Mathematik 1

Skript zum Modul Mathematik 1 für INF, SWT und MSV

Simon König

Inhaltsverzeichnis

1

Analysis

1: Konvergenz in metrischen Räumen

1.1 Metrische Räume

Um Konvergenz (beliebig genaue Approximation) beschreiben zu können, benötigen wir den Begriff des Abstands.

Definition 1.1: Metrik, metrischer Raum

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik (auch Abstandsfunktion), wenn sie für alle $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften hat.

M1 $\varrho(x, y) \geq 0$ und es gilt $\varrho(x, y) = 0$ gdw. $x = y$

M2 $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, d.h. ϱ ist eine symmetrische Funktion

M3 $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Eine Menge X versehen mit einer Metrik nennen wir metrischen Raum.

Beispiele:

- $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) = |x - y|$
- $X = \mathbb{R}^n$, in $\mathbb{R}^n$ ist der *euklidische Abstand* gegeben durch

$$\begin{aligned}\varrho(x, y) &= \varrho\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\end{aligned}$$

  vgl. dem Satz von Pythagoras

- Auf jeder nichtleeren Menge kann man die *diskrete Metrik* einführen:

$$\mathrm{d}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

- Ist V ein *euklidischer Vektorraum*, dann ist durch $\|v\| = \sqrt{<x, y>}$ eine *Norm* gegeben,falls für jede Norm $\|\cdot\|$ liefert $\varrho(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik. Mit anderen Worten, jeder normierte Vektorraum ist ein metrischer Raum.
- In der *Codierungstheorie* führt man auf der Menge der n-stelligen Binärwörter

$$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \{0, 1\}\}$$

den *Hemmingabstand* ein:

$$\varrho(x, y) = \text{ Anzahl von Stellen an denen sich } x \text{ und } y \text{ unterscheiden.}$$

Z.B. $\varrho((0,0,1,1),(0,0,1,0)) = 1$. Anwendung: Fehlerkorrigierende Codes.

Mit Hilfe der Metrik führen wir den Begriff der Kugelumgebung eines Punktes in einem metrischen Raum ein.

Definition 1.2: Kugelumgebung

Sei ein Punkt $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl. Unter der Kugelumgebung von x_0 mit Radius ϵ um den Mittelpunkt x_0 versteht man die Menge

$$K_\epsilon(x_0) := \{x \in X \mid \varrho(x, x_0) < \epsilon\}$$

Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik ist $K_\epsilon(x_0)$ die *offene Kreisscheibe* (das Innere der Kreisscheibe) um x_0 mit Radius ϵ. (Punkte auf dem Kreis sind nicht in K_ϵ!)

Definition 1.3: Offene und abgeschlossene Mengen

Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen*, falls zu jedem $x_0 \in U$ eine Kugelumgebung mit $\epsilon > 0$ existiert, die ganz in U enthalten ist.
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}$ und $\varrho(x, y) = |x - y|$.
Dann ist das Intervall

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

im obigen Sinne offen.
Das Intervall

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ist abgeschlossen.
Das Intervall

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

ist weder abgeschlossen noch offen.

1.2 Konvergenz

Sei X ein metrischer Raum.

Definition 1.4: Folgen

Eine *Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$, so dass jedem Element $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n \in X$ zugeordnet wird.
Wir schreiben oft auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)$ oder auch einfach a_n für eine Folge.
Die Elemente a_n werden auch die Glieder der Folge oder Folgenglieder genannt.

Beispiel: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $a_n = \frac{1}{n}$. Dann ist (a_n) die Folge der Kehrwerte der natürlichen Zahlen.
Jeder weiß, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen Null geht, aber was bedeutet das eigentlich genau?

Definition 1.5: Konvergenz einer Folge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem metrischen Raum X konvergiert gegen das Element $a \in X$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$a_n \in K_\epsilon(a) \quad \forall n \geq n_0$$

In diesem Fall heißt a der Grenzwert oder auch Limes der Folge (a_n) und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n),\ \lim(a_n),\ a_n \to a$$

1.2.1 Alternative Beschreibung der Konvergenz

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X konvergiert gegen $a \in X$, falls gilt:

  $$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ :\ \varrho(a_n, a) < \epsilon$$

- Eher eine Umschreibung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \Leftrightarrow \varrho(a_n, a) \to 0$

Beispiele:

- Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ im metrischen Raum $\mathbb{R}$ konvergiert gegen 0. Dies lässt sich anhand der Definition beweisen:
  Sei $\epsilon > 0$
  Zu zeigen ist, dass es einen Index (eine natürliche Zahl) $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass:

  $$\varrho(a_n, 0) = \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \epsilon$$

  für alle $n \geq n_0$ gilt. $1/n < \epsilon$ ist äquivalent zu $n > 1/\epsilon$.
  Wir wählen daher n_0 als irgendeine natürliche Zahl, die größer als $1/\epsilon$ ist.
  Dann gilt $|1/n - 0| = 1/n < \epsilon$ $\square$

- Eine Folge muss nicht konvergieren, z.B. hat $b_n = n$ *keinen* Grenzwert. Man nennt die Folge (b_n) *divergent*.

