Mathematik 1 und 2

Skript zum Modul Mathematik für inf, swt und msv

Simon König

Inhaltsverzeichnis

1

Grundlagen

1: Logik

Definition 1.1: Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, von dem es Sinn macht, zu fragen, ob er wahr oder falsch ist.

1.1 Logische Junktoren

Wir verknüpfen mehrere Aussagen zu größeren aussagelogischen Formeln mithilfe von logischen Junktoren:

Negation: $\neg A$

Konjuktion: $A \wedge B$

Disjunktion: $A \vee B$

Mit diesen grundlegenden Junkoren kann man alle Verknüpfungen darstellen. Um Schreibarbeit zu sparen gibt es verkürzende Schreibweisen:

Implikation: $A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w	f	f	w	w
f	w	w	f	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f
w	w	f	w	w	w	w

1.2 Prädikatenlogik und Quantoren

Ein Prädikat ist ein Ausdruck, der die Form einer Aussage hat, aber Variablen enthält. Eine Aussage wird daraus erst, wenn wir angeben, für welche m das Prädikat gelten soll.
Sei M eine Menge und $P(m)$ für jedes $m \in M$ eine Aussage. Wir beschreiben die Aussage mit dem *Allquantor*:

$$\forall m \in M : P(m)$$

d.h. $P(m)$ soll für *jedes* Element m aus M gelten.

Mit dem *Existenzquantor* bekommt das Prädikat eine andere Bedeutung:

$$\exists m \in M : P(m)$$

d.h. es soll mindestens ein $m \in M$ existieren, für das $P(m)$ gilt.

Beispiel $M = \mathbb{N}, P(m)$: „m ist eine gerade Zahl.“
$(\forall m \in M : P(m))$ ist falsch.
$(\exists m \in M : P(m))$ ist jedoch wahr.

1.2.1 Verneinung von Aussagen

Verneinung von quantifizieren Prädikat-Aussagen: „Prädikat verneinen und Quantoren tauschen.“

$$\neg(\forall m \in M : P(m)) \equiv \exists m \in M : \neg P(m)$$

1.2.2 Reihenfolge der Quantoren

Bei Quantoren kommt es auf die Reihenfolge an:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n \quad \text{ist wahr}$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : m \geq n \quad \text{ist falsch}$$

2: Grundlegende Rechenmethoden

2.1 Summen- und Produktzeichen

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

Bei der Summe ist k der Summationsindex, m die untere und n die obere Summationsgrenze

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Bemerkung:

- Ist die obere Summationsgrenze kleiner als die untere, so handelt es sich um eine *leere Summe*, ihr Wert ist 0.
- Entsprechend ist der Wert des *leeren Produkts* 1.

2.2 Teilbarkeit und Primzahlen

Definition 2.1: Teilbarkeit

Seien $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Die Zahl m heißt *ein Teiler* von n, in Zeichen $k \cdot m = n$, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $k \cdot m = n$. In diesem Fall heißt n auch teilbar durch m. Die Zahl 0 ist durch alle $m \in \mathbb{Z}$ teilbar.
Falls $m|n_1$ und $m|n_2$, dann folgt $m|n_1 + n_2$.

Definition 2.2: Größter gemeinsamer Teiler

Sei $a \in \mathbb{Z}$, die Menge aller Teiler von a ist $\mathcal{D}(a) := \{d \in \mathbb{N} \mid d|a\}$.
Die Menge aller gemeinsamer Teiler von a und b mit $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$.
Die Zahl $\mathrm{ggT}(a, b) = \max(\mathcal{D}(a, b))$ heißt größter gemeinsamer Teiler von a und b. Da eine ganze Zahl (außer der 0) nur endlich viele Teiler hat, existiert $ggT(a, b)$.

Satz 2.1: Teilung mit Rest

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a > b$. Dann gibt es Zahlen $q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$0 \leq r < B \quad \text{Rest kleiner als der Teiler}$$
$$a = q \cdot b + r$$

Mit diesem Satz folgt das Lemma, auf dem der *Euklidische Algorithmus* basiert:

Lemma 2.1:

Seien $a, b, q, r \in \mathbb{N}$, so dass $a = q \cdot b + r$. Dann gilt

$$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r)$$

Insbesondere gilt:

$$\operatorname{ggT}(a, b) = \operatorname{ggT}(b, r)$$

Beweis:

Wir beweisen die Gleichheit der beiden Mengen, indem wir die beiden Inklusionen nachweisen:

„$\subseteq$“ Sei $d \in \mathcal{D}(a, b)$ d.h. $d|a \wedge d|b$. Wegen $a = q \cdot b + r \Leftrightarrow r = a - q \cdot b$ folgt, dass d auch r teilt. Es folgt also $d \in \mathcal{D}(b, r)$.

„$\supseteq$“ Sei $d \in \mathcal{D}(b, r)$ d.h. $d|b \wedge d|r$, dann folgt aus $a = q \cdot b + r$, dass d auch a teilt, womit $d \in \mathcal{D}(a, b)$ folgt.

$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r)$

Dieses Lemma liefert die Idee für einen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen.
Sei $a > b$. Teilt b die Zahl a ohne Rest, so ist b der $\operatorname{ggT}(a, b)$. Ansonsten ermittle den Rest bei der Teilung von a durch b und suche statt $\operatorname{ggT}(a, b)$ den $\operatorname{ggT}(b, r)$.
Nach dem Satz zur Teilung mit Rest sind b und r beide kleiner als a, also kommt das Verfahren nach endlich vielen Schritten zum Ende.

Definition 2.3: Primzahl

Eine natürliche Zahl heißt *Primzahl*, wenn sie genau zwei Teiler besitzt, nämlich 1 und die Zahl selbst.

$$p \in \mathbb{N} \text{ mit } |\mathcal{D}(p)| = 2$$

Satz 2.2: Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$ ist ein Produkt aus Primzahlen (1 ist das leere Produkt).

Beweis:

$A(n)$: „Jede natürliche Zahl kleiner oder gleich n ist das Produkt von Primzahlen.“

IA $A(2)$ ist wahr, denn 2 ist selbst eine Primzahl.

IS Fallunterscheidung:

1. $n + 1$ ist prim. Dann ist $A(n + 1)$ wahr.
2. $n + 1$ ist nicht prim. Dann gibt es natürliche Zahlen 1 und m, sodass $n + 1 = l \cdot m$, wobei $l, m < n + 1$.

Nach Induktionsvoraussetzung sind somit l und m Produkte von Primzahlen, somit auch $n + 1$.

3: Beweise

Wir wollen eine Aussage $A \Rightarrow B$ beweisen. Dazu gibt es mehrere Ansätze, diese werden am Beispiel gezeigt:

$$A \equiv |x-1| < 1$$
$$B \equiv x < 2$$

3.1 Direkter Beweis

A wird als wahr angenommen, und daraus muss $B \equiv x < 2$ gefolgert werden.
Fallunterscheidung:

- $(x-1) \geq 0 \rightsquigarrow x - 1 < 1 \Leftrightarrow x < 2$
- $(x-1) < 0 \rightsquigarrow x < 1$ $\square$

3.2 Indirekter Beweis (Kontraposition)

Wir zeigen, dass $\neg B \Rightarrow \neg A$. Gelte also $\neg B$:

$$x \geq 2 \rightsquigarrow |x-1| = x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$$

3.3 Widerspruchsbeweis

Wir zeigen, dass $\neg(A \Rightarrow B)$ bzw. $A \wedge \neg B$ auf einen Widerspruch führt. Angenommen, es gelte $|x-1| < 1$ und $x \geq 2$ daraus folgt:

$$|x-1| = x - 1 < 1 \Leftrightarrow x < 2 \text{ Widerspruch!}$$

4: Mengen, Relationen und Abbildungen

4.1 Mengen

Eine Menge ist eine wohldefinierte Gesamtheit von Objekten, den Elementen der Menge.

z.B. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$

Definition 4.1: Teilmenge

Eine Menge M_1 ist *Teilmenge* von M, wenn

$$\forall x \in M_1 : x \in M$$
$$\Rightarrow M_1 \subseteq M$$

Für jede Menge M gilt $\varnothing \subseteq M$ und $M \subseteq M$.
Gilt $M_1 \subseteq M$ und $M_1 \neq M$ ist M_1 eine *echte Teilmenge* von M, d.h. $M_1 \subset M$ oder $M_1 \subsetneq M$

Potenzmenge	$\mathcal{P}(M) = \mathrm{Pot}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M.
Schnittmenge	$M_s = M_1 \cap M_2; \quad M_s := \{m \in M_1 \,\|\, m \in M_2\}$
Vereinigung	$M_v = M_1 \cup M_2; \quad M_v := \{m \,\|\, m \in M_2 \vee m \in M_2\}$
Differenz	$M_1 \setminus M_2 := \{m \in M_1 \,\|\, m \notin M_2\}$
Kartesisches Produkt	$M_1 \times M_2 := \{(m_1, m_2) \,\|\, m_1 \in M_1 \wedge m_2 \in M_2\}$

Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen *disjunkt*, falls $M_1 \cap M_2 = \varnothing$

4.2 Relationen

Definition 4.2: Relation

Eine Relation zwischen zwei Mengen M und N ist eine Teilmenge von $M \times N$.

$$R \subseteq M_1 \times M_2$$

ist $(x, y) \in R$, steht x mit y in Relation $\rightarrow x \sim y$.

$R \subseteq M \times M$ heißt:

reflexiv	falls $\forall x \in M : (x, x) \in R$
symmetrisch	falls $\forall x, y \in M : (x, y) \in M \Rightarrow (y, x) \in R$
antisymmetrisch	falls $\forall x, y \in R : (x, y) \in M \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
transitiv	falls $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Definition 4.3: Äquivalenzrelation

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition 4.4: Ordnungsrelation

Eine Relation heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

4.3 Abbildungen

Definition 4.5: Abbildung

Seien M und N zwei Mengen. Eine Zuordnungsvorschift, die jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zuweist, heißt Abbildung oder Funktion von M nach N.

$$f : M \to N, x \mapsto f(x)$$

M: Definitionsbereich, N: Wertebereich

Definition 4.6: Bild und Urbild

Sei $f : M \mapsto N$ eine Abbildung. Wir definieren

- für $x \in M$ heißt $f(x) \in N$ das *Bild* von x
- für eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ das *Bild der Teilmenge* A
- für eine Teilmenge $B \subseteq N$ heißt $f^{-1}(B) = \{x \in M \,|\, f(x) \in B\}$ das *Urbild* von B

Definition 4.7: Graph einer Abbildung

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Der Graph von f ist eine Teilmenge des Werte- und Definitionsbereichs

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in M\} \subseteq M \times N$$

Fasst man eine Funktion als eine Relation auf, so ist der Graph das selbe wie R.

$$\mathrm{Graph}(f) = R \subseteq M \times N$$

Bemerkung: Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist der Graph eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Definition 4.8: Verkettung

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen. Dann ist die Verkettung:

$$g \circ f : M \to P$$
$$g \circ f(x) \coloneqq g(f(x))$$

Definition 4.9: Identität

Für jede Menge M ist

$$\mathrm{id}_M : M \to M, x \mapsto x$$

die identische Abbildung auf M.

4.3.1 Abbildungseigenschaften

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f:

INJEKTIV wenn jedes Element $y \in N$ *höchstens ein Urbild* hat.

SURJEKTIV wenn jedes Element $y \in N$ *mindestens ein Urbild* hat. $\forall y \in N\ \exists x \in M : f(x) = y$

BIJEKTIV wenn jedes Element $y \in N$ *genau ein Urbild* hat. $\forall y \in N\ \exists! x \in M : f(x) = y$

BEMERKUNG:

1. Bijektivität gilt genau dann, wenn es eine Umkehrabbildung f^{-1} gibt:

$$f : M \to N \qquad\qquad f^{-1} : N \to M$$
$$f\left(f^{-1}(x)\right) \quad \text{mit } x \in N \qquad\qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x \quad \text{mit } x \in M$$

2. Man kann jede Abbildung surjektiv machen, indem man den Wertebereich durch das Bild von f ersetzt: $N := f(M)$

4.4 Mächtigkeit von Mengen

Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente. Man schreibt $|M|$ für die Mächtigkeit von M.
Zwei Mengen A und B sind gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.
Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, falls $|A| = |\mathbb{N}|$ d.h. falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.
Sie heißt *überabzählbar unendlich*, falls $|A| > |\mathbb{N}|$.
Es gilt immer auch für unendliche Mengen, dass $|M| < |\operatorname{Pot}(M)|$.
Für endliche Mengen gilt $|\operatorname{Pot}(M)| = 2^{|M|}$

4.5 Zahlenmengen

Definition 4.10: Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind eine Menge $\mathbb{N}$, auf der eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erklärt ist, die folgende Eigenschaften hat, wobei $f(n)$ der *Nachfolger* von n heißt.

$\mathbb{N}1$ Es gibt genau ein Element in $\mathbb{N}$, das nicht Nachfolger eines anderen Elements ist.

$\mathbb{N}2$ f ist injektiv

$\mathbb{N}3$ Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge, die folgende Eigenschaften hat:

1. $1 \in M$
2. Falls $m \in M$ und $f(m) \in M$

Dann gilt: $M = \mathbb{N}$

D.h. $M \subseteq \mathbb{N} : 1 \in M \wedge (m \in M \Rightarrow f(m) \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}$

Man kann zeigen, dass die natürlichen Zahlen durch diese Eigenschaften (die PEANO-Axiome) gekennzeichnet sind. Das heißt, dass es im wesentlichen nur eine solche Menge mit einer solchen Abbildung f gibt, nämlich $\mathbb{N}$.
Das Axiom $\mathbb{N}3$ heißt auch Induktionsaxiom. Aus ihm folgt:

Satz 4.1: Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage, für die gilt:

- $A(1)$ ist wahr
- $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$

dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

5: Komplexe Zahlen

Wir definieren $\mathbb{C}$ als Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d.h. wir definieren die komplexen Zahlen als zusammengesetzte Zahlen, also als die Menge der geordneten Paare von reellen Zahlen. Wobei wir folgende Abbildungen mit $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ festlegen:

Addition $(a, b) + (c, d) := (a + b, c + d)$

Multiplikation $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

Bemerkung: Die Menge der reellen Zahlen kann als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefasst werden. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ indem man die injektive Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto (a, 0)$ benutzt. Die oben definierten Verknüpfungen schränken sich dann auf die Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ ein:

- $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$
- $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (a \cdot b, 0)$

In diesem Sinne ist $\mathbb{C}$ eine *Erweiterung* des Körpers $\mathbb{R}$.

Definition 5.1: Imaginäre Einheit

Wir führen die imaginäre Einheit ein. $\mathfrak{i} := (0, 1)$ damit gilt:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = \mathfrak{i}^2 = -1$$

Es gilt also $\mathfrak{i}^2 = -1$, daher schreibt man auch $\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$. Die Zahlen $(0, y) = y \cdot \mathfrak{i}, y \in \mathbb{R}$ heißten imaginäre Zahlen. Wir können uns wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ komplexe Zahlen als Punkte bzw. Vektoren in der *Gauß'schen Zahlenebene* vorstellen.

Satz 5.1:

Für jede komplexe Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a, b) = a + b \cdot \mathfrak{i}$$

Beweis:

Durch Ausrechnen der rechten Seite:

$$\begin{aligned} a + b\mathfrak{i} &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b) \end{aligned}$$

Bemerkung: Wie man leicht nachrechnet, gelten wie in $\mathbb{R}$ die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze.

Definition 5.2: Konjugiert komplexe Zahl

Sei $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\overline{z}$ die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$ von z.

Satz 5.2: Eigenschaften der konjugiert komplexen Zahl

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ dann gilt:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \mathfrak{Re}(z)$
4. $\frac{1}{2}(z - \overline{z}) = \mathfrak{Im}(z)$
5. $z \cdot \overline{z} > 0 \in \mathbb{R}$ falls $z \neq 0$

Definition 5.3: Betrag einer komplexen Zahl

Mit der komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt für den Betrag von z:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z| = |\overline{z}|$$

Insbesondere lässt sich das multiplikative Inverse wie folgt ausdrücken:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - b \cdot \mathrm{i}}{a^2 + b^2}$$

5.1 Polarkoordinaten-Darstellung

2

Lineare Algebra

1: Verknüpfungen

Definition 1.1: Verknüpfung

Sei M eine Menge. Eine Abbildung $M \times M \to M, (a, b) \mapsto a \star b$ nennt man Verknüpfung.

1. Eine Verknüpfung heißt kommutativ, falls $a \star b = b \star a \quad \forall a, b \in M$ gilt.
2. Sie heißt assoziativ, falls $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c \quad \forall a, b, c \in M$ gilt.
   Man kann auch $a \star b \star c$ schreiben.
3. Ein Element $e \in M$ heißt neutrales Element bezüglich der Verknüpfung $\star$,
   falls $a \star e = e \star a = a \quad \forall a \in M$ gilt.

Definition 1.2: Invertierbarkeit

Sei M eine Menge mit einer Verknüpfung $\star$, die ein neutrales Element e besitzt, ein Element $a \in M$ heißt invertierbar, falls es ein Element $a^{-1} \in M$ gibt, so dass gilt:

$$a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$$

Definition 1.3: Homomorphismus

Seien $(G, \star)$ und $(H, *)$ Gruppen. Eine Abbildung $f : G \to H$ heißt (Gruppen-)Homomorphismus, falls gilt:

$$f(a \star b) = f(a) * f(b) \quad \forall a, b \in G$$

Lemma 1.1:

Ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ bildet stets das neutrale Element in G auf das neutrale Element in H ab.

