Inhalt des Übungsblatts:

- Wachstum*(S. 47)*
- LGS-Rechnung *(S. 53)*, Vektorrechnung *(S. 63)*
- Geraden und Ebenen *(S. 67)*

A1: Wachstum (CAS)

a) Bakterien vermehren sich durch Teilung, wobei sich eine Bakterienzelle durchschnittlich alle 10 Minuten teilt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei genau eine Bakterienzelle vorhanden.

- Wie viele Bakterien sind dann nach 1 Stunde, 2 Stunden bzw. 6 Stunden vorhanden?
- Finde eine Formel für die Anzahl $B(t)$ der Bakterien nach der Zeit t.
- Eine Bakterienzelle hat ein Volumen von ca. $2 \times 10^{-18}\mathrm{m}^3$. Wie lange dauert es, bis die Bakterienkultur ein Volumen von $1\mathrm{m}^3$ bzw. $1\mathrm{km}^3$ einnimmt? Ist das Ergebnis plausibel?

b) Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel $M(t) = M_0 \cdot \mathrm{e}^{\delta t}$.

1960 gab es ca. 3 Milliarden Menschen, 1995 etwa 5,6 Milliarden.

- Bestimme die Konstante δ.
- Wieviel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
- Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben, wenn die Bevölkerung im selben Tempo weiterwächst?

c) Eine Tasse kochendheißer Kaffee (100°C) kühlt bei Zimmertemperatur (20°C) in 10 Minuten auf 30°C ab.

- Geben Sie eine Funktionsgleichung für die Temperatur des Kaffees an.
- Frau M mischt den Kaffee mit der gleichen Menge Milch aus dem Kühlschrank (4°C). Sie hat zwei Möglichkeiten: die Milch sofort dazugeben, danach 3 Minuten warten oder die Milch erst nach 3 Minuten dazugeben.
  Welche Temperatur hat der Milchkaffee in beiden Fällen? *(Hinweis: Die Temperatur der Mischung ist der Mittelwert der einzelnen Temperaturen:* $T = \frac{(T_1 + T_2)}{2}$*.)*

A2: Ebenengleichungen: Bestimme die Ebene in der angegebenen Darstellungsform:

a) E enthält die Punkte $A(2|2|2), B(4|1|3)$ und $C(8|4|5)$. Gib E in Normalenform an.

b) Die gesuchte Ebene F ist die Spiegelebene zwischen $A(1|4|7)$ und $A'(3|2|3)$. Gib F in Parameterform an.

c) Die Ebene G ist orthogonal zur Ebene $H : -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2 = 0$ und enthält die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gib die Ebene G in Koordinatenform an.

d) Gegeben ist die Gleichung einer Ebene E mit $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$. Bestimme die Gleichung der Ebene in Normalen- und Parameterform.

A3: Geraden und Ebenen aufstellen:

a) Gib eine Geradengleichung so an, dass sie durch die gegebenen Punkte läuft:

- $P(1|3|5), Q(2|2|2)$
- $R(-2|2|0), S(1|3|4)$

b) Berechne eine Ebenengleichung, die senkrecht zur Gerade g liegt und die den Punkt $P(5|5|5)$ enthält.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Gegeben sind die Gerade h und der Punkt $P(2|2|2)$, gib eine Ebenengleichung an, die sowohl die Gerade als auch den Punkt enthält.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A4: Vektorrechnung: Gib einen Vektor an, der senkrecht zu den beiden angegebenen Vektoren ist. Berechne außerdem den Flächeninhalt des durch die gegebenen Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

A5: Lineare Gleichungssysteme: Gib die Lösungsmenge der Gleichungssysteme an:

a)

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 \ -x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -8 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 &= -15 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 19 \\ 4x - 8z &= 20 \\ 5y - 4z &= -7 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} -5x_1 + x_2 \ -x_3 &= 7 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2_3 &= -11 \\ x_1 \qquad\quad x_3 &= -1 \end{aligned}$$