- Sei $X = \mathbb{R}$ und die Folge (c_n) definiert durch $c_n = (-1)^n$. Diese Folge hat ebenso keinen Grenzwert, ist also divergent. Man nennt die Folge (c_n) außerdem *alternierend*.

Manchmal (nicht in dieser Vorlesung) sagt man auch $b_n = n \to \infty$ (uneigentliche Konvergenz)

Bemerkung: Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum konvergiert genau dann gegen a, wenn $\varrho(a_n, a) \to 0$. Es muss aber nicht gelten, dass $\varrho(a_n, a)$ monoton gegen Null geht.
Zum Beispiel konvergiert die Folge

$$a_n = \frac{1}{n + 1 + (-1)^n} \rightsquigarrow 1, 1/4, 1/3, 1/6, 1/5, 1/8, 1/7, \ldots$$

gegen Null.

Satz 1.1: Eindeutigkeit des Grenzwerts

Der Grenzwert einer konvergenten Folge in einem metrischen Raum ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und seien $a, b \in X$ Grenzwerte von (a_n). Wir nehmen $a \neq b$ an.
Sei $\delta = \varrho(a,b)$ der Abstand der beiden Punkte a und b. Wir zeigen: $K_{\delta/2}(a) \cap K_{\delta/2}(b) = \varnothing$.
Angenommen, es läge ein Punkt P in dieser Schnittmenge, dann gilt:

$$\varrho(a,P) < \frac{\delta}{2} \text{ und } \varrho(b,P) < \frac{\delta}{2}$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$\varrho(a,b) \leq \varrho(a,P) + \varrho(b,P) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Widerspruch wegen $\varrho(a,b) = \delta$.
Wegen $(a_n) \to a$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \in K_{\delta/2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
Damit gilt aber da $K_{\delta/2}(a)$ und $K_{\delta/2}(b)$ disjunkt sind, dass $a_n \notin K_{\delta/2}(b)$ für alle $n \geq n_0$.
Widerspruch zu $a_n \to b$

Definition 1.6: Beschränktheit von Folgen

Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum X ist beschränkt, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $R > 0$ gibt, so dass $a_n \in K_R(x_0)$ für alle $n \in N$ gilt.

Satz 1.2: Konvergenz und Beschränktheit

Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis:

Sei a der Grenzwert der Folge und $r > 0$ eine positive Zahl.
Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ $a_n \in K_r(a)$ gilt.
Es gibt aber nur endlich viele Indizes $(1, \ldots, n_0 - 1)$, deren Folgenglieder eventuell außerhalb dieser Kugelumgebung $K_r(a)$ liegen.
Wähle also am Ende die Schranke R als das Maximum $R = \max(\varrho(a_1,a), \ldots, \varrho(a_{n_0-1},a), r)$. Damit liegt a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ unter der Schranke R.

2: Zahlenfolgen und Zahlenreihen

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Spezialfall, dass der metrische Raum X gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist. Wir verwenden dabei die Metrik zwischen zwei Zahlen $\varrho(x, y) = |x - y|$. Wir sprechen in diesem Fall von Zahlenfolgen.

2.1 Rechnen mit Grenzwerten

Satz 2.1:

Seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \text{ und } y := \lim_{n\to\infty} y_n$$

für die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq y_n$, dann folgt daraus $x \leq y$.

Beweis:

Angenommen $x > y$:
Wähle $\epsilon = \frac{x-y}{2}$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x - x_n| < \epsilon \text{ und } |y_n - y| < \epsilon$$

gilt. Es folgt daraus

$$x - x_n < \epsilon \Leftrightarrow x - \epsilon < x_n \text{ und } y - y_n < \epsilon \Leftrightarrow y_n < \epsilon + y$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} x - \epsilon < x_n \leq y_n < y + \epsilon \\ x - y < 2\epsilon \end{aligned}$$

Widerspruch!

