Inhalt des Übungsblatts:

- Gleichungen *(S. 7)*
- Monotonie, Achsenschnittpunkte *(S. 13)*, Trigonometrie *(S. 16)*
- Ableiten *(S. 23)*
- Tangenten, Normalen *(S. 22)*

A1: Gleichungen: Löse die Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

a) $3x + 5 = 23$

b) $8x - 12 = 28$

c) $7x + 3 = 5x + 12$

d) $17 - 4x = 1 - 12x$

e) $4(9x - 11) - 12(3x - 4) = 4$

f) $\frac{x+2}{3} + \frac{x-1}{15} = \frac{2x+3}{5}$

g) $(x-5)^2 = (x-3)(x+3)$

Lösung 1:

a) $3x = 18 \rightsquigarrow x = 6$

b) $8x = 40 \rightsquigarrow x = 5$

c) $2x = 9 \rightsquigarrow x = 4,5$

d)

$$\begin{aligned} 17 - 4x &= 1 - 12x \\ 16 &= 8x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

e) Ausmultiplizieren, die Gleichung gilt für alle x.

f)

$$\begin{aligned} \frac{5x+10}{15} + \frac{x-1}{15} &= \frac{2x+3}{5} \\ \frac{6x+9}{15} &= \frac{2x+3}{5} \\ \frac{2x+3}{5} &= \frac{2x+3}{5} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ gilt für alle x

g)

$$\begin{aligned} (x-5)^2 &= (x-3)(x+3) \\ x^2 - 10x + 25 &= x^2 + 9 \\ 10x &= 16 \\ x &= 1,6 \end{aligned}$$

A2: Mitternachtsformel: Löse die Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ mithilfe der Mitternachtsformel

a) $x^2 - 10x + 24 = 0$

b) $x^2 + 6x - 16 = 0$

c) $x^2 - 9x = 22$

d) $x^2 = 3x + 18$

e) $\frac{x(x-10)}{2} = 12$

Lösung 2:

für das Polynom $ax^2 + bx + c = 0$ gilt für die Nullstellen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

a)

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} \\ &= \frac{10 \pm 2}{2} \\ \rightarrow x_1 &= 6 \\ \rightarrow x_2 &= 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm 10}{2} \\ \rightarrow x_1 &= 4 \\ \rightarrow x_2 &= -16 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x^2 - 9x = 22 &\Leftrightarrow x^2 - 9x - 22 = 0 \\ x_{1,2} &= \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-22)}}{2} \\ &= \frac{9 \pm \sqrt{81 + 88}}{2} \\ &= \frac{9 \pm \sqrt{169}}{2} \\ &= \frac{9 \pm 13}{2} \\ \rightarrow x_1 &= 6 \\ \rightarrow x_2 &= -2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x^2 = 3x + 18 &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \\ x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{91}}{2} \\ &= \frac{3 \pm 9}{2} \\ \rightarrow x_1 &= 6 \\ \rightarrow x_2 &= -3 \end{aligned}$$

e)

$$\frac{x(x-10)}{2} = 12 \Leftrightarrow x(x-10) = 24 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 24 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2}$$
$$= \frac{10 \pm \sqrt{100+96}}{2}$$
$$= \frac{10 \pm \sqrt{196}}{2}$$
$$= \frac{10 \pm 14}{2}$$
$$\rightarrow x_1 = 12$$
$$\rightarrow x_2 = -2$$

A3: Wurzeln: Vereinfache so weit möglich

a) $4\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

b) $\sqrt{180}$

c) $\sqrt{192x^5}$

d) $\sqrt{\frac{80x^2}{147}}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{300}$

f) $\sqrt{27} - \sqrt{25} - \sqrt{3}$

Lösung 3:

a) $\sqrt{7}$

b) $\sqrt{4 \cdot 45} = 2 \cdot \sqrt{5 \cdot 9} = 6 \cdot \sqrt{5}$

c) $\sqrt{192 \cdot x^5} = \sqrt{192} \cdot \sqrt{x^5} = \sqrt{2 \cdot 96} \cdot \sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot x} = 4 \cdot x^2 \cdot \sqrt{12x}$

d) $\frac{\sqrt{80x^2}}{\sqrt{147}} = \frac{4x \cdot \sqrt{5}}{7 \cdot \sqrt{3}}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{300} = 3 \cdot \sqrt{100} = 30$

f) $\sqrt{3 \cdot 9} - 5 - \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3} - 5 - \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} - 5$

