Mathe-Crashkurs

Skript zum Mathe-Crashkurs 2018

von L. König und J. Ochsenmeier, überarbeitet von

Simon König & Joshua Fabian

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

Gleichungen

In diesem Abschnitt:

Lösen von Gleichungen mit

- Äquivalenzumformungen
- Mitternachtsformel
- Satz vom Nullprodukt
- Substitution

Eine *Gleichung* sagt aus, dass zwei Terme[1] gleich sind. Meistens hängen diese von einer Variable — zum Beispiel x — ab. Es gilt herauszufinden, für welche Werte von x die Gleichung erfüllt ist:

[1] Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der aus Zahlen, Rechenzeichen und Klammern bestehen kann.

$$x^2 + 1 = 10 \ \Rightarrow\ x = \pm 3, \text{ denn } (\pm 3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

1.0.1 Äquivalenzumformungen.
Bei einer *Äquivalenzumformung* wird auf beiden Seiten der Gleichung die selbe Rechenoperation durchgeführt.
Achtung: Wenn du auf beiden Seiten die Wurzel ziehst, dann vergiss nicht, dass jede Zahl zwei Wurzeln hat!

CAS:

Calculator:
Menü » Algebra » Lösen

$\text{SOLVE}(5x + 4 = 3x - 2\,,\ x)$
$\rightsquigarrow x = -3$

$$\begin{aligned}
& 5x + 4 = 3x - 2 && | -4 \\
\Leftrightarrow\quad & 5x = 3x - 6 && | -3x \\
\Leftrightarrow\quad & 2x = -6 && | \cdot \tfrac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & x = -3 &&
\end{aligned}$$

1.0.2 Lösen von quadratischen Gleichungen: die Mitternachtsformel.
Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b und c sind hierbei beliebige Zahlen, können also auch Null sein) können mit der *Mitternachtsformel* gelöst werden. Man erhält **zwei** Ergebnisse x_1 und x_2, indem man für $\pm$ einmal $+$ und einmal $-$ rechnet:

CAS:

Calculator:
Menü » Algebra » Nullstellen

$\text{ZEROS}(3x^2 - 3\,,\ x)$
$\rightsquigarrow \{-1, 1\}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Das funktioniert so:

$$
\begin{aligned}
& 2x = x^2 - 3 && \mid +3 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x + 3 = x^2 && \mid -x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & -x^2 + 2x + 3 = 0 && \mid \text{MNF: } a = -1, b = 2, c = 3 \\
\Leftrightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} \\
\Leftrightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-2}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

1.0.3 Satz vom Nullprodukt.
Das Produkt von zwei Termen ist genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Terme Null ist. Liegt also eine Gleichung der Form

$$(\text{Term}_1) \cdot (\text{Term}_2) = 0$$

vor, so können die beiden Terme einzeln betrachtet werden. Man betrachtet $(\text{Term}_1) = 0$ und $(\text{Term}_2) = 0$. Es gibt deswegen meistens zwei Möglichkeiten für x, die die Gleichung erfüllen:

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

hat also die Lösungen $x = 1$ und $x = 3$, da genau dann einer der beiden Terme Null ist.

1.0.4 Substitution.
Manche Gleichungen lassen sich nicht durch die bisher bekannten Hilfsmittel lösen, zum Beispiel, weil Potenzen von x mit einem Exponenten $>$ 2 vorkommen. Eine Möglichkeit solche Gleichungen zu lösen bietet das *Substituieren*. Hierbei wird ein Term durch eine Variable abgekürzt und die so vereinfachte Gleichung gelöst. Danach macht man das Abkürzen rückwärts und erhält so die Ergebnisse der ursprünglichen Gleichung:

$$
\begin{gathered}
x^4 + 11x^2 + 10 = 0 \\
\text{Substitution: } z = x^2 \\
\rightsquigarrow z^2 + 11z + 10 = 0 \\
\text{Man erhält mit der MNF}: z_1 = -10, z_2 = -1 \\
\text{Rücksubstitution } x_1 : x_1^2 = z_1 = -10 \\
\text{Rücksubstitution } x_2 : x_2^2 = z_2 = -1
\end{gathered}
$$

Die Gleichung hat also keine Lösung, da es keine reellen Zahlen gibt, deren Quadrat kleiner Null ist.

Rechenregeln

In diesem Abschnitt:

Wichtige Rechenregeln, die man können muss:

- KlaHoPS
- Brüche
- Wurzeln
- Potenzen
- Logarithmen

2.0.1 KlaHoPS.
Die wohl fundamentalste Regel ist die Reihenfolge, in der man Rechenoperationen durchführt. Es gilt:

1. Inhalt der innersten Klammer ausrechnen (hier gilt natürlich auch diese Rechenreihenfolge)
2. Hochzahlen ausrechnen
3. Punkt vor Strich

Man merkt sich: **Klammer, Hochzahl, Punkt vor Strich**, kurz **KlaHoPS** (ja, das hört sich komisch an).

2.0.2 Brüche.

- **Kürzen**: Beim Kürzen eines Bruchs versucht man, Zähler und Nenner möglichst klein zu machen. Das macht man, indem man Zähler und Nenner jeweils durch dieselbe Zahl teilt: $\frac{9}{3} = \frac{9:3}{3:3} = \frac{3}{1} = 3$
- **Erweitern**: Erweitern ist Kürzen rückwärts: statt Zähler und Nenner durch eine Zahl zu teilen multipliziert man sie mit derselben Zahl: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10}$
- **Auf gleichen Nenner bringen**: Hat man zwei Brüche gegeben und möchte sie auf denselben Nenner bringen, so erweitert man beide Brüche so, dass sie denselben Nenner haben. Man kann beispielsweise den ersten Bruch mit dem Nenner vom zweiten Bruch und den zweiten Bruch mit dem Nenner vom ersten Bruch erweitern: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$

- **Addieren**: Man addiert Brüche, indem man sie auf denselben Nenner bringt und dann ihre Zähler addiert: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$
- **Subtrahieren**: Man subtrahiert Brüche, indem man sie auf denselben Nenner bringt und dann ihre Zähler subtrahiert: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$
- **Multiplizieren**: Man multipliziert Brüche, indem man jeweils die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- **Dividieren**: Man dividiert Brüche, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

2.0.3 Wurzeln.

- **Multiplikationsregel**: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- **Divisionsregel**: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- **Teilweise Wurzel ziehen**: Manchmal kann man eine Wurzel teilweise ziehen, indem man die Multiplikationsregel anwendet: $\sqrt{32 \cdot x^2} = \sqrt{32} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{16 \cdot 2} \cdot \sqrt{x^2} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2} = 4 \cdot |x| \cdot \sqrt{2}$.
  Der Betrag kommt daher, dass x^2 für jedes x positiv ist, deswegen ist $\sqrt{x^2}$ auch wieder positiv.

2.0.4 Potenzgesetze.

- $a^0 = 1$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, insbesondere $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$
- $a^{r-s} = a^{r+(-s)} = a^r \cdot a^{-s} = a^r \cdot \frac{1}{a^s} = \frac{a^r}{a^s}$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
- $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

2.0.5 Logarithmengesetze.
Mehr zum Umgang mit dem Logarithmus und der natürlichen Exponentialfunktion findet ihr im Kapitel zu Exponentialfunktionen.

- $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$
- $\ln(\frac{u}{v}) = \ln(u) - \ln(v)$
- $\ln(u^k) = k \cdot \ln(u)$

$\ln(x)$ steht hierbei für den natürlichen Logarithmus, also den Logarithmus zur Basis e ($\log_e(x)$). Eine weitere oft verwendete Basis ist 10 (das bedeutet, dass $\log_{10}(10^x) = x = \lg(x)$). Mann kann von einer Basis a zu einer Basis b wechseln:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Funktionen

In diesem Abschnitt:

Funktionen und ihre Eigenschaften:

- Definition Funktionsbegriff
- Wichtige Funktionen
- Eigenschaften (Achsenschnittstellen, Monotonie, Grenzwerte)
- Trigonometrische Funktionen

3.1 Grundlegende Eigenschaften

3.1.1 Funktion.
Eine *Funktion* ist etwas, das einer Zahl (x) eine andere ($f(x)$) zuordnet. $f(x) = x^2$ ordnet beispielsweise einer Zahl x ihr Quadrat, also x^2, zu. Wir können eine Funktion graphisch veranschaulichen, indem wir sie in ein Koordinatensystem zeichnen.

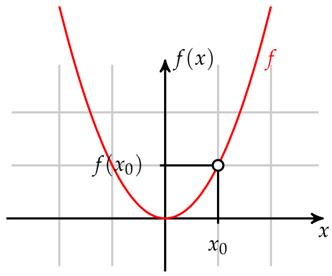

Abbildung 3.1: Graph von $f(x) = x^2$. Für einen x-Wert von der x-Achse (hier x_0) kann sein zugehöriger $f(x)$-Wert (hier $f(x_0)$) abgelesen werden.

3.1.2 Punkt, Stelle, Wert.

- **Punkt**: Ein Punkt ist ein Zahlenpaar, bestehend aus x- und y-Wert.
- **Stelle, Wert**: An der *Stelle* x_0 hat f den *Wert* $f(x_0)$. Das ergibt den *Punkt* $\mathrm{P}(x_0|f(x_0))$.

3.1.3 Wichtige Funktionen: Betragsfunktion.
Der *Betrag* $f(x) = |x|$ einer Zahl ist der Abstand der Zahl zum Ursprung auf der Zahlengeraden. Der Betrag hebt also quasi ein $-$ als Vorzeichen auf: $|-5| = 5$, $|3| = 3$. Formal gilt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Dabei wird ausgenutzt, dass $-(-x) = x$ gilt.

CAS:

Calculator:	$f(x) := |x|$
Graph:	$f1(x) = f(x)$

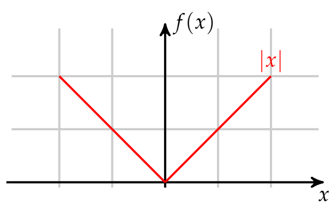

Abbildung 3.2: Graph von $f(x) = |x|$.

3.1.4 Wichtige Funktionen: Potenzen von x.

Die wohl am häufigsten verwendeten Funktionen sind die *Potenzen* von x, also x^2, x^3 und so weiter. Sie lassen sich in zwei Sorten unterteilen:

- **Exponent gerade**: Ist der Exponent gerade, so ist der Graph eine nach oben offene Parabel, die die Achsen im Nullpunkt berührt:
- **Exponent ungerade**: Ist der Exponent ungerade, so sieht der Graph wie bei einem geraden Exponenten aus, nur, dass die beiden „Äste"des Graphen in unterschiedliche Richtungen zeigen:

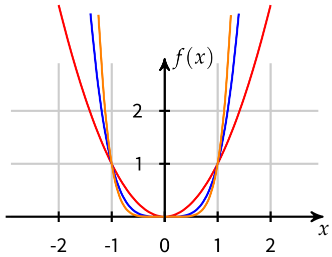

Abbildung 3.3: Graph von x^2, x^4 und x^6.

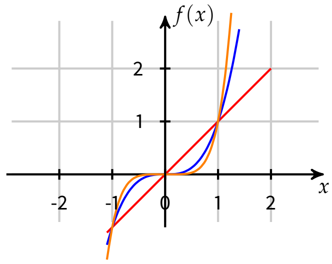

Abbildung 3.4: Graph von x, x^3 und x^5.

3.1.5 Grad.

Ist ein Funktionsterm gegeben, in dem Potenzen von x vorkommen, so ist der *Grad* der Funktion die höchste Potenz von x (bei $f(x) = x^2 - 3x^3$ wäre der Grad zum Beispiel 3).

3.1.6 Wichtige Funktionen: Wurzelfunktion.

Die *Wurzel* einer Zahl x ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert wieder x ergibt. Wir nennen sie die Wurzel aus x, schreibe $\sqrt{x}$:

$$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$$

Die Wurzel einer Zahl ist das Gegenteil des *Quadrats* einer Zahl.

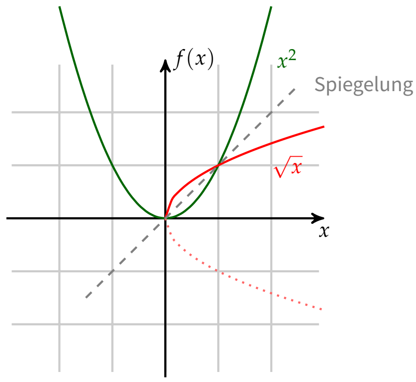

Abbildung 3.5: Graph von x^2 und $\sqrt{x}$. Es ist z.B. $-\sqrt{3} \cdot -\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$, deswegen hat jede Zahl eigentlich zwei Wurzeln, aber es wird normalerweise nur die positive Wurzel betrachtet.

3.1.7 Funktionen mit rationalem Exponenten.

Es ist $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, weil $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$. Allgemein gilt:

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

Muss man eine Wurzelfunktion ableiten, so ist es geschickter, die Funktion als Potenzfunktion zu schreiben.

3.1.8 Punkt auf Funktionsgraphen.

Ist ein Punkt und eine Funktion gegeben, so kann man testen, ob der Punkt auf dem Funktionsgraphen liegt. Liegt der Punkt auf dem Funktionsgraphen, so muss die Funktion für den x-Wert des Punktes denselben y-Wert haben wie der Punkt. Ist also der Punkt $P(3|1)$ gegeben und die Funktion $f(x) = (x-2)^2$, so bestimmt man $f(3)$. Es muss $f(3) = 1$ gelten.

$$f(3) = (3-2)^2 = 1^2 = 1$$

Also liegt der Punkt auf der Geraden.

CAS:	
Calculator:	$f(x) := x^2$ $f(4) \rightsquigarrow$ **16**

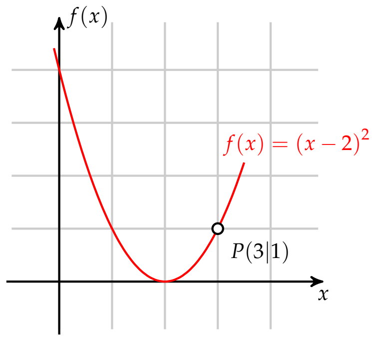

Abbildung 3.6: Der Graph von $f(x) = (x-2)^2$ und $P(3|1)$

3.1.9 Schnitte von Funktionen.
Zwei Funktionen schneiden sich dort, wo sie für einen x-Wert den gleichen y-Wert haben. Man bestimmt diese Punkte, indem man die beiden Funktionen gleichsetzt.

CAS:

Graph $(f1(x) = \sim, f2(x) = \sim)$:
Menü » Graph anal. » Schnittpunkte
⇝ Bereich auswählen (mit genau einem Schnitt drin)
⇝ Werte ablesen

Kochrezept

1. Funktionen gleichsetzen $\Rightarrow$ x-Werte
2. x-Werte in eine der Funktionen einsetzen $\Rightarrow$ y-Werte
3. Die Schnittpunkte der Funktionen sind die x-Werte mit ihren zugehörigen y-Werten.

3.2 Kurvendiskussion

3.2.1 Achsenschnittstellen.
Am leichtesten zu untersuchen sind wohl die *Achsenschnittstellen* einer Funktion. Dabei unterscheidet man logischerweise zwischen der x-Achse (Nullstellen) und der y-Achse (y-Achsenabschnitt).

- **Nullstellen**: Nullstellen sind die x-Werte, für die $f(x) = 0$ gilt. Lösungsansätze hierfür sind beispielsweise die **Mitternachtsformel** oder der **Satz vom Nullprodukt**.
- **y-Achsenabschnitt**: Der y-Achsenabschnitt einer Funktion ist der Funktionswert für $x = 0$, also $f(0)$.