Satz 2.2: Rechenregeln für Limites

Seien $(x_n), (y_n)$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei außerdem $\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann gilt

- $\left|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
- und falls $x_n \geq 0$, gilt mit $p \in \mathbb{N}$:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^p$

Beweis:

Nur für die Aussage über die Addition:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_m) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_m) = x + y$ zu zeigen, wobei $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gilt.
Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$.
Dann gilt mit der Dreiecksungleichung:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

2.2 Konvergenzkriterien

Satz 2.3: Einschließungskriterium

Seien $(x_n), (y_n), (z_n)$ reelle Zahlenfolgen. Weiterhin gelte $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
Dann konvergiert auch z_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < \epsilon$ und $|y_n - y| < \epsilon$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$:

$$|x - z_n| = \begin{cases} z_n - x \leq y_n - x \leq |y_n - x| < \epsilon, \text{ falls } x < z_n \\ x - z_n \leq x - x_n \leq |x - x_n| < \epsilon, \text{ falls } x \leq z_n \end{cases}$$

□

Lemma 2.1:

Es gilt: $(1+x)^n > \frac{n^2}{4}x^2$, für $x > 0, n \geq 2$

Beweis:

Für $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i > \binom{n}{2} x^2 &= \frac{n(n+1)}{2} x^2 \\
&= \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) x^2 \\
&= \left(\frac{n^2}{4} + \underbrace{\frac{n^2-2n}{4}}_{\geq 0}\right) x^2 \\
&\geq \frac{n^2}{4} x^2
\end{aligned}$$

Beispiel: zur Berechnung von Grenzwerten mit dem Einschließungskriterium.

- Mit Hilfe dieser Ungleichung zeigen wir, dass folgende Aussage gilt:

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

  Wir setzen in die Formel aus Abschnitt 2.2 $x = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ ein.
  Wir erhalten

  $$\begin{aligned}
  n &> \frac{n^2}{4} \cdot (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \\
  \sqrt{n} &> \frac{n}{2}(\sqrt[n]{n} - 1) \\
  \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 &> \sqrt[n]{n} > 1
  \end{aligned}$$

  Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 = 1$ und mit dem Einschließungskriterium folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

- Ähnlich kann man zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 1$ ist.

  Dazu setzen wir in die Formel von oben $x = \sqrt[n]{a} - 1$ ein.

  $$\begin{aligned}
  a &> \frac{n^2}{4} \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)^2 \\
  \sqrt{a} &> \frac{n}{2} \cdot (\sqrt[n]{a} - 1) \\
  \frac{2\sqrt{a}}{n} + 1 &> \sqrt[n]{a} > 1
  \end{aligned}$$

  Es gilt wieder: $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{a}}{n} + 1 = 1$, daraus folgt die Behauptung.

Bemerung: Gilt auch für $0 < a \leq 1$.

2.2.1 Monotone Folgen

Definition 2.1:

Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

streng monoton wachsend , falls $x_n < x_{n+1}$

streng monoton fallend , falls $x_n > x_{n+1}$

monoton wachsend , falls $x_n \leq x_{n+1}$

monoton fallend , falls $x_n \geq x_{n+1}$

jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2.4:

Beschränkte, monotone Folgen sind konvergent.

Beweis:

Wir zeigen die Aussage für monoton wachsende Folgen:
Gelte also $x_n \geq x_{n+1} < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert auch eine kleinste obere Schranke

$$c_{\text{min}} := \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

(Allgemein ist das Supremum $\sup M$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ von reellen Zahlen die kleinste reelle Zahl s für die gilt: $s \geq m \quad \forall m \in M$.
Gibt es keine obere Schranke, dann existiert auch kein Supremum. Es folgt aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen, dass jede beschränkte Menge von reellen Zahlen ein Supremum besitzt.)

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $c_{\text{min}} - \epsilon < x_{n_0}$. Sonst wäre c_{min} nicht die kleinste obere Schranke.
Dann gilt aber wegen der Monotonie der Folge, dass $c_{\text{min}} - \epsilon < x_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt $|c_{\text{min}} - x_n| = c_{\text{min}} - x_n < \epsilon$.

Definition 2.2: Teilfolgen

Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen ($n_k \in \mathbb{N}$) und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum, $a_n \in X$. Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der Folge (a_n)

Beispiele: Sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist a_n divergent, aber die Teilfolgen

- $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$
- $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$

sind konvergent, sogar konstant. Andere Teilfolgen sind z.B. $n_k = 3k$ (ebenfalls divergent).

Definition 2.3: Häufungspunkt

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder auch komplexer Zahlen. Ein Element $a \in X$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n), falls es eine gegen a konvergente Teilfolge von (a_n) gibt.

Beispiel: -1 und 1 sind die Häufungspunkte von $a_n = (-1)^n$.

Bemerkung: Es gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte, reelle oder komplexe Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge.

2.2.2 Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Wir kommen nun zum Cauchy'sches Konvergenzkriterium für Folgen. Im Unterschied zur Definition von Konvergenz, in der der Grenzwert vorkommt, ein „inneres“Kriterium für Konvergenz, d.h. um dieses Kriterium für Konvergenz entscheiden zu können, muss man den Grenzwert nicht kennen.

