Inhalt des Übungsblatts:

- Extremstellen und -Punkte *(S. 27)*
- Exponentialfunktion *(S. 31)*
- Funktionenscharen *(S. 33)*
- Integral *(S. 36)*, Rotationskörper *(S. 38)*, Flächeninhalte *(S. 39)*
- Funktionsanalyse *(S. 43)*, gebrochenrationale Funktionen, Asymptoten *(S. 44)*

A1: Gleichung lösen Löse die Gleichung $\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x} = 6\mathrm{e}^x$.
Hinweis: Du brauchst ungefähr alle gelernten Methoden!

Lösung 1:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x} &= 6\mathrm{e}^x && \mid -6\mathrm{e}^x \\
\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^x &= 0 && \mid \text{Ausklammern} \\
\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x} - 6) &= 0 && \mid \text{Nullprodukt und Substitution: } z = \mathrm{e}^{2x} \\
z^2 - z - 6 &= 0 && \mid \text{Mitternachtsformel} \\
z_1 = -2 \quad z_2 &= 3 && \mid \text{Resubstitution: } z_{1/2} = \mathrm{e}^{2\cdot x_{1/2}} \\
\mathrm{e}^{2\cdot x_1} &= -2 && \Rightarrow \text{nicht möglich } (\mathrm{e}^x \text{ immer} > 0) \\
\mathrm{e}^{2\cdot x_2} &= 3 && \rightsquigarrow x = \frac{\ln(3)}{2}
\end{aligned}$$

A2: Exponentialfunktion

a) Gib $f(x) = 25^x$ als natürliche Exponentialfunktion an.

b) Wie unterscheidet sich der Graph von $-\mathrm{e}^{-x}$ von e^x? Formuliere die Erklärung schrittweise.

Lösung 2:

a) $\mathrm{e}^{\ln(25)\cdot x}$

b)
- $-\mathrm{e}^x$ ist zu e^x an der x-Achse gespiegelt
- e^{-x} ist zu e^x an der y-Achse gespiegelt

$\Rightarrow -\mathrm{e}^{-x}$ ist zu e^x an der x- und der y-Achse gespiegelt

A3: Extrempunkte

a) Für eine ganzrationale Funktion f zweiten Grades gilt: $T(-1| - 4)$ ist der Tiefpunkt und $Q(2|5)$ ist ein weiterer Punkt ihres Graphen. Ermittle eine Funktionsgleichung von f.

b) Gegeben ist $g(x) = 10x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ (*Korrektur!*) (vgl. Abi 2014) (CAS)

- Bestimme Extrempunkt und Wendepunkt von g
- Für jedes $u > 0$ sind $O(0|0)$, $P(u|0)$ und $Q(u|g(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimme einen Wert für u so, dass dieses Dreieck den Flächeninhalt 8 hat.
- Auf der x-Achse gibt es Intervalle der Länge 3, auf denen die Funktion g den Mittelwert $2,2$ besitzt. Bestimme die Grenzen eines solchen Intervalls.

Lösung 3:

a) Ganzrationale Funktion zweiten Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $f(-1) = -4$, $f'(-1) = 0$ und $f(2) = 5$
Eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned} a - b + c &= -4 & &\rightsquigarrow c = -4 + a & &\rightsquigarrow c = -3 \\ -2a + b &= 0 & &\rightsquigarrow b = 2a & &\rightsquigarrow b = 2 \\ 4a + 2b + c &= 5 & &\rightsquigarrow 4a + 4a - 4 - a = 5 & &\rightsquigarrow a = 1 \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) Für Extrempunkt mittels CAS: $g'(x_E) = 0 \rightsquigarrow x_E = 2 \Rightarrow y_E \approx 7,36$ also $E(2|7,36)$
Für Wendestelle mittels CAS: $g''(x_W) = 0 \rightsquigarrow x_W = 4 \Rightarrow y_W \approx 5,41$ also $W(4|5,41)$
Für Flächeninhalt des Dreiecks OPQ gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot |OP| \cdot |PQ|$ mit $|OP| = u$ und $|PQ| = g(u)$ ergibt sich: $A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot g(u)$ und damit $8 = \frac{1}{2} \cdot u \cdot g(u) \rightsquigarrow u \approx 2,18$
Für das Intervall $[a; a+3]$ muss gelten: $\frac{1}{3} \cdot \int_a^{a+3} g(x)\,\mathrm{d}x = 2,2 \rightsquigarrow a \approx 5,50$, daher $[5,50; 8,50]$

A4: Funktionenscharen:

a) Berechne die Nullstellen der Funktionenscharen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

- $f_a(x) = x^2 + 2ax + 9$
- $g_a(x) = 5ax + 15a$
- $h_a(x) = x^3 - a^2$
- $j_a(x) = (x - 3a)(x + 6a)$

b) Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = (x + a) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Untersuche die Lage des Maxmimums.
- Gib die Gleichung der Funktion an, auf der die Maxima aller Scharkurven liegen.