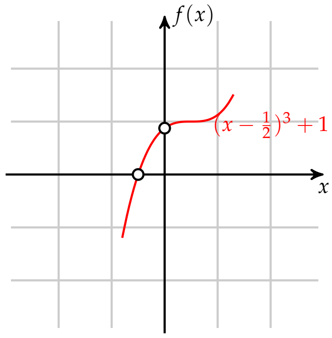

Abbildung 3.7: Der Graph von $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3 + 1$ und seine Achsenschnittstellen

CAS:

Calculator:
Schnitt y-Achse: $f(0)$
Schnitte x-Achse: $\textsc{zeros}(f(x), x)$

Graph $(f1(x) = \sim)$:
Menü » Graph anal » Nullstellen
→ Bereich mit genau einer Nullstelle auswählen

3.2.2 Monotonie.
Unter dem Begriff *Monotonie* versteht man die Untersuchung des Krümmungsverhaltens einer Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$. Man unterscheidet dabei vier verschiedene Monotonietypen:

- **Streng monoton fallend**: $f(x)$ ist auf $[a, b]$ streng monoton fallend, wenn für zwei verschiedene Werte x, y auf $[a, b]$ mit $x < y$ stets gilt: $f(x) > f(y)$.
- **Monoton fallend**: $f(x)$ ist auf $[a, b]$ monoton fallend, wenn für zwei verschiedene Werte x, y auf $[a, b]$ mit $x < y$ stets gilt: $f(x) \geq f(y)$.
- **Monoton wachsend**: $f(x)$ ist auf $[a, b]$ monoton wachsend, wenn für zwei verschiedene Werte x, y auf $[a, b]$ mit $x < y$ stets gilt: $f(x) \leq f(y)$.
- **Streng monoton wachsend**: $f(x)$ ist auf $[a, b]$ streng monoton wachsend, wenn für zwei verschiedene Werte x, y auf $[a, b]$ mit $x < y$ stets gilt: $f(x) < f(y)$.

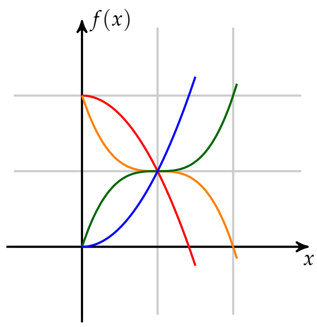

Abbildung 3.8: Streng monoton fallende, monoton fallende, monoton wachsende und streng monoton wachsende Funktion.

3.2.3 Verhalten für $x \to \pm\infty$.

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie sich eine Funktion für x gegen $\pm\infty$ verhalten kann:

- Der Funktionswert geht gegen $\pm\infty$.
- Der Funktionswert geht gegen einen festen Wert, meistens 0.

Dabei gilt es zu beachten, dass Potenzen von x schneller gegen $\pm\infty$ gehen, je größer der Exponent ist. Steht x im Exponenten, so geht der Funktionswert schneller gegen $\pm\infty$ als jede Potenz von x. Das bedeutet konkret, dass beispielsweise $x^{1000} \cdot e^{-x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 geht, da e^{-x} für große x 'stärker' gegen 0 geht als x^{1000} gegen ∞, obwohl es, wenn man die beiden Graphen zeichnet, erst nicht so aussieht.

CAS:

Calculator:
Sonderzeichen $\to$ lim
$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$
(man erhält die ∞ über π ▶)

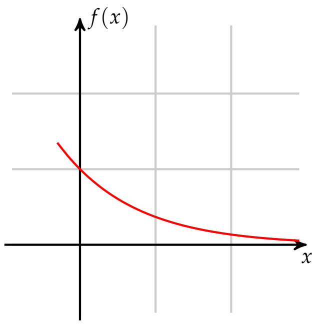

Abbildung 3.9: $f(x) = e^{-x}$ geht für $x \to \infty$ gegen 0.

3.2.4 Asymptoten.

- **waagerechte Asymptote**: Geht die Funktion für $x \to \infty$ gegen einen festen Wert, so hat sie eine *waagerechte* Asymptote ($f(x) = e^{-x}$ geht gegen 0).
- **schiefe Asymptote**: Besteht die Funktion aus mehreren Summanden, so können wir für $x \to \infty$ diejenigen mit einer waagerechten Asymptote durch ihre Asymptote ersetzen, es entsteht eine schiefe Asymptote ($f(x) = 2x + e^{-x}$ geht gegen $2x$).

3.2.5 Kurven verschieben.

3.2.6 Kurven strecken/stauchen oder an der x-Achse spiegeln.

1. **Strecken**: um den Faktor 3: Funktionsterm mit 3 multiplizieren.
2. **Stauchen**: um den Faktor 3: Funktionsterm mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren.
3. **Spiegeln**: Funktionsterm mit (-1) multiplizieren.

Achtung: Man muss den *ganzen* Funktionsterm mit dem jeweiligen Faktor multiplizieren, deswegen ist es sinnvoll, erst Klammern um den ganzen Funktionsterm zu setzen, damit man keine Fehler macht.

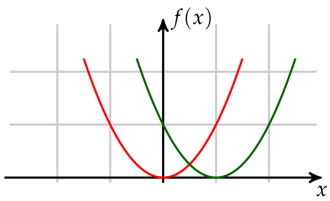

Abbildung 3.10: $f(x) = x^2$ und $f(x) = (x-1)^2$.

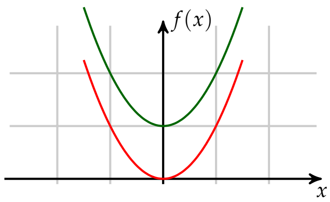

Abbildung 3.11: $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^2 + 1$.

1. **Verschieben nach rechts/links**: Verschieben um 3 nach links: x durch $(x + 3)$ ersetzen (nach rechts: x durch $(x - 3)$ ersetzen). Die Klammern dürfen nicht vergessen werden!
2. **Verschieben nach oben/unten**: Verschieben um 3 nach oben: $+3$ an den Funktionsterm anhängen (nach unten: -3 an den Funktionsterm anhängen).

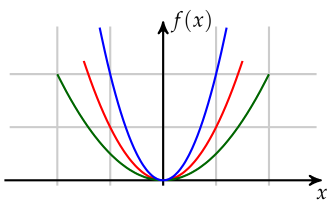

Abbildung 3.12: $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $f(x) = 2x^2$.

3.2.7 Mehrere Transformationen.

Natürlich kann man eine Funktion auch mehrmals transformieren, also zum Beispiel nach $(2|1)$ verschieben (also 2 nach rechts und 1 nach oben) dann spiegeln und dann schließlich um den Faktor 2 strecken. Durch diese Hintereinanderausführung von Transformationen kann man sehr viele verschiedene Funktionsgraphen erzeugen.

Kochrezept

Erkennen von Funktionen
Gegeben: Graph. Gesucht: Funktion des Graphen.

1. **Grundlegende Funktion**: Welche Funktion könnte zugrunde liegen? Häufig kommen x^2, x^3, $\sin(x)$ und e^x vor.

2. **Strecken/Stauchen**:

   - **Potenz von** x (x^2,x^3,$\ldots$): Würde man den Graphen zum Ursprung verschieben, welchen Wert hätte er dann für $x = 1$? Ungestreckt/-gestaucht wäre er 1 (da $1^1 = 1^2 = 1$). Ist er zum Beispiel $f(1) = \frac{1}{4}$, so muss der Funktionsterm mit $\frac{1}{4}$ multipliziert werden.
   - **Sinuskurve**: Würde man den Graphen zum Ursprung verschieben, was wäre sein größter Abstand zur x-Achse? Für $\sin(x)$ ist das normalerweise 1. Ermittle den Faktor für den Funktionsterm wie bei einer Potenz von x.
   - **Exponentialfunktion**: Würde man den Graphen zum Ursprung verschieben (also so, dass er für immer kleiner werdende x von oben gegen $-\infty$ gehen würde), wo würde er die y-Achse schneiden? Normalerweise wäre das bei $f(0) = e^0 = 1$. Ermittle den Faktor für den Funktionsterm wie bei einer Potenz von x.

3. **An die richtige Stelle verschieben**: Bestimme die Koordinaten des Punktes, der normalerweise am Koordinatenursprung liegt und verschiebe die Funktion dorthin.

4. **Spiegeln**: Gegebenenfalls muss man den Funktionsterm noch mit (-1) multiplizieren.

3.3 Trigonometrie

Die Grundlage der Trigonometrie sind die Untersuchungen der Verhältnisse von Winkeln und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck.

CAS:

Achtung! Bogenmaß einstellen!
Auf dem aktuellen Dokument: Dok ▼ → Einstellungen → Dokumenteinstellungen → Winkel

3.3.1 Bezeichnungen im Dreieck.
Betrachtet man einen Winkel α in einem rechtwinkligen Dreieck (das heißt, dass ein Innenwinkel des Dreiecks $90°$ beträgt), so ergeben sich folgende Namen für die Seiten:

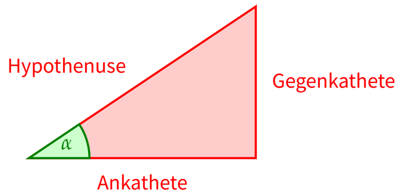

Abbildung 3.13: Ein rechtwinkliges Dreieck und die Seitenbezeichnungen für den betrachteten Winkel.

- **Gegenkathete**: Das ist die dem Winkel gegenüberliegende Seite, also die Seite, die den Winkel nicht berührt.
- **Hypotenuse**: Das ist diejenige der den Winkel berührenden Seiten, die die längste im Dreieck ist. Sie liegt dem rechten Winkel gegenüber.
- **Ankathete**: Das ist die Seite, die den Winkel berührt, aber nicht die Hypotenuse ist.

3.3.2 Sinus und Cosinus.
Sinus und Cosinus sind zwei Werte, die das Verhältnis zwischen den Seiten in einem Dreieck darstellen. Sie hängen dabei lediglich vom Winkel zwischen der Ankathete und der Hypotenuse ab (siehe letzte Grafik).

1. **Sinus**: Der Sinus ist das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse: $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.
2. **Cosinus**: Der Cosinus ist das Verhältnis von Ankathete zur Hypotenuse: $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$.

3.3.3 Der Einheitskreis.
Der *Einheitskreis* ist ein Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit dem Radius 1. Er wird benutzt, um die Verhältnisse der Seiten in einem Dreieck zu veranschaulichen, da die Hypotenuse stets die Länge 1 hat (sie ist der Radius).
Daraus ergibt sich für Sinus und Cosinus in diesem Dreieck:

- $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1} = \text{Gegenkathete}$
- $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Ankathete}}{1} = \text{Ankathete}$

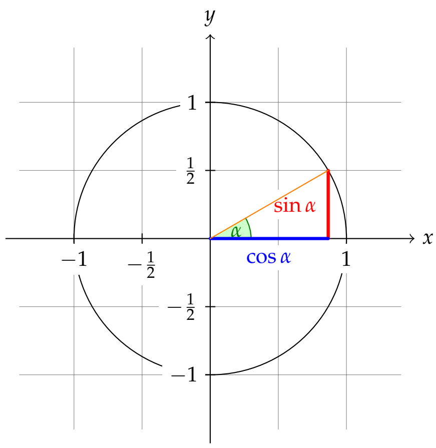

Abbildung 3.14: Die Hypotenuse hat im Einheitskreis stets die Länge 1. Für $\alpha = 0$ ist $\sin\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$, für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin\alpha = 1$ und $\cos\alpha = 0$. Dies sieht man leicht ein, indem man das entsprechende Dreieck in den Einheitskreis einzeichnet.

3.3.4 Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen.

- **Verschiebung.** Wie jede Funktion kann auch eine trigonometrische verschoben werden. Das funktioniert genau wie bei allen bisherigen Funktionen: $f(x) = \sin(x-2)+3$ ist $\sin(x)$ um 3 nach oben und 2 nach rechts verschoben. Diese Operation passiert „am nähesten" bei x.
- **Periode.** Die Periode einer trigonometrischen Funktion ist die Länge nach der sich die Funktion wiederholt. Bei $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ist das 2π. Sie wird verändert, indem man x mit einem Faktor multipliziert. Die Periode wird durch diesen Faktor *geteilt*. $f(x) = \sin(3x)$ hat also die Periode $\frac{2\pi}{3}$.

- **Amplitude.** Die Amplitude einer trigonometrischen Funktion ist der maximale Abstand des Graphen zur x-Achse. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ haben die Amplitude 1. Fügt man einen Faktor davor hinzu, so verändert sich die Amplitude um diesen Faktor: $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$ hat die Amplitude $\frac{1}{2}$.

Kochrezept

Transformation an Sinus. $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ hat folgende Eigenschaften:

- Amplitude $|a|$
- Periode $\frac{2\pi}{b}$
- Verschiebung von $(0|0)$ zu $(c|d)$

Teil II

Analysis

Differentialrechnung

In diesem Abschnitt:

Bestimmen von

- Änderungsraten
- Ableitungen
- Tangenten
- Normalen

1.1 Änderungsrate

1.1.1 Durchschnittliche Änderungsrate.
Betrachtet man den Abschnitt einer Funktion auf einem Intervall $[x_0, x_0 + h]$, so ist in diesem Intervall eine durchschnittliche Steigung feststellbar, welche durch eine Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ dargestellt werden kann. Die Steigung dieser Geraden wird *durchschnittliche Änderungsrate* des Intervalls $[x_0, x_0 + h]$ genannt und kann durch $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ berechnet werden.

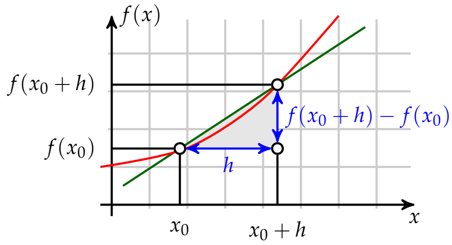

Abbildung 1.1: Die Gerade beschreibt die Steigung des Graphen auf dem Intervall $[x_0, x_0 + h]$.

1.2 Ableitung

1.2.1 Ableitung.
Die *Ableitung* der Funktion f an der Stelle $x = x_0$ ist gegeben durch den Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, was bedeutet, dass wir die Länge des Intervalls, auf dem wir die Änderungsrate ermitteln, immer kleiner wird. Dieser Wert wird auch als $f'(x_0)$ bezeichnet.
Bildlich entspricht dieser Wert der Steigung des Graphen bei x_0.

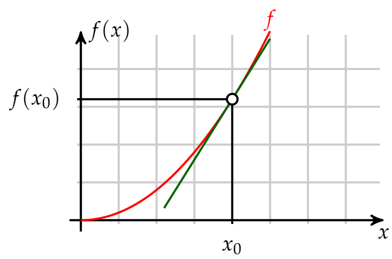

Abbildung 1.2: Die Steigung der grünen Geraden ist die Ableitung von f bei x_0. Sie ist die **Tangente** an $(x_0, f(x_0))$.

CAS:

Calculator:
Menü 〉 Analysis 〉 Ableitung
$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) \rightsquigarrow 2 \cdot x$

1.2.2 Tangente.
Die grüne Gerade im letzten Absatz ist die sogenannte *Tangente* an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Um sie als Funktion ausdrücken zu können benötigen wir:

- die Ableitung von f in x_0 (= $f'(x_0)$) und
- den Funktionswert von f in x_0 (= $f(x_0)$).

Wir konstruieren die Funktion nun Stück für Stück:

- **Vorbereitung**: Die Tangente ist eine Gerade. Die einfachste Gerade ist $t_0(x) = x$.
- **Steigung**: Die Steigung der Tangenten an $(x_0, f(x_0))$ ist $f'(x_0)$, also braucht unsere Gerade diese Steigung:
  $t_1(x) = f'(x_0) \cdot x$
- **Nach oben/unten verschieben**: Wir verschieben nun die Tangente auf die richtige Höhe, nämlich $f(x_0)$:
  $t_2(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0)$
- **Nach links/rechts verschieben**: Nun müssen wir sie nur seitlich zu $(x_0, f(x_0))$ verschieben, indem wir in der Funktionsgleichung x_0 von x abziehen:
  $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
  Dies ist die fertige Tangente.