Satz 2.5: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Eine Folge reeller bzw. komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine sog. Cauchyfolge ist. D.h. falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

gilt. (Der Abstand zweier Folgenglieder ist kleiner als Epsilon)

Beweis:

(nur eine Beweisskizze)

„⇒“ Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $\epsilon > 0$ mit $\lim a_n = a$. Dann gibt es ein n_0, sodass $|a_n - a| < \epsilon/2$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gilt für je zwei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| \geq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

„⇐“ Üblicherweise wird die Vollständigkeit eines metrischen Raums so definiert:

„Ein metrischer Raum ist vollständig, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.“

Führt man die reellen Zahlen nicht axiomatisch ein, sondern gibt dafür ein Modell an (z.B. unendliche Dezimalbrüche), so kann man diese Aussage auch beweisen. □

3: Zahlenreihen

Zahlenreihen sind Folgen, die durch aufsummieren einer anderen Folge (a_n) entstehen.

Definition 3.1: Reihe

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge. Dann heißt der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

unendliche Reihe (unendliche Summe). Die a_i heißen die Glieder der Reihe. Unter einer Partialsumme versteht man die endliche Summe

$$b_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Konvergiert die Folge der Partialsummen (b_n), gegen einen Grenzwert s, so sagt man die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert. Dann setzt man

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Besitzt (b_n) keinen Grenzwert, so sagt man die Reihe ist divergent.

Beispiele:

1. $a_k = \frac{1}{k(k-1)}$, wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{i=2}^{\infty} a_i$.

   Wir wollen untersuchen, ob diese Reihe konvergiert:

   $$\sum_{i=2}^{\infty} a_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

   Es gilt: $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, daher gilt:

   $$\begin{aligned} b_n &= a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   Also gilt: $\sum\limits_{i=2}^{\infty} a_i = 1$.

2. Die sogenannte harmonische Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ Betrachte:

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}} + \ldots$$

   Dies zeigt, dass die Folge der Partialsummen nicht beschränkt ist. Die Reihe ist divergent.

3. Die geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} z^k &= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n \\ &= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\end{aligned}$$

   Die obige Formel liefert uns für die Konvergenz der geometrischen Reihe:

   - falls $|z| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}$
   - falls $|z| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit Kriterien für die Konvergenz von Reihen.

Satz 3.1: Notwendiges Kriterium für die Konvergenz

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist die Folge der Reihenglieder (a_n) eine Nullfolge $(a_n \to 0)$.

Beweis:

Da eine konvergente Reihe vorliegt, ist die Folge der Partialsummen $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine Cauchyfolge, d.h. $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |b_n - b_m| < \epsilon \;\; \forall n, m \geq n_0$.

$$|b_m - b_n| = \left| \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \qquad \forall m, n \geq n_0 \wedge m \geq n$$

Im Spezialfall $m = n + 1$ folgt $|b_m - b_n| = |a_{n+1}| < \epsilon$. Dies zeigt, dass (a_k) eine Nullfolge ist. □

Bemerkungen:

- Das Notwendigkeitskriterium ist nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe, denn zum Beispiel divergiert die harmonische Reihe.
- Die Bedingung im Beweis oben ist das Cauchykriterium für Reihen. Dieses ist eine hinreichende Bedingung.

Lemma 3.1: Konvergenzkriterium

Eine Reihe mit nichtnegativen reellen Gliedern, bei der die Folge der Partialsummen beschränkt ist, konvergiert. Denn dann ist die Reihe monoton steigend.

3.1 Alternierende Reihen

Wir betrachten nun alternierende Reihen:

Definition 3.2: Alternierende Reihen

Eine Reihe heißt alternierend, wenn die Reihenglieder abwechselnd nichtnegativ (≥ 0) und nichtpositiv (≤ 0) sind. Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer alternierenden Reihe:

Satz 3.2: Leibnitzkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, für die $a_k \geq 0$ gilt. Und es gilt $a_k \geq a_{k+1}$ (monoton fallend) und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. D.h. (a_n) ist eine nichtnegative monoton fallende Nullfolge. Dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$$

konvergent.

Beweis:

Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $a_k < \epsilon \ \ \forall k \geq n_0$ gilt. Wir schätzen den Abstand der Partialsummen ab. Seien $m, n \geq n_0$ und $m \geq n$, dann gilt, falls $m-n$ ungerade und n ungerade ist:

$$\begin{aligned}|b_m - b_n| &= |(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots + (-1)^{m-1}a_{m-1} + (-1)^m a_m| \\ &= a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(a_{m-1} - a_m)}_{\geq 0} \\ &\leq a_{n+1}, \text{ falls } m-n \text{ ungerade}\end{aligned}$$

Und analog falls n gerade. Dies zeigt die Konvergenz der Reihe nach dem Chauchykriterium.

Beispiel: Dieses Kriterium lässt sich auf die alternierende harmonische Reihe anwenden.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

konvergiert gegen $\ln 2$.