Lösung 4:

a)
- $0 = x^2 + 2ax + 9 \rightsquigarrow x_1 = \sqrt{a^2 - 9} - a,\ x_2 = -\sqrt{a^2 - 9} - a$
- $0 = 5ax + 15a \rightsquigarrow x = -3$
- $0 = x^3 - a^2 \rightsquigarrow x = \sqrt[3]{a^2}$
- Nullprodukt: $x_1 = 3a,\ x_2 = -6a$

b)
- Ableitung bilden:

$$f_a'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} - a\mathrm{e}^{-x} = (1 - x - a) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$
$$f_a''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + a\mathrm{e}^{-x} = (a + x - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

  Extremstelle: $f_a'(x) = 0 \rightsquigarrow x = 1 - a$
  In f_a'' einsetzen: $f_a''(1 - a) = (a + 1 - a - 2) \cdot \mathrm{e}^{-(1-a)} < 0$ für alle $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$HP bei $x = 1 - a$
  HP bei $(1 - a|\mathrm{e}^{a-1})$
- Aus dem HP bei $(1 - a|\mathrm{e}^{a-1})$ folgt $x_h = 1 - a \rightsquigarrow a = 1 - x_h$
  Eingesetzt in $y_h = \mathrm{e}^{a-1}$ folgt: $y_h = \mathrm{e}^{-x_h}$
  Damit gilt für die Ortskurve: $t(x) = \mathrm{e}^{-x}$

A5: Stammfunktion berechnen: Berechne jeweils ein Stammfunktion zu den angegebenen Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + x - 3$

b) $g(x) = (2x - 3)^8$

c) $h(x) = -5\sin(3x + 2)$

d) $i(x) = \mathrm{e}^{3x+7}$

Lösung 5:

a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$

b) $G(x) = \frac{1}{9}(2x - 3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}(2x - 3)$

c) $H(x) = \frac{5}{3}\cos(3x + 2)$

d) $I(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+7}$

A6: Integral:

a) Welche der Auswahlmöglichkeiten können eingesetzt werden?

$$\int_0^5 \left(3x^2 + \frac{1}{5}x\right)\,\mathrm{d}x = \square$$

- $\left[6x + \frac{1}{5}\right]_0^5$
- $\left[x^3 + 0,1x^2\right]_0^5$
- $127,5$
- $\left[x^3 + \frac{1}{10}x^2\right]_1^6$

b) Berechne den Gesamtinhalt der Flächen, die durch die Schaubilder der Funktionen eingeschlossen wird:

- $f(x) = x^2, g(x) = 2 - x^2$
- $h(x) = x^3, i(x) = x^2$
- $j(x) = x^3, k(x) = x$ (Achtet auf Flächen über und unter der x-Achse)

c) Die Gerade $y = x$ und die x-Achse begrenzen zusammen mit den Geraden $x = 2$ und $x = u$ mit $u > 2$ eine Fläche. Bestimmen Sie einen Wert für u so, dass $f(x) = x - \frac{8}{x^2}$ diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt. (CAS)

Lösung 6:

a) $\left[x^3 + 0,1x^2\right]_0^5$ und $127,5$

b)
- Schnittpunkte der Graphen: $x_{1,2} = \pm 1$
  $$\int_{-1}^{1} 2 - x^2 - x^2\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$
- Schnittpunkt der Graphen: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$
  $$\int_0^1 (x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$
- Schnittpunkte der Graphen: $x_{1,2} = \pm 1,\ x_3 = 0$
  $$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

c) Bestimme die Flächeninhalte der Teilflächen:

$$A_1 = \int_2^u \left(x - \left(x - \frac{8}{x^2}\right)\right)\,\mathrm{d}x \qquad |\ \text{Fläche zwischen } y = x \text{ und } f(x) = x - \frac{8}{x^2}$$
$$A_2 = \int_2^u \left(x - \frac{8}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x \qquad |\ \text{Fläche zwischen } f(x) = x - \frac{8}{x^2} \text{ und } x\text{-Achse}$$