A4: Satz vom Nullprodukt: Löse die Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ mit dem Satz vom Nullprodukt

a) $\sin(x) \cdot (\cos(x) - 2) = 0$
mit $(0 \leq x < 2\pi)$

b) $\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0$
mit $(0 \leq x < 2\pi)$

c) $x^3 - 4x = 0$

d) $3x^3 - 6x^2 = 0$

Lösung 4:

a) $\cos(x) - 2 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x(x^2 - 4) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$

c) $\sin(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0, x_2 = \pi$

d) $x^2(3x - 6) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

A5: Substitution: Löse die Gleichungen - ohne CAS

a) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

c) $\sin(3x) = 1 (0 \leq x \leq 2\pi)$

d) $\sin^2(2x) + 2\sin(2x) = -1$
$(0 \leq x \leq 2\pi)$

e) $e^{2x} - e^x = 0$

f) $\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2 = 0$
$(0 \leq x \leq 2\pi)$

Lösung 5:

a) Mit Substitution $x^2 = u$:

$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = 2.$

Resubstitution:

$u_1 = \frac{1}{2} = x^2 \rightsquigarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2 = 2 = x^2 \rightsquigarrow x = \sqrt{2}$

b) Mit Substitution $x^2 = u$:

$u_1 = 1, u_2 = 3.$

Resubstitution:

$x_1 = 1, x_2 = \sqrt{3}$

c) $\sin(3x) = 1$ Mit Substitution $u = 3x$:

$\sin(u) = 1 \rightsquigarrow u = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

Resubstitution:

$k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} = 3x \rightsquigarrow x = \frac{k \cdot 2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{9\pi}{6}$

d) Mit Substitution $u = \sin(2x)$:

$u^2 + 2u + 1 = 0$

Mitternachtsformel: $u_1 = -1$

Resubstitution: $u_1 = -1 = \sin(2x)$

mit Substitution $v = 2x$ folgt $-1 = \sin(v) \to v = k \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

Resubstitution:

$v = k \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} = 2x \rightsquigarrow x = k \cdot \pi + \frac{3\pi}{4} \quad x_1 = \frac{3\pi}{4}, x_2 = \frac{7\pi}{4}$

e) Siehe oben, $x = 0$

f) Siehe oben, $x_1 = 0, x_2 = 2\pi$

A6: Nullstellen von Funktionen: Bestimme die Nullstellen der Funktionen

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$

c) $f(x) = x^4 - 1$

Lösung 6:

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x-2)^2 &= 4 \\
(x-2)^2 &= 8 \\
(x-2) &= \pm\sqrt{8} \\
\to x_1 &= 2 + \sqrt{8} \\
\to x_2 &= 2 - \sqrt{8}
\end{aligned}
$$

b) Mit der Mitternachtsformel: Term unter der Wurzel ist negativ, d.h. keine Lösungen

c) Mit Substitution: $u := x^2$, $u_1 = 1, u_2 = -1$

Resubstitution: $u = x^2 \rightsquigarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

A7: Schnittpunkte von Funktionen: In welchen Punkten schneiden sich die Funktionen?

a) $f(x) = x^2, g(x) = 2x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4, g(x) = x^2+4$

Lösung 7:

a)

$$x^2 = 2x$$
$$x^2 - 2x = 0$$

Mit der Mitternachtsformel:

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

Bestimmung der Werte der Stellen:

$$f(0) = 0, f(2) = 4$$
$$\mathbb{L} = \{\ (0|0), (2|4)\ \}$$

b)

$$\frac{1}{2}x^4 = x^2 + 4$$
$$\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = 0$$

Substitution $x^2 = u$

$$\frac{1}{2}u^2 - u - 4 = 0$$
$$u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0.5 \cdot (-4)}}{1}$$
$$= 1 \pm \sqrt{9}$$
$$u_1 = 4 \quad u_2 = -2$$

Resubstitution von u_1 ($u_2 < 0 \rightarrow$ nicht reelles Ergebnis):

$$x^2 = 4$$
$$x_1 = -2, x_2 = 2$$

Bestimmung der Werte der Stellen:

$$g(-2) = 8, g(2) = 8$$
$$\mathbb{L} = \{\ (-2|8), (2|8)\ \}$$

A8: Trigonometrie:

a) Beschreiben Sie in Worten, wie sich der Graph von $g(x) = 3\sin(3(x+1)) - 3$ von $\sin(x)$ unterscheidet.

b) Gib die Amplitude, Verschiebung und Periode der folgenden Sinus-Funktionen an:
- $\sin(2(x-2)) + 1$
- $4\sin\left(\frac{3x}{4\pi}\right)$
- $-2\sin(4x+8) - 3\pi$

c) In Abbildung 1 gegeben ist der Graph F einer verschobenen Sinusfunktion. Gib einen möglichen Funktionsterm $f(x)$ an.