Die Gleichung von $t(x)$ oben wird auch *allgemeine Tangentengleichung* genannt.

CAS:

Calculator:
Menü » Analysis » Tangententerm
TANGENTLINE$(x^2, x, 1) \rightsquigarrow 2 \cdot x - 1$
(der dritte Parameter ist der x-Wert, bei dem eine Tangente angelegt werden soll)

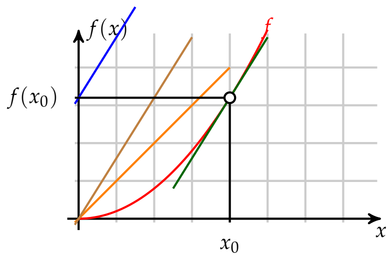

Abbildung 1.3: Schritte bis zur Tangenten

1.2.3 Normale.
Zusätzlich zur Tangente an $(x_0, f(x_0))$ kann man auch die sogenannte *Normale* konstruieren. Diese steht senkrecht zur Tangente.
Die Normalengleichung ist logischerweise bis auf die Steigung identisch mit der Tangentengleichung:
$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

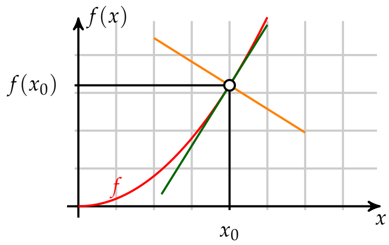

Abbildung 1.4: Tangente und Normale in $(x_0, f(x_0))$

CAS:

Calculator:
Menü » Analysis » Normalenterm
NORMALLINE$(x^2, x, 1) \rightsquigarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Kochrezept

Tangente/Normale in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ bestimmen:

- **Tangente**: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
- **Normale**: $n(x) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

1.2.4 Tangente durch einen Punkt anlegen.
Gegeben ist eine Funktion (beispielsweise $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$) und ein Punkt, der *nicht* auf dem Graphen liegt (beispielsweisei $P(\frac{3}{2}| - 1)$). Gesucht ist eine Tangente an $f(x)$, die durch P geht.

1. Wähle beliebigen Berührpunkt von Tangente und Funktion: $B(x_0|f(x_0))$ (dieser liegt logischerweise auf der Funktion).

2. Die Steigung der Tangenten ist

   (a) $f'(x_0)$

   (b) Die Steigung im Steigungsdreieck: $\frac{f(x_0)-(-1)}{x_0-\frac{3}{2}}$

3. Wir berechnen die Ableitung von $f(x)$ (wie das geht steht im nächsten Kapitel): $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x$

4. Wir setzen die Steigungen gleich und erhalten so x_0:

$$f'(x_0) = \tfrac{1}{2} \cdot x_0 = \frac{f(x_0) - (-1)}{x_0 - \frac{3}{2}} \Leftrightarrow {x_0}^2 - 3x_0 - 4 = 0$$

   Mit der Mitternachtsformel erhalten wir $x_{0_1} = -1$ und $x_{0_2} = 4$. Durch Einsetzen in die Funktion erhalten wir die Berührpunkte $B_1(-1|\frac{1}{4})$ und $B_2(4|4)$. Mit der allgemeinen Tangentengleichung erhalten wir jeweils die Tangente:

$$t_1(x) = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

   und

$$t_2(x) = 2x - 4$$

1.2.5 Ableitungsfunktion.
Wir haben oben gesehen, dass man für jedes x_0 die Steigung von f in x_0 berechnen kann (bis auf Ausnahmen, aber darauf wollen wir hier noch nicht eingehen). Diese haben wir $f'(x_0)$ genannt. Wir verallgemeinern das und nennen $f'(x)$ die *Ableitung* von f. Sie ordnet jedem x_0 die Steigung $f'(x_0)$ zu.

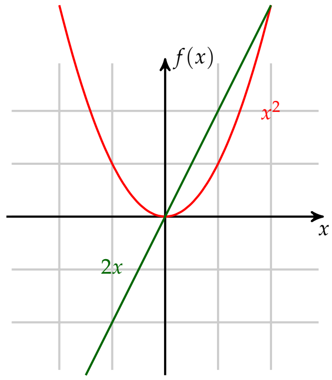

Abbildung 1.5: $f(x) = x^2$ und $f'(x) = 2x$

1.2.6 Beispiel: Ableitungsfunktion berechnen.
Wir möchten nun die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^2$ berechnen. Diese wird wie die Ableitung an einem Punkt berechnet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2xh + h) \xrightarrow{h\to 0} 2x \end{aligned}$$

1.2.7 Ableitungsregeln.
Damit man nicht immer mühsam den Grenzwert bestimmen muss, um die Ableitungsfunktion zu erhalten, gibt es einige *Ableitungsregeln* (r ist eine beliebige Zahl):

- **Konstantenregel**: Die Steigung einer Konstanten ($f(x) = a$ für eine Zahl a) ist überall Null, also gilt für ihre Ableitung: $f'(x) = 0$.

- **Potenzregel**: $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
  Beispiel: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x$

- **Faktorregel**: $f(x) = r \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = r \cdot g'(x)$
  Beispiel: $f(x) = 2x = 2x^1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 2 \cdot x^0 = 2 \cdot 1 = 2$

- **Summenregel**: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
  Beispiel: $f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$
- **Produktregel**: $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
  Beispiel: $f(x) = (x^2) \cdot (2x) \Rightarrow f'(x) = (2x) \cdot (2x) + (x^2) \cdot (2) = 4x^2 + 2x^2 = 6x^2$
- **Quotientenregel**: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x) \cdot h(x)}$
  Beispiel: $f(x) = \frac{x^2}{2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x)\cdot(2x)-(x^2)\cdot(2)}{(2x)\cdot(2x)} = \frac{4x^2-2x^2}{4x^2} = \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$. Das ist klar, da $\frac{x^2}{2x} = \frac{1}{2}x$.
- **Kettenregel**: $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
  Beispiel: $f(x) = (2x)^2 \Rightarrow f'(x) = (2 \cdot (2x)) \cdot (2) = 4 \cdot 2x = 8x$
  Bemerkung: Zwei Funktionen werden verkettet, indem man für jedes x in der äußeren Funktion (hier also $g(x)$) die innere Funktion (hier $h(x)$) einsetzt:
  $g(x) = x^2, h(x) = 2x \rightarrow g(h(x)) = (2x)^2$

1.2.8 Ableitungen von trigonometrischen Funktionen.
Es gilt:

- $f(x) = \sin(x) \ \Rightarrow\ f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) \ \Rightarrow\ f'(x) = -\sin(x)$

1.2.9 Beispiel: mehrere Regeln anwenden.
In den meisten Fällen reicht es nicht aus, nur eine Ableitungsregel zu benutzen, um die Ableitung einer Funktion zu bestimmen. Beispielsweise kann es sich um eine verkettete Funktion handeln, bei der die innere Funktion eine Summe aus zwei Funktionen ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \\ &= (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \end{aligned}$$

1.3 Höhere Ableitungen

CAS:

Calculator:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\right) \rightsquigarrow 2$

1.3.1 Höhere Ableitungen und ihre Bedeutung.
Man kann die Ableitung einer Funktion erneut ableiten und erhält so die *zweite Ableitung*, $f''(x)$.

1. **Erste Ableitung**: Die erste Ableitung stellt die Steigung der Urpsrungsfunktion dar.
2. **Zweite Ableitung**: Die zweite Ableitung stellt die Geschwindigkeit, mit der sich die Steigung der Urpsprungsfunktion ändert, dar.

Beispiel: $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2$. Wir erkennen:

- : $2x$ ist kleiner als Null für negative x, also ist die Steigung von x^2 für $x < 0$ negativ (genau gleich sieht man, dass die Steigung von x^2 für $x > 0$ positiv ist, für $x = 0$ ist die Steigung von x^2 Null).
- $f''(x) = 2$ ist 2 für alle x, also nimmt die Steigung von x^2 immer zu (schaut euch dazu nochmal den Graphen von x^2 an!).

1.3.2 Links- und Rechtskurven.
Wir haben im letzten Absatz gesehen, dass die Steigung von x^2 stets zunimmt (da $f''(x) = 2$ immer positiv ist). Wir nennen einen Abschnitt von f, auf dem f'' positiv ist, **Linkskurve** und einen Abschnitt, auf dem f'' negativ ist, **Rechtskurve**.

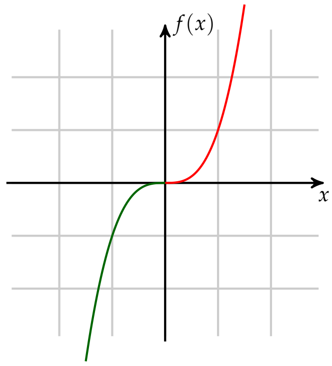

Abbildung 1.6: $f(x) = x^3$ ist vor 0 eine Rechts- und danach eine Linkskurve. Ihr könnt euch vorstellen, dass ihr von $-\infty$ nach ∞ auf dem Graphen entlangfahrt.

Extremstellen/-werte

In diesem Abschnitt:

Bestimmen von

- Lokalen und globalen Extrema
- Sattelstellen
- Wendestellen
- Lösungen von Extremwertproblemen mit Nebenbedingungen

Ziemlich leicht kann man Funktionen auf sogenannte **Extremstellen** untersuchen. Das sind x-Werte, für die die Funktion maximal bzw. minimal ist.

2.0.1 Lokale Extrema.
Es gibt zwei Arten von lokalen Extrema:

- **Lokales Minimum**: Eine Funktion $f(x)$ hat bei x_0 dann ein lokales Minimum, wenn in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 der Funktionswert von x_0 der Kleinste ist.
- **Lokales Maximum**: Eine Funktion $f(x)$ hat bei x_0 dann ein lokales Maximum, wenn in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 der Funktionswert von x_0 der Größte ist.

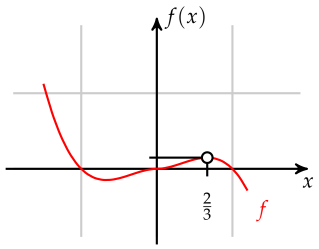

Abbildung 2.1: $f(x) = -x^3 + x^2$ hat bei $\frac{2}{3}$ ein lokales Maximum, aber **kein** globales!

2.0.2 Globale Extrema.
Spezielle Maxima sind die sogenannten *globalen Extrema*.

- **Globales Minimum**: Hat $f(x)$ in x_{min} ein lokales Minimum und gibt es keine anderen Werte für x, die einen kleineren Funktionswert haben, so hat $f(x)$ in x_0 ein *globales Minimum*.
- **Globales Maximum**: Hat $f(x)$ in x_{max} ein lokales Maximum und gibt es keine anderen Werte für x, die einen größeren Funktionswert haben, so hat $f(x)$ in x_0 ein *globales Maximum*.

CAS:

Calculator:
Menü > Analysis > Funktionsmaximum
FMAX(x^2) $\rightsquigarrow 0$

Graph:
Menü > Graph anal. > Maximum > Schranken wählen

2.0.3 Beispiel: globale Extrema.
$f_1(x) = x^2 + 1$ hat in $x_0 = 0$ ein globales Minimum,
$f_2(x) = -x^2 - 1$ hat in $x_0 = 0$ ein globales Maximum. Malt euch die Graphen auf, falls ihr sie euch nicht vorstellen könnt.

2.0.4 Hoch- und Tiefpunkte.
In den letzten Absätzen haben wir uns mit lokalen und globalen Extremstellen beschäftigt. Mit *Extrem**stellen*** war dort stets der jeweilige x-Wert gemeint. Möchte man von dem Punkt sprechen, bei dem der Graph maximal beziehungsweise minimal ist, so sagt man:

- **Tiefpunkt**: Hat $f(x)$ in x_{min} ein lokales Minimum, so ist $T = (x_{\text{min}}, f(x_{\text{min}}))$ ein *Tiefpunkt* von f.
- **Hochpunkt**: Hat $f(x)$ in x_{max} ein lokales Maximum, so ist $H = (x_{\text{max}}, f(x_{\text{max}}))$ ein *Hochpunkt* von f.

Achtung! Hier besteht sehr große Verwechslungsgefahr! Achtet in Aufgabenstellungen immer sehr genau darauf, was von euch verlangt wird.

2.0.5 Vorzeichenwechsel.
Um im nächsten Absatz die Bedingungen für Extrema beschreiben zu können müssen wir wissen, was ein Vorzeichenwechsel ist.
Ein *Vorzeichenwechsel* liegt an einer Stelle vor, an der der Graph der Funktion die x-Achse schneidet. Ein Vorzeichenwechsel kann entweder von $-$ nach $+$ oder von $+$ nach $-$ erfolgen.

2.0.6 Bedingungen für Extrema.
In x_0 kann nur eine Extremstelle vorliegen wenn $f'(x_0) = 0$. Oder anders formuliert:

- **Notwendige Bedingung**: Hat f in x_0 eine Extremstelle, so ist $f'(x_0) = 0$.
  Hinweis: Das bedeutet, dass es ein x_0 geben kann, sodass $f'(x_0) = 0$ aber f keine Extremstelle in x_0 hat! Dies ist beispielsweise in Sattelpunkten der Fall.

Wir brauchen also noch eine Bedingung. Diese ist die

- **Erste hinreichende Bedingung**: Ist die notwendige Bedingung erfüllt und hat f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum (bei einem Maximum liegt ein Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ vor).

Oft einfacher zu verwenden ist die

- **Zweite hinreichende Bedingung**: Ist die notwendige Bedingung erfüllt und
  $f''(x_0) < 0$, liegt also x_0 in einer Rechtskurve, so hat f in x_0 ein lokales Maximum (lokales Minimum für $f''(x_0) > 0$ (Linkskurve)).

2.0.7 Sattelstellen/-punkte.
Ist für ein x_0 die notwendige Bedingung erfüllt, aber keine der beiden hinreichenden, so liegt eine Sattelstelle vor. Das bedeutet, dass $f'(x_0) = 0$, aber kein Vorzeichenwechsel vorliegt.
Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist dann ein *Sattelpunkt* von f.

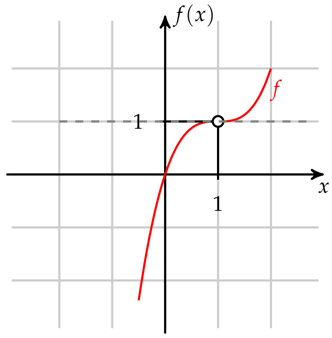

Abbildung 2.2: $f(x) = (x-1)^3 + 1$ hat in $x_{\text{Sattel}} = 1$ eine Sattelstelle.

CAS:

Graph:
Menü › Graph anal. › Wendepunkt › Schranken wählen

2.0.8 Wendestellen/-punkte.
Die Stellen, an denen eine Funktion f von einer Links- in eine Rechtskurve wechselt — oder umgekehrt — nennt man *Wendestellen*. Die Bedingungen sind sehr ähnlich wie die Bedingungen für Extrema und sind graphisch leicht nachvollziehbar:

- **Notwendige Bedingung**: f kann in x_0 nur dann eine Wendestelle haben, wenn $f''(x_0) = 0$ gilt (da $f''(x_0) < 0$ für eine Rechts- und $f''(x_0) > 0$ für eine Linkskurve).
- **Erste hinreichende Bedingung**: Ist die notwendige Bedingung erfüllt und hat f'' in x_0 einen Vorzeichenwechsel, so hat f in x_0 eine Wendestelle.
- **Zweite hinreichende Bedingung**: Ist die notwendige Bedingung erfüllt und ist $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f in x_0 eine Wendestelle.

Wie bei den Extrema definiert man für eine Wendestelle von f bei x_0 den zugehörigen Wendepunkt $(x_0, f(x_0))$.

