МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА»
Институт компьютерных наук и технологического образования
Кафедра компьютерных технологий и электронного обучения

КУРСОВАЯ РАБОТА

МЕТОД ГАУССА-ЖОРДАНА

Направление подготовки: «Информатика и вычислительная техника»

Руководитель:
Доктор педагогических наук, профессор,
_______________ Власова Е.З.
« ___» ____________ 2019 г.
Автор работы студент
Группы ИВТ
_______________ С.А. Храмов
« ___» ____________ 2019 г.

Санкт-Петербург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Системы линейных уравнений (СЛАУ) используются во многих областях науки и техники и являются, пожалуй, наиболее часто встречающимися типами математических задач.

Целью данной курсовой работы является создание прикладной программы выполняющей решение систем линейных алгебраических уравнений методами Гаусса. Программа должна позволять производить расчеты для системы линейных алгебраических уравнений с последующим выводом результатов на экран монитора.

Актуальность работы заключается в необходимости создания удобного инструмента для быстрого решения системы линейных алгебраических уравнений методами Гаусса. Решение систем линейных алгебраических уравнения имеет большое значение, поскольку к нему сводится решение широкого круга сложных практических задач.

Курсовая работа состоит из трех частей: аналитической, алгоритмической и программной. В первой части документации будет представлена постановка задачи и обзор существующих программных средств для решения СЛАУ. Во второй части будет представлен метод решения СЛАУ и его компьютерная реализация. В третьей части рассмотрена структура программы, её назначение и инструкция пользователя и контрольный пример.

1. Аналитическая часть

1.1 Постановка задачи

Разработка программы для численного решения системы линейных уравнений AX = B методом Гаусса-Жордана.

Для разработки этой программы нам требуется решить следующие задачи:

- Разработать математическую модель
- На основе математической модели реализовать программный продукт
- Осуществить тестирование программы контрольным примером.

1.2 Программные средства для решения СЛАУ методом Гаусса-Жордана

Мной были проанализированы следующие программные средства:

- интернет-сервисы onlinemschool.com и math.semestr.ru

- системы компьютерной математики (математические пакеты) MathCAD и Wolfram Mathematica.

Системы компьютерной математики решают СЛАУ методом Гаусса-Жордана, но не лишены некоторых недостатков, среди которых особенно выделяется сложность использования математических пакетов без соответствующей подготовки и опыта их использования.

Интерфейс математического пакета MathCAD имеет большое количество кнопок и опций. Чтобы решить СЛАУ методом Гаусса-Жордана, используя MathCAD, необходимо тщательно изучить интерфейс программы, чтобы суметь быстро найти необходимые для этого инструменты.

Система компьютерной математики Wolfram Mathematica также имеет богатый интерфейс, но данная система имеет свой синтаксис, который используется для решения задач, без знаний которого невозможно решить СЛАУ.

Интернет-сервисы чаще всего не требуют специальных знаний для работы с СЛАУ, а также имеют понятные даже неопытным пользователям инструкции для решения поставленной задачи. Главным недостатком данного средства для решения СЛАУ является обилие навязчивой рекламы. Эту проблему представляется невозможным избежать, даже используя программное обеспечение для блокировки рекламы в браузере, также называемое блокираторами рекламы.

Интернет-сервис math.semestr.ru блокирует функцию вывода ответа при включенных блокираторах рекламы. При попытке решить СЛАУ, сайт демонстрирует сообщение о необходимости отключения блокираторов рекламы для вывода ответа на экран. После отключения блокиратора рекламы треть страницы заполняется рекламными баннерами, а функция вывода ответа на экран становится доступна пользователю.

Интернет-сервис onlinemschool.com позволяет решать задачи, при условии, что блокираторы рекламы в браузере включены. Реклама в этом интернет-сервисе не распознается блокираторами, из-за чего возникает лишняя нагрузка на интернет-трафик.

В виду необходимости иметь определенные навыки для использования математических пакетов, а также невозможности избежать рекламы в интернет-сервисах, актуальность создания собственного программного решения для решения СЛАУ методом Гаусса-Жордана.

