

Mathematik 1

Skript zum Modul Mathematik 1 für inf, swt und msv

INHALTSVERZEICHNIS

1 Grundlagen	3
1.1 Logik	3
1.1.1 Logische Junktoren	3
1.2 Prädikatenlogik und Quantoren	3
1.3 Beweise	4
1.3.1 Direkter Beweis	4
1.3.2 Indirekter Beweis	4
1.3.3 Widerspruchsbeweis	4
2 Mengen, Relationen und Abbildungen	5
2.1 Mengen	5
2.2 Relationen und Abbildungen	5
2.3 Abbildungen	6
2.4 Mächtigkeit von Mengen	7
2.5 Zahlenmengen	7
2.6 Summen- und Produktzeichen	8
2.7 Teilbarkeit und Primzahlen	8
3 Komplexe Zahlen	10
3.1 Polarkoordinaten-Darstellung	11
4 Algebraische Strukturen	12
4.1 Einführung	12
4.2 Erste Strukturen	12
5 Lineare Algebra	15
5.1 Vektorräume	15
6 Lineare Abbildungen	20
6.1 Matrizen	20

1: GRUNDLAGEN

1.1: Logik

Definition 1.1: Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, von dem es Sinn macht, zu fragen, ob er wahr oder falsch ist.

1.1.1: Logische Junktoren

Wir verknüpfen mehrere Aussagen zu größeren aussagelogischen Formeln mithilfe von logischen Junktoren:

NEGATION: $\neg A$

KONJUNKTION: $A \wedge B$

DISJUNKTION: $A \vee B$

Durch verwenden dieser grundlegenden Junktoren kann man alle Verknüpfungen darstellen. Um Schreibarbeit zu sparen gibt es verkürzende Schreibweisen

IMPLIKATION: $A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

ÄQUIVALENZ: $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

1.2: Prädikatenlogik und Quantoren

Ein Prädikat ist ein Ausdruck, der die Form einer Aussage hat, aber Variablen enthält.

$P(m) :=$ „m ist eine gerade Zahl.“

Eine Aussage wird daraus erst, wenn wir angeben, für welche m das Prädikat gelten soll.

Sei M eine Menge und $P(m)$ für jedes $m \in M$ eine Aussage. Wir beschreiben die Aussage mit dem *Allquantor*:

$$\forall m \in M : P(m)$$

d.h. $P(m)$ soll für jedes $m \in M$ gelten.

Mit dem *Existenzquantor* bekommt das Prädikat eine andere Bedeutung:

$$\exists m \in M : P(m)$$

d.h. es soll mindestens ein $m \in M$ existieren, für das $P(m)$ gilt.

BEISPIEL $M = \mathbb{N}$, $P(m)$: „m ist eine gerade Zahl.“

$(\forall m \in M : P(m))$ ist falsch. $(\exists m \in M : P(m))$ ist jedoch wahr.

Bemerkung:

- Verneinung von quantifizierten Prädikat-Aussagen: „Prädikat verneinen und Quantoren tauschen.“

$$\neg(\forall m \in M : P(m)) \equiv \exists m \in M : \neg P(m)$$

- Bei Quantoren kommt es auf die Reihenfolge an:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n$ ist wahr

$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : m \geq n$ ist falsch

1.3: Beweise

1.3.1: Direkter Beweis

1.3.2: Indirekter Beweis

1.3.3: Widerspruchsbeweis

2: MENGEN, RELATIONEN UND ABBILDUNGEN

2.1: Mengen

Eine Menge ist eine wohldefinierte Gesamtheit von Objekten, den Elementen der Menge.

$$\text{z.B. } \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Definition 2.1: Teilmenge

Eine Menge M_1 ist *Teilmenge* von M , wenn

$$\begin{aligned} \forall x \in M_1 : x \in M \\ \Rightarrow M_1 \subseteq M \end{aligned}$$

Für jede Menge M gilt $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$.