Gleichsetzten und mittels CAS nach u auflösen ergibt: $u \approx 3,12$

A7: Uneigentliches Flächenintegral

a) Berechnen Sie $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Lösung 7:

$$\int_0^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^k$$
$$= (-\mathrm{e}^{-k}) - (-1)$$
$$= -\mathrm{e}^{-k} + 1$$
$$\lim_{k\to\infty} -\mathrm{e}^{-k} + 1$$
$$= 0 + 1 = 1$$

A8: Rotationskörper:

a) Die Fläche, welche von der x-Achse und dem Graphen der Funktionen vollständig eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Berechne den Rauminhalt des entstandenen Körpers.

- $f(x) = x^2 - 2x$
- $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$
- $g(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 2)$
- $j(x) = x^2 - 5x + 4$

b) Die Fläche, welche von den Graphen der Funktionen vollständig eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Berechne den Rauminhalt des entstandenen Körpers.

- $f(x) = -x^2 + 4, \quad g(x) = x + 2$
- $h(x) = x^2 - x + 1, \quad j(x) = 4x - 3$

Lösung 8:

a)
- Nullstellen bei $x_0 = 0, x_1 = 2$
$$V = \pi \cdot \int_0^2 (x^2 - 2x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15} \approx 3,35$$
- Nullstellen bei $x_0 = 0, x_1 = 2$
$$V = \pi \cdot \int_0^2 (\sqrt{x} \cdot (x-2))^2\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3} \approx 4,18$$
- Nullstellen bei $x_0 = 0, x_1 = 3$
$$V = \pi \cdot \int_0^3 (\frac{1}{3}x^2 - x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{9\pi}{10} \approx 2,83$$
- Nullstellen bei $x_0 = 1, x_1 = 4$
$$V = \pi \cdot \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)^2\,\mathrm{d}x = \frac{81\pi}{10} \approx 25,4$$

b)
- Schnittpunkte bei $x_0 = -2, x_1 = 1$
$$V = \pi \cdot \int_{-} 2^1 \left((-x^2 + 4) - (x + 2)\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{81\pi}{10} \approx 25,4$$

- Schnittpunkte bei $x_0 = 1, x_1 = 4$

$$V = \pi \cdot \int_1^4 \left((4x-3) - (x^2 - x + 1)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{81\pi}{10} \approx 25,4$$

A9: Asymptoten

a) Gib die x- und y-Werte der senkrechten bzw. waagrechten Asymptoten der Funktionen an:

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $g(x) = \frac{1}{x-1}$
- $h(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
- $i(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$
- $j(x) = -\mathrm{e}^{x} - 4$
- $k(x) = \frac{x^2+4x-5}{2x^2-4}$

b) Gib die Gleichung der gebrochenrationalen Funktion f mit folgenden Eigenschaften an:
Asymptoten: $x = -2,\ x = 2,\ y = -4$ und Nullstellen: $x = 3$

Lösung 9:

a)
- $f(x)$: Senkrechte Asymptote bei $x = 0$, waagrechte Asymptote bei $y = 0$
- $g(x)$: Senkrechte Asymptote bei $x = 1$, waagrechte Asymptote bei $y = 0$
- $h(x)$: Senkrechte Asymptote bei $x_{1,2} = \pm 1$, waagrechte Asymptote bei $y = 0$
- $i(x)$: waagrechte Asymptote bei $y = 1$
- $j(x)$: waagrechte Asymptote bei $y = -4$
- $k(x)$: Senkrechte Asymptote bei $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, waagrechte Asymptote bei $y = \frac{1}{2}$

b) senkrechte Asymptoten bei $x = -2,\ x = 2$ ergibt: Nenner muss -2 und 2 als Nullstellen haben $\rightsquigarrow x^2 - 4$
waagrechte Asymptote bei $y = -4$ ergibt: Zähler und Nenner müssen selben Grad haben $\left(x^2\right)$ und als Quotient -4 ergeben $\rightsquigarrow \frac{-4x^2}{x^2-4}$
Nullstelle $x = 3$ ergibt: Zähler muss 3 als Nullstelle haben $\rightsquigarrow \frac{-4x^2+36}{x^2-4}$