A1: Ebenengleichungen: Bestimme die Ebene in der angegebenen Darstellungsform:

a) E enthält die Punkte $A(2|2|2), B(4|1|3)$ und $C(8|4|5)$. Gib E in Normalenform an.

b) Die gesuchte Ebene F ist die Spiegelebene zwischen $A(1|4|7)$ und $A'(3|2|3)$. Gib F in Parameterform an.

c) Die Ebene G enthält die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und ist orthogonal zur Ebene $H : -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2 = 0$. Gib die Ebene G in Koordinatenform an.

Lösung 1:

a)

b) In Normalenform aufstellen:

$$F : \left[\vec{x} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

A2: Schnittgerade: Gib eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen $E : x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ und $F : 6x_1 + x_2 - x_3 + 7 = 0$ an.

Lösung 2:

A3: Abstandsberechnungen Teil 1: Berechne den Abstand des Punktes $R(6|9|4)$ von der Ebene $E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

A4: Abstands- und Lageberechnungen: Gegeben sind die Ebene
$E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel zueinander sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand von E und g.

Lösung 4:

a) Dafür müssen der Normalenvektor von E und der Richtungsvektor von g orthogonal sein.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$$

b) Aufstellen einer Hilfsgeraden:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

A5: Anwedungsaufgaben:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1 - 4x^2}{x^2}$. Ihr Schaubild ist K, wo schneidet die Tangente an K in $P(1|f(1))$ die x-Achse?

b)

Lösung 5:

a) Aufstellen der allgemeinen Tangentengleichung für f:

$$\begin{aligned} t_f(x) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\ &= \left(\frac{-2}{x_0^3}\right) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{x_0^2} - 4 \end{aligned}$$

Für $x_0 = 1$ folgt:

$$t_{f,1} = -2(x-1) - 3$$

Finden der Nullstelle von $t_{f,1}$:

$$t_{f,1} \stackrel{!}{=} 0 = -2(x-1) - 3$$

A6: Uneigentliches Flächenintegral

a) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$

b) Bestimmen Sie $\int\limits_0^\infty x^a\,\mathrm{d}x$ in Abhängigkeit von a mit $a < -1$.

c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 \mathrm{e}^x$

Lösung 6:

a)

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^k e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^k \\ &= (-\mathrm{e}^{-k}) - (-1) \\ &= -\mathrm{e}^{-k} + 1 \\ &\lim_{k \to \infty} -\mathrm{e}^{-k} + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty x^a\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{a} x^{a+1}\right]_0^k \\ &= \left(\frac{1}{k} k^{a+1}\right) - \left(\frac{1}{a} 0^{a+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k} k^{a+1}\right) \\ &\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} k^{a+1} \\ &= 0 \quad \text{da } k^{a+1} < 1\text{, denn } a < -1 \end{aligned}$$

A7: Gebrochenrationale Funktionen

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$. Skizzieren Sie den Graphen und geben Sie den Definitionsbereich D_f an.

b) Geben Sie die Funktionsgleichungen aller waagerechter oder senkrechter Asymptoten von $f(x) = \frac{4x^2+3}{x^2+5x}$

A8: LGS Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}$ der linearen Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{array}{rrrl} x & +3y & +\ z & =1 \\ 3x & +9y & +4z & =5 \\ x & +3y & +2z & =3 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrl} 3x & +\ 2y & =1 \\ 1x & +-2y & =11 \\ -2x & +\ \ y & =5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrl} 6x & +\ \ y & +\ \ z & =31 \\ 3x & +\ 1y & +4\frac{1}{2}z & =19 \\ -2x & +-1y & +\ 0z & =-15 \end{array}$$

A9: Funktionsterm aufstellen:

Lösung 9:

A10: Vektorrechnung

a) Berechne das Skalarprodukt und das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Berechne α so, dass die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander sind.

c)

Lösung 10:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 20 - 4 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+10 \\ 8-2 \\ 5+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix}$$

b) Berechne α so, dass die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander sind.

c)