2. Разработка проекта системы

2.1 Описание метода Гаусса-Жордана

Пусть дана система n-линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, записанная в матричной форме

$AX = B$

где A – матрица коэффициентов при неизвестных системы, B – вектор-столбец свободных членов, X – столбец неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Система в развернутом виде может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Пусть далее известно, что определитель матрицы A

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \Delta \neq 0 \qquad (3)$$

Требуется найти решение этой системы, т.е. совокупность чисел x_1, x_2, …, x_n, обращающих (1) в систему тождеств. В силу того, что $\Delta \neq 0$, такое решение существует и единственно (по теореме о единственности решения СЛАУ).

Рассмотрим расширенную прямоугольную матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных и свободных членов системы (1):

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & b_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \qquad (4)$$

При реализации метода Гаусса-Жордана элементы матрицы обнуляются как под, так и над главной диагональю. В результате данного подхода вектор решения будет находиться на месте вектора свободных членов, а на месте исходной матрицы будет единичная.

Матрица A преобразуется в эквивалентную ей верхнюю правую треугольную матрицу $\widetilde{A}$

Получим верхнюю правую треугольную матрицу

$\widetilde{A}_{в.п.} = R_в$

С единичными диагональными элементами.

Для этого:

1) Преобразование матрицы A начинаем с левого верхнего угла, т.е. с углового элемента a_{11} по схеме «сверху вниз и слева направо»
2) Двигаться сверху вниз, под диагональю в каждом i-м столбце будем получать нули;
3) Движение слева направо, включая столбец свободных членов, обеспечивает эквивалентные преобразования всех элементов строки, начиная от i-го столбца

1. Для получения нулевых элементов под диагональю 1-го столбца первоначально делим все элементы 1-ой строки (i=1) на диагональный элемент a_{11} (он называется ведущим элементом), при условии, что $a_{11} \neq 0$:

$$\tilde{a}_{1j} = {}^{a_{1j}}/_{a_{11}} \qquad (5)$$

Где

$$j = i \div n$$

2. После этого из каждой последующей k-ой строчки, начиная со второй, вычитается преобразованная первая строка, умноженная на соответствующий коэффициент преобразования a_{k1}, взятый из 1-ого столбца:

$$\tilde{a}_{kj} = a_{kj} - \tilde{a}_{1j} * a_{k1} \qquad (6)$$

Где

$$j = i \div n$$

$$k = 2 \div n$$

При j=1 элементы $\tilde{a}_{k1}$ будут обращаться в ноль. Докажем это методом подстановки:

$$\tilde{a}_{k1} = a_{k1} - \tilde{a}_{11} * a_{k1} = a_{k1} - \frac{a_{11}}{a_{11}} a_{k1} = 0 \qquad (7)$$

При последовательном исключении неизвестных в первом столбце первая, т.е. i-ая строчка будет исчисляться n-1 раз в паре с остальными строками матрицы A или в общем виде (n-i) раз

В каждой паре преобразуемых строк с номерами i и k верхнюю i-ую строку по которой ведется управление преобразованием принято называть ведущей строкой, а все остальные нижние преобразуемые строки называют ведомыми.

Диагональный элемент a_{ii} в i-ой строки и i-м столбце называют ведущими элементами, а остальные элементы i-го столбца, т.е. a_{ki} называются коэффициентами преобразования или коэффициентами кратности .

Описанный алгоритм формирования нулей под диагональю в 1-ом столбце повторяется еще n-2 раз

Для получения нулей во 2-ом столбце:

1) Ведущая строка – вторая (i=2);
2) Ведущий элемент - $\tilde{a}_{22}$;
3) Коэффициенты преобразования – элементы второго столбца $\tilde{a}_{k2}$ начиная с 3-ей строки

На месте этих коэффициентов в преобразованной матрице будут получаться нули.