Gilt $M_1 \subseteq M$ und $M_1 \neq M$ ist M_1 eine *echte Teilmenge* von M , d.h. $M_1 \subset M$ oder $M_1 \subsetneq M$

POTENZMENGE

$\mathcal{P}(M) = \text{Pot}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M .

SCHNITTMENGE

$$M_s = M_1 \cap M_2; \quad M_s := \{m \in M_1 \mid m \in M_2\}$$

Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen *disjunkt*, falls $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

VEREINIGUNG

$$M_v = M_1 \cup M_2; \quad M_v := \{m \mid m \in M_1 \vee m \in M_2\}$$

DIFFERENZ

$$M_1 \setminus M_2 := \{m \in M_1 \mid m \notin M_2\}$$

KARTESISCHES PRODUKT

$$M_1 \times M_2 := \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1 \wedge m_2 \in M_2\}$$

2.2: Relationen und Abbildungen

Definition 2.2: Relation

Eine Relation zwischen zwei Mengen M und N ist eine Teilmenge von $M \times N$.

$$R \subseteq M_1 \times M_2$$

ist $(x, y) \in R$, steht x mit y in Relation $\rightarrow x \sim y$.

$R \subseteq M \times M$ heißt

reflexiv , falls $\forall x \in M : (x, x) \in R$

symmetrisch , falls $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

antisymmetrisch , falls $\forall x, y \in R : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$

transitiv , falls $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Definition 2.3: Äquivalenzrelation

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition 2.4: Ordnungsrelation

Eine Relation heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

2.3: Abbildungen

Definition 2.5: Abbildung

Seien M und N zwei Mengen. Eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zuweist, heißt Abbildung oder Funktion von M nach N .

$$f : M \rightarrow N, x \mapsto f(x)$$

M : Definitionsbereich, N : Wertebereich

Definition 2.6:

Sei $f : M \mapsto N$ eine Abbildung. Wir definieren

- für $x \in M$ heißt $f(x) \in N$ das *Bild* von x
- für eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ das *Bild der Teilmenge* A
- für eine Teilmenge $B \subseteq N$ heißt $f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) \in B\}$ das *Urbild* von B

Definition 2.7: Abbildungseigenschaften

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann heißt f :

injektiv , wenn jedes Element $y \in N$ *höchstens ein Urbild* hat.

surjektiv , wenn jedes Element $y \in N$ *mindestens ein Urbild* hat. $\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y$

bijektiv , wenn jedes Element $y \in N$ *genau ein Urbild* hat. $\forall y \in N \exists! x \in M : f(x) = y$

Bemerkung:

1. Bijektivität gilt genau dann, wenn es eine Umkehrabbildung f^{-1} gibt:

$$\begin{array}{ll} f : M \rightarrow N & f^{-1} : N \rightarrow M \\ f(f^{-1}(x)) = x & \text{mit } x \in N \\ f^{-1}(f(x)) = x & \text{mit } x \in M \end{array}$$

2. Man kann jede Abbildung surjektiv machen, indem man den Wertebereich durch das Bild von f ersetzt: $N := f(M)$

2.4: Mächtigkeit von Mengen

Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente. Man schreibt $|M|$ für die Mächtigkeit von M . Zwei Mengen A und B sind gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt.

Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, falls $|A| = |\mathbb{N}|$ d.h. falls es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.

Sie heißt *überabzählbar unendlich*, falls $|A| > |\mathbb{N}|$.

Es gilt immer auch für unendliche Mengen, dass $|M| < |\text{Pot}(M)|$.

Für endliche Mengen gilt $|\text{Pot}(M)| = 2^{|M|}$

2.5: Zahlenmengen

Definition 2.8: Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind eine Menge \mathbb{N} , auf der eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ erklärt ist, die folgende Eigenschaften hat, wobei $f(n)$ der *Nachfolger* von n heißt.

$\mathbb{N}1$ Es gibt genau ein Element in \mathbb{N} , das nicht Nachfolger eines anderen Elements ist.