Bemerkung: Bei unendlichen Reihen gilt im Allgemeinen kein Kommutativ- oder Assoziativgesetz. Der Grenzwert und auch das Konvergenzverhalten kann sich bei Umordnung und Um-Klammerung der Reihenglieder ändern:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Wir ordnen die Reihe um:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} - \frac{1}{6} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} - \ldots \longrightarrow 0$$

Diese Reihe divergiert nun!

3.2 Absolute Konvergenz

Definition 3.3: Eigenschaft der absoluten Konvergenz

Eine Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls sogar die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 3.3:

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis:

Wir beweisen dies mit dem Cauchykriterium für Reihen:
Da $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall m, n \geq n_0$ mit $m \geq n$ und Anwedung der Dreiecksungleichung gilt:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$$

$\square$

Bemerkung: Die Umkehrung der Aussage gilt nicht, denn wir wissen, dass die harmonische Reihe divergiert obwohl die alternierende harmonische Reihe konvergiert.

3.2.1 Kriterien für absolute Konvergenz

Wir werden im Folgenden einige Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen kennenlernen.

Definition 3.4:

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Zahlenreihe und ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente, reelle Reihe, so dass:

$$|a_k| \leq |b_k| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

dann nennt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Majorante.

Satz 3.4: Majorantenkriterium

Hat eine reelle oder komplexe Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Majorante, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut!

Beweis:

Sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum^{\infty} a_k$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq n \geq n_0$ gilt:

$$|s_m - s_n| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k < \epsilon \quad \square$$

Es gibt auch ein Minorantenkriterium:
Sei $a_k \geq c_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ist c_k divergent, so ist a_k ebenfalls divergent.

Beispiele:

- Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$:
  Da $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k \cdot (k-1)}$ für $k \geq 2$, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k-1)}$ eine Majorante, für die wir die Konvergenz bereits gezeigt haben. Also konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

- Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante, also divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+3^k}$. Wegen $\frac{1}{2^k+3^k} < \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ ist die geometrische Reihe mit $z = \frac{1}{3}$ eine konvergente Majorante.

Wir formulieren nun zwei weitere hinreichende Kriterien für (sogar absolute) Konvergenz. Das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium.

Satz 3.5: Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ gilt.

Beweis:

Es gilt $|a_k| \leq q^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ ist konvergent (geometrische Reihe). □

Satz 3.6: Quotientenkriterium

Sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ gilt.

Beweis:

Aus der Ungleichung folgt, dass

$$|a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k| \leq q^2 \cdot |a_{k-1}| \leq \ldots \leq q^{k+1-k_0}|a_{k_0}|$$

Daher ist

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \leq \frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} q^k$$

und wir haben die geometrische Reihe als konvergente Majorante gefunden. □

Bemerkungen: Falls für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

- $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, so divergiert die Reihe $\sum a_k$.
- $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$, so divergiert die Reihe $\sum a_k$.
- $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q > 1$, so divergiert die Reihe.

- $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q > 1$, so divergiert die Reihe.

Ist $q = 1$ so ist die Bedingung nicht erfüllt, die Reihe kann sowohl konvergieren als auch divergieren, das Kriterium macht keine Aussage über das Konvergenzverhalten.

Beispiele:

- Eine wichtige Reihe in der Mathematik ist die sogenannte Exponentialreihe:

  $$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  für ein $x \in \mathbb{C}$. Es gilt

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

  Um die Konvergenz der Exponentialreihe zu beweisen, wenden wir das Quotientenkriterium an:

  $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \left|\frac{x^k}{k+1}\right| \longrightarrow 0$$

  Damit ist das Quotientenkriterium anwendbar und wir haben gezeigt, dass die Exponentialreihe konvergiert.

- Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$: Das Quotientenkriterium führt hier auf

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \left|\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}\right| = \left|\frac{k}{k+1}\right|$$

  Dieser Term ist zwar kleiner als 1, das Quotientenkriterium kann aber trotzdem nicht angewendet werden, da $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right| = 1!$

  Das Wurzelkriterium führt ebenfalls auf $\lim \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$. Es macht ebenfalls keine Aussage.

  Mit den Kriterien kann weder auf Konvergenz noch auf Divergenz geschlossen werden.

Bemerkung: Wir hatten gesehen, dass der Wert (und auch das Konvergenzverhalten selbst) einer Reihe sich ändern kann, wenn man die Reihenglieder umordnet. Allerdings gilt im Fall von absoluter Konvergenz:

Satz 3.7: Umordnungssatz

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut Konvergent und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann konvergiert auch die umgeordnete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$$

Es gilt weiter, dass die Grenzwerte gleich sind:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$$

3.2.2 Cauchyprodukt von Reihen

Das Cauchyprodukt erlaubt es, das Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen wieder als absolut konvergente Reihe darzustellen. Die Idee dabei ist, die Summanden nach folgendem Schema diagonal aufzusummieren:

$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \cdots \\ a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\ a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\ a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) =& (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \ldots \\ & \ldots + \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j + \ldots \end{aligned}$$