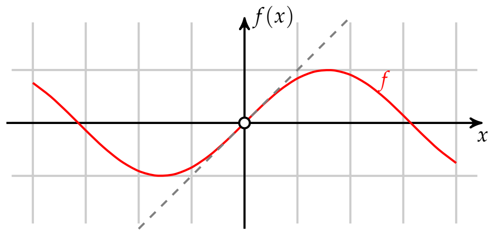

Abbildung 2.3: $f(x) = \sin(x)$ hat in $x_{\text{Wende}} = 0$ eine Wendestelle. Wenn man auf dem Graph von $-\infty$ nach ∞ fahren würde, so stünde hier das Lenkrad gerade.

2.1 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

2.1.1 Beispiel: Fläche maximieren.
Eine 400m-Laufbahn soll so gemacht werden, dass das rechteckige Spielfeld in der Mitte der Laufbahn möglichst groß wird. Wie sind l und r zu wählen, damit diese Fläche maximal wird?

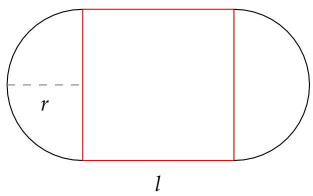

Abbildung 2.4: Das Spielfeld soll möglichst groß werden. Wie müssen l und r gewählt werden?

Kochrezept

Lösungsstrategie für Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen:

1. Die Größe, die maximal/minimal werden soll, durch einen Term beschreiben.
2. Bedingung in den Term einsetzen $\rightarrow$ Größe hängt nur noch von einer Variablen ab
3. Term ableiten und Nullstellen bestimmen $\rightarrow$ Minima/Maxima der Größe
4. Testen: Sind die Ergebnisse sinnvoll?

2.1.2 Lösung des Beispiels.
Wir lösen das Beispiel mit dem Kochrezept.

1. Die Fläche des Rechtecks wird beschrieben durch $A_{l,r} = l \cdot 2r$.

2. Die Bedingung ist $400 = 2l + 2\pi r$. Um die Bedingung in den obigen Term einsetzen zu können formen wir die Bedingung nach einer Variable um, beispielsweise nach l: $l = 200 - \pi r$. Wir erhalten also durch Einsetzen: $A(r) = (200 - \pi r) \cdot 2r = 400r - 2\pi r^2$.

3. Die Ableitung von $A(r)$ ist $A'(r) = 400 - 4\pi r$. Als Nullstellen erhalten wir:

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 400 - 4\pi r = 0 \Leftrightarrow 100 = \pi r \Leftrightarrow r = \frac{100}{\pi}$$

   Die beiden Kreisbögen haben also zusammen die Länge $2\pi r = 2\pi \frac{100}{\pi} = 200m$. Also ist $l = 100m$.

4. Wir müssen das Ergebnis nicht testen, tatsächlich ist die gerade Strecke bei einer echten $400m$-Laufbahn $100m$ lang.

Exponentialfunktionen

In diesem Abschnitt:

- Eulersche Zahl
- Exponentialfunktion und Logarithmus

3.0.1 Eulersche Zahl, natürliche Exponentialfunktion.
Leitet man eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = a^x$ mit dem Taschenrechner ab, so sieht man, dass es ein n gibt, sodass $f'(x) = n \cdot f(x)$. Wir suchen nun e derart, dass die Ableitung von e^x wieder e^x ist (also $n = 1$). Diese Zahl heißt *eulersche Zahl*. Es gilt:

$$f(x) = e^x \rightsquigarrow f'(x) = f(x)$$

Wir nennen diese Funktion auch *natürliche Exponentialfunktion*.

3.0.2 Natürlicher Logarithmus.
Der *natürliche Logarithmus* ist die Gegenfunktion zur natürlichen Exponentialfunktion. Da sie die Gegenfunktion ist, gilt:

- $\ln(e^x) = x$
- $e^{\ln(x)} = x$

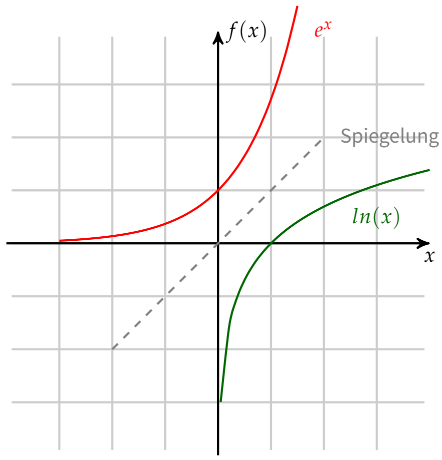

Abbildung 3.1: e^x und $\ln(x)$.

3.0.3 Logarithmus und Exponentialfunktion: Wichtige Punkte.
Ein paar wichtige Werte von e^x und $\ln(x)$ sollte man sich merken, da so später Gleichungen oft stark vereinfacht werden können ($f(x) = e^x, g(x) = \ln(x)$):

- $f(0) = e^0 = 1$
- $f(1) = e^1 = e$
- $g(x) = \ln(x)$ ist nur für positive x definiert
- $g(1) = \ln(1) = 0$
- $g(e) = \ln(e) = 1$

3.0.4 Rechenregeln.
Mit diesen Regeln lassen sich Exponentialgleichungen lösen. Diese Regeln wurden bereits im Grundlagenkapitel erwähnt.

- $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$
- $\ln(\frac{u}{v}) = \ln(u) - \ln(v)$
- $\ln(a^k) = k \cdot \ln(a) \rightsquigarrow a^k = e^{k \cdot \ln(a)}$
- $f(x) = a^x \rightsquigarrow f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$ (folgt aus der Kettenregel)

3.0.5 Beispiele zum Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen.

Es gibt verschiedene Ansätze um Exponential- und Logarithmusgleichungen zu lösen:

1. **Naives Umformen**: Sehr einfache Terme können durch naives Umformen gelöst werden:

$$\begin{aligned} & e^x - e^{2x} = 0 \mid + e^{2x} \\ \Leftrightarrow\ & e^x = e^{2x} \qquad \mid \ln \\ \Leftrightarrow\ & x = 2x \\ \rightsquigarrow & x = 0 \end{aligned}$$

2. **Nullprodukt**: Ein Produkt von zwei Termen wird genau dann Null, wenn einer der beiden Terme Null ist:

$$\begin{aligned} & (x-1) \cdot (e^x - 1) = 0 && \mid \text{Terme einzeln betrachten} \\ \Leftrightarrow\ & (x-1) = 0 \text{ oder } e^x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \text{ oder } e^x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \text{ oder } x = 0 \end{aligned}$$

3. **Substitution**: Die Substitution funktioniert auch hier:

$$\begin{aligned} & e^x - 3e^{-x} + 2 = 0 && \mid \cdot e^x \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} - 3 + 2e^x = 0 && \mid \text{Substitiution: } u = e^x \\ \Leftrightarrow\ & u^2 + 2u - 3 = 0 && \mid \text{Mitternachtsformel} \\ \rightsquigarrow\ & u_1 = 1, u_2 = -\frac{3}{2} && \mid \text{Rücksubstitution} \\ \Leftrightarrow\ & 1 = e^{x_1}, -\frac{3}{2} = e^{x_2} && \mid \ln \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = \ln(1), x_2 = \ln(-\frac{3}{2}) \\ \rightsquigarrow\ & x = x_1 = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Das Ergebnis x_2 gibt es nicht, da $\ln(x)$ nur für positive x definiert ist.

Funktionenscharen

In diesem Abschnitt:

- Funktionenscharen
- Extremstellen von Funktionenscharen
- Ortslinien

4.0.1 Funktionenschar.
Eine *Funktionenschar* ist eine Funktion, die zusätzlich zu x noch einen weiteren Parameter k enthält (man schreibt $f_k(x)$). Setzt man für k einen Wert ein, so erhält man eine Funktion aus der unendlich großen Funktionenschar.

CAS:

Graph: $f1(x) = \{1, 2, 3\}x^2$

$\rightsquigarrow$ Graphen von x^2, $2x^2$ und $3x^2$

4.0.2 Beispiel: eine Funktionenschar.
Wir betrachten die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{1}{k} \cdot x^2$. Wir setzen ein paar Werte für k ein:

- $f_1(x) = x^2$
- $f_{-2}(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2$
- $f_3(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$

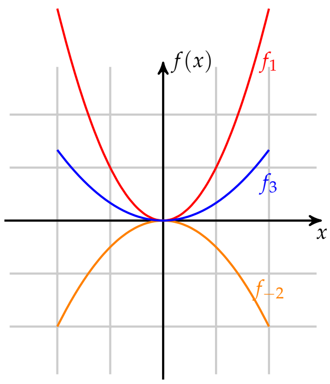

Abbildung 4.1: Graphen der drei Funktionen aus der Funktionenschar

4.0.3 Bemerkung: Spiegelung an der x-Achse.
Wählt man für k eine negative Zahl, so ergibt sich oft ein ganz anderer Verlauf der Funktion als für ein positives k. Ist dies der Fall, so müssen wir die Funktionenschar für positive und negative k getrennt betrachten.

4.0.4 Untersuchung einer Funktionenschar auf Extremstellen.

Wie eine Funktion kann auch eine Funktionenschar auf die üblichen Punkte und Stellen untersucht werden. Dabei wird k einfach wie eine ganz normale Zahl behandelt. Man erhält also die Extremstellen/-punkte in Abhängigkeit von k.

4.0.5 Beispiel: Untersuchung einer Funktionenschar auf Extrempunkte.

Wir betrachten die Funktionenschar $f_k(x) = k \cdot x^2$. Wir sehen, dass für negative k eine Spiegelung an der x-Achse auftritt. Wir betrachten also positive und negative k getrennt.

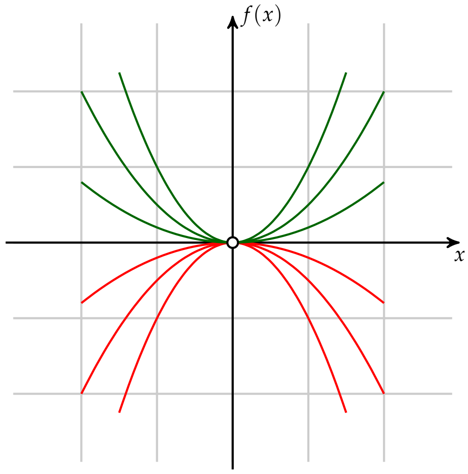

Abbildung 4.2: Fallunterscheidung für positive und negative k

- **Fall 1**: $k > 0$. Es ist $f_k'(x) = 2kx$. Wir betrachten die Nullstellen der Ableitung:
  $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 2kx = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Also hat $f_k(x)$ für $x = 0$ ein Extremum.
  Die zweite Ableitung ist $f_k''(x) = 2k$. Da $k > 0$ ist, ist $f_k''(0) = 2k > 0$, also hat $f_k(x)$ für $k > 0$ in $x = 0$ ein Minimum.
- **Fall 2**: $k < 0$. Es ist $f_k'(x) = 2kx$. Auch hier erhalten wir als Nullstelle der Ableitung $x = 0$.
  Die zweite Ableitung ist $f_k''(x) = 2k$. Da $k < 0$ ist, ist $f_k''(0) = 2k < 0$, also hat $f_k(x)$ für $k < 0$ in $x = 0$ ein Maximum.

4.0.6 Ortslinien.
Wir haben im letzten Beispiel gesehen, dass man Extrema von Funktionenscharen im Abhängigkeit von k erhalten kann. Ist das so, so kann man eine Funktion aufstellen, die durch diese Extrema verläuft. Das ist die sogenannte *Ortslinie* des Extremums.

4.0.7 Berechnung der Ortslinie.
Wir werden jetzt die Ortslinie aus obiger Grafik berechnen.
Die betrachtete Funktionenschar ist $f_k(x) = (x-k)^2 + k$. Es ist $f_k'(x) = 2(x-k)$.
$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-k) = 0 \Leftrightarrow x-k = 0 \Leftrightarrow x = k$.
Das bedeutet, dass $f_k(x)$ für $x = k$ ein Extremum hat. Der y-Wert für $x = k$ ist
$f_k(k) = (k-k)^2 + k = k$. Die Extrema liegen also auf $o(k) = k$.
Dies ist die Ortslinie der Extrema.

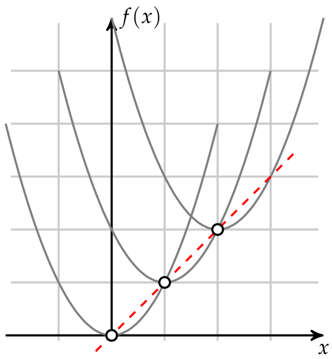

Abbildung 4.3: Ein paar Funktionen und die Ortslinie von $f_k(x) = (x-k)^2 + k$.

4.0.8 Gemeinsame Punkte.
In Abbildung 7.2 haben alle Funktionen der Funktionenschar einen gemeinsamen Punkt ($P(0|0)$). Möchte man die gemeinsamen Punkte von zwei Funktionen der Funktionenschar bestimmen, so geht man so vor:

1. Wir nehmen $t_1 \neq t_2$ und stellen für diese beiden Variablen die zugehörigen Funktionen der Funktionenschar auf, also $f_{t_1}(x)$ und $f_{t_2}(x)$.
2. Wir setzen die beiden Funktionen gleich: $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$
3. Wir lösen die Gleichung für x. item Wir setzen die erhaltenen x-Werte (sie hängen in der Regel von t_1 und t_2 ab) in die Gleichung der Funktionenschar ein und erhalten so die gemeinsamen Punkte von $f_{t_1}(x)$ und $f_{t_2}(x)$.

Integralrechnung

In diesem Abschnitt:

- Stammfunktionen und Integrale
- Integrale bestimmen: Annäherung und Hauptsatz
- Uneigentliche Integrale
- Mittelwert
- Von Graphen beschränkte Flächen und Rotationskörper

In diesem Kapitel werden wir uns mit der sogenannten *Integralrechnung* beschäftigen. Ein wichtiges Hilfsmittel wird sein, Funktionen nicht nur ab-, sondern auch **aufleiten** zu können. Diese Aufleitungen nennen wir *Stammfunktionen*.

5.1 Stammfunktionen

CAS:

Calculator:
Menü » Analysis » Integral
$\int_{\square}^{\square} x^2 dx \rightsquigarrow \frac{x^3}{3}$

5.1.1 Stammfunktion.
Eine Stammfunktion F zu einer gegebenen Funktion f ist eine Funktion, sodass $F'(x) = f(x)$ gilt. f ist also die Ableitung von F. Um eine Stammfunktion zu f zu konstruieren, müssen wir f aufleiten.

5.1.2 Aufleitungsregeln.
Das Aufleiten funktioniert genau wie das Ableiten, nur rückwärts. Zur Vereinfachung gibt es ein paar Regeln:

- **Potenzregel**: $f(x) = x^r \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$.
  Dass diese Regel gilt sieht man leicht ein, indem man F ableitet und f erhält (dies gilt auch für alle anderen Regeln).
- **Summenregel**: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + H(x)$
- **Faktorregel**: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow F(x) = c \cdot G(x)$
- **Kettenregel**: $f(x) = g(cx + d) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{c}G(cx + d)$ (c und d sind Zahlen).

5.1.3 Stammfunktionen zu speziellen Funktionen.
Viele Funktionen können mit den vier Regeln nicht aufgeleitet werden. Es gibt aber noch einige Funktionen, deren Stammfunktionen man kennen sollte:

- $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln(x)$
- $f(x) = a^x \Rightarrow F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x)$

Man sieht diese Regeln leicht ein, in dem man die Ableitungen der Stammfunktionen bildet.

5.2 Integrale

5.2.1 Orientierter Flächeninhalt.
Wir werden im Folgenden den Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse betrachten. Es gilt zu beachten, dass hierbei der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse als negativ betrachtet wird.