В общем виде для получения нулевых поддиагональных элементов в i-ом столбце, следует все элементы i-ой ведущей строки разделить на диагональный ведущий элемент a_{ii}, а затем из элементов каждой последующей k-ой ведомой строки $[k = (i+1) \div n]$ вычесть в соответствие со столбцом элементы преобразованной i-й ведущей строки, кратные коэффициенту преобразования строки a_{ki}, что математически можно записать в виде следующих рекуррентных формул:

$$\tilde{a}_{ij} = {}^{a_{ij}}/_{a_{ii}} \qquad (8)$$

$$\tilde{a}_{kj} = a_{kj} - \tilde{a}_{ij} * a_{ki}$$

Где

$$i = 1 \div (n-1)$$

$$k = (i+1) \div n$$

$$j = i \div (n+1)$$

Где переменная $\tilde{a}$ означает текущее значение, a – предыдущее значение коэффициента.

При j=i, поддиагональные элементы $\tilde{a}_{ki}$ обращаются в нуль ($\tilde{a}_{ki}$=0), а диагональные элементы будут получаться равными единице ($\tilde{a}_{ii}$=1), кроме $\tilde{a}_{nn}$.

В результата счета по рассмотренному алгоритму матрица А преобразуется в верхнюю правую треугольную матрицу Ã с единичными диагональными элементами:

$$
\begin{gathered}
x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{a}_{1n+1} \\
x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{a}_{2n+1} \\
x_3 + \ldots + \tilde{a}_{3n}x_n = \tilde{a}_{3n+1} \\
\ldots \\
\tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{a}_{nn+1}
\end{gathered} \qquad (9)
$$

Где вектор $\widetilde{\mathrm{A}}_{n+1}$ является преобразованным вектор-столбцом свободных членов $\widetilde{\mathrm{B}}$.

В сокращенной записи полученная треугольная система уравнений имеет вид (без учета последнего уравнения)

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{a}_{ij} * x_j = \tilde{a}_{i(n+1)} \qquad (10)$$

Где

$$i = 1 \div (n-1)$$

На этом заканчивается 1-ый этап вычислений алгоритма метода Гаусса-Жордана.

Алгоритм образования нулей над главной диагональю.

Используем формулу

$$\tilde{a}_{kj} = a_{kj} - \tilde{a}_{ij} * a_{ki} \qquad (11)$$

Где

$$i = n \div 1$$

$$k = 1 \div (i-1)$$

$$j = 1 \div n$$

2.2 Компьютерная реализация

В качестве языка программирования была выбрана интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio, а в качестве языка программирования - C#.

Среди современных продуктов для разработки, Microsoft Visual Studio является одним из наиболее распространенных. Популярность этой среды объясняется тем, что Visual Studio включает в себя компиляторы, средства выполнения кода, графические конструкторы и многие другие функции для упрощения процесса разработки программного обеспечения.

C# - это язык программирования, предназначенный для разработки самых разнообразных приложений, предназначенных для выполнения в среде .NET Framework. Благодаря множеству нововведений C# обеспечивает возможность быстрой разработки приложений, но при этом сохраняет выразительность и элегантность, присущую языкам C.

C# широко используется во всех областях IT-сферы, программирование на этом языке очень актуально в наши дни. Сегодня по всему миру существует множество компаний, которые занимаются разработкой приложений именно на языке C#.

Можно выделить следующие преимущества языка программирования C#:

1. Подлинная объектная ориентированность (всякая языковая сущность претендует на то, чтобы быть объектом)

2. Компонентно-ориентированное программирование

3. Безопасный (по сравнению с языками C и C++) код

4. Унифицированная система типизации

5. Поддержка событийно-ориентированного программирования

6. Базовый язык для создания приложений в среде .NET

7. Объединение лучших идей современных языков программирования: Java, C++, Visual Basic и др.

3. Реализация проекта

3.1 Требования к программе

Программа работает на ПК под управлением ОС Windows 95/98/Me или Windows NT/2000/XP/2003/Vista/7/8/10. Работа всех компонентов под управлением Windows 95 возможна только, начиная с версии Windows 95 OSR2 (v.4.00.950B). Минимальные требования к конфигурации ПК совпадают с таковыми для соответствующих ОС, однако корректная работа программы возможна только при наличии не менее 32 Мб оперативной памяти, установленной на компьютере. ПК должен полностью поддерживать систему команд процессора i80386.

Следует установить все рекомендуемые производителем ОС критические обновления. Если поддержка ОС производителем прекращена, рекомендуется перейти на более современную версию системы.

Размер свободного дискового пространства не менее 600 Кбайт (для выполняемого модуля программы).