Satz 3.8: Cauchyprodukt

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Und sei (c_n)

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j$$

Dann konvergiert das Cauchyprodukt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut. Außerdem gilt für die Grenzwerte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

Anwendung: Funktionalgleichung der Exponentialfunktion Wir betrachten die beiden absolut konvergenten Reihen mit $x, y \in \mathbb{C}$:

- $e^x = \exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $e^y = \exp(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$

Das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} c_n \text{ mit } c_n &= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^{n-j}}{(n-j!)} \cdot \frac{y^j}{j!} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{n!(n-j)!j!} \cdot x^{n-j} \cdot y^j \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} \cdot y^j \\ &= \frac{1}{n!} (x+y)^n\end{aligned}$$

Das Cauchyprodukt ist dann

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

Dies zeigt: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ $\square$

4: Stetigkeit von Abbildungen

Wir betrachten die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen.

Definition 4.1: Folgenstetigkeit

Seien X und Y metrische Räume, wir schreiben für die Metriken von X und Y ϱ. Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$, falls aus $x_n \to x_0$ für eine Folge $(x_n) \in X$ stets folgt:

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

Oder kurz, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n)) = \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right)$$

Definition 4.2: ϵ-δ-Stetigkeit

Seien X und Y metrische Räume. Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\varrho(f(x), f(x_0)) < \epsilon \quad \forall x \in X, \varrho(x, x_0) < \delta$$

Oder kurz, falls gilt:

$$f\left(K_\delta(x_0)\right) \subseteq K_\epsilon(x_0)$$

Satz 4.1:

Folgenstetigkeit und ϵ-δ-Stetigkeit sind äquivalent.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei f folgenstetig bei x_0. Angenommen f wäre nicht ϵ-δ-stetig bei x_0: Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in K_\delta(x_0)$ existiert, so dass $f(x) \notin K_\epsilon(f(x))$. Wir wählen $\delta = \frac{1}{n}$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $f(x_n) \notin K_\epsilon(f(x_0))$ und $\varrho(x_n, x_0) \to 0$. Widerspruch zur Folgenstetigkeit!

„$\Leftarrow$“ Es gelte ϵ-δ-Stetigkeit in x_0. Sei (x_n) eine Folge in X mit $(x_n) \to x_0$. Dann gibt es zu jede, $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass aus $\varrho(x_n, x_0) < \delta$ folgt, dass $\varrho(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$. Da $(x_n) \to 0$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass die Folgenglieder $\varrho(x_n, x_0) < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt, woraus $\varrho(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$ folgt, d.h. wir haben $f(x_n) \to f(x_0)$ gezeigt. □

Definition 4.3: Stetigkeit von Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt stetig, falls f stetig in allen $x \in X$ ist.

Bemerkung: $f : X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

für alle konvergenten Folgen (x_n) in X gilt. Stetigkeit bedeutet, dass man Funktionsanwendung und Limes vertauschen kann.

Beispiele:

- Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ und ϱ die Standardmetrik in $\mathbb{R}$ für beide.

  Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Wir zeigen jetzt: f ist stetig in allen $x \in X$.

  Dazu betrachten wir eine beliebige Zahlenfolge (x_n) mit $(x_n) \to x_0$ für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$. Für die Folge der Bildpunkte gilt:

  $$|f(x_n) - f(x_0)| = |x_n^2 - x_0^2| = |x_n - x_0| \cdot |x_n + x_0|$$

  Da die Folge (x_0) nach Annahme konvergiert, ist sie beschränkt und es gilt

  $$|x_n + x_0| \le |x_n| + |x_0| \le M = \text{const.}$$

  Somit folgt daraus

  $$|f(x_n) - f(x_0)| \le \underbrace{|x_n - x_0|}_{\to 0} \cdot M$$

  Also folgt $f(x_n) \to f(x_0)$, was die Stetigkeit zeigt. $\square$

- Sei wieder $X = Y = \mathbb{R}$ und ϱ wie oben.

  Die Funktion H gegeben durch

  $$H : X \to Y, x \mapsto \begin{cases} 0, \text{falls } x < 0 1 \text{ sonst.}\end{cases}$$

  Diese ist unstetig im Punkt $x_0 = 0$!

