

Inhalt des Übungsblatts:

- Wachstum (S. 51)
- LGS-Rechnung (S. 57), Vektorrechnung (S. 69)
- Geraden und Ebenen (S. 73)

A1: Wachstum

- a) Bakterien vermehren sich durch Teilung, wobei sich eine Bakterienzelle durchschnittlich alle 10 Minuten teilt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei genau eine Bakterienzelle vorhanden.
- Wie viele Bakterien sind dann nach 1 Stunde, 2 Stunden bzw. 6 Stunden vorhanden?
 - Finde eine Formel für die Anzahl $B(t)$ der Bakterien nach der Zeit t .
 - Eine Bakterienzelle hat ein Volumen von ca. $2 \times 10^{-18} \text{ m}^3$. Wie lange dauert es, bis die Bakterienkultur ein Volumen von 1 m^3 bzw. 1 km^3 einnimmt? Ist das Ergebnis plausibel?
- b) Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel $M(t) = M_0 \cdot e^{\delta t}$. 1960 gab es ca. 3 Milliarden Menschen, 1995 etwa 5,6 Milliarden.
- Bestimme die Konstante δ .
 - Wieviel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
 - Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben, wenn die Bevölkerung im selben Tempo weiterwächst?
- c) Eine Tasse kochendheißer Kaffee (100°C) kühlt bei Zimmertemperatur (20°C) in 10 Minuten auf 30°C ab.
- Geben Sie eine Funktionsgleichung für die Temperatur des Kaffees an.
 - Frau M mischt den Kaffee mit der gleichen Menge Milch aus dem Kühlschrank (4°C). Sie hat zwei Möglichkeiten: die Milch sofort dazugeben, danach 3 Minuten warten oder die Milch erst nach 3 Minuten dazugeben.
Welche Temperatur hat der Milchkaffee in beiden Fällen? (Hinweis: Die Temperatur der Mischung ist der Mittelwert der einzelnen Temperaturen: $T = \frac{(T_1 + T_2)}{2}$.)

Lösung 1:

- a) • Exponentielles Wachstum, allgemeine Form: $B(t) = c \cdot a^x = e^{\ln(a)x}$

$$c = 1, \text{ da } B(0) = 1$$

Es soll gelten:

$$B(10) = 2 = a^{10}$$

$$a = \sqrt[10]{2}$$

$$a \approx 1,072$$

Bakterien nach einer, zwei und sechs Stunden:

$$B(60) = 1,072^{60} \approx 64$$

$$B(120) = 1,072^{120} \approx 4201$$

$$B(360) = 1,072^{360} \approx 74 \times 10^9$$

- $B(t) = 1 \cdot 1,072^t = e^{\ln(1,072)t}$

- Es soll gelten:

$$2 \times 10^{-18} \text{m}^3 \cdot B(n) = 1 \text{m}^3$$

$$\rightsquigarrow t \approx 586,16 \hat{=} 9,77 \text{h}$$

$$2 \times 10^{-18} \text{m}^3 \cdot B(n) = 1000000000 \text{m}^3$$

$$\rightsquigarrow t \approx 884,23 \hat{=} 14,74 \text{h}$$

b) •

$$M(t) = M_0 \cdot e^{\delta t}$$

$$t = 0: 1960$$

$$M(0) = M_0 = 3 \times 10^9$$

$$t = 1995 - 1960 = 35$$

$$M(35) = 3 \times 10^9 \cdot e^{\delta 35} = 5,6 \times 10^9$$

$$\delta = 0,017833$$

- Jährliches Wachstum: e^δ

$$e^\delta = e^{0,017833} = 1,01799 \hat{=} 101,8\%$$

•

$$M(t) = 3 \times 10^9 \cdot e^{0,017833 \cdot t} = 15 \times 10^9$$

$$\rightsquigarrow t = 90 \hat{=} 1960 + 90 = 2050$$

c) • Beschränktes Wachstum, allgemein: $T(t) = S - (S - T(0)) \cdot e^{-k \cdot t}$

$$S = 20, S - T(0) = 20 - 100 = -80$$

$$\Rightarrow T(t) = 20 + 80 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Berechnung von k durch einsetzen der bekannten Werte:

$$T(10) = 30 = 20 + 80 \cdot e^{-k \cdot 10} \quad | \text{Auflösen nach } k$$

$$\rightsquigarrow k = \frac{3 \cdot \ln(2)}{10}$$

$$\rightsquigarrow T(t) = 20 + 80 \cdot e^{-\frac{3 \ln(2)}{10} \cdot t}$$

- Erst abkühlen, dann Milch dazu: $33,44^\circ \text{C}$ Variante 2: $37,14^\circ \text{C}$

A2: Geraden und Ebenen aufstellen:

- Gib eine Geradengleichung an, dass sie durch die gegebenen Punkte läuft:

a) $P(1|3|5), Q(2|2|2)$

b) $R(-2|2|0), S(1|3|4)$

- Berechne eine Ebenengleichung, die senkrecht zur Gerade g liegt und die den Punkt $P(5|5|5)$ enthält.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Gegeben sind die Gerade h und der Punkt $P(2|2|2)$, gib eine Ebenengleichung an, die sowohl die Gerade als auch den Punkt enthält.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gib einen Vektor an, der senkrecht zu den gegebenen liegt und weise dein Ergebnis nach. Berechne außerdem den Flächeninhalt des durch die gegebenen Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

a)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung 2:

- a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

- b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

- $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

- Zwei Punkte H_t berechnen, die auf der Geraden liegen: $H_0(2|5|1), H_1(8|7|2)$

Berechnen der Richtungsvektoren von P zu den zwei Punkten:

$$\overrightarrow{PH_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PH_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Ebenengleichung mit P als Stützpunkt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Kreuzprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 3 \\ 3 \cdot 2 - 3 \\ 1 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ (Alternativ auch durch LGS berechenbar, zwei Gleichungen mit dem Skalarprodukt aufstellen.)

Nachweis durch Skalarprodukt mit beiden Vektoren, jedes mal muss Null rauskommen.

$$12 + 3 \cdot 5 - 9 \cdot 3 = 0, 12 \cdot 2 + 3 - 9 \cdot 3 = 0$$

Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms ist gleich dem Betrag des Vektors, der durch das Kreuzprodukt entsteht:

$$A = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{144 + 9 + 81} = \sqrt{234} \approx 15,30$$

- b) Kreuzprodukt: $\vec{r} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 - 7 \cdot 2 \\ 7 - 6 \cdot 4 \\ 6 \cdot 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 9 \end{pmatrix}$

Nachweis durch Skalarprodukt mit beiden Vektoren, jedes mal muss Null rauskommen.

$$-2 \cdot 6 - 17 \cdot 3 + 9 \cdot 7 = 0, -2 - 17 \cdot 2 + 9 \cdot 4 = 0$$

Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms ist gleich dem Betrag des Vektors, der durch das Kreuzprodukt entsteht:

$$A = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 289 + 81} = \sqrt{374} \approx 19,34$$