3.2 Описание модульных структур

Программа состоит из трех модулей: главное меню(Form1.cs) - отвечает за ввод матрицы, методы(Form2.cs) и вывод(Form2.cs).

Структура программы представлена на рисунке:

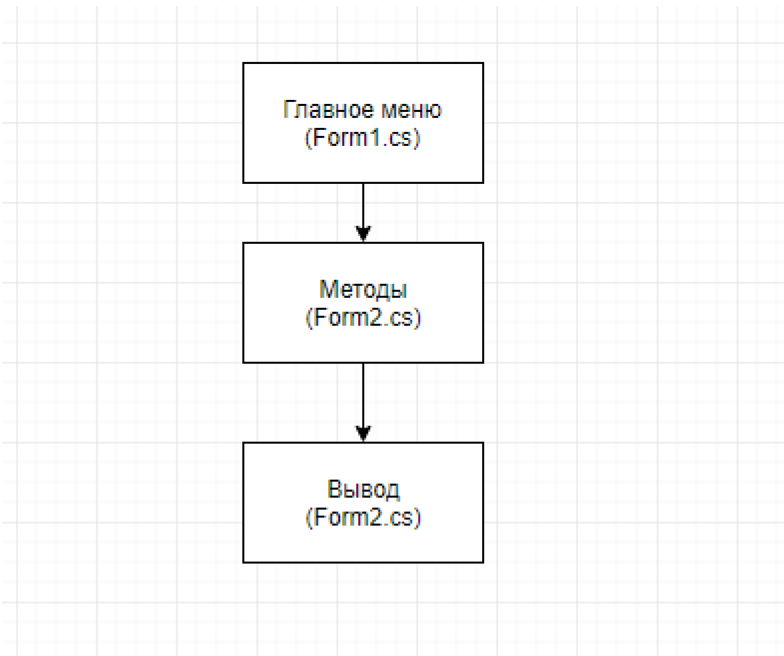

Рисунок 3.1

Модуль “Главное меню”:

Процедуры:

1) private void refresh_matrix() - процедура, удаляющая матрицу на поле
2) private void button1_Click(object sender, EventArgs e) - процедура кнопки “Создать”. Создает матрицу по указанным в ComboBox’ах параметрам.
3) private void button2_Click(object sender, EventArgs e) - процедура кнопки “Решить” - перенаправляет на форму с решением, перед этим проверяет подходит ли матрица под выбранный метод.
4) private void button3_Click(object sender, EventArgs e) - процедура кнопки “Удалить”. Удаляет введенную пользователем матрицу.

Модуль “Методы”:

Процедуры:

1) private void gaus_1(MyArray<double> matrix) - Процедура для метода Гаусса последовательного исключения с обнулением матрицы по столбцам - принимает в качестве аргумента пользовательскую структуру(двумерный массив) типа double.
2) private void gaus_2(MyArray<double> matrix) - Процедура для метода оптимального исключения Гаусса - принимает в качестве аргумента пользовательскую структуру(двумерный массив) типа double.
3) private void gaus_3(MyArray<double> matrix) - Процедура для метода ГМПИ с поиском элемента по всей матрице - принимает в качестве аргумента пользовательскую структуру(двумерный массив) типа double.
4) private void gaus_4(MyArray<double> matrix) - Процедура для метода Гаусса-Жордана - принимает в качестве аргумента пользовательскую структуру(двумерный массив) типа double.

Модуль “Вывод”:

Процедуры:

1) private void text_create() - процедура для печати матрицы.
2) private void button1_Click(object sender, EventArgs e) - процедура для сохранения хода решения в файл.

3.3 Описание интерфейса программы

Для запуска необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1) Нажать кнопку «Пуск» -> «Выполнить»-> «Обзор»;
2) Найти файл с именем СЛАУ.EXE и установить на него указатель;
3) Нажать «Ввести» -> «ОК».