  Denn es gilt für die Folge $(x_n) = -\frac{1}{n}$, dass $H(x_n) = H(-\frac{1}{n}) = 0 \neq H(0) = 1$

4.1 Funktionenlimes, Funktionsgrenzwerte

Sei $X = Y = \mathbb{R}$ oder $X = Y = \mathbb{C}$ und ϱ der übliche Abstand. Man kann folgende Schreibweise für die Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$ im Punkt x_0 verwenden:

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$
$$:\Longleftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Der Funktionenlimes kann auch für nicht notwendig stetige Funktionen definiert werden, dafür definieren wir rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert im reellen Raum wie folgt:

Definition 4.4: Linksseitiger Grenzwert

Man schreibt für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a_l$$
$$:\Longleftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x < x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a_l| < \epsilon$$

Definition 4.5: Rechtsseitiger Grenzwert

Und ähnlicch für den rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a_r$$
$$:\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x > x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a_r| < \epsilon$$

Satz 4.2: Stetigkeiten

Seien f und g Abbildungen, definiert auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
$f, g : X \to Y$ mit $Y = \mathbb{R}$, so dass f, g beide in $x_0 \in X$ stetig sind. Dann sind auch folgende Abbildungen stetig:

- $|f| : x \mapsto |f(x)|$
- $c \cdot f : x \mapsto c \cdot f(x)$
- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
- $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$
- $\sqrt[p]{f} : x \mapsto \sqrt[p]{f(x)}$ mit $f(x) \geq 0, p \in \mathbb{N}$
- $f^p : x \mapsto f(x)^p$ mit $p \in \mathbb{N}$
- $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$

Folgerung: Reelle oder komplexe Polynome und rationale Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

Bemerkung: Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig, wenn die Urbilder von offenen Mengen offen sind.

Beweis:

„⇒“ Sei $V \subseteq Y$ offen, wir müssen zeigen dass $U := f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ offen in X ist. Sei dann $x \in U$. Da V offen ist gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(K_\delta(x)) \subseteq K_\epsilon(f(x)) \subseteq V$ ist, was zeigt, dass $K_\delta(x) \subseteq U = f^{-1}(V)$ gilt.

„⇐“ Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt, dass $U := f^{-1}(K_\epsilon(f(x)))$ offen ist, also gibt es zu $x \in U$ ein $\delta > 0$, so dass $K_\delta(x) \subseteq U$, woraus $f(K_\delta(x)) \subseteq K_\epsilon(f(x))$ folgt.

Bemerkungen: Um für Abbildungen zwischen metrischen Räumen Stetigkeit definieren zu können, benötigt man nur die Systeme offener Mengen. Ähnlich kann man Konvergenz von Folgen alleine mit offenen Mengen definieren. Dies führt auf die Topologie. (Stetigkeit und Konvergenz ohen Abstandsbegriff wird auch Gummigeometrie genannt.)

5: Funktionenfolgen und -Reihen

Wir betrachten hier Folgen

$$f_n : D \to \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}, x \mapsto f_n(x)$$

mit $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir wollen uns natürlich mit der Frage der Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen befassen. Es gibt zwei Arten von Konvergenz für Folgen von Funktionen:

Definition 5.1: Punktweise Konvergenz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der Definitionsbereich der Funktionen f und $f_n, n \in \mathbb{N}$ wobei $f_n : D \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Die Folge (f_n) heißt punktweise konvergent, falls für alle $x \in D$ gilt: $f_n(x) \to f(x)$.
Oder mit anderen Worten:

$$\forall x \in D \;\; \forall \epsilon \geq 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Man schreibt dann auch $f_n(x) \to f(x) \;\; \forall x \in D$ für punktweise Konvergenz.

Definition 5.2: Gleichmäßige Konvergenz

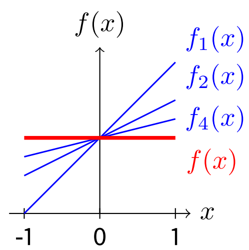
Die Funktionenfolge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen die Funktion f, falls gilt:

$$\forall \epsilon \geq 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in D \quad : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Man schreibt dann auch $f_n \xrightarrow{glm} f$ für gleichmäßige Konvergenz.

Beispiele:

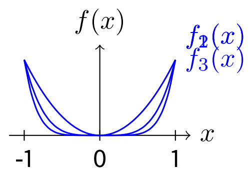
- Sei $f_n(x) = 1 + \frac{1}{n} \cdot x$ mit dem Definitionsbereich $D = [-1; 1]$. Sei $f(x) = 1$ für $f : D \to \mathbb{R}$: Diese Funktion konvergiert gleichmäßig gegen $f \equiv 1$, denn



$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - 1|$$

- $D = [-1; 1], f_n = x^{2n}$
  Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Wir betrachten, dass die Grenzfunktion f nicht stetig ist. Die gleichmäßige Konvergenz ist eine stärkere Eigenschaft als punktweise Konvergenz. Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergez aber nicht umgekehrt. Gleichmäßigkeit der Funktionenfolge garantiert die Stetigkeit der Limesfunktion.

Satz 5.1: Stetigkeit der Limesfunktion

konvergiert eine Folge stetiget Funktionen gleichmäßig, dann ist die Limesfunktion stetig.

Beweis:

Angenommen $f_n \xrightarrow{glm} f$. Sei $\epsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $x \in D$ gilt.
Wähle $\delta > 0$ so, dass $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<\epsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{<\epsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{<\epsilon/3} \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

Zeigt die $\epsilon - \delta$-Stetigkeit der Grenzfunktion f am Punkt X_0.