Lösung 8:

a) Amplitude 3, Phasenverschiebung um 1 nach links, Verschiebung um 3 nach unten und Änderung der Periode auf $\frac{2\pi}{3}$

b)
- Amplitude: 1, Verschiebung von $(0|0)$ zu $(2|1)$, Periode: π
- Amplitude: 4, Periode: $\frac{3}{2}$
- Amplitude: 2, Verschiebung von $(0|0)$ zu $(-2|-3\pi)$, Periode: $\frac{\pi}{2}$

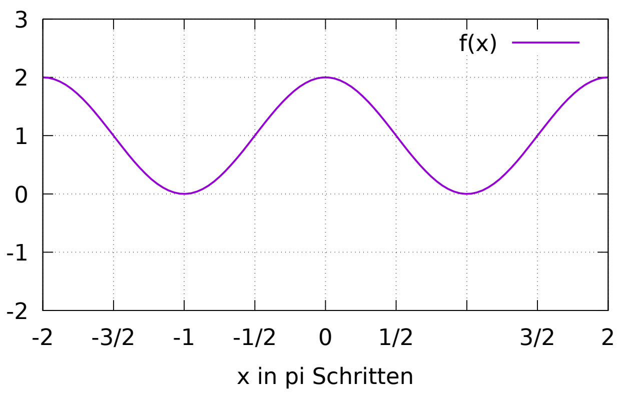

Abbildung 1: Sinus-Funktion

c) Um 1 vertikal und entweder um $-\dfrac{\pi}{2}$ oder $\dfrac{3\pi}{2}$ horizontal verschoben:
$f(x) = \sin\left(x + \dfrac{1}{2}\pi\right) + 1$ oder $f(x) = \sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) + 1$

A9: Ableitungen: Berechne jeweils die erste Ableitung der Funktionen

a) $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 10$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = x^x$

d) $j(x) = \ln(e^{3x}\sin(2x))$

e) $k(x) = 2(3x^2 + x)^3$

f) $l(x) = \dfrac{4}{(2x+1)^2}$

g) $m(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$

h) $n(x) = \sqrt{x}\sin(x^2)$

i) $o(x) = \sqrt{\cos(x) \cdot \sqrt{x+1}}$

j) $p(x) = \dfrac{2x+3}{\sin(3x)}$

Lösung 9:

a) Summenregel:

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 + 2x$$

b) Produktregel:

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

c) Umformung auf handlicheres Format:

$$h(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$$

Ketten- und Produktregel:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{x\ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= e^{x\ln(x)} \cdot \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

d) Umformung auf handlicheres Format:

$$\begin{aligned} j(x) &= \ln(e^{3x}\sin(2x)) \\ &= \ln(e^{3x}) + \ln(\sin(2x)) \\ &= 3x + \ln(\sin(2x)) \end{aligned}$$

Kettenregel:

$$\begin{aligned} j'(x) &= 3 + \frac{1}{\sin(2x)} \cdot 2 \cdot \cos(2x) \\ &= \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} + 3 \end{aligned}$$

e) $k'(x) = 6(3x^2 + x)^2 \cdot (6x + 1)$

f) $l'(x) = -16(2x+1)^{-3}$

g) $m'(x) = 2\sqrt{x^2+1} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

h) $n'(x) = 2x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos(x^2) + \dfrac{\sin(x^2)}{2\sqrt{x}}$

i) $o'(x) \quad = \quad \dfrac{-\sin(x)\sqrt{x+1}}{2 \cdot \sqrt{\cos(x) \cdot \sqrt{x+1}}} \quad +$
$\dfrac{\cos(x)}{4 \cdot \sqrt{\cos(x)\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+1}}$

j) $p'(x) = \dfrac{-6\,(3x\cos(3x) - \sin(3x))}{(\sin(3x))^2}$

A10: Monotonieuntersuchung:

a) Definiere, wann eine Funktion in einem Intervall als streng monoton steigend bezeichnet wird.

b) Untersuche die gegebenen Funktionen auf Monotonie und gib Art und Lage der Extrempunkte an:

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
(b) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 6$
(c) $h(x) = 3x^4 + 8x^3 - 48x^2 + 3$
(d) $j(x) = \frac{2x^2}{2x-1}$ (Achtung: gebrochenrational)