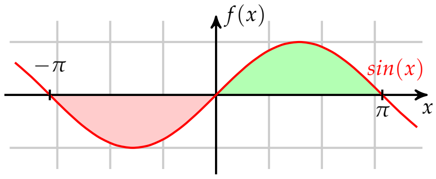

Abbildung 5.1: Negativer und positiver Flächeninhalt von $f(x) = \sin(x)$ auf $[-\pi, \pi]$. Die Summe des Flächeninhaltes der beiden Flächen beträgt Null!

5.2.2 Bemerkung: Berechnung der Fläche unter einer Kurve durch Approximation.
Anschaulich kann man den Flächeninhalt unter einer Kurve berechnen, indem man Rechtecke unter die Kurve zeichnet. Macht man diese Rechtecke immer dünner, so wird die Annäherung immer genauer.
Durch diese Annäherung erhält man die Formel:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n}$$

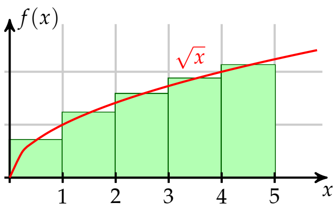

Abbildung 5.2: Annäherung des Flächeninhalts unter $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0, 5]$

5.2.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
Mit der vorherigen Bemerkung wird nicht gerechnet, sie ist viel zu aufwändig.
Es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

So kann man das Integral einer Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ leicht berechnen, sobald man eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ gefunden hat.

CAS:

Calculator:
Menü 〉 Analysis 〉 Integral
$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx \rightsquigarrow 2$

Graph:
Menü 〉 Graph anal. 〉 Integral 〉 Punkte/Schnitte auswählen

5.2.4 Integral mit dem Hauptsatz berechnen.
Wir berechnen hier die Stammfunktion von x^2 mithilfe der *Potenzregel*.

$$\int_{-1}^{2} x^2 = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3\right) = 3$$

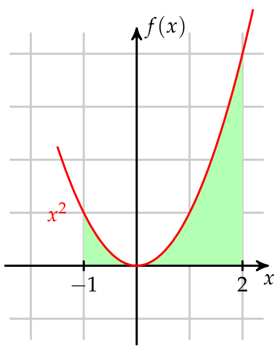

Abbildung 5.3: Der in obigem Beispiel berechnete Flächeninhalt unter x^2

5.2.5 Rechenregeln für Integrale.
Diese Regeln ergeben sich aus den Regeln zum Bestimmen einer Stammfunktion:

1. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

5.2.6 Mittelwert einer Funktion.
Möchte man den Mittelwert von Zahlen bestimmen, so rechnet man $\overline{m} = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$. Bei einer Funktion geht das sehr ähnlich, man bestimmt den Mittelwert der Fläche unter jedem Punkt des Intervalls:

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

5.2.7 Uneigentliche Integrale, Integralfunktion.
Ein *uneigentliches Integral* ist ein Integral, bei dem mindestens eine Integrationsgrenze nicht eine Zahl, sondern eine Variable ist, also beispielsweise über das Intervall $[-2, k]$ integriert wird. Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion lässt sich deswegen hier nur in Abhängigkeit von k darstellen. Deswegen spricht man hier auch häufig von einer *Integralfunktion*.

5.2.8 Bemerkung: Uneigentliche Integrale mit zwei variablen Integrationsgrenzen.
Sind beide Integrationsgrenzen eines Integrals variabel (also z.B. a und b), so wählt man eine Zahl und zerteilt das Integral an der Stelle in zwei Teile:

$$\int_a^b x^2 = \int_a^0 x^2 + \int_0^b x^2$$

So kann man ein doppelt uneigentliches Integral zu zwei einfach uneigentlichen Integralen machen. Deswegen werden wir im Folgenden nur mit einfach uneigentlichen Integralen arbeiten.

5.2.9 Uneigentliche Integrale: Grenzwerte.
Oft betrachtet man uneigentliche Integrale, bei denen die variable Integrationsgrenze gegen $\pm\infty$ gehen soll. Dazu berechnet man den Flächeninhalt in Abhängigkeit der variablen Integrationsgrenze und analysiert dann die Entwicklung der Funktion für $x \to \pm\infty$.

CAS:

Calculator:

$\lim_{k\to\infty}\left(\int_0^k \frac{1}{e^x}dx\right)$

5.2.10 Beispiel: Uneigentliches Integral.
Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\int_1^k e^{-x} dx:$$

$$\int_1^k e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^k = \left(-e^{-k}\right) - \left(-e^{-1}\right) = e^{-k} + e^{-1}$$

Es ist $\lim\limits_{k\to\infty} e^{-k} = 0$, also $\lim\limits_{k\to\infty} \left(e^{-k} + e^{-1}\right) = 0 + e^{-1} = \frac{1}{e}$. Wir schreiben:

$$\int_1^\infty e^{-x} = \frac{1}{e}.$$

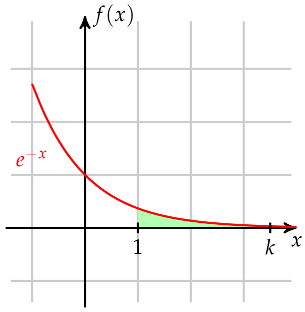

Abbildung 5.4: Das uneigentliche Integral $\int_1^k e^{-x}$

5.2.11 Rotationskörper.
Einen *Rotationskörper* erhält man, indem man den Graph einer Funktion um die x-Achse rotiert (die Funktion $f(x) = 1$ ergibt beispielsweise einen Zylinder mit dem Radius $r = 1$).

5.2.12 Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers.
Wir erinnern uns: Der Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen haben wir bestimmt, indem wir ihn mit Rechtecken angenähert haben. Bei der Rotation des Graphen um die x-Achse macht man also einfach dasselbe mit den Rechtecken und sie werden zu Zylindern, deren Volumen wir durch $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ berechnen können. Wir setzen den Radius $r = f(x_p)$, also die Höhe des Rechtecks und für die Höhe $h = \frac{b-a}{n}$, also die Breite des Rechtecks (man muss vielleicht ein bisschen darüber nachdenken, um das nachvollziehen zu können).
Nun summieren wir anstatt des Flächeninhalts der Rechtecke die Volumina der Zylinder zusammen. Wir erhalten:

$$V_{Rotationskörper} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Da das eine relativ umfangreiche Formel ist, sieht man ihre Funktionsweise vielleicht am besten an einem

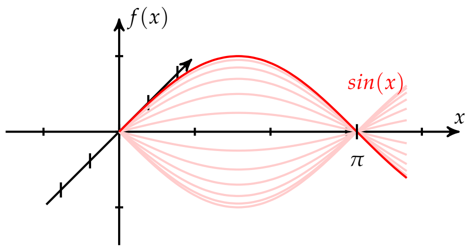

Abbildung 5.5: Angedeutet: Rotationskörper von $f(x) = \sin(x)$ auf $[0, \pi]$

5.2.13 Beispiel.
Wir berechnen das Volumen des Rotationskörpers von $f(x) = x(x-1)$ auf dem Intervall $[0, 1]$:

$$\pi \cdot \int_0^1 (x(x-1))^2 dx = \pi \cdot \left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \pi \cdot \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{\pi}{30}$$

5.3 Flächeninhalte mit Integralen berechnen

Dass man mithilfe von Integralen Flächeninhalte berechnen kann sollte inzwischen klar sein. Hier wollen wir beispielsweise zeigen, wie man den Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen berechnet.

5.3.1 Vorsicht: orientierter Flächeninhalt.

Vorsicht! Berechnet man die Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse, so erhält man den *orientierten Flächeninhalt*. Das bedeutet, dass dieser negativ ist, wenn die Funktion unterhalb der x-Achse verläuft. Will man also den *Flächeninhalt* zwischen einer Funktion und der x-Achse berechnen, so muss man, wenn die Funktion mindestens teilweise unter dieser verläuft, gegebenenfalls in mehreren Schritten arbeiten:

5.3.2 Tricky Flächeninhalt — Teil I.

Wir wollen den Flächeninhalt zwischen diesem Graphen und der x-Achse berechnen:
Die rote Kurve ist der Graph von $f(x) = \sin(x)$.

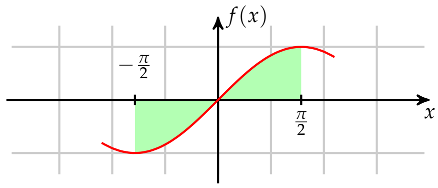

Abbildung 5.6: Der Flächeninhalt der grünen Fläche soll berechnet werden.

- **orientierter Flächeninhalt**: Der orientierte Flächeninhalt ist logischerweise

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \overset{(1)}{=} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 0$$

  Wir nutzen hierbei bei (1) die Punktsymmetrie zum Ursprung von $\cos(x)$ aus.
  Das Ergebnis überrascht nicht, schließlich ist die Fläche unterhalb der x-Achse genauso groß wie die darüber.

- **tatsächlicher Flächeninhalt**: Wir wollen nun den Flächeninhalt der grünen Fläche berechnen. Hierbei meinen wir mit *Flächeninhalt* den tatsächlichen Flächeninhalt, also die Größe der Fläche, die grün ist, ohne Berücksichtigung, was über und was unter der x-Achse liegt. Dazu berechnen wir eine der beiden Teilflächen und verdoppeln das Ergebnis, da die beiden Flächen ja gleich groß sind:

$$2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = 2 \cdot [-\cos(x)]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2 \cdot ((-\cos(\frac{\pi}{2})) - (-\cos(0))) = 2 \cdot ((-0) - (-1))$$
$$= 2 \cdot 1 = 2$$

5.3.3 Fläche zwischen Kurven.

Möchte man anstatt der Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse die Fläche zwischen zwei Graphen bestimmen, so geht man wie folgt vor:

1. Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem oberen Graphen bestimmen $(= A)$

2. Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem unteren Graphen bestimmen $(= B)$

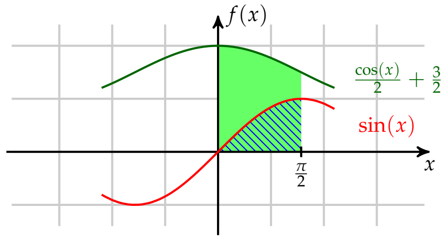

Abbildung 5.7: Der Flächeninhalt zwischen dem grünen und dem roten Graphen soll auf dem angegebenen Intervall berechnet werden.

3. $A - B$ berechnen

Die Flächen sind rechts veranschaulicht.

1. **Große Fläche berechnen**:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2} + \frac{3}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx + \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$
$$= \frac{1}{2} [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2} [x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}$$

2. **Kleine Fläche berechnen**: Das haben wir oben schon gemacht und haben 1 erhalten.

3. **Kleine Fläche von großer Fläche abziehen**:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) - (1) = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Fertig!
Anmerkung: Man kann das ganze auch in einem Schritt machen. Ist $f(x)$ die Funktion des oberen Graphen und $g(x)$ die des unteren, so ist die Fläche zwischen ihnen auf dem Intervall vom a nach b: $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx$. Dieses Integral kann man auch in die Formel für Rotationskörper einsetzen.

Kochrezept

Flächen bestimmen:

1. **Intervall bestimmen**: Auf welchem Intervall soll die Fläche bestimmt werden? Sind keine festen Grenzen gegeben, so müssen beispielsweise noch Nullstellen einer Funktion berechnet werden.

2. **Obere und untere Schranke bestimmen**: Was beschränkt die Fläche nach oben und was nach unten? Das kann zum Beispiel eine Funktion oder die x-Achse sein. Wechselt eine der beiden Schranken auf dem Intervall, so berechne diese Wechselstellen und unterteile das Integral in kleinere Integrale, sodass die Schranken immer eindeutig sind.

3. **Integrale berechnen**: Berechne die Integrale. Ist die Fläche nach oben und unten jeweils durch eine Funktion beschränkt, so ziehe die Fläche unter der unteren Schranke von der Fläche unter der oberen Schranke ab.

Graphen und Funktionen analysieren

In diesem Abschnitt:

- Symmetrie von Graphen
- gebrochenrationale Funktionen: Polstellen, Asymptoten
- Funktionen erkennen und zeichnen

6.0.1 Punktsymmetrie.
In der Regel betrachtet man in der Schule nur die Punktsymmetrie zum Ursprung (also zu $(0|0)$).
Eine Funktion heißt *punktsymmetrisch zum Ursprung*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt. Diesen Zusammenhang kann man graphisch leicht nachvollziehen.

6.0.2 Achsensymmetrie.
In der Regel betrachtet man die Achsensymmetrie zur y-Achse.
Eine Funktion heißt *achsensymmetrisch zur y-Achse*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle x gilt.

CAS:

Calculator:
$f(x) := \sim$
$f(x) = -f(-x) \rightsquigarrow$ *true*
$\Rightarrow$ **punktsymmetrisch**
$f(x) = f(-x) \rightsquigarrow$ *true*
$\Rightarrow$ **achsensymmetrisch**

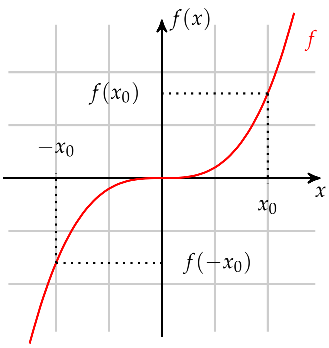

Abbildung 6.1: Veranschaulichung: Punktsymmetrie zum Ursprung

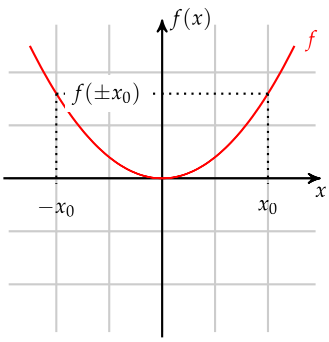

Abbildung 6.2: Veranschaulichung: Achsensymmetrie zur y-Achse

6.1 gebrochenrationale Funktionen

6.1.1 ganzrationale vs. gebrochenrationale Funktionen.

- **ganzrationale Funktion**: Eine ganzrationale Funktion ist eine Funktion, bei der der Funktionsterm umgeformt werden kann zu

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

  Dies ist bei allen Funktionstermen, die durch endlich viele Additionen, Substraktionen und Multiplikationen (keine Divisionen!) entstehen, der Fall.

- **gebrochenrationale Funktion**: Eine gebrochenrationale Funktion kann in folgende Form gebracht werden:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

  wobei $g(x)$ und $h(x)$ ganzrationale Funktionen sind.

6.1.2 Teilen durch Null.
Teilt man eine Zahl durch Null, so ist kein Ergebnis definiert. Nahe dieser Teilung durch Null können komische Dinge passieren, weswegen der Grenzwert untersucht werden muss.

6.1.3 Polstelle, senkrechte Asymptote.
x_0 ist eine Polstelle der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, wenn $h(x_0) = 0$ ist. Das bedeutet, dass an einer Polstelle $f(x)$ nicht definiert ist. Wird die Funktion für Werte in der Nähe der Polstelle sehr groß/klein, so hat die Funktion dort eine *senkrechte Asymptote*.

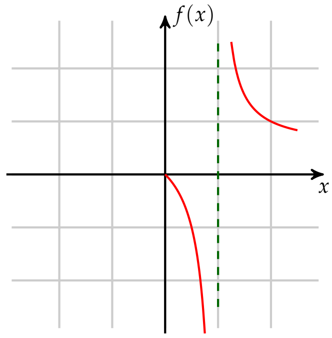

Abbildung 6.3: $f(x) = \frac{x}{x-1}$ hat eine Polstelle bei $x = 1$, da $1 - 1 = 0$.