Bemerkung Für Reihen von Funktionen

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

definieren wir gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz so, dass die Folge der Partialsummen

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$$

gleichmäßig beziehungsweise punktweise konvergiert.

5.0.1 Kriterien für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

- **Cauchy-Kriterium:** falls es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $x \in D$ gilt:

  $$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

  für alle $m, n \geq n_0$, dann exisitert ein $f : D \to \mathbb{R}$ mit

  $$f \overset{glm}{=} \lim_{n\to\infty} f_n \rightsquigarrow f_n \xrightarrow{glm} f$$

- **Weierstraß-Majorantenkriterium:** falls für eine Reihe von Funktionen gilt:

  $$|f_n(x)| \leq c_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ ist konvergent}$$

  dann konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und auch $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ gleichmäßig.

Wir kommen nun zu einer der wichtigsten Anwendung der Funktionenfolgen und -reihen:

5.1 Potenzreihen

Eine wichtige Rolle in der gesamten Mathematik spielen die Potenzreihen, dur die eine große Klasse von Funktionen beschrieben wird.

Definition 5.3: Potenzreihe

Sei $z \in \mathbb{C}, (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

eine *Potenzreihe* um z_0 mit den Koeffizienten a_k. Sie ist für alle $z, z_0 \in \mathbb{C}$ definiert, für die die Reihe konvergiert. Den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ nennt man den Entwicklungspunkt der Potenzreihe.
Falls $z, z_0 \in \mathbb{R}$ und alle $a_k \in \mathbb{R}$ sagt man auch reelle Potenzreihe.

Beispiele:

- Die Exponentialreihe: $\exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
- Die geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$
- $\sin(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
- $\cos(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
- $\ln(1 + x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ konvergiert für $-1 < x \leq 1$
- **Spezialfall:** Polynome vom Grad n sind Potenzreihen, mit $a_k = 0$ für $k > n$. Man kann sich eine Potenzreihe so vorstellen, dass eine Funktion (immer genauer) durch Polynome angenähert wird.

Wir wollen nun das Konvergenzverhalten von Potenzreihen untersuchen. Bemerkenswert ist, dass der Bereich in dem eine komplexe Potenzreihe konvergiert stets eine Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt z_o ist. Der Radius dieser Kreisscheibe heißt Konvergenzradius der Potenzreihe. Dieser Kann gleich $+\infty$ sein, was bedeutet, dass die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Die Potenzreihe divergiert für Werte außerhalb der Scheibe. Auf dem Kreis kann keine eindeutige Aussage gemacht werden, es ist beides möglich.

Satz 5.2: Aussagen zu Potenzreihen

Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Es gibt einen eindeutig bestimmten Konvergenzradius $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ so dass gilt:

   Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ist

   - absolut konvergent für $|z-z_0| < R$
   - divergent für $|z-z_0| > R$

2. Falls

   $$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ oder } r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

   (d.h. insbesondere, dass dieser Grenzwert existiert), dann ist $r = R$.

3. Falls $R > 0$ und $0 < \delta < R$, dann konvergiert die Funktionenfolge der Partialsummen mit $z \in \mathbb{C}$ als Variable gleichmäßig für alle $|z-z_0| < \delta$. Insbesondere ist die durch den Grenzwert der Potenzreihe definierte Funktion $K_R(z_0) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ stetig.

6: Differentialrechnung

6.1 Differentiation in einer reellen Variable

Wir betrachten zunächst Funktionen f in einer rellen Variablen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ist.
D heißt Definitionsbereich der Funktion f. Wir wollen die Differentiation einführen:
Die Ableitung einer Funktion beschreibt die Änderung einer Funktion. Wir wollen diese in der Nähe eines Punktes $x_0 \in D$ beschreiben. Dazu benutzen wir zunächst die folgende Konstruktion.

Definition 6.1: Differenzenquotient und Differentialquotient

Die Abbildung

$$D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt *Differenzenquotient* von f bei x_0. Die Funktion f heißt differenzierbar in x_0, falls der Funktionsgrenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

der *Differentialquotient* von f bei x_0 oder auch die Ableitung von f in x_0.

Bemerkung: Die Existenz des Differentialquotienten ist äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x_0, x_n \in D, x \neq x_0$ der gleiche Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

Wir definieren weiter:

Definition 6.2:

1. f ist differenzierbar, falls f in allen Punkten $x_0 \in D$ differenzierbar ist.
2. f ist stetig differenzierbar in D genau dann, wenn f differenzierbar in allen Punkten ist und die Funktion $x \mapsto f'(x)$ stetig ist.

Satz 6.1: Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, dann ist f auch stetig in x_0.

Beweis:

Es gilt:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

und daraus folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

□