Beweis:

Sei e das neutrale Element in G, dann folgt:

$$f(e) * f(g) = f(e \star g) = f(g)$$

Es folgt dann, dass $f(e)$ das neutrale Element in H ist.

2: Algebraische Strukturen

Definition 2.1: Magma

Eine Menge M mit einer Verknüpfung $\star$ heißt *Magma*, falls sie unter dieser Verknüpfung abgeschlossen ist, das heißt:

$$\forall u, v \in M : u \star v \in M$$

Definition 2.2: Halbgruppe

Eine Menge M mit einer Verknüpfung $\star$ heißt *Halbgruppe*, falls sie ein Magma ist und die Verknüpfung assoziativ ist:

HG 1 $\forall u, v \in M : u \star v \in M$

HG 2 $\forall u, v, w \in M : u \star (v \star w) = (u \star v) \star w$

Definition 2.3: Monoid

Eine Menge M mit einer Verknüpfung $\star$ heißt *Monoid*, falls sie eine Halbgruppe ist und ein neutrales Element bezüglich der Verknüpfung existiert:

M 1 $\forall u, v \in M : u \star v \in M$

M 2 $\forall u, v, w \in M : u \star (v \star w) = (u \star v) \star w$

M 3 $\exists e \in M \quad \forall u \in M : e \star u = u \star e = u$

Definition 2.4: Gruppe

Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\star$ heißt *Gruppe*, falls sie ein Monoid ist und zu jedem Element ein Inverses bezüglich der Verknüpfung exisitert:

G 1 Die Verknüpfung assoziativ ist,

G 2 ein neutrales Element besitzt,

G 3 jedes Element invertierbar ist.

Falls die Verknüpfung zusätzlich kommutativ ist, nennt man die Gruppe eine *abel'sche Gruppe* oder auch kommutative Gruppe.

Definition 2.5: Ring

Sei M eine Menge mit zwei Verknüpfungen $(+, \cdot)$ und den folgenden Eigenschaften:

R 1 $(M, +)$ ist eine abel'sche Gruppe mit neutralem Element 0.

R 2 die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ mit neutralem Element 1.

R 3 es gelten die Distributivgesetze:

$$(a+b)\cdot c = ac + bc$$
$$c\cdot(a+b) = ca + cb$$

R 4 $0 \neq 1$

Dan heißt M ein *Ring* (genauer ein Ring mit Eins - unitärer Ring).

Ist zusätzlich auch die Multiplikation $\cdot$ kommutativ und ist $M \setminus \{0\}$ eine Gruppe bezüglich $\cdot$ (d.h. besitzt jedes Element ein Inverses bzgl. $\cdot$) so heißt M *Körper*.

Satz 2.1: Eindeutigkeit der neutralen Elemente

In einer Gruppe ist das neutrale Element stats eindeutig, d.h. ist e ein neutrales Element und gibt es ein Element:

$$a \in G, \forall g \in G : a \star g = g \star a = g$$

Dann ist $a = e$!

Beweis:

Gelte $a \star g = g$ für ein $g \in G$. Dann folgt:

$$(a \star g) \star g^{-1} = g \star g^{-1}$$

Mit **G1** und **G3** gilt:

$$a \star (g \star g^{-1}) = e$$

Dann folgt mit **G3**:

$a \star e = e$ und damit $a = e$ □

BEMERKUNG: Ähnlich dazu der Beweis, dass inverse Elemente eindeutig bestimmt sind.

Definition 2.6: Untergruppe

Sei G eine Gruppe mit Verknüpfung $\star$ und neutralem Element e.
Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G, falls gilt:

UG 1 $\forall a, b \in U : a \star b \in U$ (Abgeschlossenheit)

UG 2 $\forall a \in U : a^{-1} \in U$

Immer gilt, dass der Kern eines Homomorphismus $f : G \to H$ d.h. $\mathrm{Kern}(f) = f^{-1}(\{e\})$ eine Untergruppe von G ist.

3: Vektorräume

Beispiel

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
\mathbb{R}^3 &= \{(x,y,z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&\vdots \\
\mathbb{R}^n &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^n$ auch als sogenannte Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ anstatt von } (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Mit der komponentenweisen Addition, der Vektoraddition:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

wird $\mathbb{R}^n$ zu einer abel'schen Gruppe mit dem Nullvektor als neutrales Element und dem negierten Vektor als inverses Element bezüglich der Addition.
In der Vektorrechnung nennt man Zahlen (z.B. Elemente aus $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$) *Skalare*, um Zahlen und Vektoren deutlich zu unterscheiden.

Sei $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist die *skalare Multiplikation* $x \cdot \lambda$ definiert durch $x \cdot \lambda := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

Die beiden Operationen Vektoraddition und skalare Multiplikation sind kennzeichnend für einen Vektorraum.

Definition 3.1: Vektorraum

Sei K ein Körper, dessen neutrales Element bezüglich der Multiplikation mit 1_K bezeichnet wird. Sei V eine Menge mit einer Verknüpfung $+$, so dass $(V, +)$ eine abel'sche Gruppe bildet.
Sei weiter eine Abbildung, genannt *skalare Multiplikation* $K \times V \to V$ gegeben, so dass folgende Bedingungen $\forall \alpha, \beta \in K; x, y \in V$ gelten:

V 1 $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (assoziativ)

V 2 $1_K \cdot x = x$ (neutrales Element des Körpers ist das neutrale bzgl $\cdot$)

V 3 $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributiv 1)

V 4 $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (distributiv 2)

Dann ist V ein *Vektorraum* über dem Körper K. Kurz auch K-Vektorraum. Die Verknüpfung $+$ wird Vektoraddition genannt. Für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ spricht man auch von einem reellen, bzw. komplexen Vektorraum.
Elemente von V nennt man Vektoren.

Beispiele

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$
- $\mathbb{C}^2$
- $\{0\}$ ist ein Vektorraum für jeden Körper K.
- Sei $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ die Menge der reellen Funktionen in einer Variable. Durch die punktweise Addition

  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

  und die punktweise skalare Multiplikation

  $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

  wird V zu einem Vektorraum.

Definition 3.2: Untervektorraum

Sei V ein K-Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum bzw. Teilvektorraum, falls gilt:

UV 1 Abschluss unter Vektoraddition:

$$\forall u, v : u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$$

UV 2 Abschluss unter skalarer Multiplikation:

$$\forall u \in U, \lambda \in K : \lambda \cdot u \in U$$

Beispiele Die folgenden sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$:

- $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$ (die x-Achse)
- $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$ (die Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten)

Lemma 3.1:

Für alle $\lambda \in K, v \in V$ wobei V ein K-Vektorraum ist, gilt:

1. $0_K \cdot v = 0_V$
2. $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$

Beweis:

1. Es gilt:

$$0 \cdot v = (0+0) \cdot v \underset{\textbf{(V 3)}}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

$$0 \cdot v + (-(0 \cdot v)) = (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-(0 \cdot v))$$

$$\underset{\textbf{(V 1)}}{=} 0 \cdot v + (0 \cdot v + (-0 \cdot v))$$

$$0 = 0 \cdot v + 0 = 0 \cdot v$$

Definition 3.3: Linearkombination

Seien $v_1, v_2, \ldots, v_k$ Vektoren aus dem K-Vektorraum V und seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$. Dann heißt der Vektor

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$$

Linearkombination von den Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Die Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ heißen *Koeffizienten* der Linearkombination.
Sind in der Linearkombination alle Koeffizienten gleich Null, handelt es sich um die *triviale Linearkombination*. Gibt es hingegen mindestens einen Koeffizienten $\lambda_j \neq 0$, handelt es sich um einee *nichttriviale Linearkombination*.

Definition 3.4:

Sei V ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann heißt die Menge aller Linearkombinationen

$$\{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \mid v_1, v_2, \ldots, v_k \in M, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K\}$$

der *Spann* oder die lineare Hülle von M.

$$\operatorname{Span}(M) := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \,\middle|\, \lambda_j \in K, v_j \in M \right\}$$

Beispiele

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \operatorname{Span}(\{v\}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- $\operatorname{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ (x_1, x_2-Ebene)

Satz 3.1:

Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann ist $\operatorname{Span}(M)$ ein Untervektorraum von V.

Beweis:

1. $\mathrm{Span}(M)$ ist nicht leer, da der Nullvektor als leere Linearkombination mindestens enthalten ist.
2. Abschluss unter skalarer Multiplikation, sei $\lambda \in K, v \in \mathrm{Span}(M)$:

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \quad \text{wobei } v_1, \ldots, v_k \in M \\ \lambda v &= \lambda(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k) \\ &= \lambda(\lambda_1 v_1) + \ldots + \lambda(\lambda_k v_k) \\ &= (\lambda\lambda_1) v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_k) v_k \end{aligned}$$

3. Abschluss unter Addition:

Definition 3.5: Erzeugendensystem

Gilt $V = \mathrm{Span}(M)$ für einen K-Vektorraum V und eine Teilmenge $M \subseteq V$, so sagt man M ist ein *Erzeugendensystem* von V.
Interessant ist die minimale Anzahl an Vektoren in einem Erzeugendensystem, bzw. ein *minimales Erzeugendensystem*.

Definition 3.6: Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $M \subseteq V$ heißt *linear abhängig*, wenn es eine nichttriviale Linearkombination gibt, die den Nullvektor ergibt. Andernfalls heißt M *linear unabhängig*!

Satz 3.2:

Eine Menge von Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn einen Vektor $v \in M$ gibt, der sich als Linearkombination mit Vektoren aus $M \setminus \{v\}$ darstellen lässt.

„⇒" Angenommen, M ist linear abhängig. Dann gibt es Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ und Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so dass die Linearkombination *nichttrivial* den Nullvektor ergibt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_j v_j &= -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_{j-1} v_{j-1} - \lambda_{j+1} v_{j+1} - \ldots - \lambda_n v_n \quad |\lambda_j \neq 0 \\ v_j &= \frac{1}{\lambda_j} \cdot (-\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_{j-1} v_{j-1} - \lambda_{j+1} v_{j+1} - \ldots - \lambda_n v_n) \end{aligned}$$

Damit ist v_j als nichttriviale Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus \{v_j\}$ dargestellt.

„⇐" Angenommen, es gibt einen Vektor $v \in M$ sowie Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in M \setminus \{v\}$ und Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\ 0 &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n - 1 \cdot v \end{aligned}$$

Dies ist eine nichttriviale Linearkombination mit Vektoren aus M, die 0 ergibt.

Definition 3.7: Basis

Eine Teilmenge B eines Vektorraums V heißt *Basis* von V falls B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Beispiele Für jeden Körper K gibt es die Standardbasis bzw. die *kanonische Basis* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ von K^n:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese sind linear unabhängig, nach der Folgerung zu Punkt 3. Die Standardbasis ist ein Erzeugendensystem, da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

Im Allgemeinen gibt es verschiedene Basen von demselben Vektorraum.

Satz 3.3: Charakterisierungen von Basen

Für eine Teilmene $B \subseteq V$ eines Vektorraums sind folgene Sätze äquivalent:

- B ist eine Basis
- Jeder Vektor in V lässt sich auf genau eine Weise als Linearkombination von Vektoren aus B schreiben.
- B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
- B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V

Bemerkung: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis, jede Basis hat gleich viele Elemente. (auch $\varnothing$ oder $|B| = \infty$ möglich)

Definition 3.8: Dimension

Die Anzahl der Elemente der Basis B eines Vektorraums V nennt man *Dimension*

$$\dim(V) = |B|$$

4: Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen sind Strukturerhaltende Abbildungen zwischen Vektorräumen, sie werden deshalb auch Vektorraumhomomorphismen genannt.

Definition 4.1: Lineare Abbildungen

Seien V und W Vektorräume über dem selben Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear*, falls

L 1 $\forall u, v \in V : f(u + v) = f(u) + f(v)$ (Additivität)

L 2 $\forall v \in V, \lambda \in K : f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$ (Homogenität)

Bemerkung: **L 1** ist dazu äquivalent, dass f ein Gruppenhomomorphismus zwischen den abel'schen Gruppen $(V, +)$ und $(W, +)$ ist.

Beispiele

- Für alle $\lambda \in K$ ist $f : V \to V, v \mapsto \lambda v$ eine Lineare Abbildung
- Insbesondere sind die identische Abbildung

  $$\mathrm{id}_V : V \to V, v \mapsto v$$

  und die Nullabbildung

  $$\mathrm{n}_V : V \to V, v \mapsto 0$$

  linere Abbildungen.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist *nicht* linear, denn

  $$4 = f(2) = f(1 + 1) \neq f(1) + f(1) = 2$$

4.1 Matrizen

Allgemein lassen sich lineare Abbildungen durch sog. *Matrizen* darstellen.
Sei A eine $m \times n$-Matrix, d.h. ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Dann ist durch

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ gegeben.

Bemerkung: Jede lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ lässt sich auf diese Weise mit einer $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K darstellen.

Satz 4.1:

Sei B eine Basis des K-Vektorraums V und sei W ein weiterer K-Vektorraum. Sei eine Abbildung $g : B \to W$ gegeben. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$, die g in dem Sinne fortsetzt, dass $f(b) = g(b) \quad \forall b \in B$ gilt.

Beweis:

Sei v ein beliebiger Vektor aus V. Dann kann man diesen durch Linearkombination der Basisvektoren $b_1, \ldots, b_k \in B$ darstellen:

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k$$

Angenommen, f sei eine lineare Abbildung $f : V \to W$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k) \\ &= f(\lambda_1 b_1) + \ldots + f(\lambda_k b_k) \\ &= \lambda_1 f(b_1) + \ldots + \lambda_k f(b_k) \\ &= \lambda_1 g(b_1) + \ldots + \lambda_k g(b_k) \end{aligned}$$

Damit ist der Wert von $f(v)$ bestimmt, dies zeigt die Eindeutigkeit.

Um die Existenz einer solchen Abbildung zu zeigen, bemerken wir, dass die Linearkombination von v mit B eindeutig ist, da B eine Basis von V ist. Dies zeigt, dass $f : V \to W$ wohldefiniert ist, wenn wir die Formel von $f(v)$ als Definition von f verwenden. Es ist noch zu zeigen, dass die so definierte Abbildung linear ist.
Seien zwei Vektoren $u, v \in V$ gegeben.
Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l, v_1, \ldots, v_k$ und $w_1, \ldots, w_l$ so dass gilt:

$$u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$$

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_l w_l$$

Insbesondere gibt es Vektoren $b_1, \ldots, b_m \in B$ und Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K, \beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ so dass

$$u = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_m b_m$$

$$v = \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_m b_m$$

Dann folgt mit unserer Definition:

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_m b_m + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_m b_m) \\ &= f((\alpha_1 \beta_1) b_1) + \ldots + f((\alpha_m \beta_m) b_m) \\ &= (\alpha_1 \beta_1) g(b_1) + \ldots + (\alpha_m \beta_m) g(b_m) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Damit ist die Additivität gezeigt.
Um die Homogenität zu zeigen, bemerken wir, falls $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k$ und $\mu \in K$:

$$f(\mu \cdot v) = f(\mu(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k)) = \mu \cdot f(v)$$

4.2 Darstellende Matrix

Wenn wir nun annehmen, dass V und W endlich dimensional sind, d.h es gibt endlich viele Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W. Dann genügt es, dass man zu jedem Basisvektor v_j die eindeutig bestimmte Darstellung des Vektors $f(v_j)$ bezüglich der Basis $\{w_1, \ldots, w_m\}$ kennt.
Seien also durch

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + \ldots + a_{mj}w_m$$

die Einträge einer Matrix mit Koeffizietn $a_{ij} \in K$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Dann ist in der Matrix die gesamte Information über die lineare Abbildung f enthalten.
Umgekehrt ist durch eine beliebige $m \times n$-Matrix (m Zeilen, n Spalten) mit Einträgen aus K eine lineare Abbildung $V \to W$ bezüglich der Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ gegeben.
Die Matrix A heißt *darstellende Matrix* der linearen Abbildung bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$.

Definition 4.2: Darstellende Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K wird mit $\mathrm{M}(m, n, K)$ bezeichnet. Seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ jeweils eine Basis des K-Vektorraums V bzw. W. Und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$A = ((a_{ij})) \in \mathrm{M}(m, n, K)$$

die *darstellende Matrix* von f bezüglich den Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ von V bzw. W, falls

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + \ldots + a_{mj}w_m \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

MERKREGEL Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Bilder der Basisvektoren.

Lineare Abbildungen sind wegen der Additivität Insbesondere Gruppenhomomorphismen bezüglich der Addition. Analog wie für Gruppenhomomorphismen gilt:

Satz 4.2:

Bild und Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$ sind jeweils Untervektorräume von V bzw. W.

Beweis:

- $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Untervektorraum von W:
  Wegen $f(0) \in \mathrm{Bild}(f)$ ist $\mathrm{Bild}(f)$ nicht leer.
  Seien außerdem $f(u), f(v) \in \mathrm{Bild}(f)$, dann gilt:

  $$f(u) + f(v) = f(u + v) \in \mathrm{Bild}(f)$$

  und ebenso

  $$\lambda f(v) = f(\lambda \cdot v) \in \mathrm{Bild}(f) \quad \forall \lambda \in K$$

- $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Untervektorraum von V:

  Es gilt für jede lineare Abbildung, dass das neutrale Element eines Vektorraums auf das neutrale Element des Zielvektorraums abgebildet wird, d.h. $f(0) = 0$. Also ist $\mathrm{Kern}(f)$ nicht leer.

