Inhalt des Übungsblatts:

- Lagebeziehungen *(S. 77)*, Abstände *(S. 79)*
- Winkelberechnungen und Spiegelungen *(S. 83)*

A1: Abstands- und Lageberechnungen: Gegeben sind die Ebene
$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel zueinander sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand von E und g.

Lösung 1:

a) Dafür müssen der Normalenvektor von E und der Richtungsvektor von g orthogonal sein.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$$

b) Aufstellen einer Hilfsgeraden:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von h in E:

$$\left[\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$
$$\left[\begin{pmatrix} 7+8r \\ 5+r \\ -7-4r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 8+8r \\ 1+r \\ -4-4r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$
$$8(8+8r) + (1+r) - 4(-4-4r) = 0$$
$$64 + 64r + 1 + r + 16 + 16r = 0$$
$$81 + 81r = 0$$
$$1 + r = 0$$
$$r = -1$$

Schnittpunkt mit der Ebene durch Einsetzen von r in h:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Abstand zwischen den Punkten (Stützpunkt von g und Schnittpunkt h mit E):

$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$d(E,g) = \sqrt{8^2 + 1 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9$$

A2: Schnittgerade: Gib eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen $E : x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ und $F : 6x_1 + x_2 - x_3 + 7 = 0$ an.

Lösung 2: E und F umformen in Parameterform durch finden von senkrechten Vektoren zum Normalenvektor:

$$v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \to \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad u_1 - u_2 + 2u_3 = 0 \to \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$6v_1 + v_2 - v_3 = 0 \to \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} \qquad 6u_1 + u_2 - u_3 = 0 \to \vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der Ebenen durch $\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$a \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - c \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - d \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\-7\end{pmatrix}$$

Aufstellen einer geeigneten Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -2 & 7\\0 & 1 & -1 & 0 & 0\\6 & 1 & 0 & -1 & -7\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -{}^{3}/_{7} & 0\\0 & 1 & 0 & {}^{11}/_{7} & -7\\0 & 0 & 1 & {}^{11}/_{7} & -7\end{array}\right)$$

Einsetzen in die obere Gleichung:

$$\frac{3}{7} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} + (-7 - \frac{11}{7}) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - (-7 - \frac{11}{7}) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - d \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\-7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}{}^{3}/_{7}\\0\\{}^{18}/_{7}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-{}^{60}/_{7}\\-{}^{60}/_{7}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}{}^{60}/_{7}\\{}^{60}/_{7}\\0\end{pmatrix} - d \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\-7\end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$