6.1.4 Verhalten für $x \to \pm\infty$ - waagerechte Asymptote.
Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x^2-2}{(x+3)(x-5)}$. Wie verhält sich diese Funktion für $x \to \pm\infty$? Wir wenden folgende Schritte an:

1. Je nach Funktionsterm müssen wir zuerst die Klammern durch Ausmultiplizieren auflösen: $f(x) = \frac{x^2-2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x^2-2}{x^2-5x+3x-15} = \frac{x^2-2}{x^2-2x-15}$

2. Wir multiplizieren den Bruch mit $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ (das verändert nichts, da wir den Bruch ja mit 1 multiplizieren). Dadurch werden die Potenzen von x in Zähler und Nenner um 1 kleiner.

3. Wir wiederholen Schritt 2 so oft, bis **entweder** in Zähler **oder** Nenner x steht — oder in keinem der beiden: $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-2x-15} = \frac{x-\frac{2}{x}}{x-2-\frac{15}{x}} = \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}$

4. Terme der Form $\frac{1}{x^n}$ gehen für beliebige n gegen 0 und können deswegen vernachlässigt werden: $f(x) = \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}} \approx \frac{1-0}{1-0-0} = 1$. Wir erhalten den Grenzwert der Funktion für $x \to \pm\infty$. Dieser Grenzwert ist die waagerechte Asymptote dieser Funktion.

6.1.5 Verhalten für $x \to \pm\infty$ - schiefe Asymptote.
Bleibt beim Suchen nach einer waagerechten Asymptote ein x in entweder Zähler oder Nenner übrig, so geht die Funktion für $x \to \pm\infty$ gegen ∞, $-\infty$ (je nach Vorzeichen von x) oder 0:

- x **bleibt im Zähler übrig.** Bleibt nach dem letzten Schritt der Suche nach einer waagerechten Asymptote ein Term wie $\frac{x-2}{2}$ übrig, so geht $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ gegen ∞ oder $-\infty$ (je nach Vorzeichen von x, hier gegen ∞).

- x **bleibt im Nenner übrig.** Hier geht $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ gegen 0.

Der übriggebliebene Term ist die *schiefe Asymptote* der Funktion.

6.2 Besondere Funktionen

Viele Funktionen sind weder rational noch gebrochenrational, zum Beispiel $f(x) = e^x$.

6.2.1 Polstellen, senkrechte Asymptoten.
Polstellen/senkrechte Asymptoten werden genau wie bei gebrochenrationalen Funktionen analysiert.

6.2.2 Verhalten für $x \to \pm\infty$.

- **Nicht-zusammengesetzte Funktion.** Hier sind nur Variationen von $f(x) = e^x$ relevant. Ist eine Funktion wie $f(x) = -e^{-x} + 3$ zu analysieren, so geht man wie folgt vor:

  1. Gehe von der Basisfunktion aus, also e^x. Das Verhalten für $x \to \pm\infty$ ist im Kapitel zur Exponentialfunktion nachzulesen.
  2. Füge Schritt für Schritt eine Rechenoperation zu e^x hinzu und behalte dabei stets ein Bild vom Graphen der aktuellen Funktion im Kopf (oder am besten auf Papier). Am Ende kannst du das Verhalten der Funktion einfach vom Graphen ablesen.

- **Zusammengesetzte Funktion.** Hier werden in der Regel nur einfache Funktionen behandelt, beispielsweise $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$. Man muss sich nur merken, dass Varianten von e^x immer schneller gegen ihren Grenzwert gehen als x^n-Varianten. Das bedeutet, dass $x^{1000}e^{-x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 geht. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ geht also für $x \to \infty$ gegen ∞.

Kochrezept

Funktion zeichnen.

1. Bestimme die erste und zweite Ableitung der Funktion.
2. Ermittle möglichst viele Eigenschaften der Funktion:
   - Nullstellen
   - Extrempunkte
   - Wendepunkte
   - Asymptoten
3. Zeichne die gefundenen Stellen und Punkte in ein Koordinatensystem ein.
4. Skizziere den Graphen der Funktion. Sollte es in einem Intervall unklar sein, wo der Graph verläuft, dann berechne einen Funktionswert in diesem Intervall.

Kochrezept

Funktion erkennen.

1. Von welchem Funktionstyp ist der Graph?
   - **Trigonometrische Funktion**:
     Ansatz: $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$
   - **Exponentialfunktion**:
     Ansatz: $f(x) = \pm a \cdot e^{\pm x - b} + c$
   - **Normale Funktion**: Welchen Grad könnte die Funktion haben? Ist beispielsweise der Grad 3, so setze an: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Stelle außerdem schonmal die erste und zweite Ableitung allgemein auf (hier also $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$).
2. Welche Informationen sind in der Grafik enthalten?
   - **Trigonometrische Funktion**: Verschiebung, Periode, Amplitude
   - **Exponentialfunktion**: Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ liefern Vorzeichen von a und x sowie die Verschiebung. Betrachtung von $f(0)$ und $f(1)$ der *unverschobenen Funktion* liefern a.
   - **Normale Funktion**: Finde möglichst viele charakteristische Stellen der Funktion (Stellen, an denen der Funktionswert bekannt ist (beispielsweise $f(0)$), Extremstellen, Wendestellen, Nullstellen,...). Liegt zum Beispiel in x_0 eine Wendestelle vor, so ist $f''(x_0) = 6ax + 2b = 0$. Wir erhalten so verschiedene Gleichungen, die wir zu einem **LGS** zusammenfassen.
3. Bestimmen des Funktionsterms
   - **Trigonometrische Funktion**: Einsetzen der gefundenen Eigenschaften in den Ansatz (zuerst Verschiebung!) liefert den Funktionsterm.
   - **Exponentialfunktion**: Einsetzen der gefundenen Eigenschaften in den Ansatz liefert den Funktionsterm.
   - **Normale Funktion**: Lösen des aufgestellten LGS wie im Abschnitt zu LGS beschrieben liefert die Parameter für den Ansatz. Durch Einsetzen erhält man den Funktionsterm.
4. **Stimmt das Ergebnis?** Testen, ob für bestimmte x-Werte der Wert des Funktionsterms mit dem Wert des Graphen übereinstimmt.

Wachstum

In diesem Abschnitt:

- exponentielles und beschränktes Wachstum

7.1 Exponentielles Wachstum

Etwas wächst *exponentiell*, wenn es von einem zum nächsten Schritt um einen bestimmten Faktor wächst:

$$f(x+1) = b \cdot f(x),$$

Wir modellieren einen exponentiellen Wachstumsprozess mit einer *Exponentialfunktion*.

7.1.1 Startwert.
Der *Startwert* gibt an, welchen Wert der Wachstumsprozess am Anfang, also in $f(0)$ hat. Es ist $e^0 = 1$, also ist $a \cdot e^0 = k \cdot 1 = a$. Also hat die Funktion $f(x) = a \cdot e^x$ den Startwert a.

7.1.2 Wachstumskonstante.
Die *Wachstumskonstante* gibt an, wie schnell das exponentielle Wachstum ist. Wie zur Änderung der Periode bei trigonometrischen Funktionen bekommt auch hier x einen Faktor, der für eine Streckung/Stauchung des Graphen sorgt: $f(x) = a \cdot e^{kx}$ hat den Startwert a und die Wachstumskonstante k.

7.1.3 Bedeutung der Wachstumskonstante.
Wir haben gesagt, dass bei einem exponentiellen Wachstumsprozess $f(x+1) = b \cdot f(x)$ ist, d.h.

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) \cdot b \\ f(x+2) &= f(x+1) \cdot b = f(x) \cdot b^2 \\ f(x+3) &= f(x+2) \cdot b = f(x) \cdot b^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Also ist $f(x) = f(0) \cdot b^x = f(0) \cdot e^{\ln(b)x}$ mit Startwert $f(0)$.

7.1.4 Bestimmen des Wachstumsfaktors.
Ist eine Datenmenge gegeben, so kann man jeweils den Wachstumsfaktor von einem Schritt zum anderen bestimmen:

$$f(x+1) = b \cdot f(x) \Leftrightarrow b = \frac{f(x+1)}{f(x)},$$

7.1.5 Bestimmen des Startwerts.
Ist eine Datenmenge gegeben, so ist der Startwert der Datenwert an der Nullstelle.

7.1.6 Verdoppelungs-/Halbwertszeit.

- **Verdoppelungszeit.** Die Verdoppelungszeit ist die Zeit t_V, für die $f(t_V) = 2 \cdot f(0)$ gilt. Man erhält sie durch Auflösen dieser Gleichung nach t_V.

- **Halbwertszeit.** Die Halbwertszeit ist die Zeit t_H, für die $f(t_H) = \frac{1}{2} \cdot f(0)$ gilt. Man erhält sie durch Auflösen dieser Gleichung nach t_H.

7.2 Beschränktes Wachstum

Wächst etwas, aber mit zunehmender Zeit immer langsamer, so liegt *beschränktes Wachstum* vor. Wichtig ist hier vor allem die

7.2.1 Schranke.
Ein beschränkt wachsender Bestand ist nach oben durch eine *Schranke* S beschränkt.

7.2.2 Beschränktes Wachstum.
Ein beschränktes Wachstum kann beschrieben werden durch $f(x) = S - ce^{-kx}$. S ist die Schranke, $c = S - f(0)$ ist der angepasste Startwert und $k = \ln(b)$ der angepasste Wachstumsfaktor. Beim beschränkten Wachstum ist $0 < a < 1$.
Die Differentialgleichung für das beschränkte Wachstum ist $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$.

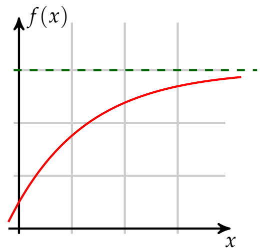

Abbildung 7.1: Der Graph von $f(x) = 3 - 2{,}5e^{-0{,}7x}$.

7.2.3 Verdoppelungs-/Halbwertszeit.
Gilt genauso wie beim exponentiellen Wachstum auch.

7.2.4 Modellierung einer Wachstumsfunktion bei gegebenen Daten.
$f(x) = S - ce^{-kx}$ mit

1. **Schranke**: Diese muss man häufig schätzen. Sind die Werte am Ende der Tabelle zum Beispiel $298{,}5 - 299{,}3 - 299{,}6 - 299{,}7 - \ldots$, so ist 300 wahrscheinlich die gesuchte obere Schranke.

2. **c**: c erhält man, in dem man den Startwert von S abzieht: $c = S - f(0)$.

3. **k**: k erhält man, in dem man (wie beim exponentiellen Wachstum) b berechnet. Dafür berechnet man $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ für jedes angegebene x und erhält so die durchschnittliche Wachstumskonstante b. Dann ist $k = -\ln(b)$.

Kochrezept

Modellierung eines exponentiellen Wachstums.
$f(x) = f(0) \cdot e^{\ln(b)x}$ mit

- Startwert $f(0)$,
- Wachstum pro Schritt b.

Modellierung eines beschränkten Wachstums.
$f(x) = S - ce^{-kx}$ mit

- Schranke S
- "Startwert" $c = S - f(0)$
- angepasster Wachstumsfaktor $k = -\ln(b)$ (b berechnet sich wie beim exponentiellen Wachstum)

Teil III

Lineare Algebra

Lineare Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt:

- Was sind lineare Gleichungssysteme?
- Umformen und Lösen von LGS
- Fehlerquellen

1.0.1 Lineare Gleichungssysteme.
In diesem Kapitel betrachten wir Gleichungen der Art

(A) $$2x \quad -3y \quad +2z = 0$$

Solche Gleichungen nennt man *linear*, wenn Variablen nur als x^1 oder x, aber nicht als x^2, $\sqrt{x}$ oder x^y vorkommen.
Aus ihr erhält man für die drei Variablen keine eindeutige Lösung wie $x = 3, y = 2$ und $z = 275$ - dafür müsste pro Variable eine Gleichung vorhanden sein. Fügen wir nun zwei weitere Gleichungen hinzu, so erhält man beispielsweise:

$$\begin{array}{lrrrl} \text{(I)} & 2x & -3y & +2z & = 0 \\ \text{(II)} & 5x & +6y & -2z & = 5 \\ \text{(III)} & -12x & +3y & -z & = 0 \end{array}$$

Die verwendeten Variablen sollen natürlich in allen drei Gleichungen denselben Wert haben. Man spricht hierbei von einem *linearen Gleichungssystem* oder *LGS*.

CAS:

Calculator:
Menü › Algebra › GLS lösen › GLS lösen › Anz. d. Gleichungen und Variablen eingeben

1.1 Rechnen mit LGS

Natürlich möchte man gerne wissen, welchen Wert die Variablen haben, dazu muss man es also *lösen*:

1.1.1 Stufenform.
Sehr einfach zu lösen sind LGS, die *Stufenform* haben, also zum Beispiel:

$$\begin{array}{lrrr} \text{(I)} & 2x & -3y + & 7z = 3 \\ \text{(II)} & & 5y & -2z = 5 \\ \text{(III)} & & & -z = 0 \end{array}$$

In Stufenform kann man eine Variable sofort ablesen, die anderen ergeben sich dann durch Einsetzen.
Im LGS oben würde man zum Beispiel sehen, dass $z = 0$ sein muss.
In Gleichung II setzt man das ein und formt zu $y = 1$ um. Diese zwei bekannten Zahlen setzt man dann in die erste Gleichung ein und es ergibt sich $x = 3$.

1.1.2 Erlaubte Rechnungen.
Um ein LGS in Stufenform zu bringen, hat man folgende Möglichkeiten:

- **Multiplikation mit Zahlen**
  In einer Gleichung werden alle Terme mit einer Zahl multipliziert. Diese Zahl darf nicht die Null sein! (siehe „1.1.3 Fehlerquellen“)

- **Addition/Subraktion von Gleichungen**
  Zu einer Gleichung wird eine der anderen Gleichungen addiert oder subtrahiert.

- **Vertauschen von Gleichungen**
  Aus Schönheitsgründen kann man die Reihenfolge der Gleichungen ändern.

Diese Umformungen sind recht einfach, daher gibt es auch nur wenige gefährliche Fehler, die man beim Lösen machen kann.

1.1.3 Fehlerquellen.
Es ist wichtig, beim Umformen keine Informationen zu verhäckseln!
Schlechte Ideen sind:

- **Multiplikation mit Null:** Eine Gleichung eines linearen Gleichungssystems darf niemals mit 0 multipliziert werden, da dabei sämtliche Informationen der Gleichung verloren gehen würden. Man würde effektiv ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen in eins mit zwei verwandeln, doch damit kann man nicht mehr nach allen Variablen auflösen.

- **Verlieren einer Gleichung:** Man muss aufpassen, durch Umformungsschritte oder Gleichsetzungen keine Variable komplett zu verlieren, da damit eine eindeutige Lösung verloren gehen kann.

- **Ungeschicktes Addieren von Gleichungen:** Wenn man sauber rechnet, macht man immer nur einen Umformungsschritt und schreibt dann das ganze neue LGS einmal auf. Mit den neuen Gleichungen wird dann weitergerechnet.

Beim Rechnen hat natürlich niemand Zeit, so viel zu schreiben, deswegen muss man darauf achten, keine Gleichung zu verwenden die in einem Schritt vorher verändert wurde.

Einfache Lösung: Die Gleichungen nach jeder Rechnung umbenennen (Ia $\rightarrow$ Ib) und im Kopf behalten, dass man ab dann nichts mehr mit Ia rechnen darf.