  Seien $u, v \in \mathrm{Kern}(f)$, dann folgt:

  $$f(u + v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0 \in \mathrm{Kern}(f)$$

  und ebenso

  $$f(\lambda \cdot v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot 0 = 0 \in \mathrm{Kern}(f) \quad \forall \lambda \in K$$

Definition 4.3:

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt

$$\text{Vektorraum-}\begin{cases} \text{Monomorphismus, falls } f \text{ injektiv ist} \\ \text{Epimorphismus, falls } f \text{ surjektiv ist} \\ \text{Isomorphismus, falls } f \text{ bijektiv ist} \\ \text{Endomorphismus, falls } W = V \\ \text{Automorphismus, falls } f \text{ ein bijektiver Endomorphismus ist} \end{cases}$$

Bemerkung:

- Die Automorphismen $\mathrm{Aut}(V)$ eines Vektorraums V bilden eine Gruppe mit der Verkettung als Verknüpfung.
- Die Menge der Endo- bzw. Automorphismen wird mit $\mathrm{End}(V)$ bzw. $\mathrm{Aut}(V)$ bezeichnet.
- Die Menge der linearen Abbildungen $V \to W$ mit $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Definition 4.4: Rang einer Abbildung

Die Dimension des Bildes einer linearen Abbildung f heißt auch *Rang* von f (engl. rank).

$$\mathrm{rk}\,(f) := \dim\,(\ker\ f)$$

Satz 4.3: Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Für lineare Abbildungen $f : V \to W$ gilt, falls V endlich dimensional ist, die *Dimensionsformel für lineare Abbildungen*:

$$\begin{aligned} \dim\,(V) &= \mathrm{rk}\,(f) + \dim\,(\ker\ f) \\ &= \dim\,(\mathrm{im}\ f) + \dim\,(\ker\ f) \end{aligned}$$

Lemma 4.1:

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern trivial ist.

5: Matrizenrechnung

Sei $M(m, n, K)$ die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K.
Matrizen, deren Zeilenzahl mit der Spaltenzahl übereinstimmen nennt man *quadratisch*. Wir beschreiben sie mit $M(n, K) := M(n, n, K)$.
Für eine Matrix $A \in M(n, K)$ schreibt man:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Definition 5.1: Matrizenaddition

Die Addition zweier Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(m, n, K)$ gleicher Zeilen- und Spaltenzahl ist komponentenweise definiert:
$C := A + B$ wobei $c_{ij} = a_{ij}) + (b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Definition 5.2: Skalare Multiplikation

Die skalare Multiplikation einer Matrix $A = (a_{ij} \in M(m, n, K)$ mit $\lambda \in K$ ist definiert durch:
$\lambda A := \lambda(a_{ij}) \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ (wiederum komponentenweise)

Bemerkung: Mit diesen beiden Operationen wird $M(m, n, K)$ zu einem K-Vektorraum. Dieser ist isomorph zu $K^{m \cdot n}$. D.h. es gibt einen Vektorraumisomorphismus $M(m, n, K) \rightarrow K^{m \cdot n}$.

$$M(m, n, K) \stackrel{\sim}{=} K^{m \cdot n}$$

Deswegen sieht man auch die Bezeichnung $K^{m \cdot n}$ für $M(m, n, K)$.

Definition 5.3: Matrixprodukt

Seien $A \in M(l, m, K), B \in M(m, n, K)$ d.h. stimmen die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B überein.
Dann ist das *Matrixprodukt*:

$$A \cdot B = C \in M(l, n, K)$$

definiert durch:

$$C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot a_{kj} \right)$$

Merkregel Zeile mal Spalte

BEMERKUNG:

- Die Matrixmultiplikation ist *nicht* kommutativ!
- Spezialfall: Anwenden einer Matrix auf einen Spaltenvektor: Man fasst Spaltenvektoren aus K^n als $n \times 1$-Matrizen auf.

Satz 5.1:

Das Matrixprodukt entspricht der Verkettung von linearen Abbildungen.

Genauer: Seien U, V, W drei K-Vektorräume mit den Basen

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{u_1, \ldots, u_n\}, \\ \mathcal{C} &= \{v_1, \ldots, v_n\}, \\ \mathcal{D} &= \{w_1, \ldots, w_n\}\end{aligned}$$

- $A \in M(l, m, K)$ die darstellende Matrix von $f : V \to W$ bezüglich $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$.
- $B \in M(m, n, K)$ die darstellende Matrix von $g : U \to V$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Dann ist $A \cdot B \in M(l, n, K)$ die darstellende Matrix von $f \circ g = f(g) : U \to W$ bezüglich den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$.

Beweis:

Es gilt:

$$g(u_j) = \sum_{i=1}^{m} (b_{ij} \cdot v_i)$$

und somit:

$$\begin{aligned}f(g(u_j)) &= \sum_{i=1}^{m} (b_{ij} \cdot f(v_j)) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} \cdot \left(\sum_{p=1}^{l} a_{pi} \cdot w_p \right) = \sum_{p=1}^{l} \left(\sum_{i_1}^{m} a_{pi} \cdot a_{ij} \right) \cdot w_p \\ &= \underbrace{\sum_{p=1}^{l} (c_{pj} \cdot w_p)}_{\text{Matrixprodukt}}\end{aligned}$$

Die quadratischen Matrizen $M(n, K)$ bilden einen im Allgemeinen nicht kommutativen Ring mit der Matrixaddition und -multiplikation.
Es gelten:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist die sogenannte $n \times n$-Einheitsmatrix:

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

mit anderen Worten:

$$E = (\delta_{ij})_{1 \leq i \leq n} \text{ wobei } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

δ_{ij} wird auch das KRONECKER-Delta genannt.
Die $n \times n$-Einheitsmatrix ist die darstellende Matrix der identischen Abbildung id_{K^n}.

Definition 5.4: Inverse Matrix

$A \in M(n, K)$ heißt invertierbar, falls es eine Matrix A^{-1} gibt mit $A^{-1} \in M(n, K)$ so, dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ gilt.
In diesem Fall nennt man A^{-1} die inverse Matrix von A.

Satz 5.2: Allgemeine lineare Gruppe

Die Menge $\mathrm{GL}(n, K) := \left\{A \in M(n, K) \,\middle|\, \exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n\right\}$ bildet eine Gruppe mit der Matrixmultiplikation.

Beweis:

1. Matrixmultiplikation ist assoziativ, da sie die Abbildungsverkettung darstellt.
2. E_n ist das neutrale Element.
3. Außerdem besitzen invertierbare Matrizen natürlich ein Inverses.

$\mathrm{GL}(n, K)$ wird auch als die allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über dem Körper K bezeichnet.

Satz 5.3:

Eine Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn die lineare Abbildung $x \mapsto A \cdot x$ bijektiv ist. Ihre Umkehrabbildung ist durch $x \mapsto A^{-1} \cdot x$ gegeben.

Beweis:

„$\Leftarrow$“ $f : K^n \to K^n, f(x) = A \cdot x$ bijektiv, dann gilt für die darstellende Matrix B der Umkehrabbildung $f^{-1} : K^n \to K^n$, dass $A \cdot B = E_n = B \cdot A$. Das heißt, die darstellende Matrix B ist die Inverse von A.

„$\Rightarrow$“ Ist A invertierbar, dann ist durch $x \mapsto A^{-1} \cdot x$ die Umkehrabbildung gegeben, denn $A^{-1} \cdot (A \cdot x) = E \cdot x = x$

6: Basiswechsel - Koordinatentransformation

Erinnerung: Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann hat jeder Vektor $v \in V$ eine Darstellung bezüglich B:

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in K$$

mit eindeutig bestimmten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Außerdem ist der Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis B:

$$v_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$$

Ist $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine weitere Basis von V, dann hat v im Allgemeinen verschiedene Darstellungen v_B, v_C.

6.1 Transformationsmatrix

Beispiel: Seien zwei Basen für den Vektorraum $V = \mathbb{R}$ gegeben:

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}, C = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_2} \right\}$$

Dann lassen sich die Basisvektoren in C durch die in B ausdrücken:

$$w_1 = 2v_1$$
$$w_2 = 2v_1 - v_2$$

das heißt w_1 und w_2 haben bezüglich B die Koordinatendarstellungen

$$w_{1_B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w_{2_B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben diese Vektoren jetzt als Spalten in die *Transformationsmatrix*

$$T_B^C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Transformation von } C \text{ nach } B\text{)}$$

Das Anwenden dieser Matrix auf den Koordinatenvektor v_C eines Vektors $v \in V$ liefert den Koordinatenvektor v_b bezüglich der Basis B.

$$v_b = T_B^C \cdot v_C$$

Definition 6.1: Transformationsmatrix

Seien $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ zwei Basen eines K-Vektorraums gegeben. Und die Matrix $T_C^B \in M(n, K)$ deren Spalten durch Koordinatendarstellungen der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ bezüglich der Basis C gebildet werden, das heißt:

$$T_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ (v_1)_C & \cdots & (v_n)_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

diese heißt *Transformationsmatrix* oder auch *Basiswechselmatrix* von B nach C.

6.2 Basiswechsel

Basiswechsel bei einer darstellenden Matrix einer linearen Abbildung:
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen K-Vektorräumen. Beim Übergang von einer Basis in V oder in W ändern sich nicht nur die Koordinatendarstellungen von einzelnen Vektoren, sondern auch die Einträge der darstellenden Matrix von f.

Satz 6.1:

Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume. B, C Basen von V und D, E Basen von W. Sei f_D^B die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $f : V \to W$ bezüglich der Basen B und D. Dann gilt für die darstellende Matrix bezüglich C und E:

$$f_E^C = T_E^D \cdot f_D^B \cdot T_B^C$$

Beweis:

Sei $v \in V$:

$$T_E^D \cdot f_D^B \cdot \underbrace{T_B^C \cdot v_C}_{v_B} = T_E^D \cdot f_D^B \cdot v_B = T_E^D \cdot (f(v))_D = (f(v))_E$$

MERKREGEL: „Kürzen “:

$$T_E^D \cdot f_D^B \cdot T_B^{\cancel{C}} \cdot v_{\cancel{C}} = T_E^D \cdot f_D^{\cancel{B}} \cdot v_{\cancel{B}} = T_E^{\cancel{D}} \cdot (f(v))_{\cancel{D}} = (f(v))_E$$

PROBLEM: Wie findet man geeignete Transformationsmatrizen, um eine lineare Abbildung möglichst einfach darzustellen, idealerweise als eine Diagonalmatrix?

7: Erweiterte Matrixrechnungen

Um Gleichungssysteme systematisch zu lösen ist es zweckmäßg nicht die Gleichungen, sondern nur die Koeffizientenmatrix und die rechten Seiten zu betrachten.

Definition 7.1: Erweiterte Matrixschreibweise

Sei durch $A \in M(m,n,K)$ und $b \in K^m$ das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ gegeben, dann ist

$$(A \mid b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

die zum System gehörende *erweiterte Matrix*.

7.1 Elementare Zeilenoperationen

Die folgenden sogenannten *elementaren Zeilenumformungen* ändern nichts an der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$, wenn sie an der erweiterten Matrix $(A \mid b)$ vorgenommen werden.

EU1 Vertauschen zweier Zeilen

EU2 Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar ungleich 0

EU2 Adition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Definition 7.2: Zeilen-Stufenform

Eine Matrix $A \in M(m,n,K)$ liegt in *Zeilen-Stufenform* vor, falls es ein $k \in \{0,\dots,m\}$ gibt, so dass gilt:

- Die ersten k Zeilen sind von 0 verschieden und der Spaltenindex des am weitesten links stehenden, von 0 verschiedenen Eintrags erhöht sich jeweils um mindestens 1 beim Übergang von einer Zeile zur darunterliegenden innerhalb der ersten k Zeilen.
- Die unteren $m-k$ Zeilen sind alle Nullzeilen.

Satz 7.1:

Jede Matrix lässt sich mit endlich vielen elementaren Zeilenumformungen auf Zeilen-Stufenform bringen.

Beweis:

Das hier beschriebene Verfahren ist der sogenannte Gauß-Jordan'sche-Eliminationsalgorithmus!

1. Sortiere die Zeilen nach dem Auftreten des am weitesten links stehenden von Null verschiedenen Element. Nullzeilen unten einsortieren.

2. Führe dann Umformungen durch

Definition 7.3: Pivotelemente

Die *Pivotelemente* einer Matrix in Zeilen-Stufenform sind die in ihrer Zeile am weitesten links stehenden von Null verschiedenen Elemente, die nicht in einer Nullzeile stehen. Die *Pivotvariablen* sind die zugehörigen Variablen. x_j ist eine Pivotvariable genau dann, wenn in der j-ten Spalte von A ein Pivotelement steht.
Die Anzahl der Pivotvariablen ist gleich k (s.o.).

8: Lineare Gleichungssysteme

Definition 8.1: Lineares Gleichungssystem

Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) in n Unbekannten mit m Gleichungen ist ein System der Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Wobei die Koeffizienten a_{ij} und die Elemente b_i auf der rechten Seite Elemente eines Körpers K sind.
Ein Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

heißt Lösung, wenn die $x_1, \ldots, x_n$ alle m Gleichungen gleichzeitig erfüllen.
Sind alle Elemente b_i gleich 0, heißt das Gleichungssystem *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Bemerkung: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} := \{x \in K^n \mid A \cdot x = b\}$

Definition 8.2: Zugehöriges homogenes System

Sei durch $A \cdot x = b$ ein LGS gegeben. Falls $b = 0$ gilt, dann handelt es sich um ein homogenes System, sonst um ein inhomogenes.
Man bezeichnet $A \cdot x = 0$ als das *zu* $A \cdot x = b$ *gehörige homogene System*.

Satz 8.1: Kennzeichnung der Lösungsmenge

Sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem mit nichtleerer Lösungsmenge. Sei $p \in K^n$ eine beliebige Lösung des Systems.
Sei U die Lösung des zugehörigen homogenen Systems, dann gelten die Aussagen:

1. U ist ein Untervektorraum des K^n.
2. Die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ ist $p + U = \mathbb{L} = \{p + u \mid u \in U\}$

Beweis:

1. Gilt, da die Lösungsmenge U des homogenen Systems der Kern der linearen Abbildung $x \mapsto A \cdot x, K^n \to K^m$ ist.

2. Sei $x \in p + U$, das heißt $x = p + u$ mit $u \in U$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot x = A(p+u) &= A \cdot p + A \cdot u \text{ (u ist aus dem Kern)} \\ &= b + u \end{aligned}$$

Das heißt, x ist eine Lösung von $A \cdot x = b$.
Umgekehrt: ist x eine Lösung von $A \cdot x = b$, dann gilt:

$$A(x - p) = b - b = 0$$

das heißt, $x - p \in U \Leftrightarrow x \in p + U$

Bemerkung:

- Man nennt p wie oben auch *partikuläre* oder *spezielle* Lösung des inhomogenen Systems.
- Teilmengen eines Vektorraums V der Form $p+U$ wobei $p \in V, U \subseteq V$ und U ein Untervektorraum von V ist, nennt man auch *affine Unterräume* von V.

  Allgemein ist eine Teilmenge $A \subseteq V$ ein affiner Untterraum wenn A leer ist oder von der Form $A = p + U, p \in V, u \subseteq V$ und U ein Untervektorraum ist.
- Die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen sind immer affine Unterräume von K^n.
- Durch weitere Zeilenumformungen lässt sich eine Matrix in Zeilen-Stufenform in die sogenannte reduzierte Zeilen-Stufenform bringen:

  Jedes Pivotelement ist 1 und über (und natürlich darunter) jedem Pivotelement stehen Nullen.
- Will man ein LGS $Ax = b$ simultan für verschiedene rechte Seiten $Ax = b_1, Ax = b_2, \ldots$ lösen, kann man diese zu einer einzigen erweiterten Matrix zusammenfassen.

  $$\left(A \mid b_1 \quad b_2 \quad \cdots\right)$$
- Insbesondere, setzt man für eine quadratische Matrix $A \in M(n, K)$ als rechte Seiten die Standardbasisvektoren ein, betrachtet man also die erweiterte Matrix

  $$\left(A \mid e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n\right) = \left(A \mid E_n\right)$$

  erhält man ein Verfahren, mit dem man die Invertierbarkeit von A prüfen kann und ggf. die Inverse bestimmen kann.

Satz 8.2: Inverse Matrix berechnen

Sei $A \in M(n, K)$ eine quadratische Matrix und sei $(A|e_1|\ldots|e_n) = \left(A \mid E_n\right) \in M(n, 2n, K)$ die Matrix, die durch Nebeneinandersetzen von A und der $n \times n$-Einheitsmatrix entsteht.
Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn sich diese erweiterte Matrix ohne Entstehen von Nullzeilen auf Zeilen-Stufenform bringen lässt.
In diesem Fall gilt: Ist $(E|B)$ die reduzierte Zeilen-Stufenform von $(A|E)$, dann ist B das Inverse von A.

9: Determinanten und der Gauss-Algorithmus

9.1 Determinanten

Definition 9.1: Determinante einer 2×2-Matrix

Für eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, K)$ definieren wir die *Determinante* von A durch

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Satz 9.1: Invertierbarkeit einer 2×2-Matrix

Eine 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Wir wollen die Definition auf quadratische Matrizen beliebiger Größe erweitern:

$$\det : M(n, K) \to K$$

A soll genau dann invertierbar sein, wenn $\det A \neq 0$.
Dazu fassen wir eine $n \times n$-Matrix als ein n-Tupel von n-Zeilenvektoren auf, also als ein Element von

$$(K^n)^n = \underbrace{K^n \times K^n \times \ldots \times K^n}_{n \text{ mal}}$$

- Eine Abbildung $d : V^n \to K$ wobei V ein K-Vektorraum ist, heißt *multilinear*, wenn

  $$V \to K, x \mapsto d(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

  für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $v_k \in V$ eine lineare Abbildung ist. Oder kurz gesagt, wenn sie in allen Argumenten linear ist.