$\mathbb{N}2$ f ist injektiv

$\mathbb{N}3$ Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge, die folgende Eigenschaften hat:

1. $1 \in M$
2. Falls $m \in M$ und $f(m) \in M$

Dann gilt: $M = \mathbb{N}$

D.h. $M \subseteq \mathbb{N} : 1 \in M \wedge (m \in M \Rightarrow f(m) \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}$

Man kann zeigen, dass die natürlichen Zahlen durch diese Eigenschaften (die PEANO-Axiome) gekennzeichnet sind. Das heißt, dass es im wesentlichen nur eine solche Menge mit einer solchen Abbildung f gibt, nämlich \mathbb{N} .

Das Axiom $\mathbb{N}3$ heißt auch Induktionsaxiom. Aus ihm folgt:

Satz 2.1: Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage, für die gilt:

- $A(1)$ ist wahr
- $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$

dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Definition 2.9: Graph einer Abbildung

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Der Graph von f ist eine Teilmenge $\{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$. Für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Graph eine Teilmenge der Ebene \mathbb{R}^2 .

Fasst man eine Funktion als eine Relation auf, so ist der Graph das selbe wie R . $\text{Graph}(f) = R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Definition 2.10: Verkettung

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ Abbildungen. Dann ist die Verkettung:

$$g \circ f : M \rightarrow P$$

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

Definition 2.11: Identität

Für jede Menge M ist

$$\text{id}_M : M \rightarrow M, x \mapsto x$$

die identische Abbildung auf M .

2.6: Summen- und Produktzeichen

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

Bei der Summe ist k der Summationsindex, m die untere und n die obere Summationsgrenze

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Bemerkung:

- Ist die obere Summationsgrenze kleiner als die untere, so handelt es sich um eine *leere Summe*, ihr Wert ist 0.
- Entsprechend ist der Wert des *leeren Produkts* 1.

2.7: Teilbarkeit und Primzahlen**Definition 2.12: Teilbarkeit**

Seien $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Die Zahl m heißt *ein Teiler* von n , in Zeichen $k \cdot m = n$, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $k \cdot m = n$. In diesem Fall heißt n auch teilbar durch m . Die Zahl 0 ist durch alle $m \in \mathbb{Z}$ teilbar. Falls $m|n_1$ und $m|n_2$, dann folgt $m|n_1 + n_2$.

Definition 2.13: Größter gemeinsamer Teiler

Sei $a \in \mathbb{Z}$, die Menge aller Teiler von a ist $\mathcal{D}(a) := \{d \in \mathbb{N} \mid d|a\}$.

Die Menge aller gemeinsamer Teiler von a und b mit $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$.

Die Zahl $\text{ggT}(a, b) = \max(\mathcal{D}(a, b))$ heißt größter gemeinsamer Teiler von a und b . Da eine ganze Zahl (außer der 0) nur endlich viele Teiler hat, existiert $\text{ggT}(a, b)$.

Definition 2.14: Primzahl

Eine natürliche Zahl heißt *Primzahl*, wenn sie genau zwei Teiler besitzt, nämlich 1 und die Zahl selbst.

$$p \in \mathbb{N} \text{ mit } |\mathcal{D}(p)| = 2$$

Satz 2.2:

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$ ist ein Produkt aus Primzahlen (1 ist das leeren Produkt).

Beweis:

$A(n)$: „Jede natürliche Zahl kleiner oder gleich n ist das Produkt von Primzahlen.“

IA $A(2)$ ist wahr, denn 2 ist selbst eine Primzahl.

IS Fallunterscheidung:

1. $n + 1$ ist prim. Dann ist $A(n + 1)$ wahr.
2. $n + 1$ ist nicht prim. Dann gibt es natürliche Zahlen l und m , sodass $n + 1 = l \cdot m$, wobei $l, m < n + 1$.

Nach Induktionsvoraussetzung sind somit l und m Produkte von Primzahlen, somit auch $n + 1$.

