

**Inhalt des Übungsblatts:**

- Wachstum (S. 47)
- LGS-Rechnung (S. 53), Vektorrechnung (S. 63)
- Geraden und Ebenen (S. 67)

**A1: Wachstum**

(CAS)

- a) Bakterien vermehren sich durch Teilung, wobei sich eine Bakterienzelle durchschnittlich alle 10 Minuten teilt. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei genau eine Bakterienzelle vorhanden.
- Wie viele Bakterien sind dann nach 1 Stunde, 2 Stunden bzw. 6 Stunden vorhanden?
  - Finde eine Formel für die Anzahl  $B(t)$  der Bakterien nach der Zeit  $t$ .
  - Eine Bakterienzelle hat ein Volumen von ca.  $2 \times 10^{-18} \text{ m}^3$ . Wie lange dauert es, bis die Bakterienkultur ein Volumen von  $1 \text{ m}^3$  bzw.  $1 \text{ km}^3$  einnimmt? Ist das Ergebnis plausibel?
- b) Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel  $M(t) = M_0 \cdot e^{\delta t}$ . 1960 gab es ca. 3 Milliarden Menschen, 1995 etwa 5,6 Milliarden.
- Bestimme die Konstante  $\delta$ .
  - Wieviel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
  - Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben, wenn die Bevölkerung im selben Tempo weiterwächst?
- c) Eine Tasse kochendheißer Kaffee ( $100^\circ\text{C}$ ) kühlt bei Zimmertemperatur ( $20^\circ\text{C}$ ) in 10 Minuten auf  $30^\circ\text{C}$  ab.
- Geben Sie eine Funktionsgleichung für die Temperatur des Kaffees an.
  - Frau M mischt den Kaffee mit der gleichen Menge Milch aus dem Kühlschrank ( $4^\circ\text{C}$ ). Sie hat zwei Möglichkeiten: die Milch sofort dazugeben, danach 3 Minuten warten oder die Milch erst nach 3 Minuten dazugeben.  
Welche Temperatur hat der Milchkaffee in beiden Fällen? (Hinweis: Die Temperatur der Mischung ist der Mittelwert der einzelnen Temperaturen:  $T = \frac{(T_1 + T_2)}{2}$ .)

**A2: Geraden und Ebenen aufstellen:**

- a) Gib eine Geradengleichung so an, dass sie durch die gegebenen Punkte läuft:
- $P(1|3|5), Q(2|2|2)$
  - $R(-2|2|0), S(1|3|4)$
- b) Berechne eine Ebenengleichung, die senkrecht zur Gerade  $g$  liegt und die den Punkt  $P(5|5|5)$  enthält.
- $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
- c) Gegeben sind die Gerade  $h$  und der Punkt  $P(2|2|2)$ , gib eine Ebenengleichung an, die sowohl die Gerade als auch den Punkt enthält.
- $$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- d) Gib einen Vektor an, der senkrecht zu den beiden angegebenen Vektoren ist. Berechne außerdem den Flächeninhalt des durch die gegebenen Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

**A3: Ebenengleichungen:** Bestimme die Ebene in der angegebenen Darstellungsform:

- a)  $E$  enthält die Punkte  $A(2|2|2)$ ,  $B(4|1|3)$  und  $C(8|4|5)$ . Gib  $E$  in Normalenform an.
- b) Die gesuchte Ebene  $F$  ist die Spiegelebene zwischen  $A(1|4|7)$  und  $A'(3|2|3)$ . Gib  $F$  in Parameterform an.
- c) Die Ebene  $G$  enthält die Gerade  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  und ist orthogonal zur Ebene  $H : -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2 = 0$ . Gib die Ebene  $G$  in Koordinatenform an.

**A4: Lineare Gleichungssysteme:** Gib die Lösungsmenge der Gleichungssysteme an:

- |                           |                |                                  |
|---------------------------|----------------|----------------------------------|
| a)                        | b)             | c)                               |
| $-2x_1 - x_2 - x_3 = -4$  | $2x - 3y = 19$ | $-5x_1 + x_2 - x_3 = 7$          |
| $2x_1 + 2x_2 + x_3 = -8$  | $4x - 8z = 20$ | $5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -11$       |
| $-x_1 - 3x_2 + x_3 = -15$ | $5y - 4z = -7$ | $x_1 \quad \quad \quad x_3 = -1$ |

**A5: Ebenengleichungen:** Gegeben ist die Gleichung einer Ebene  $E$  mit  $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$ . Bestimme die Gleichung der Ebene in Normalen- und Parameterform.