После запуска на экране компьютера появляется главное окно программы :

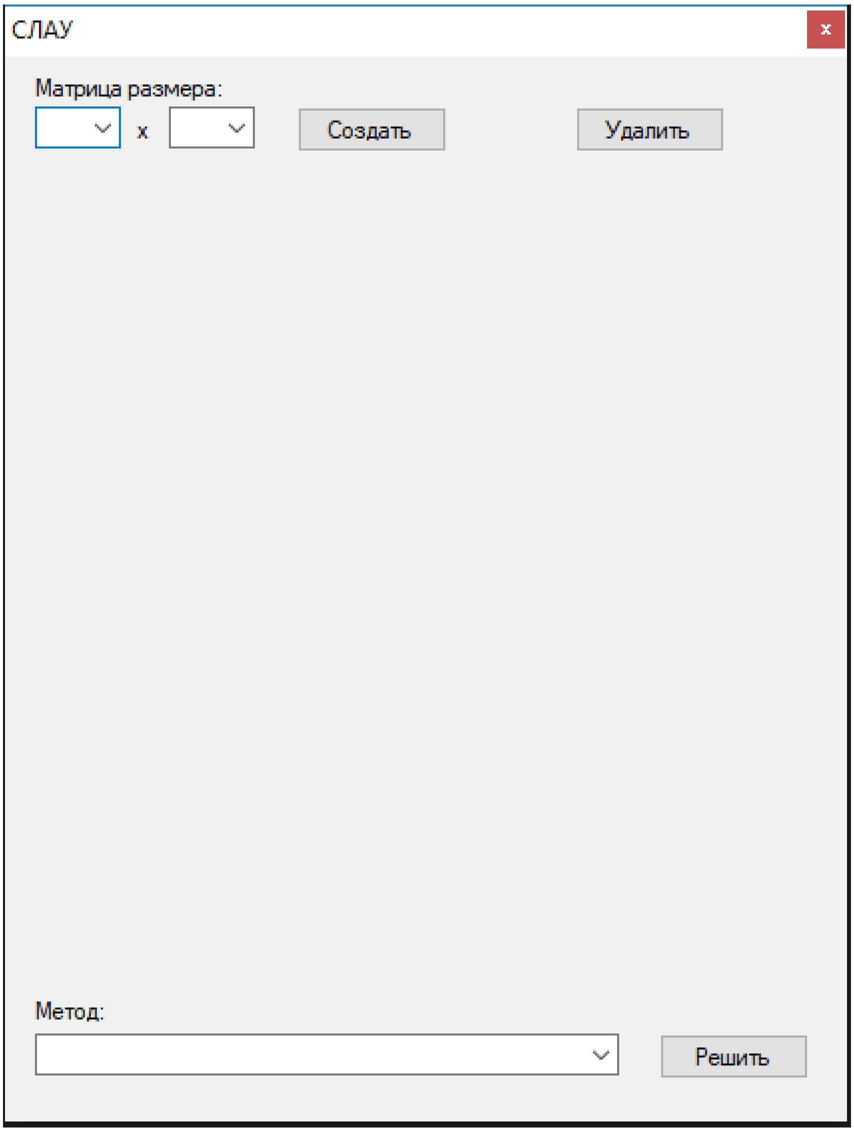

Рисунок 3.2

Состав окна:

Поле выбора размера матрицы, расположенные в правой верхней части окна:

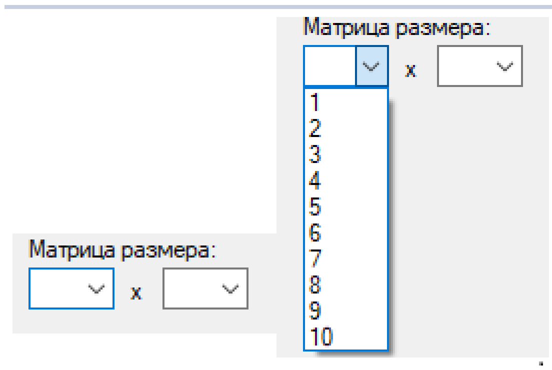

Рисунок 3.3

Кнопки “Создать” и “Удалить”, находящиеся в верхней части:

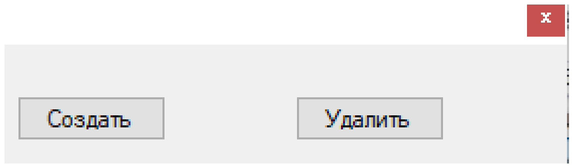

Рисунок 3.4

Поле выбора метода, находящиеся в правом нижнем углу:

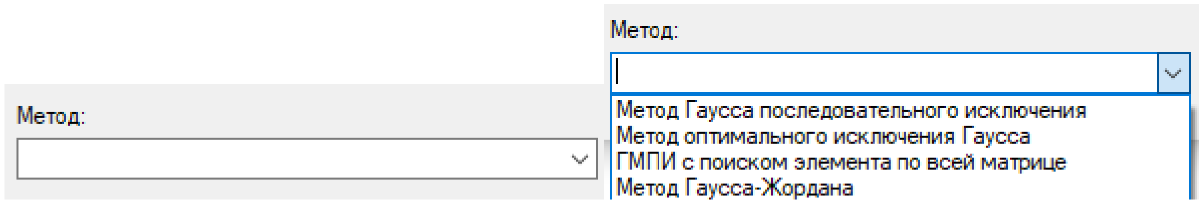

Рисунок 3.5

Кнопка “Решить”, находящаяся в левом нижнем углу:

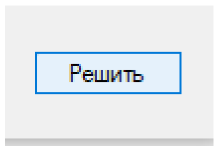

Рисунок 3.6

Кнопка выхода из программы, находящаяся в правом верхнем углу:

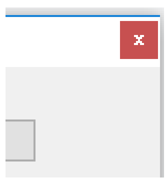

Рисунок 3.7

При нажатии на кнопку “Создать”, при условии, что поля выбора размера матрицы, появятся поля ввода значений матрицы:

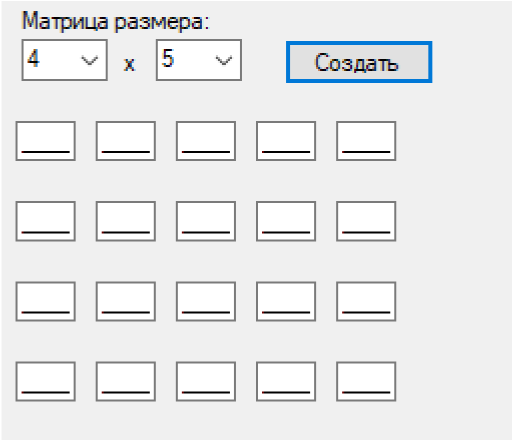

Рисунок 3.8

При нажатии на кнопку решить, при условии, что поля ввода значений матрицы заполнены корректно и выбран нужный метод, откроется новое окно “РЕШЕНИЕ СЛАУ”:

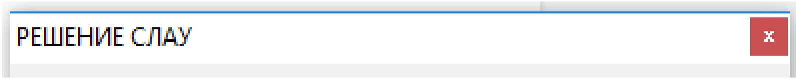

Рисунок 3.9

При нажатии на кнопку “Сохранить” (Рисунок 3.10) откроется окно “Сохранение” (Рисунок 3.11), в котором предложено ввести имя сохраняемого файла, по умолчанию он сохраняется в формате .txt (Рисунок 3.12) и директорию, в которую он будет сохранен (Рисунок 3.13):