3: KOMPLEXE ZAHLEN

Definition 3.1: Komplexe Zahlen

Wir definieren \mathbb{C} als Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d.h. wir definieren die komplexen Zahlen als zusammengesetzte Zahlen, also als die Menge der geordneten Paare von reellen Zahlen. Wobei wir folgende Abbildungen mit $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf \mathbb{C} festlegen:

ADDITION

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

MULTIPLIKATION

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Bemerkung:

Die Menge der reellen Zahlen kann als Teilmenge von \mathbb{C} aufgefasst werden. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ indem man die injektive Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto (a, 0)$ benutzt. Die oben definierten Verknüpfungen schränken sich dann auf die Verknüpfungen in \mathbb{R} ein:

- $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$
- $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (a \cdot b, 0)$

In diesem Sinne ist \mathbb{C} eine *Erweiterung* des Körpers \mathbb{R} .

Definition 3.2: Imaginäre Einheit

Wir führen die imaginäre Einheit ein. $i := (0, 1)$ damit gilt:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = i^2 = -1$$

Es gilt also $i^2 = -1$, daher schreibt man auch $i = \sqrt{-1}$. Die Zahlen $(0, y) = y \cdot i, y \in \mathbb{R}$ heißen imaginäre Zahlen. Wir können uns wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ komplexe Zahlen als Punkte bzw. Vektoren in der *Gauß'schen Zahlenebene* vorstellen.

Satz 3.1:

Für jede komplexe Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a, b) = a + bi$$

Beweis:

durch ausrechnen der rechten Seite:

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b) \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Wie man leicht nachrechnet, gelten wie in \mathbb{R} die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze.

Definition 3.3: Konjugiert komplexe Zahl

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Dann heißt \bar{z} die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - bi$ von z .

Satz 3.2: Eigenschaften der konjugiert komplexen Zahl

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ dann gilt:

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3. $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \Re(z)$
4. $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \Im(z)$
5. $z \cdot \bar{z} > 0 \in \mathbb{R}$ falls $z \neq 0$

Definition 3.4: Betrag einer komplexen Zahl

Mit der komplexen Zahl $z = a + bi$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt für den Betrag von z :

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z| = |\bar{z}|$$

Insbesondere lässt sich das multiplikative Inverse wie folgt ausdrücken:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

3.1: Polarkoordinaten-Darstellung

4: ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

4.1: Einführung

Definition 4.1: Verknüpfung

Sei M eine Menge. Eine Abbildung $M \times M \rightarrow M$, $(a, b) \mapsto a \star b$ nennt man Verknüpfung.

1. Eine Verknüpfung heißt kommutativ, falls $a \star b = b \star a \quad \forall a, b \in M$ gilt.
2. Sie heißt assoziativ, falls $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c = \quad \forall a, b, c \in M$ gilt.
Man kann auch $a \star b \star c$ schreiben.
3. Ein Element $e \in M$ heißt neutrales Element bezüglich der Verknüpfung \star , falls $a \star e = e \star a = a \quad \forall a \in M$ gilt.

Definition 4.2: Invertierbarkeit

Sei M eine Menge mit einer Verknüpfung \star , die ein neutrales Element e besitzt, ein Element $a \in M$ heißt invertierbar, falls es ein Element $a^{-1} \in M$ gibt, so dass gilt:

$$a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$$

4.2: Erste Strukturen

Definition 4.3: Gruppe

Eine Menge G mit einer Verknüpfung \star heißt *Gruppe*, falls

- G1** Die Verknüpfung assoziativ ist,
- G2** ein neutrales Element besitzt,
- G3** jedes Element invertierbar ist.

Falls die Verknüpfung zusätzlich kommutativ ist, nennt man die Gruppe eine *abel'sche Gruppe* oder auch kommutative Gruppe.