Lösung 10:

a) Eine Funktion ist über dem Intervall $[x_0; x_1]$ streng monoton steigend, wenn gilt: $f'(x) > 0$ für alle $x_0 \leq x \leq x_1$, äquivalent dazu: $\forall a, b \in [x_0; x_1], a < b : f(a) > f(b)$

b) (a) $f'(x) = 2x - 4$
Bestimmen der Nullstellen:

$$f'(x) = 0 \rightsquigarrow x_0 = 2$$

Da $f'(x) > 0$ für $x > x_0$ gilt:

$$f \begin{cases} \text{streng monoton fallend für } x < 2 \\ \text{Tiefpunkt bei } T(2|f(2)) = T(2|1) \\ \text{streng monoton steigend für } x > 2 \end{cases}$$

(b) $g'(x) = 3x^2 - 6x - 24$
Bestimmen der Nullstellen:

$$g'(x) = 0 = 3x^2 - 6x - 24 \rightsquigarrow x_1 = -2, x_2 = 4$$

Durch Berechnen von zufälligen Funktionswerten in den drei entstehenden Intervallen erhält man:

$$g \begin{cases} \text{streng monoton steigend für } x < -2 \\ \text{Hochpunkt bei } H(-2|f(-2)) = H(-2|34) \\ \text{streng monoton fallend für } -2 < x < 4 \\ \text{Tiefpunkt bei } T(4|f(4)) = T(4|-74) \\ \text{streng monoton steigend für } x > 4 \end{cases}$$

(c) $h'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 96x = 12x \cdot (x^2 + 2x - 8)$
Berechnen der Nullstellen mit der Mitternachtsformel und dem Satz vom Nullprodukt:

$$h'(x) = 0 \rightsquigarrow x_1 = -4, x_2 = 0, x_3 = 2$$

Durch Berechnen von zufälligen Funktionswerten in den entstehenden Intervallen erhält man:

$$h'(x) \begin{cases} < 0 \text{ für } x < -4 \\ > 0 \text{ für } -4 < x < 0 \\ < 0 \text{ für } 0 < x < 2 \\ > 0 \text{ für } x > 2 \end{cases}$$

Mit Extrempunkten von h: $T_1(-4|-509), H(0|3), T_2(2|-77)$

(d) $j'(x) = \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$
Nullstellen der Ableitung sind die Nullstellen des Zählers: $4x(x-1) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0, x_2 = 1$
j hat eine Polstelle bei der Nullstelle des Nenners: $2x - 1 = 0 \rightsquigarrow x_p = \frac{1}{2}$

$$j'(x)\begin{cases} > 0 \text{ für } x < 0 \\ < 0 \text{ für } 0 < x < \frac{1}{2} \\ < 0 \text{ für } \frac{1}{2} < x < 1 \\ > 0 \text{ für } x > 1 \end{cases}$$

Mit Extrempunkten von j: $H(0|0), T(1|2)$ und einer Polstelle (senkrechte Asymptote) bei $x = \frac{1}{2}$

A11: Tangenten:

a) Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 2x^2 + 1$. Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen G von g im Punkt $P(1|3)$.

b) Bestimme die Gleichung der Tangente und Normalen an den Graphen G von g mit der Steigung 1.

c) Bestimme die Gleichungen der beiden Tangenten an den Graphen G von g, die durch den Punkt $Q(3|17)$ gehen und gib die Berührpunkte der Tangenten mit dem Graphen G von g an.

Lösung 11:

Tangentengleichung: $t(x, x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) + g(x_0)$

Normalengleichung: $n(x, x_0) = -\frac{1}{g'(x_0)} \cdot (x - x_0) + g(x_0)$

a) Aus Punkt P(1/3) folgt: $x_0 = 1,\ g(x_0) = 3$ und ableiten ergibt $g'(x) = 4x$

Damit gilt: $t(x) = 4 \cdot (x - 1) + 3$

und: $n(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1) + 3$

b)

$$\begin{aligned} \text{Tangentengleichung: } g'(x_0) = 1 &\rightsquigarrow x_0 = \frac{1}{4} \\ g\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{9}{8} \\ t(x) &= 1 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{8} \\ \text{Normalengleichung: } -\frac{1}{g'(x_0)} = 1 &\rightsquigarrow x_0 = -\frac{1}{4} \\ g\left(-\frac{1}{4}\right) &= \frac{9}{8} \\ n(x) &= 1 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

c) Aus dem Punkt $Q(3|517)$ folgt: $t(3) = 17$, daher gilt für die Tangentengleichungen:

$$17 = g'(x_0) \cdot (3 - x_0) + g(x_0) \rightsquigarrow x_{0,1} = 2,\ x_{0,2} = 4$$
$$t_1(x) = 8 \cdot (x - 2) + 9$$
$$t_2(x) = 16 \cdot (x - 4) + 33$$