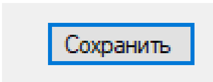

Рисунок 3.10

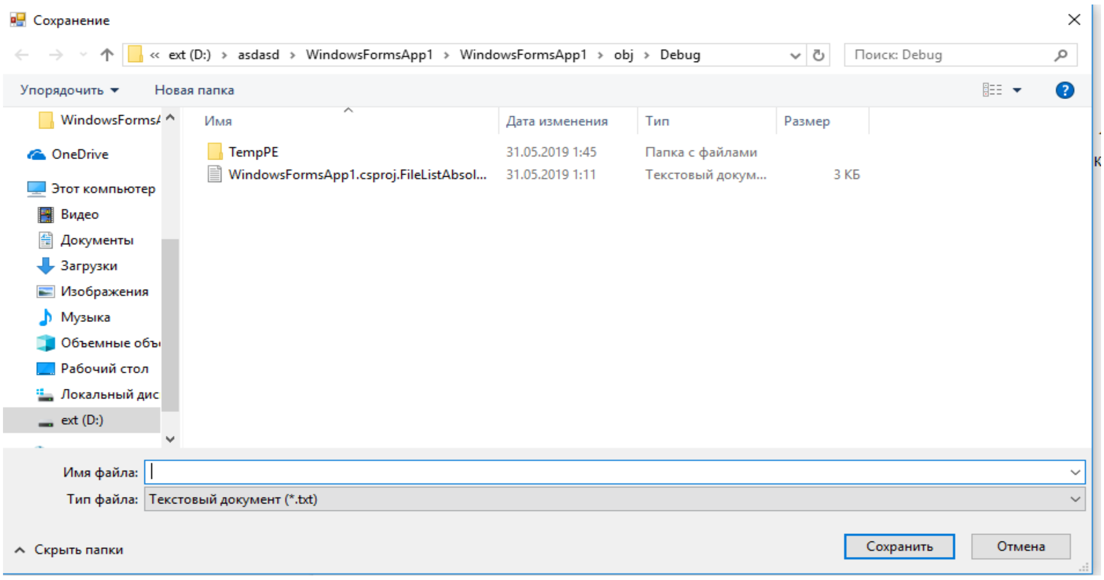

Рисунок 3.11

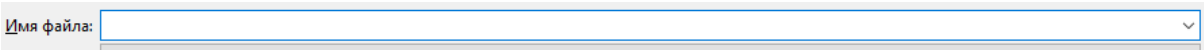

Рисунок 3.12

Рисунок 3.13

При нажатии на кнопку сохранить(Рисунок 3.13), файл будет сохранен на жесткий диск компьютера

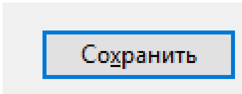

Рисунок 3.13

3.4 Контрольный пример

Задание:

Решить матрицу методом Гаусса-Жордана:

1	1	1	0
4	2	1	1
9	3	1	3

Рисунок 3. 14

Вводим данные в программу:

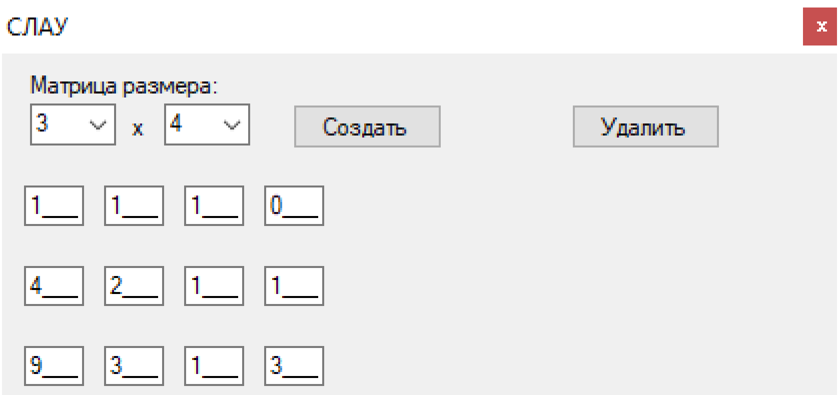

Рисунок 3.15

Выбираем из списка методов «Метод Гаусса-Жордана»:

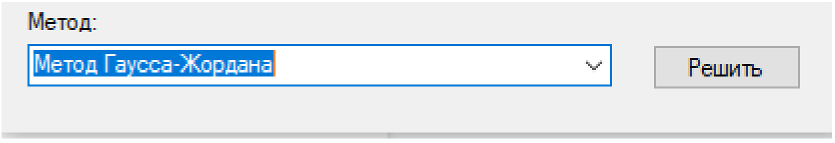

Рисунок 3.16

Нажимаем на кнопку «Решить».