Definition 4.4: Ring

Sei M eine Menge mit zwei Verknüpfungen $(+, \cdot)$ und den folgenden Eigenschaften:

- R1** $(M, +)$ ist eine abel'sche Gruppe mit neutralem Element 0.
- R2** die Verknüpfung \cdot ist assoziativ mit neutralem Element 1.

R3 es gelten die Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot c &= ac + bc \\ c \cdot (a + b) &= ca + cb\end{aligned}$$

R4 $0 \neq 1$

Dan heißt M ein *Ring* (genauer ein Ring mit Eins - unitärer Ring).

Ist zusätzlich auch die Multiplikation \cdot kommutativ und ist $M \setminus \{0\}$ eine Gruppe bezüglich \cdot (d.h. besitzt jedes Element ein Inverses bzgl. \cdot) so heißt M *Körper*.

Satz 4.1: Eindeutigkeit der neutralen Elemente

In einer Gruppe ist das neutrale Element stets eindeutig, d.h. ist e ein neutrales Element und gibt es ein Element:

$$a \in G, \forall g \in G : a \star g = g \star a = g$$

Dann ist $a = e$!

Beweis:

Gelte $a \star g = g$ für ein $g \in G$. Dann folgt:

$$(a \star g) \star g^{-1} = g \star g^{-1}$$

Mit **G1** und **G3** gilt:

$$a \star (g \star g^{-1}) = e$$

Dann folgt mit **G3**:

$$a \star e = e \text{ und damit } a = e$$

□

Bemerkung:

Ähnlich dazu der Beweis, dass inverse Elemente eindeutig bestimmt sind.

Definition 4.5: Homomorphismus

Seien (G, \star) und $(H, *)$ Gruppen. Eine Abbildung $f : G \rightarrow H$ heißt (Gruppen-)Homomorphismus, falls gilt:

$$f(a \star b) = f(a) * f(b) \quad \forall a, b \in G$$

Lemma 4.1:

Ein Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow H$ bildet stets das neutrale Element in G auf das neutrale Element in H ab.

Beweis:

Sei e das neutrale Element in G , dann folgt:

$$f(e) * f(g) = f(e \star g) = f(g)$$

Es folgt dann, dass $f(e)$ das neutrale Element in H ist.

Definition 4.6:

Sei G eine Gruppe mit Verknüpfung \star und neutralem Element e .

Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G , falls gilt:

UG 1 $\forall a, b \in U : a \star b \in U$ (Abgeschlossenheit)

UG 2 $\forall a \in U : a^{-1} \in U$

Immer gilt, dass der Kern eines Homomorphismus $f : G \rightarrow H$ d.h. $\text{Kern}(f) = f^{-1}(\{e\})$ eine Untergruppe von G ist.

5: LINEARE ALGEBRA

5.1: Vektorräume

BEISPIEL

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ \mathbb{R}^3 &= \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &\vdots \\ \mathbb{R}^n &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Wir schreiben die Elemente von \mathbb{R}^n auch als sogenannte Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ anstatt von } (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Mit der komponentenweisen Addition, der Vektoraddition:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

wird \mathbb{R}^n zu einer abel'schen Gruppe mit dem Nullvektor als neutrales Element und dem negierten Vektor als inverses Element bezüglich der Addition.

In der Vektorrechnung nennt man Zahlen (z.B. Elemente aus $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$) *Skalare*, um Zahlen und Vektoren deutlich zu unterscheiden.

Sei $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist die *skalare Multiplikation* $x \cdot \lambda$ definiert durch $x \cdot \lambda := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

Die beiden Operationen Vektoraddition und skalare Multiplikation sind kennzeichnend für einen Vektorraum.

Definition 5.1: Vektorraum

Sei K ein Körper, dessen neutrales Element bezüglich der Multiplikation mit 1_K bezeichnet wird. Sei V eine Menge mit einer Verknüpfung $+$, so dass $(V, +)$ eine abel'sche Gruppe bildet.