- Sie heißt alternierend, wenn sie den Wert 0 annimmt sobald zwei der Argumente gleich sind.

- Sie heißt normiert, falls $d(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$ gilt, sie also auf die Einheitsmatrix angewendet die Zahl Eins ergibt.

(Die oben definierte Determinante für 2×2-Matrizen hat diese Eigenschaften)

Definition 9.2: Determinante

Es gibt genau eine Abbildung

$$(K^n)^n \to K$$

die multilinear, alternierend und normiert ist.
Der Wert dieser Abbildung auf die Zeilen einer Matrix $A \in M(n,K)$ angewendet heißt Determinante einer Matrix:

$$\det A$$

9.1.1 Berechnung der Determinante

Man kann $\det A$ mithilfe des Gaußalgorithmus berechnen:

Satz 9.2:

Sei $A \in M(n,K)$ eine quadratische Matrix, dann ändert sich die Determinante bei elementaren Zeilenumformungen wie folgt:

EU 1 Beim Vertauschen zweier Zeilen multipliziert sich $\det A$ mit (-1).

EU 2 Wird eine Zeile mit $\lambda \in K$ multipliziert, dann multipliziert sich die Determinante ebenfalls mit λ, d.h. man muss $\det A$ mit dem Kehrwert multiplizieren um das richtige Ergebnis zu erhalten.

EU 3 Wird ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert, ändert sich der Wert der Determinante nicht.

Beweis:

EU 1 wegen Multilinearität und alternierend:

$$\begin{aligned}\underbrace{\det(\dots,v+w,\dots,v+w,\dots)}_{=0} &= \det(\dots,v,\dots,v+w,\dots)+\det(\dots,w,\dots,v+w,\dots)\\ &= \underbrace{\det(\dots,v,\dots,v,\dots)}_{=0}+\det(\dots,v,\dots,w,\dots)+\\ &\quad+\det(\dots,w,\dots,v,\dots)+\underbrace{\det(\dots,w,\dots,w,\dots)}_{=0}\\ \det(\dots,v,\dots,w,\dots) &= -\det(\dots,w,\dots,v,\dots)\end{aligned}$$

EU 2 folgt direkt aus der Multilineariät.

EU 3 wegen der Multilinearität:

$$\det(\dots,v,\dots,w+\lambda\cdot v,\dots)=\det(\dots,v,\dots,w,\dots)+\lambda\cdot\underbrace{\det(\dots,v,\dots,v,\dots)}_{=0}$$

Bemerkung: Diese Eigenschaften genügen, um jede Determinante auszurechnen (mit dem Gaußalgorithmus). Entweder entsteht eine Nullzeile oder man formt um bis zur Einheitsmatrix.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1 & \\ & 1\end{vmatrix} = -2 = 1\cdot 4 - 2\cdot 3$$

Lemma 9.1: Determinante von Matrizen in oberer Dreiecksgestalt

Für Diagonalmatrizen und allgemeiner, für obere Dreiecksmatrizen gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Beweis:

Für die Diagonalmatrizen direkt aus der **(EU 2)** und der Normiertheit der Determinante.
Für die obere Dreiecksgestalt gilt, dass man sie durch **(EU 3)** auf Diagonalgestalt bringen kann falls alle Elemente ungleich Null sind. Dabei ändert sich nichts am Wert der Determinante. Ist eines der Diagonalelemente Null, entsteht eine Nullzeile durch den Gaußalgorithmus $\rightsquigarrow \det A = 0$.

Satz 9.3: Determinante und Invertierbarkeit

Die Determinante einer Matrix ist genau dann von Null verschieden, wenn die Matrix invertierbar ist.

Beweis:

Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn in einer Zeilen-Stufenform keine Nullzeilen vorkommen. Dies ist genau dann der Fall wenn die Determinante von Null verschieden ist.

Bemerkung: Aus dem Satz folgt die Eindeutigkeit der Determinante, denn wir können ihren Wert berechnen.

Satz 9.4:

Sie $A \in M(n, K)$, dann bezeichnet für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ A_{ij} die Matrix aus $M(n-1, K)$ die aus Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Satz 9.5: La-Place'scher Entwicklungssatz

Sie $A \in M(n, K)$ und $j \in 1, \ldots, n$, dann gilt:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ji} \cdot \det A_{ij}$$

Erläuterung: Dieses Verfahren wird auch Entwickeln nach der j-ten Spalte genannt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und } j = 1 \text{ (Entwickeln nach der 1. Spalte)}$$

Den Faktor $(-1)^{i+j}$ können wir uns als schachbrettartiges Muster von Vorzeichen denken:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \det A_{11} - 4 \cdot \det A_{12} + 7 \cdot \det A_{13} \\ &= \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 - 4(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 7(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) \\ &= 45 - 48 - 4(18 - 24) + 7(12 - 15) \\ &= -3 - 4(-6) + 7(-3) \\ &= -3 + 24 - 21 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Beweis:

Wir weisen nach, dass es sich bei der Formel um eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung handelt.

Induktionsvoraussetzung: Damit die Formel auch für 1×1-Matrizen sinnvoll ist, setzen wir für $A \in M(1, K)$ $\det A_{11} = 1$, d.h. die Determinante einer 0×0-Matrix ist 1.

Induktionsanfang: $n = 1$
Die Formel lautet

$$\det A = \det A_{11} = a_{11} \cdot \det(A_{11}) = a_{11}$$

diese Abbildung ist linear, alternierend und normiert.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Die Formel ist linear in der i-ten Zeile, da Linearkombination der Einträge $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ der i-ten Zeile. Sie ist auch linear in den anderen Zeilen, da Linearkombination der $\det A_{ij}$, die nach **IV** multilinear sind.
Sind zwei Zeilen gleich, dann sind nach **IV** alle $\det A_{ij} = 0$ außer die beiden, für die der Index einer der beiden Nullzeilen ist. Aber hier ist $a_{ij} = 0$! (Alternierend)
Die Formel $\underbrace{(-1)^{i+j}}_{=1} \cdot \underbrace{a_{jj}}_{=1} \cdot \underbrace{\det E_{ij}}_{=1}$ ist normiert.

Satz 9.6: Regel von Sarrus

Für die Determinante einer 3×3-Matrix gilt:

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Merkregel: „Jägerzaunregel“

Vorsicht! Verallgemeinert sich nicht auf höhere Dimensionen.

Beweis:

Entwickeln nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\
&\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}
\end{aligned}$$

Satz 9.7: Leibniz’sche Formel

Für die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A \in M(n, K)$ gilt:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

wobei $\mathrm{Sym}(n) = \left\{\sigma : \{1, \ldots, n\} \overset{\text{bijektiv}}{\longrightarrow} \{1, \ldots, n\}\right\}$ die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ (auch die symmetrische Gruppe vom Grad n genannt) ist. Und wobei sgn das Vorzeichen der Permutation ist, d.h. $\mathrm{sgn}(\sigma) = +1$ bei einer geraden Permutation (Hintereinanderausführung von einer geraden Anzahl an Vertauschungen), $\mathrm{sng}(\sigma) = -1$ sonst.

Weitere Bemerkungen zur Determinante:

- Für die Transponierte Matrix $A^T = (a_{ji})$ gilt $\det A^T = \det A$. Dies folgt direkt aus der Leibniz’schen Formel. Insbesondere kann man mit der LaPlace’schen Formel auch nach einer Zeile entwickeln.
- Für zwei Matrizen $A, B \in M(n, K)$ gilt der Determinantenmultiplikationssatz:

  $$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

- Für Blockdiagonal- bzw. Bockdreiecksmatrizen gilt

  $$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

  für $A \in M(n, K), B \in M(m, K), C \in M(n, K)$
- Oft schreibt man auch $|A|$ anstelle von $\det A$.

9.2 Gaußalgorithmus Teil 2:

Oft hat man das Problem für einen gegebenen (Unter-)Vektorraum, der von einer endlichen Menge von Vektoren aufgespannt wird, eine Basis zu ermitteln. Die beiden folgenden Sätze zeigen, dass man hierfür mit dem Gaußalgorithmus verwenden kann.

Satz 9.8:

Elementare Zeilenumformungen ändern nichts am Spann der Zeilenvektoren einer Matrix.

Satz 9.9:

Die von Null verschiedenen Zeilen einer Matrix in Zeilenstufenform sind linear unabhängig.

Rezept zum Bestimmen einer Basis:

1. Bilde die Matrix, die diese Vektoren als Zeilen hat.
2. Bringe die Matrix auf Zeilenstufenform.
3. Die von Null verschiedenen Zeilen bilden eine Basis, insbesondere ist die Dimension gleich der Anzahl der Vektoren.

10: Eigenwerte

Wir betrachten hier lineare Endomorphismen, d.h. lineare Abbildungen $f : V \to V$, die einen Vektorraum in sich abbilden.
Ziel ist es, eine möglichst einfache darstellende Matrix eines Endomorphismus zu finden, durch geeigneten Basiswechsel.

Definition 10.1: Eigenwerte und -vektoren

Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ und ein $\lambda \in K$, so dass $f(v) = \lambda v$ gilt, dann heißt λ Eigenwert von f und v Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Die Menge der Eigenwerte heißt Sprektrum. Entsprechend ist λ Eigenwert der Matrix A, wenn $A \cdot v = \lambda v$ gilt.

Bemerkung: Der Kern eines Endomorphismus besteht aus den Eigenvektoren zum Eigenwert 0.

Definition 10.2: Eigenraum

Ist $f : V \to V$ ein linearer Endomorphismus und λ ein Eigenwert von f, dann heißt

$$E_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

der Eigenraum zum Eigenwert λ von f. Der Eigenraum besteht also aus allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ und dem Nullvektor.

Lemma 10.1:

Die Menge E_λ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis:

Dies gilt, da E_λ der Kern des linearen Endomorphismus $f - \mathrm{id}_v \cdot \lambda : V \to V$ ist. □

Satz 10.1:

Der Skalar $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von $A \in M(n, K)$, wenn

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Dies liefert eine Methode zum Bestimmen der Eigenwerte einer quadratischen Matrix. Wir betrachten ab jetzt nur noch die Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$.

Definition 10.3: Charakteristisches Polynom

Sei $A \in M(n, K)$ dann heißt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

das Charakteristische Polynom von A. Das charakteristische Polynom ist ein Polynom $n$ten Grades in den Variablen λ.

3

Analysis

1: KONVERGENZ IN METRISCHEN RÄUMEN

1.1 Metrische Räume

Um Konvergenz (beliebig genaue Approximation) beschreiben zu können, benötigen wir den Begriff des Abstands.

Definition 1.1: Metrik, metrischer Raum

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik (auch Abstandsfunktion), wenn sie für alle $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften hat.

M1 $\varrho(x, y) \geq 0$ und es gilt $\varrho(x, y) = 0$ gdw. $x = y$

M2 $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, d.h. ϱ ist eine symmetrische Funktion

M3 $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Eine Menge X versehen mit einer Metrik nennen wir metrischen Raum.

BEISPIELE:

- $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) = |x - y|$
- $X = \mathbb{R}^n$, in $\mathbb{R}^n$ ist der *euklidische Abstand* gegeben durch

$$\begin{aligned}\varrho(x, y) &= \varrho\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\end{aligned}$$

  vgl. dem Satz von PYTHAGORAS

- Auf jeder nichtleeren Menge kann man die *diskrete Metrik* einführen:

$$\mathrm{d}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

- Ist V ein *euklidischer Vektorraum*, dann ist durch $\|v\| = \sqrt{<x, y>}$ eine *Norm* gegeben,falls für jede Norm $\|\cdot\|$ liefert $\varrho(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik. Mit anderen Worten, jeder normierte Vektorraum ist ein metrischer Raum.
- In der *Codierungstheorie* führt man auf der Menge der n-stelligen Binärwörter

$$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \{0, 1\}\}$$

den *Hemmingabstand* ein:

$$\varrho(x, y) = \text{ Anzahl von Stellen an denen sich } x \text{ und } y \text{ unterscheiden.}$$

Z.B. $\varrho((0,0,1,1),(0,0,1,0)) = 1$. Anwendung: Fehlerkorrigierende Codes.

Mit Hilfe der Metrik führen wir den Begriff der Kugelumgebung eines Punktes in einem metrischen Raum ein.

Definition 1.2: Kugelumgebung

Sei ein Punkt $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl. Unter der Kugelumgebung von x_0 mit Radius ϵ um den Mittelpunkt x_0 versteht man die Menge

$$K_\epsilon(x_0) := \{x \in X \mid \varrho(x, x_0) < \epsilon\}$$

Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik ist $K_\epsilon(x_0)$ die *offene Kreisscheibe* (das Innere der Kreisscheibe) um x_0 mit Radius ϵ. (Punkte auf dem Kreis sind nicht in K_ϵ!)

Definition 1.3: Offene und abgeschlossene Mengen

Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen*, falls zu jedem $x_0 \in U$ eine Kugelumgebung mit $\epsilon > 0$ existiert, die ganz in U enthalten ist.
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}$ und $\varrho(x, y) = |x - y|$.
Dann ist das Intervall

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

im obigen Sinne offen.
Das Intervall

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ist abgeschlossen.
Das Intervall

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

ist weder abgeschlossen noch offen.

1.2 Konvergenz

Sei X ein metrischer Raum.

Definition 1.4: Folgen

Eine *Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$, so dass jedem Element $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n \in X$ zugeordnet wird.
Wir schreiben oft auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)$ oder auch einfach a_n für eine Folge.
Die Elemente a_n werden auch die Glieder der Folge oder Folgenglieder genannt.

Beispiel: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $a_n = \frac{1}{n}$. Dann ist (a_n) die Folge der Kehrwerte der natürlichen Zahlen.
Jeder weiß, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen Null geht, aber was bedeutet das eigentlich genau?

Definition 1.5: Konvergenz einer Folge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem metrischen Raum X konvergiert gegen das Element $a \in X$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$a_n \in K_\epsilon(a) \quad \forall n \geq n_0$$

In diesem Fall heißt a der Grenzwert oder auch Limes der Folge (a_n) und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n),\ \lim(a_n),\ a_n \to a$$

1.2.1 Alternative Beschreibung der Konvergenz

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X konvergiert gegen $a \in X$, falls gilt:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ :\ \varrho(a_n, a) < \epsilon$$

- Eher eine Umschreibung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \Leftrightarrow \varrho(a_n, a) \to 0$

Beispiele:

- Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ im metrischen Raum $\mathbb{R}$ konvergiert gegen 0. Dies lässt sich anhand der Definition beweisen:
  Sei $\epsilon > 0$
  Zu zeigen ist, dass es einen Index (eine natürliche Zahl) $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass:

$$\varrho(a_n, 0) = \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \epsilon$$

  für alle $n \geq n_0$ gilt. $1/n < \epsilon$ ist äquivalent zu $n > 1/\epsilon$.
  Wir wählen daher n_0 als irgendeine natürliche Zahl, die größer als $1/\epsilon$ ist.
  Dann gilt $|1/n - 0| = 1/n < \epsilon$ $\square$

- Eine Folge muss nicht konvergieren, z.B. hat $b_n = n$ *keinen* Grenzwert. Man nennt die Folge (b_n) *divergent*.

- Sei $X = \mathbb{R}$ und die Folge (c_n) definiert durch $c_n = (-1)^n$. Diese Folge hat ebenso keinen Grenzwert, ist also divergent. Man nennt die Folge (c_n) außerdem *alternierend*.

Manchmal (nicht in dieser Vorlesung) sagt man auch $b_n = n \to \infty$ (uneigentliche Konvergenz)

Bemerkung: Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum konvergiert genau dann gegen a, wenn $\varrho(a_n, a) \to 0$. Es muss aber nicht gelten, dass $\varrho(a_n, a)$ monoton gegen Null geht.
Zum Beispiel konvergiert die Folge

$$a_n = \frac{1}{n + 1 + (-1)^n} \rightsquigarrow 1, 1/4, 1/3, 1/6, 1/5, 1/8, 1/7, \ldots$$

gegen Null.

Satz 1.1: Eindeutigkeit des Grenzwerts

Der Grenzwert einer konvergenten Folge in einem metrischen Raum ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und seien $a, b \in X$ Grenzwerte von (a_n). Wir nehmen $a \neq b$ an.
Sei $\delta = \varrho(a, b)$ der Abstand der beiden Punkte a und b. Wir zeigen: $K_{\delta/2}(a) \cap K_{\delta/2}(b) = \varnothing$.
Angenommen, es läge ein Punkt P in dieser Schnittmenge, dann gilt:

$$\varrho(a, P) < \frac{\delta}{2} \text{ und } \varrho(b, P) < \frac{\delta}{2}$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$\varrho(a, b) \leq \varrho(a, P) + \varrho(b, P) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Widerspruch wegen $\varrho(a, b) = \delta$.
Wegen $(a_n) \to a$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \in K_{\delta/2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
Damit gilt aber da $K_{\delta/2}(a)$ und $K_{\delta/2}(b)$ disjunkt sind, dass $a_n \notin K_{\delta/2}(b)$ für alle $n \geq n_0$.
Widerspruch zu $a_n \to b$

Definition 1.6: Beschränktheit von Folgen

Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum X ist beschränkt, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $R > 0$ gibt, so dass $a_n \in K_R(x_0)$ für alle $n \in N$ gilt.

