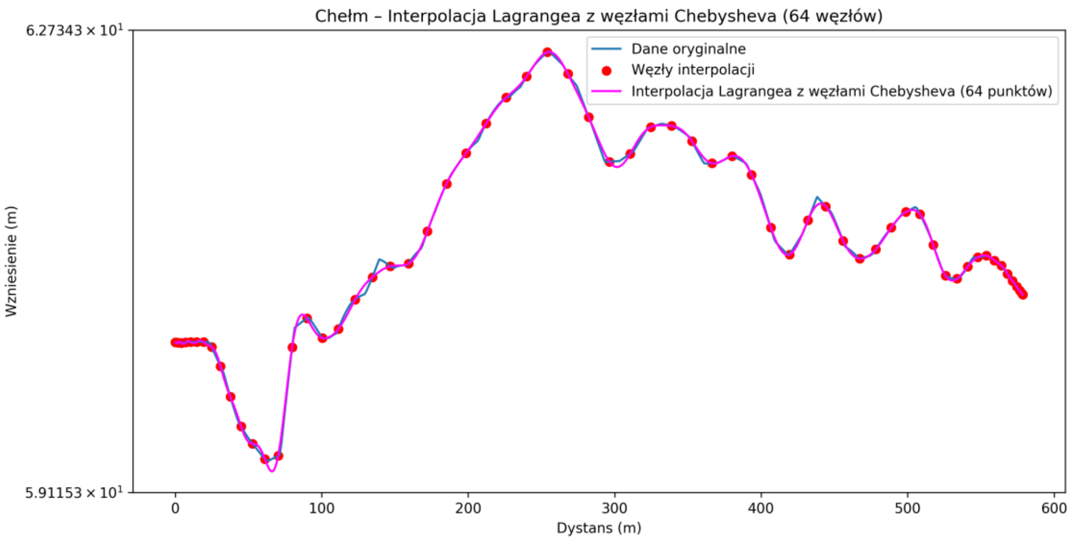
## *6.2 - Chełm*

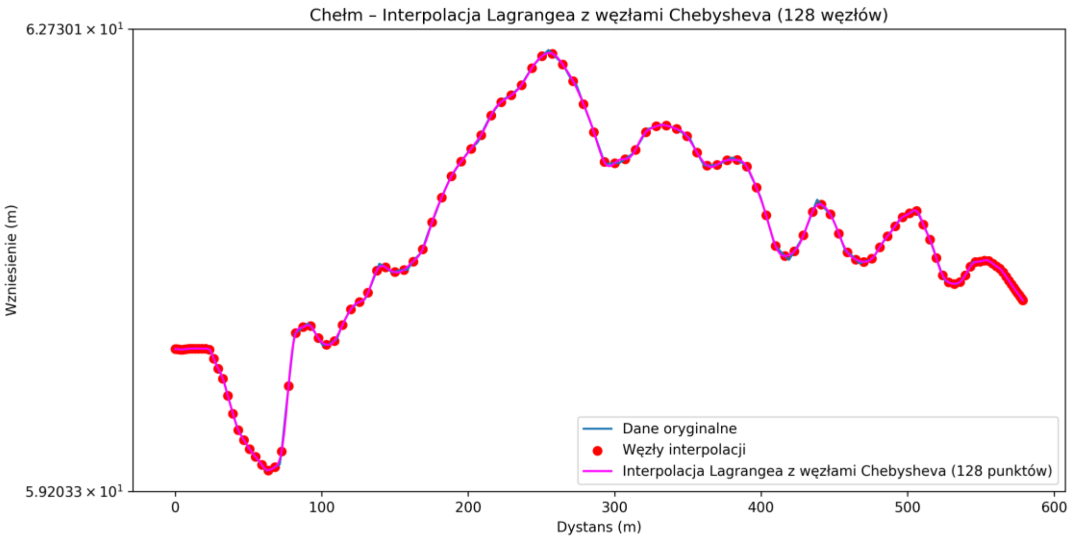
Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a z węzłami Czebyszewa dla Chełmu




Chełm – Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (32 węzłów)
$6.27524 \times 10^1$
$5.92023 \times 10^1$
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
0
100
200
300
400
500
600
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (32 punktów)


Chełm – Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (64 węzłów)
$6.27343 \times 10^1$
$5.91153 \times 10^1$
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
0
100
200
300
400
500
600
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (64 punktów)


Chełm – Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (128 węzłów)
$6.27301 \times 10^1$
$5.92033 \times 10^1$
Wzniesienie (m)
Dystans (m)
0
100
200
300
400
500
600
Dane oryginalne
Węzły interpolacji
Interpolacja Lagrangea z węzłami Chebysheva (128 punktów)

Jak można zauważyć analizując powyższe wyniki interpolacji Lagrange'a używając węzłów Czebyszewa, że wyniki są dużo lepsze i ta zmiana wpłynęła pozytywnie na wyniki aproksymacji. Dla małej liczby węzłów wynik nie przypomina danych podstawowych, ale zwiększając liczbę węzłów wynik aproksymacji odwzorowuje bardzo dobrze dane podstawowe. Użycie węzłów Czebyszewa zlikwidowało efekt Rungego dla interpolacji metodą Lagrange'a.

## 7 – Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych analiz metod interpolacji można stwierdzić, że metoda interpolacji wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia przynosiła zadowalające wyniki dla każdych danych, wraz ze wzrostem liczby węzłów aproksymacja była coraz dokładniejsza.

Interpolacja metodą Lagrange'a nie przyniosła oczekiwanych rezultatów, w przypadku równomiernego rozłożenia węzłów, ponieważ błąd aproksymacji na krańcach przedziału rósł, dla większej liczby węzłów. Wyraźnie widoczny był efekt Rungego, dopiero analiza dodatkowa z użyciem węzłów Czebyszewa, które są gęściej rozłożone na krańcach przedziału pozwoliły na zneutralizowanie efektu Rungego. W analizie dodatkowej wyniki są zadowalające i aproksymacja dobrze odworowuje dane podstawowe. Można zatem wyciągnąć wniosek, że w przypadku interpolacji wielomianowej rozmieszczenie węzłów ma kluczowe znaczenie.