Sei weiter eine Abbildung, genannt *skalare Multiplikation* $K \times V \rightarrow V$ gegeben, so dass folgende Bedingungen $\forall \alpha, \beta \in K; x, y \in V$ gelten:

V1 $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (assoziativ)

V2 $1_K \cdot x = x$ (neutrales Element des Körpers ist das neutrale bzgl. \cdot)

V3 $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributiv 1)

V4 $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (distributiv 2)

Dann ist V ein *Vektorraum* über dem Körper K . Kurz auch K -Vektorraum. Die Verknüpfung $+$ wird Vektoraddition genannt. Für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ spricht man auch von einem reellen, bzw. komplexen Vektorraum.

Elemente von V nennt man Vektoren.

BEISPIELE

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$

- \mathbb{C}^2

- $\{0\}$ ist ein Vektorraum für jeden Körper K .

- Sei $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge der reellen Funktionen in einer Variable. Durch die punktweise Addition

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

und die punktweise skalare Multiplikation

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

wird V zu einem Vektorraum.

Definition 5.2: Untervektorraum

Sei V ein K -Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum bzw. Teilvektorraum, falls gilt:

UV1 Abschluss unter Vektoraddition:

$$\forall u, v : u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$$

UV2 Abschluss unter skalarer Multiplikation:

$$\forall u \in U, \lambda \in K : \lambda \cdot u \in U$$

BEISPIELE Die folgenden sind Untervektorräume von \mathbb{R}^2 :

- $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ (die x -Achse)

- $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ (die Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten)

Lemma 5.1:

Für alle $\lambda \in K, v \in V$ wobei V ein K -Vektorraum ist, gilt:

1. $0_K \cdot v = 0_V$

2. $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$

Beweis:

1. Es gilt:

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v \stackrel{\text{(V3)}}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot v + (-(0 \cdot v)) &= (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) \\ &\stackrel{\text{(V1)}}{=} 0 \cdot v + (0 \cdot v + (-0 \cdot v)) \end{aligned}$$

$$0 = 0 \cdot v + 0 = 0 \cdot v$$

Definition 5.3: Linearkombination

Seien v_1, v_2, \dots, v_k Vektoren aus dem K -Vektorraum V und seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$. Dann heißt der Vektor

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j$$

Linearkombination von den Vektoren v_1, v_2, \dots, v_k . Die Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ heißen *Koeffizienten* der Linearkombination.

Sind in der Linearkombination alle Koeffizienten gleich Null, handelt es sich um die *triviale Linearkombination*. Gibt es hingegen mindestens einen Koeffizienten $\lambda_j \neq 0$, handelt es sich um eine *nichttriviale Linearkombination*.

Definition 5.4:

Sei V ein K -Vektorraum, $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann heißt die Menge aller Linearkombinationen

$$\{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid v_1, v_2, \dots, v_k \in M, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K\}$$

der *Spann* oder die lineare Hülle von M .

$$\text{Span}(M) := \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \mid \lambda_j \in K, v_j \in M \right\}$$

BEISPIELE

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \text{Span}(\{v\}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- $\text{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ (x_1, x_2 -Ebene)

Satz 5.1:

Sei V ein K -Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann ist $\text{Span}(M)$ ein Untervektorraum von V .

Beweis:

1. $\text{Span}(M)$ ist nicht leer, da der Nullvektor als leere Linearkombination mindestens enthalten ist.
2. Abschluss unter skalarer Multiplikation, sei $\lambda \in K, v \in \text{Span}(M)$:

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \quad \text{wobei } v_1, \dots, v_k \in M \\ \lambda v &= \lambda(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) \\ &= \lambda(\lambda_1 v_1) + \dots + \lambda(\lambda_k v_k) \\ &= (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_k) v_k \end{aligned}$$

3. Abschluss unter Addition:

Definition 5.5: Erzeugendensystem

Gilt $V = \text{Span}(M)$ für einen K -Vektorraum V und eine Teilmenge $M \subseteq V$, so sagt man M ist ein *Erzeugendensystem* von V .