Satz 1.2: Konvergenz und Beschränktheit

Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis:

Sei a der Grenzwert der Folge und $r > 0$ eine positive Zahl.
Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ $a_n \in K_r(a)$ gilt.
Es gibt aber nur endlich viele Indizes $(1, \ldots, n_0 - 1)$, deren Folgenglieder eventuell außerhalb dieser Kugelumgebung $K_r(a)$ liegen.
Wähle also am Ende die Schranke R als das Maximum $R = \max(\varrho(a_1, a), \ldots, \varrho(a_{n_0-1}, a), r)$. Damit liegt a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ unter der Schranke R.

2: Zahlenfolgen und Zahlenreihen

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Spezialfall, dass der metrische Raum X gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist. Wir verwenden dabei die Metrik zwischen zwei Zahlen $\varrho(x, y) = |x - y|$. Wir sprechen in diesem Fall von Zahlenfolgen.

2.1 Rechnen mit Grenzwerten

Satz 2.1:

Seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \text{ und } y := \lim_{n\to\infty} y_n$$

für die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq y_n$, dann folgt daraus $x \leq y$.

Beweis:

Angenommen $x > y$:
Wähle $\epsilon = \frac{x-y}{2}$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x - x_n| < \epsilon \text{ und } |y_n - y| < \epsilon$$

gilt. Es folgt daraus

$$x - x_n < \epsilon \Leftrightarrow x - \epsilon < x_n \text{ und } y - y_n < \epsilon \Leftrightarrow y_n < \epsilon + y$$

Insgesamt erhält man

$$x - \epsilon < x_n \leq y_n < y + \epsilon$$
$$x - y < 2\epsilon$$

Widerspruch!

Satz 2.2: Rechenregeln für Limites

Seien $(x_n), (y_n)$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei außerdem $\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann gilt

- $\left|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
- und falls $x_n \geq 0$, gilt mit $p \in \mathbb{N}$:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^p$

Beweis:

Nur für die Aussage über die Addition:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_m) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_m) = x + y$ zu zeigen, wobei $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gilt.
Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$.
Dann gilt mit der Dreiecksungleichung:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

2.2 Konvergenzkriterien

Satz 2.3: Einschließungskriterium

Seien $(x_n), (y_n), (z_n)$ reelle Zahlenfolgen. Weiterhin gelte $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
Dann konvergiert auch z_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < \epsilon$ und $|y_n - y| < \epsilon$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$:

$$|x - z_n| = \begin{cases} z_n - x \leq y_n - x \leq |y_n - x| < \epsilon, \text{ falls } x < z_n \\ x - z_n \leq x - x_n \leq |x - x_n| < \epsilon, \text{ falls } x \leq z_n \end{cases}$$

$\square$

Lemma 2.1:

Es gilt: $(1+x)^n > \frac{n^2}{4}x^2$, für $x > 0, n \geq 2$

Beweis:

Für $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i > \binom{n}{2} x^2 &= \frac{n(n+1)}{2} x^2 \\
&= \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) x^2 \\
&= \left(\frac{n^2}{4} + \underbrace{\frac{n^2-2n}{4}}_{\geq 0}\right) x^2 \\
&\geq \frac{n^2}{4} x^2
\end{aligned}$$

Beispiel: zur Berechnung von Grenzwerten mit dem Einschließungskriterium.

- Mit Hilfe dieser Ungleichung zeigen wir, dass folgende Aussage gilt:

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

  Wir setzen in die Formel aus Abschnitt 2.2 $x = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ ein.
  Wir erhalten

  $$\begin{aligned}
  n &> \frac{n^2}{4} \cdot (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \\
  \sqrt{n} &> \frac{n}{2}(\sqrt[n]{n} - 1) \\
  \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 &> \sqrt[n]{n} > 1
  \end{aligned}$$

  Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 = 1$ und mit dem Einschließungskriterium folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

- Ähnlich kann man zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 1$ ist.

  Dazu setzen wir in die Formel von oben $x = \sqrt[n]{a} - 1$ ein.

  $$\begin{aligned}
  a &> \frac{n^2}{4} \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)^2 \\
  \sqrt{a} &> \frac{n}{2} \cdot (\sqrt[n]{a} - 1) \\
  \frac{2\sqrt{a}}{n} + 1 &> \sqrt[n]{a} > 1
  \end{aligned}$$

  Es gilt wieder: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{a}}{n} + 1 = 1$, daraus folgt die Behauptung.

Bemerung: Gilt auch für $0 < a \leq 1$.

2.2.1 Monotone Folgen

Definition 2.1:

Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

streng monoton wachsend , falls $x_n < x_{n+1}$

streng monoton fallend , falls $x_n > x_{n+1}$

monoton wachsend , falls $x_n \leq x_{n+1}$

monoton fallend , falls $x_n \geq x_{n+1}$

jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

> **Satz 2.4:**
>
> Beschränkte, monotone Folgen sind konvergent.

Beweis:

Wir zeigen die Aussage für monoton wachsende Folgen:
Gelte also $x_n \geq x_{n+1} < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert auch eine kleinste obere Schranke

$$c_{\text{min}} := \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

(Allgemein ist das Supremum $\sup M$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ von reellen Zahlen die kleinste reelle Zahl s für die gilt: $s \geq m \quad \forall m \in M$.
Gibt es keine obere Schranke, dann existiert auch kein Supremum. Es folgt aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen, dass jede beschränkte Menge von reellen Zahlen ein Supremum besitzt.)

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $c_{\text{min}} - \epsilon < x_{n_0}$. Sonst wäre c_{min} nicht die kleinste obere Schranke.
Dann gilt aber wegen der Monotonie der Folge, dass $c_{\text{min}} - \epsilon < x_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt $|c_{\text{min}} - x_n| = c_{\text{min}} - x_n < \epsilon$.

Definition 2.2: Teilfolgen

Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen ($n_k \in \mathbb{N}$) und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum, $a_n \in X$. Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der Folge (a_n)

Beispiele: Sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist a_n divergent, aber die Teilfolgen

- $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$
- $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$

sind konvergent, sogar konstant. Andere Teilfolgen sind z.B. $n_k = 3k$ (ebenfalls divergent).

Definition 2.3: Häufungspunkt

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder auch komplexer Zahlen. Ein Element $a \in X$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n), falls es eine gegen a konvergente Teilfolge von (a_n) gibt.

Beispiel: -1 und 1 sind die Häufungspunkte von $a_n = (-1)^n$.

Bemerkung: Es gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte, reelle oder komplexe Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge.

2.2.2 Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Wir kommen nun zum Cauchy'sches Konvergenzkriterium für Folgen. Im Unterschied zur Definition von Konvergenz, in der der Grenzwert vorkommt, ein „inneres"Kriterium für Konvergenz, d.h. um dieses Kriterium für Konvergenz entscheiden zu können, muss man den Grenzwert nicht kennen.

Satz 2.5: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Eine Folge reeller bzw. komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine sog. Cauchyfolge ist. D.h. falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

gilt. (Der Abstand zweier Folgenglieder ist kleiner als Epsilon)

Beweis:

(nur eine Beweisskizze)

„⇒" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $\epsilon > 0$ mit $\lim a_n = a$. Dann gibt es ein n_0, sodass $|a_n - a| < \epsilon/2$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gilt für je zwei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| \geq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

„⇐" Üblicherweise wird die Vollständigkeit eines metrischen Raums so definiert:

„Ein metrischer Raum ist vollständig, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert."

Führt man die reellen Zahlen nicht axiomatisch ein, sondern gibt dafür ein Modell an (z.B. unendliche Dezimalbrüche), so kann man diese Aussage auch beweisen. □

3: Zahlenreihen

Zahlenreihen sind Folgen, die durch aufsummieren einer anderen Folge (a_n) entstehen.

Definition 3.1: Reihe

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge. Dann heißt der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

unendliche Reihe (unendliche Summe). Die a_i heißen die Glieder der Reihe. Unter einer Partialsumme versteht man die endliche Summe

$$b_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Konvergiert die Folge der Partialsummen (b_n), gegen einen Grenzwert s, so sagt man die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert. Dann setzt man

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Besitzt (b_n) keinen Grenzwert, so sagt man die Reihe ist divergent.

Beispiele:

1. $a_k = \frac{1}{k(k-1)}$, wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{i=2}^{\infty} a_i$.

   Wir wollen untersuchen, ob diese Reihe konvergiert:

   $$\sum_{i=2}^{\infty} a_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

   Es gilt: $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, daher gilt:

   $$\begin{aligned} b_n &= a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   Also gilt: $\sum\limits_{i=2}^{\infty} a_i = 1$.

2. Die sogenannte harmonische Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ Betrachte:

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

   Dies zeigt, dass die Folge der Partialsummen nicht beschränkt ist. Die Reihe ist divergent.

3. Die geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} z^k &= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n \\ &= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\end{aligned}$$

Die obige Formel liefert uns für die Konvergenz der geometrischen Reihe:

- falls $|z| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}$
- falls $|z| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit Kriterien für die Konvergenz von Reihen.

Satz 3.1: Notwendiges Kriterium für die Konvergenz

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist die Folge der Reihenglieder (a_n) eine Nullfolge $(a_n \to 0)$.

Beweis:

Da eine konvergente Reihe vorliegt, ist die Folge der Partialsummen $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine Cauchyfolge, d.h. $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |b_n - b_m| < \epsilon \;\; \forall n, m \geq n_0$.

$$|b_m - b_n| = \left| \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \quad \forall m, n \geq n_0 \wedge m \geq n$$

Im Spezialfall $m = n + 1$ folgt $|b_m - b_n| = |a_{n+1}| < \epsilon$. Dies zeigt, dass (a_k) eine Nullfolge ist. □

Bemerkungen:

- Das Notwendigkeitskriterium ist nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe, denn zum Beispiel divergiert die harmonische Reihe.
- Die Bedingung im Beweis oben ist das Cauchykriterium für Reihen. Dieses ist eine hinreichende Bedingung.

Lemma 3.1: Konvergenzkriterium

Eine Reihe mit nichtnegativen reellen Gliedern, bei der die Folge der Partialsummen beschränkt ist, konvergiert. Denn dann ist die Reihe monoton steigend.

3.1 Alternierende Reihen

Wir betrachten nun alternierende Reihen:

Definition 3.2: Alternierende Reihen

Eine Reihe heißt alternierend, wenn die Reihenglieder abwechselnd nichtnegativ (≥ 0) und nichtpositiv (≤ 0) sind. Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer alternierenden Reihe:

Satz 3.2: Leibnitzkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, für die $a_k \geq 0$ gilt. Und es gilt $a_k \geq a_{k+1}$ (monoton fallend) und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. D.h. (a_n) ist eine nichtnegative monoton fallende Nullfolge. Dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$$

konvergent.

Beweis:

Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $a_k < \epsilon \;\; \forall k \geq n_0$ gilt. Wir schätzen den Abstand der Partialsummen ab. Seien $m, n \geq n_0$ und $m \geq n$, dann gilt, falls $m - n$ ungerade und n ungerade ist:

$$\begin{aligned}|b_m - b_n| &= |(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \ldots + (-1)^{m-1}a_{m-1} + (-1)^m a_m| \\ &= a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(a_{m-1} - a_m)}_{\geq 0} \\ &\leq a_{n+1}, \text{falls } m - n \text{ ungerade}\end{aligned}$$

Und analog falls n gerade. Dies zeigt die Konvergenz der Reihe nach dem Chauchykriterium.

Beispiel: Dieses Kriterium lässt sich auf die alternierende harmonische Reihe anwenden.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

konvergiert gegen $\ln 2$.

Bemerkung: Bei unendlichen Reihen gilt im Allgemeinen kein Kommutativ- oder Assoziativgesetz. Der Grenzwert und auch das Konvergenzverhalten kann sich bei Umordnung und Um-Klammerung der Reihenglieder ändern:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Wir ordnen die Reihe um:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} - \frac{1}{6} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} - \ldots \longrightarrow 0$$

Diese Reihe divergiert nun!

3.2 Absolute Konvergenz

Definition 3.3: Eigenschaft der absoluten Konvergenz

Eine Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls sogar die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 3.3:

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis:

Wir beweisen dies mit dem Cauchykriterium für Reihen:
Da $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall m, n \geq n_0$ mit $m \geq n$ und Anwedung der Dreiecksungleichung gilt:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$$

$\square$

Bemerkung: Die Umkehrung der Aussage gilt nicht, denn wir wissen, dass die harmonische Reihe divergiert obwohl die alternierende harmonische Reihe konvergiert.

3.2.1 Kriterien für absolute Konvergenz

Wir werden im Folgenden einige Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen kennenlernen.

Definition 3.4:

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Zahlenreihe und ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente, reelle Reihe, so dass:

$$|a_k| \leq |b_k| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

dann nennt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Majorante.

Satz 3.4: Majorantenkriterium

Hat eine reelle oder komplexe Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Majorante, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut!

Beweis:

Sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum^{\infty} a_k$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq n \geq n_0$ gilt:

$$|s_m - s_n| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k < \epsilon \quad \square$$

Es gibt auch ein Minorantenkriterium:
Sei $a_k \geq c_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ist c_k divergent, so ist a_k ebenfalls divergent.

Beispiele:

- Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$:
  Da $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k \cdot (k-1)}$ für $k \geq 2$, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k-1)}$ eine Majorante, für die wir die Konvergenz bereits gezeigt haben. Also konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

- Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante, also divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+3^k}$. Wegen $\frac{1}{2^k+3^k} < \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ ist die geometrische Reihe mit $z = \frac{1}{3}$ eine konvergente Majorante.

Wir formulieren nun zwei weitere hinreichende Kriterien für (sogar absolute) Konvergenz. Das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium.

Satz 3.5: Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ gilt.

Beweis:

Es gilt $|a_k| \leq q^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ ist konvergent (geometrische Reihe). □

Satz 3.6: Quotientenkriterium

Sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert so dass

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ gilt.

Beweis:

Aus der Ungleichung folgt, dass

$$|a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k| \leq q^2 \cdot |a_{k-1}| \leq \ldots \leq q^{k+1-k_0} |a_{k_0}|$$

Daher ist

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \leq \frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} q^k$$

und wir haben die geometrische Reihe als konvergente Majorante gefunden. □

Bemerkungen: Falls für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

- $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, so divergiert die Reihe $\sum a_k$.
- $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$, so divergiert die Reihe $\sum a_k$.
- $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q > 1$, so divergiert die Reihe.

- $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q > 1$, so divergiert die Reihe.

Ist $q = 1$ so ist die Bedingung nicht erfüllt, die Reihe kann sowohl konvergieren als auch divergieren, das Kriterium macht keine Aussage über das Konvergenzverhalten.

Beispiele:

- Eine wichtige Reihe in der Mathematik ist die sogenannte Exponentialreihe:

  $$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  für ein $x \in \mathbb{C}$. Es gilt

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

  Um die Konvergenz der Exponentialreihe zu beweisen, wenden wir das Quotientenkriterium an:

  $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \left|\frac{x^k}{k+1}\right| \longrightarrow 0$$

  Damit ist das Quotientenkriterium anwendbar und wir haben gezeigt, dass die Exponentialreihe konvergiert.

- Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$: Das Quotientenkriterium führt hier auf

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \left|\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}\right| = \left|\frac{k}{k+1}\right|$$

  Dieser Term ist zwar kleiner als 1, das Quotientenkriterium kann aber trotzdem nicht angewendet werden, da $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{k}{k+1}\right| = 1!$

  Das Wurzelkriterium führt ebenfalls auf $\lim \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$. Es macht ebenfalls keine Aussage.

  Mit den Kriterien kann weder auf Konvergenz noch auf Divergenz geschlossen werden.

Bemerkung: Wir hatten gesehen, dass der Wert (und auch das Konvergenzverhalten selbst) einer Reihe sich ändern kann, wenn man die Reihenglieder umordnet. Allerdings gilt im Fall von absoluter Konvergenz:

Satz 3.7: Umordnungssatz

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut Konvergent und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann konvergiert auch die umgeordnete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$$

Es gilt weiter, dass die Grenzwerte gleich sind:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$$

3.2.2 Cauchyprodukt von Reihen

Das Cauchyprodukt erlaubt es, das Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen wieder als absolut konvergente Reihe darzustellen. Die Idee dabei ist, die Summanden nach folgendem Schema diagonal aufzusummieren:

$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \cdots \\ a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\ a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\ a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Es soll also gelten:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \dots$$
$$\dots + \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j + \dots$$

Satz 3.8: Cauchyprodukt

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Und sei (c_n)

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j$$

Dann konvergiert das Cauchyprodukt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut. Außerdem gilt für die Grenzwerte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

Anwendung: Funktionalgleichung der Exponentialfunktion Wir betrachten die beiden absolut konvergenten Reihen mit $x, y \in \mathbb{C}$:

- $e^x = \exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $e^y = \exp(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$

Das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} c_n \text{ mit } c_n &= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^{n-j}}{(n-j!)} \cdot \frac{y^j}{j!} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{n!(n-j)!j!} \cdot x^{n-j} \cdot y^j \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} \cdot y^j \\ &= \frac{1}{n!}(x+y)^n\end{aligned}$$

Das Cauchyprodukt ist dann

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

Dies zeigt: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ □

4: Stetigkeit von Abbildungen

Wir betrachten die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen.