Получаем решение:

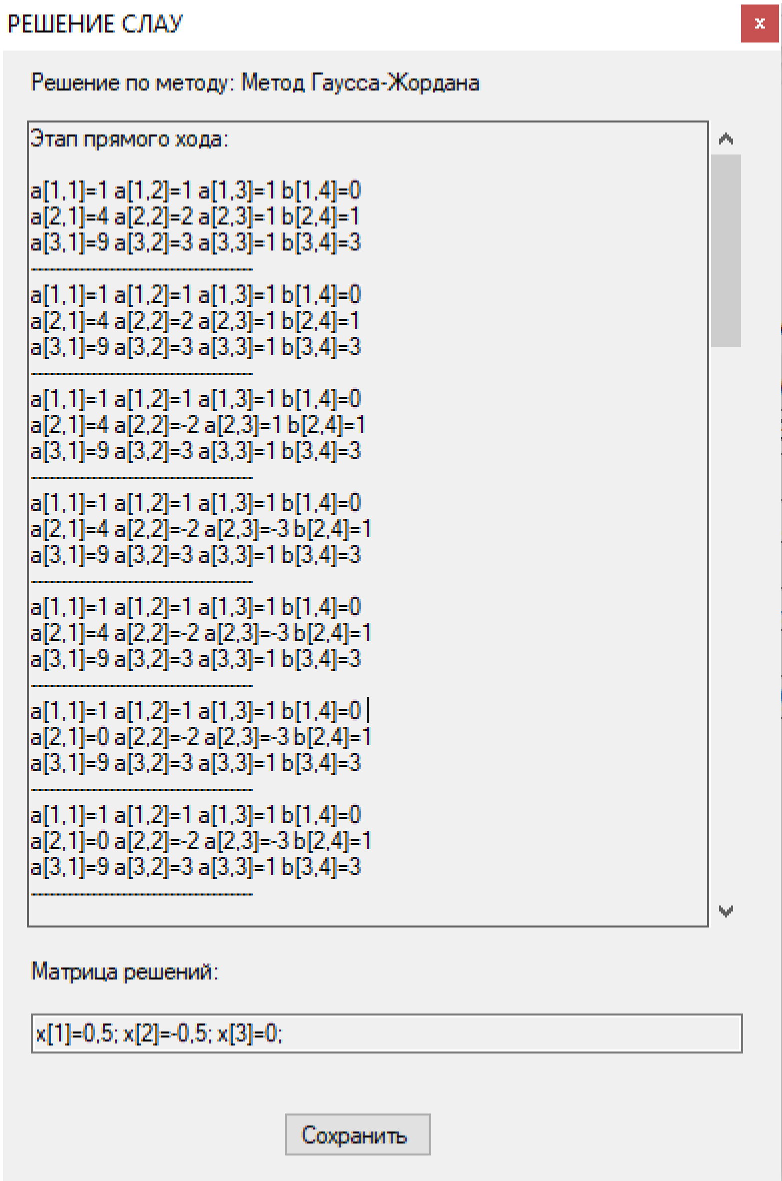

Рисунок 3.17

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во время выполнения курсовой работы были выполнены следующие задачи:

- Была успешно разработана программа для численного решения СЛАУ методом Гаусса-Жордана;
- Была разработана математическая модель;
- На основе разработанной модели был реализован программный продукт;
- Было осуществлено тестирование программы контрольными примерами.

ЛИТЕРАТУРА

Подбельский В.В. Базовый курс Язык C# Решение задач / Подбельский В.В. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2015, - 544 с.

Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К – Пер. с англ. М.: Мир, 1980. – 177с.

Бахвалов Н. Численные методы / Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Г. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 632 с.

Самарский А.А. Численные методы: Учебное пособие для ВУЗов. / Самарский А.А., Гулин А.В. – М.: Наука, 1989. – 432с.

Perkins B. Beginning C# 7 Programming with Visual Studio 2017. / Perkins B., Hammer J.V., Reid J.D. – Wrox, 2017. – 740 с.

Skeet J. C# in Depth (4th) / Skeet J. – Manning, 2019. – 296 с.

Абахари Д. C# 7.0. Карманный справочник / Абахари Д., Албахари Б. – Вильямс, 2017. – 157 с.

Троелсен Э. C# и платформа .NET. Библиотека программиста / Троелсен Э. – Питер, 2004. – 248 с.

Прайс М.Дж. C# 7 и .NET Core. Кросс-платформенная разработка для профессионалов / Прайс М.Дж – Питер , 2018. – 456 с.

Solis D. Illustrated C# 7, 5th Edition / Solis D., Schrotenboer C – Apress, 2018. – 616 с.