1.1.4 Beispiel. Ein vorgegebenes LGS soll gelöst werden. Eine Methode die auf jeden Fall zu einem Ergebnis führt ist die folgende:

Zuerst wird der x-Koeffizient in Ia zu einer Eins gemacht:

$$\begin{array}{llllll}
\text{(Ia)} & 2x & -y\ + & 4z & = 5 & \mid \text{Ib} = \text{Ia}\cdot\frac{1}{2} \\
\text{(IIa)} & 5x\ + & 2y & -10z & = 7 & \\
\text{(IIIa)} & 12x & -9y & -8z & = 11 &
\end{array}$$

Damit werden die anderen x-Terme aus der Gleichung subtrahiert:

$$\begin{array}{llllll}
\text{(Ib)} & x & -\frac{1}{2}y\ + & 2z & = \frac{5}{2} & \\
\text{(IIa)} & 5x\ + & 2y & -10z & = 7 & \mid \text{IIb} = \text{IIa}-5\cdot\text{Ib} \\
\text{(IIIa)} & 12x & -9y & -8z & = 11 & \mid \text{IIIb} = \text{IIIa}-12\cdot\text{Ib}
\end{array}$$

Beachte, dass wir hier zwei Dinge gleichzeitig tun. Fehlergefahr!

Im Folgenden werden die letzten beiden Gleichungen getauscht und ein y-Koeffizient zu einer Eins gemacht

$$\begin{array}{llllll}
\text{(Ib)} & x & -\frac{1}{2}y\ + & 2z & = \frac{5}{2} & \\
\text{(IIb)} & & \frac{9}{2}y & -20z & = -\frac{11}{2} & \mid \text{IIc} = -\frac{1}{3}\cdot\text{IIIb} \\
\text{(IIIb)} & & -3y & -32z & = -19 & \mid \text{IIIc} = \text{IIb}
\end{array}$$

Mit dieser Gleichung kann man jetzt das andere y schön entfernen

$$\begin{array}{llllll}
\text{(Ib)} & x & -\frac{1}{2}y\ + & 2z & = \frac{5}{2} & \\
\text{(IIc)} & & y\ + & \frac{32}{3}z & = \frac{19}{3} & \\
\text{(IIIc)} & & \frac{9}{2}y & -20z & = -\frac{11}{2} & \mid \text{IIId} = \text{IIIc} - \frac{9}{2}\cdot \text{IIc}
\end{array}$$

Hier kann man z einfach ablesen (teile IIId durch -86).

$$\begin{array}{lllll}
\text{(Ib)} & x & -\frac{1}{2}y\ + & 2z & = \frac{5}{2} \\
\text{(IIc)} & & y\ + & \frac{32}{3}z & = \frac{19}{3} \\
\text{(IIId)} & & & -68z & = -34
\end{array}$$

Also ist $z = \frac{1}{2}$, damit liefert Gleichung IIc:

$$y + \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{19}{3}$$

Es folgt: $y = 1$, damit liefert Gleichung Ib:

$$x - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2}$$

Damit ist $x = 2$ und die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Matrixschreibweise

In diesem Abschnitt:

- LGS als Matrix darstellen
- LGS-Umformungen bei der Matrixschreibweise

2.0.1 Matrixschreibweise.
Eine Methode, die viele Schreibarbeit zu umgehen, ist die sogenannte Matrixschreibweise.

$$\begin{array}{lrrrl} \text{(I)} & x & +2y & +3z & = 4 \\ \text{(II)} & 5x & +6y & +7z & = 8 \\ \text{(III)} & x & +2y & +4z & = 5 \end{array}$$

Dieses LGS kann man kurz schreiben als:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Man lässt also die Koeffizienten und das Ergebnis an den gleichen Stellen stehen und schreibt dazwischen die Variablen als Vektor.
Wenn man diese Matrix wieder als LGS schreiben möchte, muss man bedenken, dass die Variablen nicht zu den Zeilen gehören, sondern dass man den Vektor wieder kippen muss.

2.0.2 Erweiterte Matrixschreibweise.
Noch schöner zum Rechnen ist die erweiterte Matrixdarstellung, bei der die Variablen einfach weggelassen werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

Die erlaubten Umformungen kann man übersichtlich in den einzelnen Zeilen durchführen.

2.1 Lösungen

2.1.1 Lösungsmenge.

Löst man ein LGS, dann gibt man das Ergebnis als *Menge* an. Man schreibt dazu alle Werte als Vektor in geschweifte Klammern und nennt das ganze *Lösungsmenge L*:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

2.1.2 Nicht-eindeutige Lösungen.
Die Lösung eines LGS muss nicht immer eindeutig sein, auch unendlich viele oder gar keine Lösungen können vorkommen.
Betrachtet man zum Beispiel die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & x + y &= 1 \\ &\text{(II)} & x + y &= 0 \end{aligned}$$

dann gibt es keine Lösungen. Man sagt die Lösungsmenge ist *leer* und schreibt $L = \{\}$.
Ein Beispiel für ein LGS mit unendlich vielen Lösungen ist

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & x - y &= 0 \\ &\text{(II)} & 2x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist $x = y$, also gibt es unendlich viele x und y, die das System lösen. Man nennt die Lösungsmenge *unendlich* und schreibt sie als

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot k, \text{mit } k \in \mathbb{R} \right\}$$

Im Teil „Analytische Geometrie“ werden wir zeigen, was dies bedeutet und wie man diese Menge aufschreibt.
Wenn man eine eindeutige Lösung sucht, dann braucht man mindestens soviele Gleichungen wie man Variablen hat.

2.1.3 Stufenform: Keine Lösung.
Ist ein LGS nicht lösbar, kann man das einfach an der Stufenform erkennen.
Hat ein LGS keine Lösung, dann liegt das daran, dass zwei Gleichungen gegensätzliche Dinge aussagen:

$$\begin{aligned} &\text{(Ia)} & y\ +25z &= 10 \\ &\text{(IIa)} & y\ +25z &= 99 \end{aligned}$$

als Matrix geschrieben ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 25 & 10 \\ 1 & 25 & 99 \end{array}\right) \text{ also folgt } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 89 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile entspricht der Gleichung

$$0 \cdot y + 0 \cdot z = 89$$

Die Gleichung ist offensichtlich falsch, also gibt es keine Lösung.

2.1.4 Stufenform: Unendliche Lösungen.
Falls beim Lösen eines LGS weniger Gleichungen als Variablen übrig bleiben, kann man das LGS nicht mehr eindeutig lösen. So zum Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right) \text{ - umgeformt: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung, $0 = 0$ stimmt zwar immer, bringt uns aber nichts. Uns bleiben also nur zwei Gleichungen für drei Variablen:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 5 \\ y + z &= 4 \end{aligned}$$

Dieses Problem ist zwar nicht eindeutig lösbar, aber sobald man z kennt, kann man x und y problemlos bestimmen - das kann man aber ausnutzen:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 2z \\ y &= 4 - z \end{aligned}$$

Für irgendwelche z kann man jetzt also x und y finden. Um die Lösung schön aufzuschreiben, führt man jetzt ein $t = z$ ein:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 2t \\ y &= 4 - t \\ z &= t \end{aligned}$$

Jetzt kann man die Lösungsmenge einfach mit unbekanntem t aufschreiben

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2t \\ 4 - t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Teil IV

Analytische Geometrie

Rechnen mit Vektoren

In diesem Abschnitt:

- Rechengesetze und Operationen

1.1 Grundlagen

Ein Vektor ist eine mathematische Größe, die durch einen Pfeil dargestellt wird.

1.1.1 Der Ortsvektor.
In drei Dimensionen schreibt man einen Punkt als Abstand zum Ursprung: $P = (1|2|3)$ bedeutet: Vom Ursprung aus liegt der Punkt eine Einheit in x- Richtung, zwei in y- und drei in z-Richtung.
Genauso kann man einen Punkt natürlich auch beschreiben, indem man den Vektor vom Ursprung zu dem Punkt schreibt. Das geht genau gleich, nur schreibt man die Zahlen (oder Koeffizienten) jetzt übereinander:
$\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Wieder bedeuten die Koeffizienten das gleiche: „Gehe vom Ursprung eine Längeneinheit in x-Richtung“ und so weiter.

CAS:

Calculator:
- Ctrl + (⇝ [ ]
- erste Zahl eintragen
- ⏎ drücken → nächste Zahl

1.1.2 Rechengesetze.
Bei Multiplikation mit dem Faktor r wird der Pfeil einfach länger oder kürzer. Bei Addition von zwei Vektoren ergibt sich der Pfeil durchs Hintereinanderzeichnen der zwei Anfangspfeile.

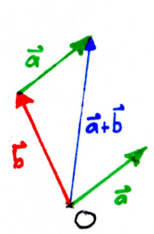

Abbildung 1.1: Summe zweier Vektoren

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

2. $r \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$

3. $r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

1.1.3 Strecken und Längen.
Die Strecke zwischen zwei Punkten $\overrightarrow{PQ}$ bekommt man, indem man erst von P rückwärts zum Ursprung geht ($-\vec{p}$) und dann (mit $\vec{q}$) vom Ursprung zu Q:

$$\overrightarrow{PQ} = -\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Der Betrag einer Stecke oder die Länge eines Vektors ergeben sich ähnlich zum Satz des Pythagoras:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

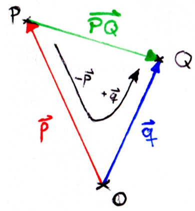

Abbildung 1.2: Strecke von P nach Q

CAS:

Calculator:
Menü › Mat. und Vek › Normen › Norm
$\rightsquigarrow$ NORM$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightsquigarrow 1$

1.2 Produkte

Das Multiplizieren von Vektoren ist ein bisschen komplizierter als bei normalen Zahlen, durch Vektoren zu Teilen ist sogar gar nicht möglich.

1.2.1 Skalarprodukt.
Eine hilfreiche Methode um Winkel zu bestimmen ist das sogenannte *Skalarprodukt*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + (a_3 \cdot b_3) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

CAS:

Calculator:
Menü › Mat. und Vek › Vek. › SKP
$\rightsquigarrow$ DOTP$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightsquigarrow 3$

Hier ist φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren. Das Ergebnis des Skalarproduktes ist ein Skalar, also eine Zahl.
Eine sinnvolle Anwendung ist die Suche nach rechten Winkeln:
Wegen des Cosinus ist:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90°$$

1.2.2 Kreuzprodukt.
Beim *Kreuzprodukt* aus zwei Vektoren ergibt sich ein neuer Vektor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

CAS:

Calculator:
Menü › Mat. und Vek › Vek. › Kreuzprod
$\rightsquigarrow$ CROSSP$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dieser neue Vektor steht senkrecht auf den anderen beiden und hat die Länge:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

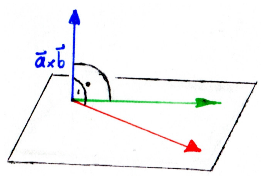

Abbildung 1.3: Kreuzprodukt

1.2.3 Lineare Abhängigkeit.

Durch Verlängern und Verkürzen eines Vektors $\vec{a}$ kann man eine ganze Gerade erreichen:

$$\text{g: } \vec{x} = k \cdot \vec{a}$$

Nimmt man einen zweiten Vektor $\vec{b}$ dazu, gibt es zwei Möglichkeiten:

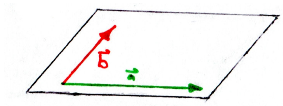

Abbildung 1.4: Zwei linear unabhängige Vektoren spannen eine Ebene auf

- **$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel:**
  Man nennt die beiden *linear abhängig*, weil man immer noch nur die Gerade erreichen kann:

  $$\text{g: } \vec{x} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{a}$$

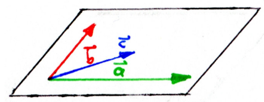

Abbildung 1.5: Drei linear abhängige Vektoren spannen keinen Raum, sondern nur eine Ebene oder Gerade auf

- **$\vec{a}$ und $\vec{b}$ laufen in verschiedene Richtungen:**
  Man nennt die beiden jetzt *linear unabhängig*, weil man plötzlich eine ganze Ebene erreichen kann:

  $$\text{E: } \vec{x} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$$

Als nächstes kann man noch einen dritten Vektor dazunehmen. Man nennt die drei dann *linear unabhängig*, wenn man alle Punkte im ganzen Raum erreichen kann und *linear abhängig*, falls man nur eine Ebene oder Gerade erreicht.

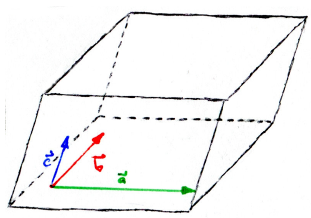

Abbildung 1.6: Drei linear unabhängige Vektoren spannen den gesamten Raum auf

Objekte im Raum

In diesem Abschnitt:

- Geraden
- Ebenen: Parameter-, Normalen-, Koordinatendarstellung
- Darstellungsformen untereinander umformen

2.0.1 Geraden.
Eine Gerade g die durch den Punkt P in Richtung $\vec{u}$ läuft kann geschrieben werden als:

$$\text{g: } \vec{x} = \vec{p} + \text{r} \cdot \vec{u}, \text{ mit r} \in \mathbb{R}$$

Die Vorstellung dazu ist, dass man alle Punkte $\vec{x}$ auf der Geraden trifft, indem man von P aus den Vektor $\vec{u}$ verlängert oder verkürzt.

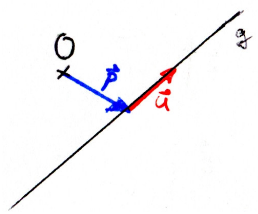

Abbildung 2.1: Gerade, Richtung $\vec{u}$, stützt sich auf $\vec{p}$

2.0.2 Ebenen - Parameterdarstellung.
Genauso kann man auch Ebenen darstellen, nur dass man von P aus in zwei Richtungen gehen kann:

$$\text{E: } \vec{x} = \vec{p} + \text{r} \cdot \vec{u} + \text{s} \cdot \vec{v}, \text{ mit r, s} \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ nennt man *Spannvektoren* der Ebene E.

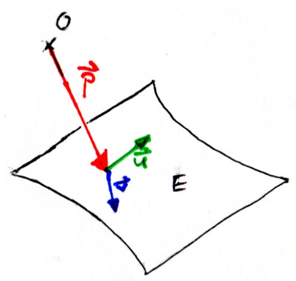

Abbildung 2.2: Ebene, aufgespannt durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$, stützt sich auf $\vec{p}$

2.0.3 Ebenen - Normalendarstellung.
Zu jeder Ebene gehört ein Vektor, der senkrecht darauf steht.
Der sogenannte *Normalenvektor* steht dann auch senkrecht auf allen Linien, die in der Ebene liegen.
Eine Ebene E beschreibt man damit wie folgt:

$$\text{E: } (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

$\vec{x} - \vec{p}$ ist die Verbindung $\overrightarrow{PX}$ zwischen X und der Stützstelle P. Diese Verbindung liegt in der Ebene, und steht damit senkrecht auf $\vec{n}$. Das Skalarprodukt ist Null.

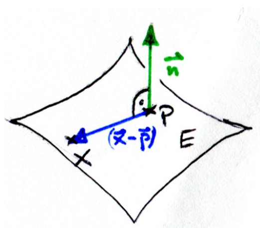

Abbildung 2.3: Ebene senkrecht zu $\vec{n}$, ausgehend von Stützpunkt P

2.0.4 Ebenen - Koordinatendarstellung.
Wenn man die Normalendarstellung ausmultipliziert, ergibt sich folgende Gleichung für E:

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$$
$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = c$$

$\vec{p} \cdot \vec{n}$ lässt sich ausrechnen und ergibt die Zahl c.
Diese Darstellung ist nicht so offensichtlich aus Vektoren aufgebaut, aber sehr hilfreich um einige Aufgaben auszurechnen.

2.0.5 Ebenen - HESSE'sche Normalenform.
Die Gleichungen der Normalen- und Koordinatendarstellung können durch den Betrag des Normalenvektors geteilt werden:

$$\text{E: } \frac{(n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3)}{|\vec{n}|} - \frac{c}{|\vec{n}|} = 0$$

$$\text{E: } \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = 0$$

Die Darstellung wird im nächsten Kapitel sehr praktisch zur Abstandsbestimmung sein.

2.1 Ebenengleichungen aus Punkten

Gesucht werden im Folgenden die Ebenengleichungen wenn drei Punkte A, B, C beziehungsweise $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ im Raum gegeben sind.