Definition 4.1: Folgenstetigkeit

Seien X und Y metrische Räume, wir schreiben für die Metriken von X und Y ϱ. Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$, falls aus $x_n \to x_0$ für eine Folge $(x_n) \in X$ stets folgt:

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

Oder kurz, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n)) = \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right)$$

Definition 4.2: ϵ-δ-Stetigkeit

Seien X und Y metrische Räume. Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\varrho(f(x), f(x_0)) < \epsilon \quad \forall x \in X, \varrho(x, x_0) < \delta$$

Oder kurz, falls gilt:

$$f\left(K_\delta(x_0)\right) \subseteq K_\epsilon(x_0)$$

Satz 4.1:

Folgenstetigkeit und ϵ-δ-Stetigkeit sind äquivalent.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei f folgenstetig bei x_0. Angenommen f wäre nicht ϵ-δ-stetig bei x_0: Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in K_\delta(x_0)$ existiert, so dass $f(x) \notin K_\epsilon(f(x))$. Wir wählen $\delta = \frac{1}{n}$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $f(x_n) \notin K_\epsilon(f(x_0))$ und $\varrho(x_n, x_0) \to 0$. Widerspruch zur Folgenstetigkeit!

„$\Leftarrow$“ Es gelte ϵ-δ-Stetigkeit in x_0. Sei (x_n) eine Folge in X mit $(x_n) \to x_0$. Dann gibt es zu jede, $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass aus $\varrho(x_n, x_0) < \delta$ folgt, dass $\varrho(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$. Da $(x_n) \to 0$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass die Folgenglieder $\varrho(x_n, x_0) < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt, woraus $\varrho(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$ folgt, d.h. wir haben $f(x_n) \to f(x_0)$ gezeigt. $\square$

Definition 4.3: Stetigkeit von Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt stetig, falls f stetig in allen $x \in X$ ist.

Bemerkung: $f: X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

für alle konvergenten Folgen (x_n) in X gilt. Stetigkeit bedeutet, dass man Funktionsanwendung und Limes vertauschen kann.

Beispiele:

- Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ und ϱ die Standardmetrik in $\mathbb{R}$ für beide.

  Wir betrachten die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Wir zeigen jetzt: f ist stetig in allen $x \in X$.

  Dazu betrachten wir eine beliebige Zahlenfolge (x_n) mit $(x_n) \to x_0$ für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$. Für die Folge der Bildpunkte gilt:

  $$|f(x_n) - f(x_0)| = |x_n^2 - x_0^2| = |x_n - x_0| \cdot |x_n + x_0|$$

  Da die Folge (x_0) nach Annahme konvergiert, ist sie beschränkt und es gilt

  $$|x_n + x_0| \leq |x_n| + |x_0| \leq M = \text{const.}$$

  Somit folgt daraus

  $$|f(x_n) - f(x_0)| \leq \underbrace{|x_n - x_0|}_{\to 0} \cdot M$$

  Also folgt $f(x_n) \to f(x_0)$, was die Stetigkeit zeigt. □

- Sei wieder $X = Y = \mathbb{R}$ und ϱ wie oben.

  Die Funktion H gegeben durch

  $$H: X \to Y, x \mapsto \begin{cases} 0, \text{falls } x < 0 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

  Diese ist unstetig im Punkt $x_0 = 0$!

  Denn es gilt für die Folge $(x_n) = -\frac{1}{n}$, dass $H(x_n) = H(-\frac{1}{n}) = 0 \neq H(0) = 1$

4.1 Funktionenlimes, Funktionsgrenzwerte

Sei $X = Y = \mathbb{R}$ oder $X = Y = \mathbb{C}$ und ϱ der übliche Abstand. Man kann folgende Schreibweise für die Stetigkeit einer Funktion $f: X \to Y$ im Punkt x_0 verwenden:

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$
$$:\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Der Funktionenlimes kann auch für nicht notwendig stetige Funktionen definiert werden, dafür definieren wir rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert im reellen Raum wie folgt:

Definition 4.4: Linksseitiger Grenzwert

Man schreibt für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a_l$$
$$:\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x < x_0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a_l| < \epsilon$$

Definition 4.5: Rechtsseitiger Grenzwert

Und ähnlicch für den rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a_r$$
$$:\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x > x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a_r| < \epsilon$$

Satz 4.2: Stetigkeiten

Seien f und g Abbildungen, definiert auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
$f, g : X \to Y$ mit $Y = \mathbb{R}$, so dass f, g beide in $x_0 \in X$ stetig sind. Dann sind auch folgende Abbildungen stetig:

- $|f| : x \mapsto |f(x)|$
- $c \cdot f : x \mapsto c \cdot f(x)$
- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
- $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$
- $\sqrt[p]{f} : x \mapsto \sqrt[p]{f(x)}$ mit $f(x) \geq 0, p \in \mathbb{N}$
- $f^p : x \mapsto f(x)^p$ mit $p \in \mathbb{N}$
- $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$

Folgerung: Reelle oder komplexe Polynome und rationale Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

Bemerkung: Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig, wenn die Urbilder von offenen Mengen offen sind.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $V \subseteq Y$ offen, wir müssen zeigen dass $U := f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ offen in X ist. Sei dann $x \in U$. Da V offen ist gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(K_\delta(x)) \subseteq K_\epsilon(f(x)) \subseteq V$ ist, was zeigt, dass $K_\delta(x) \subseteq U = f^{-1}(V)$ gilt.

„$\Leftarrow$“ Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt, dass $U := f^{-1}(K_\epsilon(f(x)))$ offen ist, also gibt es zu $x \in U$ ein $\delta > 0$, so dass $K_\delta(x) \subseteq U$, woraus $f(K_\delta(x)) \subseteq K_\epsilon(f(x))$ folgt.

Bemerkungen: Um für Abbildungen zwischen metrischen Räumen Stetigkeit definieren zu können, benötigt man nur die Systeme offener Mengen. Ähnlich kann man Konvergenz von Folgen alleine mit offenen Mengen definieren. Dies führt auf die Topologie. (Stetigkeit und Konvergenz ohen Abstandsbegriff wird auch Gummigeometrie genannt.)

5: Funktionenfolgen und -Reihen

Wir betrachten hier Folgen

$$f_n : D \to \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}, x \mapsto f_n(x)$$

mit $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir wollen uns natürlich mit der Frage der Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen befassen. Es gibt zwei Arten von Konvergenz für Folgen von Funktionen:

Definition 5.1: Punktweise Konvergenz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der Definitionsbereich der Funktionen f und $f_n, n \in \mathbb{N}$ wobei $f_n : D \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Die Folge (f_n) heißt punktweise konvergent, falls für alle $x \in D$ gilt: $f_n(x) \to f(x)$.
Oder mit anderen Worten:

$$\forall x \in D \;\; \forall \epsilon \geq 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Man schreibt dann auch $f_n(x) \to f(x) \;\; \forall x \in D$ für punktweise Konvergenz.

Definition 5.2: Gleichmäßige Konvergenz

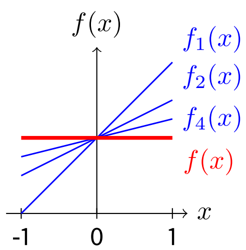
Die Funktionenfolge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen die Funktion f, falls gilt:

$$\forall \epsilon \geq 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in D \quad : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Man schreibt dann auch $f_n \xrightarrow{glm} f$ für gleichmäßige Konvergenz.

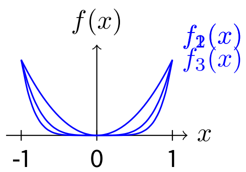
Beispiele:

- Sei $f_n(x) = 1 + \frac{1}{n} \cdot x$ mit dem Definitionsbereich $D = [-1; 1]$. Sei $f(x) = 1$ für $f : D \to \mathbb{R}$: Diese Funktion konvergiert gleichmäßig gegen $f \equiv 1$, denn



$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - 1|$$

- $D = [-1; 1], f_n = x^{2n}$
  Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Funktion



$$f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

  Wir betrachten, dass die Grenzfunktion f nicht stetig ist. Die gleichmäßige Konvergenz ist eine stärkere Eigenschaft als punktweise Konvergenz. Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergez aber nicht umgekehrt. Gleichmäßigkeit der Funktionenfolge garantiert die Stetigkeit der Limesfunktion.

Satz 5.1: Stetigkeit der Limesfunktion

konvergiert eine Folge stetiget Funktionen gleichmäßig, dann ist die Limesfunktion stetig.

Beweis:

Angenommen $f_n \xrightarrow{glm} f$. Sei $\epsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $x \in D$ gilt.
Wähle $\delta > 0$ so, dass $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ ist. Dann gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<\epsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{<\epsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{<\epsilon/3}$$
$$< \epsilon$$

Zeigt die $\epsilon - \delta$-Stetigkeit der Grenzfunktion f am Punkt X_0.

Bemerkung Für Reihen von Funktionen

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

definieren wir gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz so, dass die Folge der Partialsummen

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$$

gleichmäßig beziehungsweise punktweise konvergiert.

Satz 5.2: Kriterien für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

- **Cauchy-Kriterium:** falls es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $x \in D$ gilt:

  $$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

  für alle $m, n \geq n_0$, dann exisitert ein $f : D \to \mathbb{R}$ mit

  $$f \stackrel{glm}{=} \lim_{n\to\infty} f_n \rightsquigarrow f_n \xrightarrow{glm} f$$

- **Weierstraß-Majorantenkriterium:** falls für eine Reihe von Funktionen gilt:

  $$|f_n(x)| \leq c_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ ist konvergent}$$

  dann konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und auch $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ gleichmäßig.

Wir kommen nun zu einer der wichtigsten Anwendung der Funktionenfolgen und -reihen:

5.1 Potenzreihen

Eine wichtige Rolle in der gesamten Mathematik spielen die Potenzreihen, dur die eine große Klasse von Funktionen beschrieben wird.

Definition 5.3: Potenzreihe

Sei $z \in \mathbb{C}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

eine *Potenzreihe* um z_0 mit den Koeffizienten a_k. Sie ist für alle $z, z_0 \in \mathbb{C}$ definiert, für die die Reihe konvergiert. Den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ nennt man den Entwicklungspunkt der Potenzreihe.
Falls $z, z_0 \in \mathbb{R}$ und alle $a_k \in \mathbb{R}$ sagt man auch reelle Potenzreihe.

BEISPIELE:

- Die Exponentialreihe: $\exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
- Die geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$
- $\sin(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
- $\cos(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$
- $\ln(1 + x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ konvergiert für $-1 < x \leq 1$
- **Spezialfall:** Polynome vom Grad n sind Potenzreihen, mit $a_k = 0$ für $k > n$. Man kann sich eine Potenzreihe so vorstellen, dass eine Funktion (immer genauer) durch Polynome angenähert wird.

Wir wollen nun das Konvergenzverhalten von Potenzreihen untersuchen. Bemerkenswert ist, dass der Bereich in dem eine komplexe Potenzreihe konvergiert stets eine Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt z_o ist. Der Radius dieser Kreisscheibe heißt Konvergenzradius der Potenzreihe. Dieser Kann gleich $+\infty$ sein, was bedeutet, dass die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Die Potenzreihe divergiert für Werte außerhalb der Scheibe. Auf dem Kreis kann keine eindeutige Aussage gemacht werden, es ist beides möglich.

Satz 5.3: Aussagen zu Potenzreihen

Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Es gibt einen eindeutig bestimmten Konvergenzradius $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ so dass gilt:

   Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ist

   - absolut konvergent für $|z - z_0| < R$
   - divergent für $|z - z_0| > R$

2. Falls

   $$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ oder } r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

   (d.h. insbesondere, dass dieser Grenzwert existiert), dann ist $r = R$.

3. Falls $R > 0$ und $0 < \delta < R$, dann konvergiert die Funktionenfolge der Partialsummen mit $z \in \mathbb{C}$ als Variable gleichmäßig für alle $|z - z_0| < \delta$. Insbesondere ist die durch den Grenzwert der Potenzreihe definierte Funktion $K_R(z_0) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ stetig.

6: DIFFERENTIALRECHNUNG

6.1 Differentiation in einer reellen Variable

Wir betrachten zunächst Funktionen f in einer rellen Variablen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ist.
D heißt Definitionsbereich der Funktion f. Wir wollen die Differentiation einführen:
Die Ableitung einer Funktion beschreibt die Änderung einer Funktion. Wir wollen diese in der Nähe eines Punktes $x_0 \in D$ beschreiben. Dazu benutzen wir zunächst die folgende Konstruktion.

Definition 6.1: Differenzenquotient und Differentialquotient

Die Abbildung

$$D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt *Differenzenquotient* von f bei x_0. Die Funktion f heißt differenzierbar in x_0, falls der Funktionsgrenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

der *Differentialquotient* von f bei x_0 oder auch die Ableitung von f in x_0.

Bemerkung: Die Existenz des Differentialquotienten ist äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x_0, x_n \in D, x \neq x_0$ der gleiche Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

Wir definieren weiter:

Definition 6.2:

1. f ist differenzierbar, falls f in allen Punkten $x_0 \in D$ differenzierbar ist.
2. f ist stetig differenzierbar in D genau dann, wenn f differenzierbar in allen Punkten ist und die Funktion $x \mapsto f'(x)$ stetig ist.

Satz 6.1: Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, dann ist f auch stetig in x_0.

Beweis:

Es gilt:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

und daraus folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Die Umkehrung des Satzes ist im allgemeinen falsch. Die Betragsfunktion ist stetig, jedoch in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar! Oder auch **Weierstraß' Funktion**, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist aber in keinem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

Definition 6.3: Links- und rechtsseitige Ableitung

Unter der linksseitigen Ableitung verstehen wir den Grenzwert

$$f'(x_0^-) = \lim x \to x_0^- \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und unter der rechtsseitigen Ableitung den Grenzwert

$$f'(x_0^+) = \lim x \to x_0^+ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(falls diese existieren)

Bemerkung: f ist differenzierbar in x_0 genau dann, wenn links- und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen. Insbesondere ist f dann auch stetig in diesem Punkt.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$ mit $D = \mathbb{R}$. Der Differenzenquotient für ein $x_0 \in D$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} &= \frac{2}{x - x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \\ &= \frac{2}{x - x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \left(\frac{x - x_0}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{x - x_0}{2}\right)^3 \pm \dots\right) \\ &= \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x - x_0}{2}\right)^2 \pm \dots\right)\end{aligned}$$

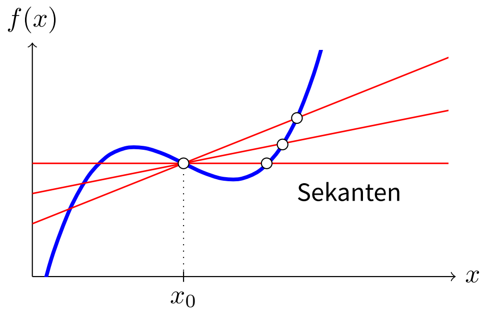
$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot 1 \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

6.1.1 Geometrische Interpretation der Ableitung

Der *Differenzenquotient*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (x \neq x_0)$$

beschreibt die Steigung der Sekante am Graphen von f, oder die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$.



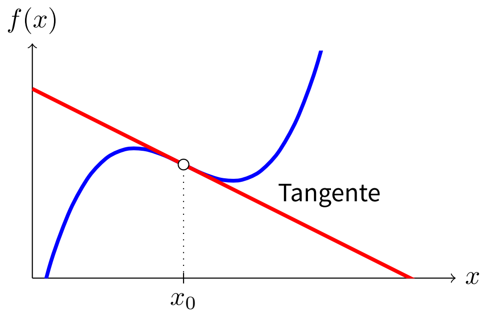
Der *Differentialquotient*

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

beschreibt die Steigung der Tangente am Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
Die Gleichung der Tangente ist dann

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Dies ist eine Potenzreihe, bei der nur zwei Koeffizienten von Null verschieden sind mit Entwicklungspunkt x_0.



Bemerkung: Die Funktion $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ ist von der Form $x \mapsto m \cdot x + c$ also eine affin-lineare Abbildung $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Damit kommt man auf die Grundidee der Differentiation: Eine bestmögliche Annäherung einer gegebenen Abbildung durch eine affin-lineare Abbildung in der Nähe eines Punkts x_0.
Für komplexe Funktionen $f : D \to \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{C}$ kann man analog Differenzierbarkeit definieren, man setzt

$$f'(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0}$$

falls dieser Grenzwert für alle Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \to z_0$ existiert, wobei für alle n gelten muss: $z_n \neq z_0$.

6.1.2 Differentiationsregeln

Für alle rellen Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln für das Differenzieren:

Satz 6.2: Differentiationsregeln

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen für $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dann gilt:

- **Linearität der Differentiation:** Die Funktion $\alpha f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt für $x_0 \in D$:

  $$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

  Falls $D = E$, dann ist die Funktion $f + g : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$ differenzierbar und es gilt für $x_0 \in D$:

  $$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- **Produktregel:** Falls $D = E$, dann ist die Funktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für $x_0 \in D$:

  $$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

- **Quotientenregel:** Falls $D = E$ und $0 \notin g(D)$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für $x_0 \in D$:

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

- **Kettenregel:** Falls $g(E) \subseteq D$, dann ist die Verkettung $f \circ g : E \to \mathbb{R}, x \mapsto f(g(x))$ differenzierbar und es gilt für $x_0 \in E$:

  $$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

- **Ableitung der Umkehrfunktion:** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $f^{-1} : f(D) \to D$ die Umkehrfunktion. Ist f bei x_0 differenzierbar und ist $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} bei $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:

  $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Beweis:

- Die beiden Eigenschaften aus Punkt 1 folgen direkt aus den Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten.
- Zum Beweis der Produktregel:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

□

Beispiele:

1. Sei $f : D \to D, D = \{x \in D \,|\, x \geq 0\}, f(x) = x^n = y$. Die Umgekhrfunktion $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ ist wohldefiniert. Wir bilden die Ableitung von f^{-1}:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y) &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot y^{(1/n-1)}\end{aligned}$$

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ und sei f^{-1} die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \ln(y)$. Die Ableitung der Logarithmusfunktion lautet:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y) &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} \\ &= \frac{1}{y}\end{aligned}$$
wobei $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Für komplexe Funktionen $f : D \to \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{C}$ sind der Differenzen- und der Differentialquotient analog wie im reellen definiert.
$$f'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$$
bedeutet, dass der Differenzenquotient für jede Folge $(z_n) \to z_0$ gegen den selben Wert konvergiert. Die Ableitungsregeln von oben gelten vollkommen analog für komplexe Funktionen.

