**Inhalt des Übungsblatts:**



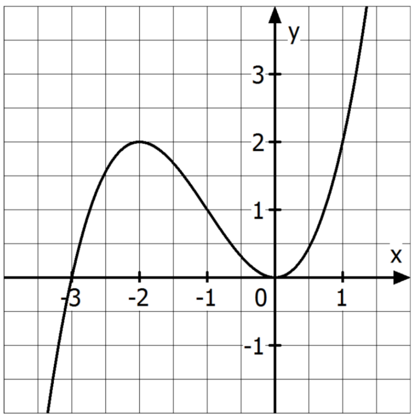
**A1: Gleichung lösen** Löse die Gleichung $\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x} = 6\mathrm{e}^{x}$.
*Hinweis: Du brauchst ungefähr alle gelernten Methoden!*

**Lösung 1:**

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x} &= 6\mathrm{e}^{x} && |-6\mathrm{e}^{x} \\
\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^{x} &= 0 && |\,\text{Ausklammern} \\
\mathrm{e}^{x} \cdot (\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x} - 6) &= 0 && |\,\text{Nullprodukt und Substitution: } z = \mathrm{e}^{2x} \\
z^2 - z - 6 &= 0 && |\,\text{Mitternachtsformel} \\
z_1 = -2 \quad z_2 &= 3 && |\,\text{Resubstitution: } z_{1/2} = \mathrm{e}^{2\cdot x_{1/2}} \\
\mathrm{e}^{2\cdot x_1} &= -2 && \Rightarrow \text{nicht möglich } (\mathrm{e}^{x} \text{ immer} > 0) \\
\mathrm{e}^{2\cdot x_2} &= 3 && \rightsquigarrow x = \frac{\ln(3)}{2}
\end{aligned}$$

**A2: Graphanalyse:** (vgl. Abitur 2015)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion $f'$ einer ganzrationalen Funktion $f$. Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.




a) Der Graph von $f$ hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.

b) $f(-2) < f(-1)$

c) $f''(-2) + f'(-2) < 1$

d) Der Grad der Funktion $f$ ist mindestens vier.

**Lösung 2:**

a) Wahr, Vorzeichenwechsel bei $x = -3$

b) Wahr, streng monoton steigend im Intervall $[-2; -1]$

c) Falsch, $f''(-2) + f'(-2) = 0 + 2 > 1$

d) Wahr, $f'$ besitzt zwei Extrempunkte $\rightsquigarrow$ $f''$ ist mindestens vom Grad 2. Der Graph der Abbildung könnte auch drei Nullstellen haben, $f'$ ist also mindestens vom Grad 3.

**A3: Exponentialfunktion**

a) Gib $f(x) = 25^x$ als natürliche Exponentialfunktion an.

b) Wie unterscheidet sich der Graph von $-\mathrm{e}^{-x}$ von $\mathrm{e}^x$? Formuliere die Erklärung schrittweise.

**Lösung 3:**

a) $\mathrm{e}^{\ln(25)\cdot x}$

b)
- $-\mathrm{e}^x$ ist zu $\mathrm{e}^x$ an der x-Achse gespiegelt
- $\mathrm{e}^{-x}$ ist zu $\mathrm{e}^x$ an der y-Achse gespiegelt

$\Rightarrow -\mathrm{e}^{-x}$ ist zu $\mathrm{e}^x$ an der x- und der y-Achse gespiegelt

**A4: Integral:** Die Gerade $y = x$ und die $x$-Achse begrenzen zusammen mit den Geraden $x = 2$ und $x = u$ mit $u > 2$ eine Fläche. Bestimmen Sie einen Wert für $u$ so, dass $f(x) = x - \frac{8}{x^2}$ diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt. (CAS)

**Lösung 4:** Bestimme die Flächeninhalte der Teilflächen:

$$A_1 = \int_2^u \left(x - \left(x - \frac{8}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x \qquad | \text{ Fläche zwischen } y = x \text{ und } f(x) = x - \frac{8}{x^2}$$

$$A_2 = \int_2^u \left(x - \frac{8}{x^2}\right) \mathrm{d}x \qquad | \text{ Fläche zwischen } f(x) = x - \frac{8}{x^2} \text{ und } x\text{-Achse}$$

Gleichsetzten und mittels CAS nach $u$ auflösen ergibt: $u \approx 3,12$

**A5: Stammfunktion berechnen:** Berechne jeweils ein Stammfunktion zu den angegebenen Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + x - 3$

b) $f(x) = (2x-3)^8$

c) $f(x) = -5\sin(3x+2)$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{3x+7}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$

f) $f(x) = \mathrm{e}^{x-\mathrm{e}^x}$

**Lösung 5:**

a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$

b) $F(x) = \frac{1}{9}(2x-3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}(2x-3)$

c) $F(x) = \frac{5}{3}\cos(3x+2)$

d) $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+7}$

e) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \rightsquigarrow F(x) = \ln(\ln x)$

f) $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x} \rightsquigarrow F(x) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$

**A6: Rotationskörper:**

a) Die Fläche, welche von der $x$-Achse und dem Graphen der Funktionen vollständig eingeschlossen wird, rotiert um die $x$-Achse. Berechne den Rauminhalt des entstandenen Körpers.

- $f(x) = x^2 - 2x$
- $g(x) = \sqrt{x} \cdot (x-2)$
- $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$
- $j(x) = x^2 - 5x + 4$

b) Die Fläche, welche von den Graphen der Funktionen vollständig eingeschlossen wird, rotiert um die $x$-Achse. Berechne den Rauminhalt des entstandenen Körpers.

- $f(x) = -x^2 + 4, \quad g(x) = x + 2$
- $h(x) = x^2 - x + 1, \quad j(x) = 4x - 3$

**Lösung 6:**

a)
- Nullstellen bei $x_0 = 0, x_1 = 2$

$$V = \pi \cdot \int\limits_0^2 (x^2 - 2x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15} \approx 3,35$$

- Nullstellen bei $x_0 = 0, x_1 = 2$

$$V = \pi \cdot \int\limits_0^2 (\sqrt{x} \cdot (x-2))^2 \, \mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3} \approx 4,18$$

- Nullstellen bei $x_0 = 0, x_1 = 3$

$$V = \pi \cdot \int\limits_0^3 (\frac{1}{3}x^2 - x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{9\pi}{10} \approx 2,83$$

- Nullstellen bei $x_0 = 1, x_1 = 4$

$$V = \pi \cdot \int\limits_1^4 (x^2 - 5x + 4)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{81\pi}{10} \approx 25,4$$

b)
- Schnittpunkte bei $x_0 = -2, x_1 = 1$

$$V = \pi \cdot \int\limits_{-} 2^1 \left((-x^2 + 4) - (x + 2)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{81\pi}{10} \approx 25,4$$

- Schnittpunkte bei $x_0 = 1, x_1 = 4$

$$V = \pi \cdot \int\limits_1^4 \left((4x - 3) - (x^2 - x + 1)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{81\pi}{10} \approx 25,4$$