

Задача №16

Лещенко Сергей 411

31 мая 2023

1 Постановка задачи

Для системы уравнений теории упругости в единичном квадрате

$$\begin{cases} -\nabla u - \Delta \operatorname{div} u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u = (u_1, u_2) \end{cases}$$

построить разностную схему второго порядка аппроксимации и решить полученную ЛАУ при помощи метода Рундсона с переобуславливателем.

2 Численное решение

2.1 Сетка

В данной области

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

рассмотрим равномерную сетку

$$\omega_h = \{x_i = ih, y_j = jh, i, j = 0, 1, 2, \dots, N\}$$

с шагом $h = \frac{1}{N}$, где N - число точек.

2.2 Разностная схема

Распишем исходную систему уравнений, положив $f = (f_1, f_2)$. Тогда:

$$-\nabla u - \Delta \operatorname{div} u = - \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) =$$

$$= - \left(2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) = (f_1, f_2)$$

Решение разностного уравнения в точке (x_i, y_j) обозначим $u_{i,j}$.

Так как надо аппроксимировать вторые производные, то воспользуемся трехточечным шаблоном, состоящим из узлов. Далее, для удобства, полагаем, что $u_1(x_i, y_j) = u_{i,j}$, $u_2(x_i, y_j) = v_{i,j}$. Получим:

$$(L_{xx}u)_{i,j} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$(L_{yy}u)_{i,j} := \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

$$(L_{xy}u)_{i,j} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \simeq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2}$$

Для v получаем аналогичную аппроксимацию.

Откуда получаем соответствующую разностную схему в узле (x_i, y_j) :

$$\begin{cases} f_1(x_i, y_j) = -\frac{2}{h^2}u_{i+1,j} + \frac{6}{h^2}u_{i,j} - \frac{2}{h^2}u_{i-1,j} - \frac{1}{h^2}u_{i,j+1} - \frac{1}{h^2}u_{i,j-1} - \\ - \frac{1}{4h^2}v_{i+1,j+1} + \frac{1}{4h^2}v_{i+1,j-1} + \frac{1}{4h^2}v_{i-1,j+1} - \frac{1}{4h^2}v_{i-1,j-1} \\ f_2(x_i, y_j) = -\frac{2}{h^2}v_{i,j+1} + \frac{6}{h^2}v_{i,j} - \frac{2}{h^2}v_{i,j-1} - \frac{1}{h^2}v_{i+1,j} - \frac{1}{h^2}v_{i-1,j} - \\ - \frac{1}{4h^2}u_{i+1,j+1} + \frac{1}{4h^2}u_{i-1,j+1} + \frac{1}{4h^2}u_{i+1,j-1} - \frac{1}{4h^2}u_{i-1,j-1} \end{cases}$$

2.3 Метод решения

Решение задачи сводится к решению СЛАУ вида $Ax = f$ методом Рундсона, где коэффициенты матрицы A получены из уравнений разностной схемы.

Представим матрицу A в виде $A = L + R + D$, где D - диагональная матрица, L , R - левая нижняя и правая верхняя с нулевыми диагоналями матрицы соответственно. Для простоты, в качестве предобусловителя B возьмем D . Положим, что начальное приближенное решение системы x^0 - нулевой вектор.

Будем последовательно вычислять

$$x^{k+1} = (1 - \tau)x^k + \tau D^{-1}(f - (L + R)x^k)$$

до тех пор, пока $\|x^{k+1} - x^k\|_2 < \epsilon ps$.

3 Точное решение

В качестве точного решения возьмем достаточно гладкие функции

$$u_1 = x^2 y^2 (x - 1)(y - 1),$$

$$u_2 = (x - 1)(y - 1) \sin x \sin y.$$

Далее вычислим все вторые производные и найдем из исходной системы f_1, f_2 . В качестве $\|error\| := \|u - u_r\|_2$, где u_r - решение, полученное итерационно.

4 Таблица результатов

N	τ	$\ error\ $	$\frac{\ error_{i-1}\ }{\ error_i\ }$
5	0.97	0.000896168	—
10	0.97	0.000498475	1.82
20	0.97	0.00025531	1.95
40	0.97	0.000129321	1.97
80	0.97	6.96478e-05	1.91

Список литературы

- [1] Разностные методы для эллиптических уравнений. А. А. Самарский, В. Б. Андреев.
Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976.