6.1.3 Höhere Ableitungen

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar, dann existiert die Ableitungsfunktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$. Man kann nun nach der Differenzierbarkeit der Ableitungsfunktion fragen und ggf. die Ableitung der Ableitung $f''(x)$ bilden. Mit anderen Worten, die zweite Ableitung.

Definition 6.4: Höhere Ableitungen

Sei D eine offene Teilmenge der reellen Zahlen. Wir definieren:

1. falls f mindestens $(k-1)$ mal differenzierbar ist und die $(k-1)$te Ableitung von f ebenfalls differenzierbar ist, dann heißt
$$f^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f^{(k-1)}(x))$$
die $k$te Ableitung, wobei $f^{(0)} = f$ gilt.
2. f heißt k mal stetig differenzierbar, falls f mindestens k mal differenzierbar ist und dabei die $k$te Ableitung stetig ist.
3. f heißt unendlich bzw. beliebig oft differenzierbar, falls sie k mal differenzierbar für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

Es gilt die sogenannte *Leibnitzregel* für höhere Ableitungen:
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)} g^{(n-k)}$$
analog zum binomischen Lehrsatz, Beweis durch Induktion:
$$\begin{aligned}(fg)^{(0)} &= f \cdot g \\ (fg)^{(1)} &= f'g + fg' \\ (fg)^{(2)} &= f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''\end{aligned}$$

6.1.4 Ableitung von Potenzreihen

Vorüberlegung: wir haben definiert:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

- Was ist die Ableitung? $\to$ „gliedweises Ableiten“liefert:

$$\sin'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2k+1}{(2k+1)!} x^{2k} = \cos(x)$$

- Doch darf man das? Wir haben wie folgt gerechnet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{n} f_k$$

Die Frage ist, darf man Limesbildung und Differentiation vertauschen? Die Antwort liefert der folgende Satz:

Satz 6.3:

Die Funktionenfolge (f_n), deren Elemente auf $[a,b] \in \mathbb{R}$ definiert sind, konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Funktionen f_n seien auf $[a,b]$ stetig differenzierbar und die Folge der Ableitungen (f_n') konvergiere auch gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann ist die Grenzfunktion stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$. Das heißt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n$$

FOLGERUNG: Sind $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent, dann ist $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $[a,b]$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n$$

Satz 6.4: Gliedweises Differenzen von Potenzreihen

Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$$

und $0 < \varrho < R$. Dann kann diese Potenzreihe auf $|x - x_0| < \varrho$ gliedweise differenziert werden. D.h. Potenzreihen können im inneren des Konvergenzkreises gliedweise differenziert werden.

BEWEISSKIZZE: Es wurde bereits gezeigt, dass die Potenzreihe wie oben gleichmäßig für $|x - x_0| < \varrho$ konvergiert. Wir nehmen an, dass der Limes $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ existiert. Dann hat die gliedweise differenzierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_o)^{n-1}$$

ebenfalls den Konvergenzradius

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot a_n}{a_{n+1}\cdot(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = R$$

Für den allgemeinen Fall, in dem der Grenzwert nicht notwendig existiert, verwende die Formel von Cauchy-Hadamard.

Beispiel für die Schärfe des Satzes: Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

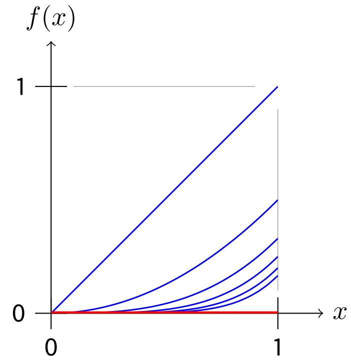
auf dem Intervall $[0,1]$.
Da $|\frac{x^n}{n}| \leq |\frac{1}{n}|$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ folgt, dass diese Funktionenfolge gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Die Folge der Ableitungen $f_n'(x) = x^{n-1}$ konvergiert gegen die Funktion

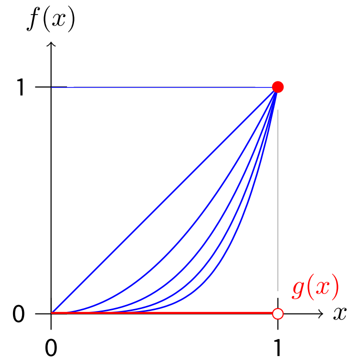
$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x = 1 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

punktweise aber nicht gleichmäßig und es gilt für die Ableitung der Grenzfunktion

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n, \text{ dass } 0 \equiv f' \neq g$$

Man kann also im Satz oben nicht auf die Voraussetzung, dass die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert verzichten.





Beispiele:

- Man berechne die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ für $|x| < 1$.
  Dies ist die gliedweise differenzierte geometrische Reihe. Es gilt:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$
  Da der Konvergenzradius auch der ableiteten Reihe gleich 1 ist, konvergieren auch die Ableitungen gleichmäßig.
- Wir betrachten die Exponentialreihe, gliedweises Differenzieren liefert:
  $$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$
  Somit folgt, dass $(e^x)' = e^x$

7: Extrema und Mittelwertsätze

Wir definieren zunächst lokale und globale Extrema.

Definition 7.1: Lokale Extrema

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat bei $x_0 \in D$ ein lokales Minimum genau dann, wenn gilt:

$$\exists \epsilon > 0 \ \ \forall x \in K_\epsilon(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$$

Die Funktion hat bei x_0 ein lokales Minimum, falls gilt:

$$\exists \epsilon > 0 \ \ \forall x \in K_\epsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

Das lokale Extremum heißt strikt oder isoliert, falls in der Definition die strikte Ungleichung gilt.

Definition 7.2: Globale Extrema

Falls für alle $x \in D$ gilt $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. $f(x) \leq f(x_0)$, liegt ein globales Minimum bzw. Maximum bei x_0 vor.
Der folgende Satz gibt den Zusammenhang zwischen lokalen Extrema und Differentiation an:

Satz 7.1:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in D$ differenzierbar. Hat f bei x_0 ein lokales Extremum, dann ist $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$.

Beweis:

Sei ϵ wie in der Definition. Dann gilt für $0 < h \leq \epsilon$, dass

bei einem Maximum:

$$0 \leq \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$
$$0 \geq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

bei einem Minimum

$$0 \geq \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$
$$0 \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Da f bei x_0 differenzierbar ist, sind links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich, dieser muss damit 0 sein.
$\square$

Satz 7.2: Satz von Rolle

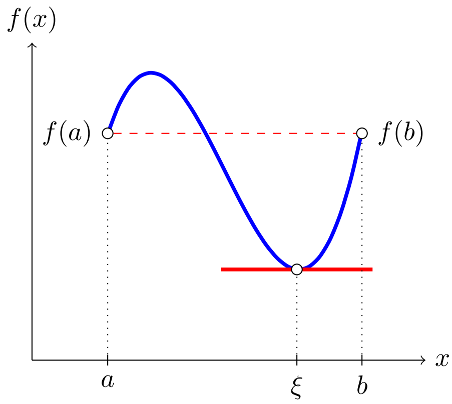
Sei f stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis:

Stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ nehmen dort ihr Maximum und Minimum an. D.h. es existieren ein $\nu, \xi \in [a, b]$ mit $f(\nu) = \min f([a, b])$ und $f(\xi) = \max f([a, b])$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1. $f(\nu) = f(xi)$ dann ist f auf $[a, b]$ konstant, damit gilt $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in [a, b]$
2. $f(\nu) < f(\xi)$ und $f(a) = f(b) < f(\xi)$, dann gilt $\xi \in (a, b)$ und $f'(\xi) = 0$
3. $f(\nu) < f(\xi)$ und $f(a) = f(b) > f(\xi)$, dann gilt $\nu \in (a, b)$ und $f'(\nu) = 0$

□



Satz 7.3: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei f stetig in $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ für die gilt:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f \cdot (\xi)$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Die Steigung der Sekante durch a, b wird durch eine Tangente an f in der Stelle ξ im Inneren des Intervalls angenommen.

Man wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

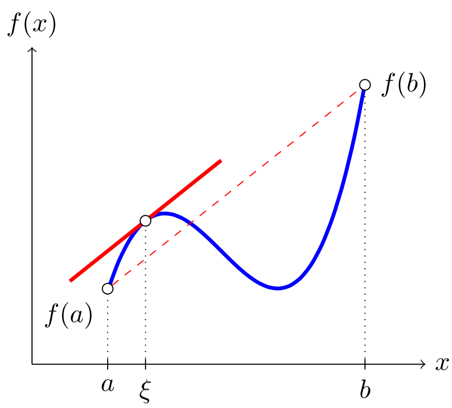
an. Die Funktion F genügt den Voraussetzungen des Satzes von Rolle und außerdem gilt

$$F(a) = f(a) - 0$$
$$F(b) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(a)$$

Damit existiert ein $\xi \in (a, b)$ sodass

$$F'(\xi) = 0$$
$$= f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□



Satz 7.4: Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Seien f, g stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Außerdem gelte, dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und $g(a) \neq g(b)$. Dann existiert eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis:

Man wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (g(x) - g(a))$$

an. □

Satz 7.5: Regel von L'Hospital

Seien f, g in $(a, b]$ differenzierbar und gelte

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

Weiterhin sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b]$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$$

dann ist

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$$

Beweis:

f und g lassen sich durch die Definition $f(a) = g(a) = 0$ stetig auf ganz $[a, b]$ fortsetzen und genügen den Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Da $f(a) = g(a) = 0$ gilt, gilt für ein $x \in (a, b]$, dass ein $\xi(x) \in (a, x)$ existiert, so dass gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Wir erhalten für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung und Beispiel:

1. Man kann die Regeln von L'Hospital auch mehrmals anwenden, und auch $x \to \infty$ laufen lassen. Ebenso kann man die Regeln auf Funktionswerte anwenden, die gegen ∞ laufen.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

2. Gesucht ist

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x \cdot \ln x)$$

Da $\exp$ stetig ist, genügt es die Funktion im Inneren zu untersuchen:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

Wegen $\exp(0) = 1$ folgt:

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1$$

7.1 Satz von Taylor

Wir sehen uns noch einmal die Formel aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi)$$

Wir setzen jetzt $b = x$ und $a = x_0$ und erhalten damit:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(\xi)$$

Um eine Approximation von f in der Nähe von x_0 zu erhalten, ersetzen wir in der obigen Formel ξ durch x_0. Wir erhalten dann:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

Wir ersetzen also näherungsweise die Funktion f durch das Lineare Polynom, dessen Graph die Tangente an den Graph von f bei x_0 ist.
Diese Funktion $T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$ wird als das *Taylorpolynom* ersten Grades von f bei x_0 bezeichnet. Die Funktion T_1 ist dadurch gekennzeichnet, dass ihre erste und nullte Ableitung mit der ersten und nullten Ableitung von f bei x_0 übereinstimmen. Das heißt:

$$T_1(x_0) = f(x_0)$$
$$T_1'(x_0) = f'(x_=)$$

Wir führen nun das $n$te Taylorpolynom ein, indem wir fordern, dass es am Punkt x_0 mit der Funktion f in der nullten bis zur $n$ten Ableitung übereinstimmt.
Nun stellt sich die Frage nach der Güte der Approximation.

Lemma 7.1: Taylorpolynom

Sei f n-mal differenzierbar im Intervall (a, b) und $x_0 \in (a, b)$. Dann gibt es genau ein Polynom $n$ten Grades T_n, so dass gilt

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k \in [0, n] \in \mathbb{N} \tag{7.1}$$

Dieses Polynom wird Taylorpolynom $n$ten Grades von f um den Entwicklungspunkt x_0 genannt. Dabei ist

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{=T_1} + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien P, Q Polynome, die die Eigenschaften aus Gleichung 7.1 besitzen. Für die Differenz $D = P - Q$ gilt:

$$D(x) = P(x) - Q(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_n \cdot x^n$$

Wobei $D^{(k)}(x_0) = 0$ für alle $0 \leq k \leq n$. Es folgt also

$$D^{(n)}(x_0) = n! \cdot b_n = 0 \quad \rightsquigarrow b_n = 0$$

Im nächsten Schritt sehen wir

$$D^{(n-1)}(x_0) = (n-1)! \cdot b_{n-1} = 0 \quad \rightsquigarrow b_{n-1} = 0$$

und so weiter. Am Ende sehen wir, dass alle $b_k = 0$ sind, dies zeigt die Eindeutigkeit.
Man rechnet leicht nach, dass $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ gilt. □

Bemerkung: Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

für eine beliebig oft differenzierbare Funktion f wird auch die Taylorreihe von f um x_0 genannt.

Beispiele:

- Sei f die Exponentialfunktion $f = e^x$, dann gilt $f^{(k)}(x_0) = e^x$ für alle k. Damit gilt für das $n$te Taylorpolynom von e^x bei $x_0 = 0$: $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

  $$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

  Das gilt also, dass die Taylorreihe von e^x bei $x_0 = 0$ mit der Exponentialreihe übereinstimmt.

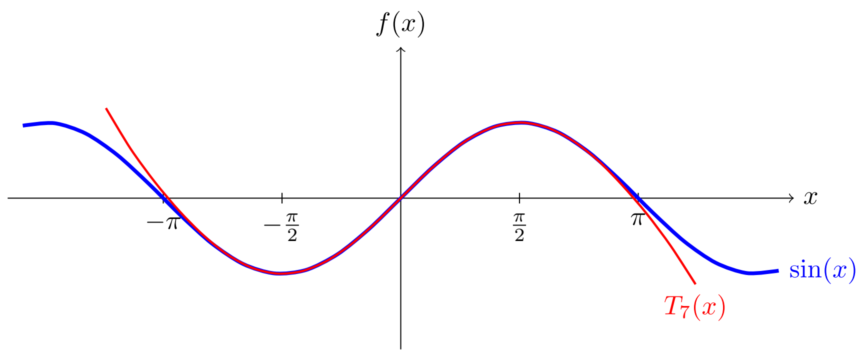
- Sei $f(x) = \sin(x)$ und $x_0 = 0$. Es gilt:

  $$f^{(0)}(0) = \sin(0) = 0 \qquad f^{(1)}(0) = \cos(0) = 1$$
  $$f^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$$

  Also folgt $f^{(2k)}(0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Damit erhalten wir für das Taylorpolynom:

  $$T_{2n+1} = \underbrace{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7}_{T_7(x)} \pm \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

  Hieraus folgt, dass die Taylorreihe von $\sin(x)$ bei $x_0 = 0$ genau die Potenzreihe von $x \mapsto \sin(x)$ ist, mit der wir den Sinus definiert haben.
  Bereits das Taylorpolynom dritten Grades nähert den Sinus im Intervall $[-\pi, \pi]$ gut an:



Um die Güte der Approximation durch Taylorpolynome abschätzen zu können, benutzen wir den folgenden Satz:

Satz 7.6: Satz von Taylor

Sei f eine $n+1$ mal stetig differenzierbare Funktion auf (a,b) und seien $x, x_0 \in (a,b)$. Dann existiert ein $\xi \in (x, x_0)$ beziehungsweise ein $\xi \in (x_0, x)$, so dass gilt:

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{LaGrange'sches Restglied}}$$

Beweis:

Wir betrachten ein festes x und ein variables t und sehen:

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$G(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Es ist $F(x_0) = f(x) - T_n(x)$ und $F(x) = G(x) = 0$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - f''(t)(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} \\ &\quad + f'(t) - f''(t)(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} \end{aligned}$$

$$G'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung im Intervall $[x, x_0]$ bzw $[x_0, x]$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \cdot n!}{n!(x-\xi)^n} = f^{(n+1)}(\xi)$$

Andererseits ist

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{f(x) - T_n(x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Wir erhalten schließlich:

$$f(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Anwedungsbeispiele:

- Sei $f(x) = e^x$. Dann ist in $[0,1]$ für ein $\xi \in (0,1)$

  $$e^x = f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

  Und es gilt also

  $$|f(x) - T_n(x)| \le \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Um e^x auf $[0,1]$ mit einem Fehler von höchstens 10^{-5} berechnen zu können, berechnen wir

$$(n+1)! \geq 30000 \quad \rightsquigarrow 8! = 40320$$

Man sieht also für $n = 7$ ist der Fehler auf diesem Intervall kleiner als 10^{-5}.

- Approximation der Sinusfunktion durch Taylorpolynome (Partialsummen):
  Sei $f(x) = \sin(x), x_0 = 0$ auf $[0, x]$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + \sin'(0) \cdot x + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \pm \dots + \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1}\end{aligned}$$

  Wegen $|\sin(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$ ist dies eine gute Annäherung für $|x|$ klein.