Interessant ist die minimale Anzahl an Vektoren in einem Erzeugendensystem, bzw. ein *minimales Erzeugendensystem*.

Definition 5.6: Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $M \subseteq V$ heißt *linear abhängig*, wenn es eine nichttriviale Linearkombination gibt, die den Nullvektor ergibt. Andernfalls heißt M *linear unabhängig*!

Satz 5.2:

Eine Menge von Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn einen Vektor $v \in M$ gibt, der sich als Linearkombination mit Vektoren aus $M \setminus \{v\}$ darstellen lässt.

„ \Rightarrow “ Angenommen, M ist linear abhängig. Dann gibt es Vektoren v_1, \dots, v_n und Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so dass die Linearkombination *nichttrivial* den Nullvektor ergibt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\lambda_j v_j &= -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_{j-1} v_{j-1} - \lambda_{j+1} v_{j+1} - \dots - \lambda_n v_n \quad |\lambda_j \neq 0 \\ v_j &= \frac{1}{\lambda_j} \cdot (-\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_{j-1} v_{j-1} - \lambda_{j+1} v_{j+1} - \dots - \lambda_n v_n)\end{aligned}$$

Damit ist v_j als nichttriviale Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus \{v_j\}$ dargestellt.

„ \Leftarrow “ Angenommen, es gibt einen Vektor $v \in M$ sowie Vektoren $v_1, \dots, v_n \in M \setminus \{v\}$ und Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}v &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\ 0 &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - 1 \cdot v\end{aligned}$$

Dies ist eine nichttriviale Linearkombination mit Vektoren aus M , die 0 ergibt.

Definition 5.7: Basis

Eine Teilmenge B eines Vektorraums V heißt *Basis* von V falls B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

BEISPIELE**Satz 5.3: Charakterisierungen von Basen**

Für eine Teilmenge $B \subseteq V$ eines Vektorraums sind folgende Sätze äquivalent:

- B ist eine Basis
- Jeder Vektor in V lässt sich auf genau eine Weise als Linearkombination von Vektoren aus B schreiben.
- B ist ein minimales Erzeugendensystem von V .
- B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V

Bemerkung:

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis, jede Basis hat gleich viele Elemente. (auch \emptyset oder $|B| = \infty$ möglich)

Definition 5.8: Dimension

Die Anzahl der Elemente der Basis B eines Vektorraums V nennt man *Dimension*

$$\dim(B)$$

6: LINEARE ABBILDUNGEN

Lineare Abbildungen sind Strukturerhaltende Abbildungen zwischen Vektorräumen, sie werden deshalb auch Vektorraumhomomorphismen genannt.

Definition 6.1: Lineare Abbildungen

Seien V und W Vektorräume über dem selben Körper K . Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt *linear*, falls

L 1 $\forall u, v \in V : f(u + v) = f(u) + f(v)$ (Additivität)

L 2 $\forall v \in V, \lambda \in K : f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$ (Homogenität)

Bemerkung:

L 1 ist dazu äquivalent, dass f ein Gruppenhomomorphismus zwischen den abel'schen Gruppen $(V, +)$ und $(W, +)$ ist.

BEISPIELE

- Für alle $\lambda \in K$ ist $f : V \rightarrow V, v \mapsto \lambda v$ eine Lineare Abbildung
- Insbesondere sind die identische Abbildung

$$\text{id}_V : V \rightarrow V, v \mapsto v$$

und die Nullabbildung

$$\text{n}_V : V \rightarrow V, v \mapsto 0$$

linere Abbildungen.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist *nicht* linear, denn

$$4 = f(2) = f(1 + 1) \neq f(1) + f(1) = 2$$

6.1: Matrizen

Allgemein lassen sich lineare Abbildungen durch sog. *Matrizen* darstellen.

Sei A eine $m \times n$ -Matrix, d.h. ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Jede lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^m$ lässt sich auf diese Weise mit einer $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in K darstellen.