Eine weitere Beschreibung der Approximationsgüte:

Lemma 7.2: Abweichungs- bzw. Restfunktion

Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine $n+1$mal stetig differenzierbare Funktion, dann gibt es eine stetige Funktion $r : (a,b) \to \mathbb{R}$ mir $r(x_0) = 0$ so dass gilt

$$f(x) = T_n(x) + r(x)(x - x_0)^n$$

Beweis:

$$r(x) = \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)! \cdot (x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)}{(n+1)!}$$

Es folgt:

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0) \cdot 0}{(n+1)!} = 0$$

□

Wie schnell eine Funktion gegen Null konvergiert, kann man mit Hilfe der *Landau'schen Ordnungssymbole* beschreiben:

Definition 7.3: Landau'schen Ordnungssymbole

Seien f, g zwei Funktionen, die in einer Umgebung von x_0 mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ definiert sind. Man schreibt

- $f(x) = o(g(x))$ bzw $f(x) \in o(g(x))$ für $x \to x_0$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ bzw $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$ genau dann, wenn $\frac{f(x)}{g(x)}$ in der Nähe von x_0 beschränkt ist.

Beispiele:

- Sei $f(x) = 1 - \cos(x), g(x) = x^2$. Es gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

  Dies bedeutet, dass $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ für $x \to 0$.

- Sei $f(x) = 1 - \cos(x), g(x) = \sin(x)$. Es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$

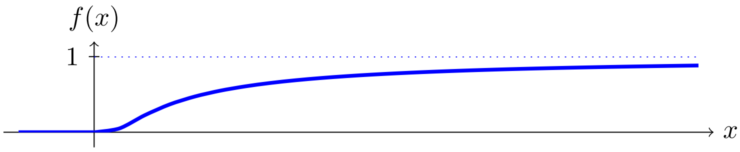
  Dies bedeutet, dass $f(x) = o(\sin(x))$ für $x \to 0$.

Immer gilt, dass $o(g(x))$ eine stärkere Aussage als $\mathcal{O}(g(x))$ ist.

$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = =(g(x))$$

Anmerkungen zur Taylorreihe: Man kann nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion durch ihre Taylorreihe darstellen! Ein Gegenbeispiel ist folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x}, \text{für } x > 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$



Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar (auch in $x_0 = 0$) und es gilt:

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Für die Taylorreihe von f bei $x_0 = 0$ gilt also $T_n(x) \equiv 0$. Diese Funktion lässt sich also nicht einmal lokal durch ihr Taylorpolynom darstellen!

Definition 7.4: Analytische Funktionen

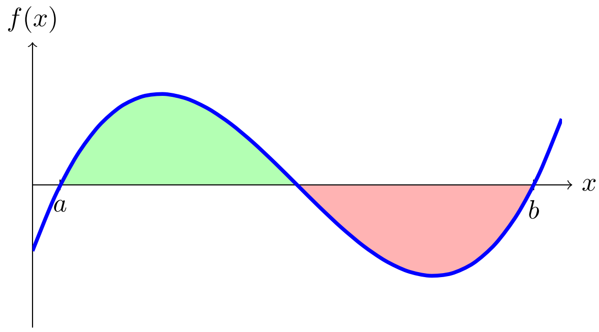
Eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die sich lokal durch ihre Taylorreihe darstellen lässt, heißt *analytisch*.

Interessante Tatsache: Für Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, gilt:
Ist f einmal komplex differenzierbar, ist sie bereits beliebig oft differenzierbar und analytisch!
Komplexe, analytische Funktionen nennt man auch homomorph.

8: Integration

8.1 Integration von Funktionen einer Variable

„Integration wird überall dort benötigt, wo ändernde Ursachen sich zu einer Gesamtwirkung summieren.“Geometrisch kann man das (noch zu definierende) Integral z.B. über eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ interpretieren als Fläche unter dem Graphen, wo Anteile unter der x-Achse als negativ gerechnet werden.



Der Grundgedanke ber der Integration ist es, den Graph von f durch Rechtecke anzunähern. Es gibt verschiedene Begriffe von Integration, z.B.

- Das Cauchy-Integral für Regelfunktionen
- Das Riemann-Integral
- Das Lebesque-Integral

Diese verschiedenen Integralbegriffe unterscheiden sich in ihrer Leistungsfähigkeit, d.h. in den Klassen von Funktionen für die die entsprechenden Integrale definiert sind:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Cauchy-}\\\text{integrierbare}\\\text{Funktionen}\end{array}\right\} \subsetneq \left\{\begin{array}{c}\text{Riemann-}\\\text{integrierbare}\\\text{Funktionen}\end{array}\right\} \subsetneq \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\text{Lebesque-}\\\text{integrierbare}\\\text{Funktionen}\end{array}\right\}}_{\text{(nicht alle Funktionen)}}$$

8.2 Das Cauchy-Integral

Definition 8.1: Intervall-Zerlegung

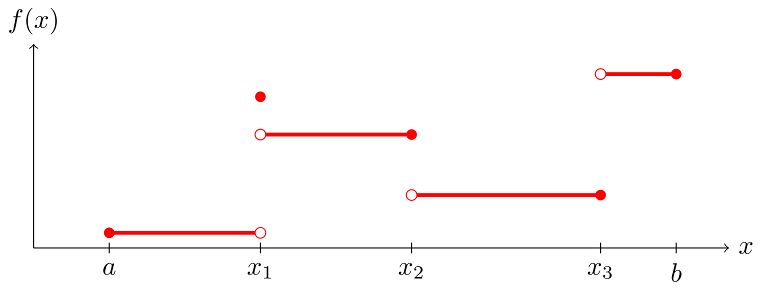
Die endliche Punktmenge aus $n+1$ reellen Zahlen $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt Zerlegung von $[a, b]$, wenn gilt $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Definition 8.2: Treppenfunktionen

Eine (beschränkte) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls eine Zerlegung Z existiert, so dass gilt:

$$f(x) = f_j \quad \text{für } x \in (x_{j-1}, x_j)$$

Für reelle Zahlen $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$.
Diese Funktionen sind also auf dem offenen Teilintervall (x_{j-1}, x_j) konstant. An den Sprungstellen $\{x_0, \dots, x_n\}$ dürfen sie beliebige Werte annehmen. Beispiel:



Bemerkung:

- Die Summe von zwei Treppenfunktionen ist wiederum eine Treppenfunktion. Verwende dafür die Vereinigung der beiden Zerlegungen.
- Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und f eine Treppenfunktion, ist λf eine Treppenfunktion.

Lemma 8.1:

Die Menge der Treppenfunktionen über einem Intervall $[a, b]$ bildet einen reellen Vektorraum, nämlich einen Untervektorraum von der Menge $\{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ aller reellen Funktionen auf $[a, b]$.

Völlig natürlich ist jetzt die Definition des Integrals von Treppenfunktionen, wir summieren die Flächeninhalte der Rechtecke unter dem Graphen auf.

Definition 8.3:

Das Integral über eine Treppenfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die reelle Zahl

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot (x_j - x_{j-1})$$

Wir bemerken, dass das Integral nicht von der Wahl der Zerlegung abhängt.

Satz 8.1: Eigenschaften des Integrals

Seien f, g Treppenfunktionen über dem Intervall $[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$. Es gilt dann:

1. Integral einer Konstanten:

$$\int_a^b c \ \mathrm{d}x = c \cdot (b - a)$$

2. Linearität des Integrals:

- $\displaystyle\int_a^b c \cdot f(x) \ \mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x) \ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \ \mathrm{d}x$

3. Grenzaufteilung:

$$\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \ \mathrm{d}x \quad (a \leq c \leq b)$$

4. SCHWARZ'sche Ungleichung:

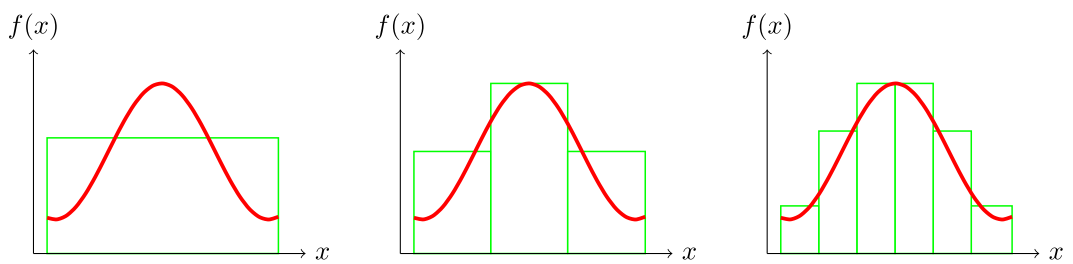
$$\int_a^b f(x)g(x) \ \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f^2(x) \ \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b g^2(x) \ \mathrm{d}x \right)$$

5. Monotonie des Integrals:

- $\displaystyle\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \ \mathrm{d}x \quad (f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in [a, b])$
- $\displaystyle\left| \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \ \mathrm{d}x \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot (b - a)$

BEMERKUNG: Die Rechenregeln für das Integral von Treppenfunktionen gelten weiter auch für Regelfunktionen, dies folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

Wir werden nun die Klasse der Funktionen einführen, für die wir das Integral erklären. Der Grundgedanke ist, Funktionen durch Treppenfunktionen anzunähern.

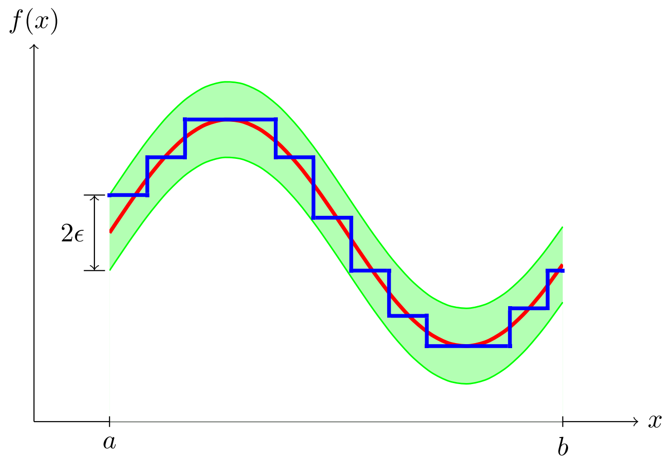


Die entscheidende Idee dabei ist, gleichmäßige Konvergenz von Treppenfunktionen gegen eine Funktion f zu fordern.

Erinnerung: Eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \underbrace{\forall x \in [a,b] : |t_n(x) - f(x)|}_{\sup_{x\in[a,b]} |t_n(x)-f(x)|} < \epsilon$$

Der Fehler kann so durch $\epsilon \cdot (b-a)$ beschränkt werden.



Wir führen nun die sogenannten Regelfunktionen ein als die Klasse von Funktionen, die sich als gleichmäßige Limites von Treppenfunktionen darstellen lassen:

Definition 8.4: Regelfunktionen

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls es eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Bezeichnung: Konvergiert t_n gleichmäßig gegen f, so schreiben wir auch

$$t_n \xrightarrow{glm.} f \text{ bzw. } t_n \xrightarrow[n\to\infty]{glm.} f$$

Welche Funktionen sind Regelfunktionen?

> **Satz 8.2: Hauptsatz über Regelfunktionen**
>
> Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn f in jedem Punkt von (a,b) einen links- oder einen rechtsseitigen Grenzwert, und in a einen rechtsseitigen sowie in b einen linksseiten Grenzwert besitzt.

Folgerung:

- Insbesondere sind stetige Funktionen Regelfunktionen.
- Stückweise stetige Funktionen (insbesondere Treppenfunktionen) und beschränkte monotone Funktionen sind Regelfunktionen.
- Produkt und Betrag von Regelfunktionen sind wiederum Regelfunktionen.

Bemerkung: Die Menge der Regelfunktionen bildet einen reellen Vektorraum.

Definition 8.5: Integral für Regelfunktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, d.h. es gibt eine Folge von Treppenfunktionen $t_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{glm.} f$. Dann setzen wir das Integral der Regelfunktion als:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\ \mathrm{d}x$$

Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir noch die Wohldefiniertheit beweisen. Das heißt die Existenz des Grenzwerts auf der rechten Seite und die Unabhängigkeit von der Wahl der Folge (t_n).

Lemma 8.2: Integral für Regelfunktionen

Der Grenzwert in der obigen Definition existiert und ist unabhängig von der Wahl der Approximierenden Folge von Treppenfunktionen.

Beweis:

1. Wir zeigen dass

$$I_n := \int_a^b t_n(x)\ \mathrm{d}x$$

eine Cauchy-Folge ist. Sei $\epsilon > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |I_n - I_m| &= \left| \int_a^b t_n(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b t_m(x)\ \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_a^b t_n(x) - t_m(x)\ \mathrm{d}x \right| \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} |t_n(x) - t_m(x)| \cdot (b-a) \\ &= \epsilon \cdot (b-a) \end{aligned}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass (t_n) in folgendem Sinne eine Cauchyfolge ist, es gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N} : \sup_{x\in[a,b]} |t_n(x) - t_m(x)| < \epsilon$$

Dies zeigt die Existenz des Grenzwerts.

2. Unabhängigkeit von der Wahl von (t_n). Seien (t_n) und (h_n) zwei verschiedene Folgen von Treppenfunktionen, $[a, b] \to \mathbb{R}$, die beide die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig approximieren.

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x) \overset{glm.}{=} f(x) \overset{glm.}{=} \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

Sei weiter

$$I_n := \int_a^b t_n(x)\ \mathrm{d}x, J_n := \int_a^b h_n(x)\ \mathrm{d}x$$

Dann ist, da t_n und h_n gleichmäßig konvergieren:

$$\begin{aligned} |I_n - J_n| &\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |t_n(x) - h_n(x)| \\ &\leq (b-a)\cdot \left(\underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |t_n(x) - f(x)|}_{\to 0} + \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h_n(x)|}_{\to 0} \right) \end{aligned}$$

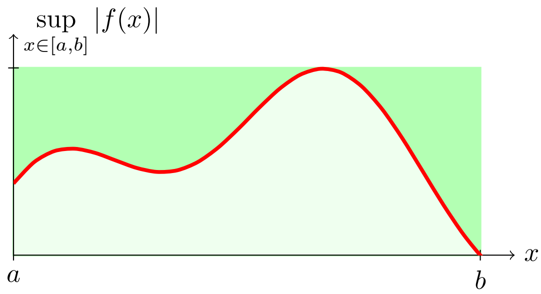
Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (I_n - J_n) = 0$ was zu $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} J_n$ äquivalent ist. □

Damit haben wir gezeigt, dass das Cauchy-Integral wohldefiniert ist.

8.2.1 Integralrechnung

Für Regelfunktionen gilt die Abschätzung

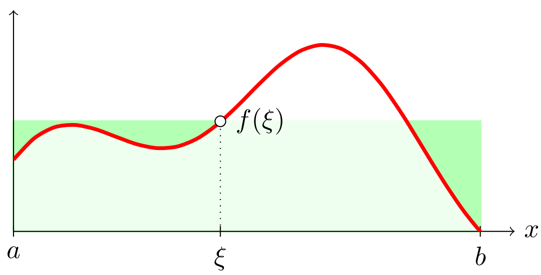
$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq (b-a)\cdot \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$



Ist die Funktion f stetig, kann man eine ähnliche Aussage für den exakten Wert des Integrals bekommen

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (b-a)\cdot f(\xi)$$

für ein $\xi \in [a,b]$. Diese Aussage ist der Mitelwertsatz der Integralrechnung.



> **Satz 8.3: Mittelwertsatz der Integralrechnung**
>
> Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $p \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit
>
> $$\int_a^b f(x)\cdot p(x)\ \mathrm{d}x = f(\xi)\cdot \int_a^b p(x)\ \mathrm{d}x$$

Beweis:

Wegen der Monotonie des Integrals gilt:

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)\cdot \int_a^b p(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)p(x)\ \mathrm{d}x \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)\cdot \int_a^b p(x)\ \mathrm{d}x$$

Wobei wir den Satz benutzt haben, dass eine stetige Funktion auf einem geschlossenen Intervall $[a,b]$ ihr Minimum und ihr Maximum annimmt.

Es gibt also eine Zahl μ zwischen $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ und $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$, so dass

$$\int_a^b f(x)p(x)\ \mathrm{d}x = \mu \cdot \int_a^b p(x)\ \mathrm{d}x$$

Nach dem Zwischenwertsatz, also da f stetig ist, nimmt f alle Werte zwischen m und M an. Das heißt es gibt ein $\xi \in [a,b]$, so dass $f(\xi) = \mu$ gilt. □

Eine wichtige Erkenntnis ist der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration. Dazu führen wir den Begriff der Stammfunktion ein:

Definition 8.6: Stammfunktion

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heit Stammfunktion von f, falls F in jedem Punkt aus $[a,b]$ differenzierbar ist und

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

gilt.

Bemerkung: Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt. Ist nämlich F eine Stammfunktion von f, dann ist $x \mapsto F(x) + c$ eine Stammfunktion von f für alle $c \in \mathbb{R}$.

Damit können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formulieren:

Satz 8.4: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für stetige Funktionen

Sei f stetig in $[a,b]$ und

$$F(x)) = \int_a^x f(s)\ \mathrm{d}s$$

Dann ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und eine Stammfunktion von f.

Beweis:

Sei $x_0 \in [a,b]$ und sei (x_n) eine Folge von Punkten, $x_n \in [a,b]$ mit $(x_n) \to x_0$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{\int_a^{x_n} f(s)\ \mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\ \mathrm{d}s}{x_n - x_0} \\
&= \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(s)\ \mathrm{d}s}{x_n - x_0} \\
&= \frac{1}{x_n - x_0} f(\xi_n)(x_n - x_0) \\
&= f(\xi_n)
\end{aligned}$$

wobei $\xi_n \in [x_0, x_n]$ ist. Da $(x_n) \to x_0$, gilt auch $\xi_n \to x_0$. Da f stetig ist, existiert auch der Grenzwert des oberen Terms und es gilt:

$$F'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \to \infty} f(\xi_n) = f(x_0)$$

□

Satz 8.5: **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Regelfunktionen**