2.1.1 Stützvektor.
Der Stützvektor muss einfach irgendeinen Punkt auf der Ebene treffen, also kann man zum Beispiel $\vec{a}$ aussuchen.

2.1.2 Spannvektoren.
Die Spannvektoren sind irgendwelche zwei Vektoren, die in der Ebene oder parallel dazu laufen. Wir haben zur Auswahl: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$.
Wichtig: Lineare Unabhängigkeit: Wenn nur zwei Punkte gegeben sind, oder die drei Punkte auf einer Geraden liegen haben wir nicht genügend verschiedene Vektoren um eine Ebene zu basteln. Man erkennt das daran, dass die Vektoren in die gleiche Richtung zeigen, nur verschieden lang sind (Das Kreuzprodukt ist dann Null).

2.1.3 Normalenvektor.
Kennt man schon zwei verschiedene Spannvektoren, bekommt man den Normalenvektor über deren Kreuzprodukt.
Man kann stattdessen aber auch die Koordinatengleichung für Ebenen benutzen:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$$

Setzt man jetzt zum Beispiel die Punkte $A = (1|1|0), B = (1|0|1), C = (0|0|1)$ für $\vec{x}$ ein, ergeben sich die Gleichungen:

$$n_1 + n_2 = b$$
$$n_1 + n_3 = b$$
$$n_2 + n_3 = b$$
$$\text{Es folgt: } n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{2} \cdot b$$

Man wählt dann b irgendwie und hat nicht nur den Normalenvektor, sondern gleich die dazu passende Koordinatengleichung.

So konstruiert man die Koordinatengleichung, für die beiden anderen Gleichungen muss man nur die entsprechenden Vektoren an der richtigen Stelle einsetzen.

2.2 Ebenengleichungen aus Ebenengleichungen

2.2.1 Parameter- zu Normalenform.
Eine Parameterform ist gegeben:

$$\text{E: } \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}$$

Für die Normalenform brauchen wir einen Normalenvektor $\vec{n}$, der senkrecht auf den beiden Spannvektoren steht: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
Die Spannvektoren sind bekannt, also kann man die Gleichungen ausmultiplizieren und bekommt ein LGS für n_1, n_2 und n_3. Zwei Gleichungen für drei Variablen liefern kein eindeutiges Ergebnis, also muss man am Schluss eine der drei Variablen selbst festlegen.
Stattdessen kann man auch einfach $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n}$ ausrechnen.
Der Stützvektor kann gleich bleiben.

2.2.2 Koordinaten- zu Normalenform.
Die Vorfaktoren vor den x-Werten sind die Komponenten des Normalenvektors.
Um einen Stützvektor zu finden setzt man in der Koordinatenform ein paar x-Werte zu irgendeiner festen Zahl, so dass man einen Punkt ablesen kann.

$$\begin{aligned} x_1 + 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 &= 5 \\ \text{Setze } x_2 = 2 \text{ und } x_3 = 0\text{: } x_1 + 4 &= 5 \\ \text{Es ergibt sich: } \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2.3 Normalen- zu Koordinatenform.
Das Skalarprodukt wird ausmultipliziert (siehe 2.0.4).

2.2.4 Koordinaten- zu Parameterdarstellung.
Einen Stützvektor findet man wie in 2.2.2 durch Einsetzen.
Um Spannvektoren zu bekommen, suchen wir alle Vektoren $\vec{v}$, die auf $\vec{n}$ senkrecht stehen:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &= 0 \\ n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Um nicht parallele Spannvektoren zu bekommen setzen wir oben zum Beispiel einmal $v_2 = 0, v_3 = 1$ und einmal $v_2 = 1, v_3 = 0$, lösen damit die Gleichung und erhalten zwei Spannvektoren.

Lagebeziehungen

In diesem Abschnitt:

Wie liegen zueinander:

- Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Gerade-Gerade, Gerade-Ebene
- Ebene-Ebene

3.0.1 Punktproben.
Um zu sehen ob ein Punkt auf einer Geraden oder Ebene liegt, setzt man seine Koordinaten in deren Gleichungen ein. Es ergibt sich entweder eine wahre Aussage ($0 = 0$ - Punkt liegt auf der Geraden) oder eine falsche ($10 = 10{,}5$ - Punkt liegt nicht auf der Geraden)

3.0.2 Gerade - Gerade.

$$\text{g: } \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$$
$$\text{h: } \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$$

Man sucht Punkte, die auf beiden Geraden liegen. Dazu setzt man das $\vec{x}$ der beiden gleich. Man erhält ein LGS für die beiden Parameter:

$$\vec{p} + r \cdot \vec{u} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$$

Sucht man jetzt Lösungen für r und s, kann man folgende Ergebnisse bekommen:

- ∞ **Lösungen**: Die Geraden sind *identisch*.
- **Eine Lösung**: Es gibt einen *Schnittpunkt* S. Er wird berechnet, indem man die Lösung für k oder l in die jeweilige Geradengleichung einsetzt.
- **Keine Lösung**: Die Geraden sind *parallel* wenn die Richtungsvektoren linear abhängig sind. Wenn nicht, nennt man sie *windschief*.

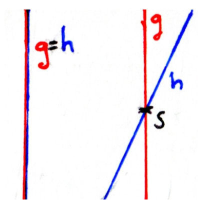

Abbildung 3.1: Sich berührende Geraden

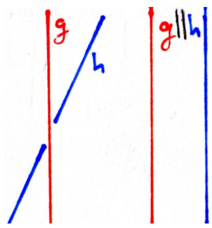

Abbildung 3.2: Sich nicht berührende Geraden

3.0.3 Gerade - Ebene.

Man setzt die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein:

$$\text{g: } \vec{x} = \vec{p} + \text{k} \cdot \vec{u}$$
$$\text{E: } n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$$

Das $\vec{x}$ aus g wird in E eingesetzt:

$$n_1(p_1 + k \cdot u_1) + n_2(p_2 + k \cdot u_2) + n_3(p_3 + k \cdot u_3) = b$$

Alles bis auf k ist bekannt. Wie oben gibt es wieder verschiedene Lösungen für k:

- **Eine Lösung** ($k = 2$): Es gibt einen *Schnittpunkt* S. Er wird berechnet, indem man die Lösung für k in die Geradengleichung einsetzt.
- **Wahre Aussage** ($1 = 1$): Die Gerade *liegt in* der Ebene.
- **Widerspruch** ($1 = 27$): Gerade und Ebene sind *parallel*.

3.0.4 Ebene - Ebene.

Man setzt die $\vec{x}$ aus den Ebenengleichungen gleich und erhält ein LGS.

- Ergibt sich ein **Widerspruch**, so sind die Ebenen parallel.
- Ergibt sich eine **unendliche Lösung**, so liefert die Lösung die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Hat man die Ebenen in Koordinaten- oder Normalenform vorliegen, so kann man auch die beiden Normalenvektoren in ein Kreuzprodukt schreiben. Das Ergebnis ist der Richtungsvektor der Schnittgeraden oder Null, falls die Ebenen parallel sind. Dann braucht man noch einen einzigen Stützpunkt, der in beiden Ebenen liegt und hat die Schnittgerade bestimmt.

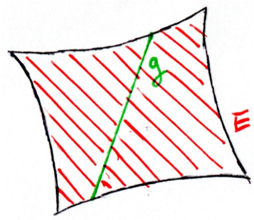

Abbildung 3.3: Gerade die in einer Ebene verläuft

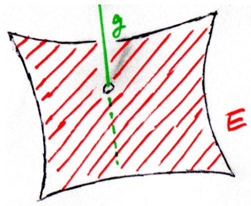

Abbildung 3.4: Gerade schneidet Ebene

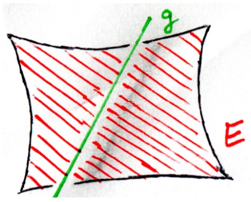

Abbildung 3.5: Gerade parallel zu Ebene

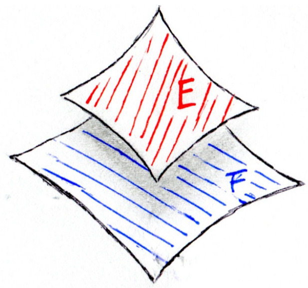

Abbildung 3.6: Parallele Ebenen

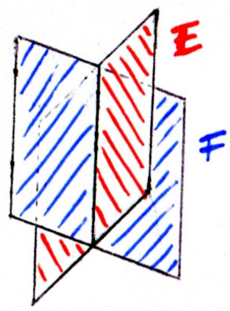

Abbildung 3.7: Ebenen mit Schnittgerade

Abstände

In diesem Abschnitt:

Abstände zwischen

- Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Gerade-Gerade, Gerade-Ebene
- Ebene-Ebene

Abstände zwischen Objekten im Raum schreibt man $d(\text{Ding}_1, \text{Ding}_2)$

4.0.1 Punkt - Punkt.
Der Abstand zweier Punkte P, Q ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$:

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + (q_3-p_3)^2}$$

4.0.2 Punkt - Gerade: Laufender Punkt.

$$\text{g: } \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$$

Der Abstand zwischen Punkt P und der Geraden g ergibt sich, indem man den Abstand zwischen P und einem beliebigen Punkt Q auf der Gerade ausrechnet. Setzt man also für Q die Geradengleichung ein, hängt $\overrightarrow{PQ}$ noch von dem Parameter r ab. Jetzt sucht man den Vektor, der senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden steht, also

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$$

Man findet ein r als Lösung der Gleichung. Damit hat man den Punkt Q mit dem kürzesten Abstand und errechnet dann $d(P,Q)$.

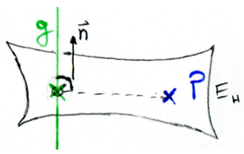

Abbildung 4.1: Hilfsebene durch P, senkrecht zu Gerade g

4.0.3 Punkt - Gerade: Hilfsebene.
Man baut sich eine Ebene E_H senkrecht zu g, die durch P geht:
Damit die Gerade senkrecht auf der Ebene steht, wählt man als Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene den Richtungsvektor der Geraden $\vec{u}$.
Damit die Ebene durch P geht, wählt man $\vec{p}$ einfach als Stützvektor.
Der Schnittpunkt zwischen Gerade und der neuen Ebene wird jetzt S genannt und kann einfach berechnet werden (siehe 3.0.3).
Der Abstand vereinfacht sich zu: $d(P,g) = d(P,S)$

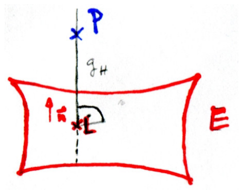

Abbildung 4.2: Lotgerade, senkrecht zur Ebene E, durch Punkt P

4.0.4 Punkt - Ebene: Lotgerade.

Man baut sich eine Gerade g_H, die durch P geht und senkrecht auf E steht:
Als Stützvektor wählen wir $\vec{p}$, dann geht die Gerade durch P.
Als Richtungsvektor wählen wir den Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}$.
Gesucht ist dann zuletzt der sogenannte *Lotfußpunkt*: Der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene. Wir nennen ihn L und finden ihn mit 3.0.3.
Der Abstand vereinfacht sich dann auf zwei Punkte: $d(P, E) = d(P, L)$

4.0.5 Punkt - Ebene: HESSEsche Normalenform.

In der HESSEschen Normalenform kann der Punkt P einfach auf der linken Seite der Gleichung eingesetzt werden, dann ergibt sich rechts der Abstand zur Ebene:

$$\frac{(n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3) - c}{|\vec{n}|} = d(P, E)$$

4.0.6 Windschiefe Geraden: Laufende Punkte.

Die beiden Geraden g und h sind windschief und wir suchen den Abstand:

$$\text{g: } \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$$
$$\text{h: } \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$$

Man nimmt zwei beliebige Punkte aus den Geradengleichungen und nennt sie zum Beispiel G aus g und H aus h.
Deren Abstandsvektor $\overrightarrow{GH}$ hängt noch von r und s ab. Der kleinste Abstand ist der, bei dem $\overrightarrow{GH}$ auf beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht steht:

$$\overrightarrow{GH} \cdot \vec{u} = 0$$
$$\overrightarrow{GH} \cdot \vec{v} = 0$$

Dieses LGS hat zwei Gleichungen und liefert uns damit r und s.
Diese beiden setzen wir einfach in $\overrightarrow{GH}$ ein und haben den Abstandsvektor.

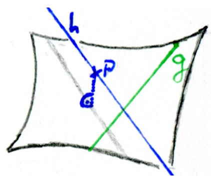

Abbildung 4.3: Hilfsebene E, parallel zu beiden Geraden, g liegt in E

4.0.7 Windschiefe Geraden: Hilfsebene.

Die beiden Geraden g und h sind windschief und wir suchen den Abstand:

$$\text{g: } \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$$
$$\text{h: } \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$$

Man konstruiert eine Ebene die parallel zu beiden Geraden liegt und die Gerade g sogar enthält:

$$\text{E}_\text{H}\text{: } \vec{x} = \vec{p} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}$$

Die Gerade h hat zur ganzen Ebene den gleichen Abstand, also nimmt man einfach einen Punkt P aus h und sucht den Abstand zur Ebene:

$$d(\text{g}, \text{h}) = d(P, \text{E})$$

4.0.8 Parallele Geraden.

Der Abstand ist entlang der gesamten Geraden gleich. Man nimmt aus einer Geraden einen beliebigen Punkt und berechnet den Abstand des Punktes zu der anderen Geraden.

4.0.9 Gerade - Ebene.

Abstände ergeben hier nur Sinn, wenn Gerade und Ebene parallel sind, weil sie sich sonst schneiden.
Man sucht aus der Geraden einfach irgendeinen Punkt raus und rechnet dann den Abstand Punkt - Ebene.

4.0.10 Ebene - Ebene.

Abstände ergeben hier nur Sinn, wenn die Ebenen parallel sind, weil sie sich sonst schneiden.
Man sucht aus einer der Ebenen einfach irgendeinen Punkt raus und rechnet dann den Abstand Punkt - Ebene.

Winkel und Spiegelungen

In diesem Abschnitt:

Winkel zwischen

- Vektoren,
- Geraden,
- Ebenen,
- Gerade und Ebene

Für die Winkel zwischen Objekten schreiben wir $\angle(\text{Ding}_1, \text{Ding}_2)$.

5.0.1 Skalarprodukt.
Aus dem Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren ergibt sich eine Winkelbeziehung:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\left(\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)\right)$$

Einfacher schreibt man oft:

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \cos\left(\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)\right)$$

5.0.2 Kreuzprodukt.
Das Kreuzprodukt funktioniert ähnlich:

$$|\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin\left(\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)\right)$$

Da das Kreuzprodukt einen Vektor liefert, muss man hier noch den Betrag ausrechnen.

5.0.3 Geraden.
Der Winkel zwischen zwei Geraden ist der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren.
Wenn sich dabei ein Winkel größer als 90° ergibt, muss man für ein sinnvolles Ergebnis diese 90° wieder abziehen. Alternativ kann man auch

$$|\vec{p} \cdot \vec{q}|$$

mit Betragsstrichen bei der Rechnung verwenden, dann ergibt sich automatisch der kleinere Winkel.

5.0.4 Ebenen.
Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist genau der Winkel zwischen ihren Normalenvektoren:

$$\angle(E_1, E_2) = \angle(n_1, n_2)$$

5.0.5 Gerade-Ebene.
Man bekommt den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene, indem man den Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene berechnet. Diesen Winkel muss man noch von 90° abziehen.
Man kann sich den zweiten Rechenschritt sparen, indem man statt eines Cosinus einen Sinus verwendet:

$$\begin{aligned}\angle(g, E) = 90° - \angle(\vec{u}_g, \vec{n}_E) &= 90° - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}_g \cdot \vec{n}_E}{|\vec{u}_g| \cdot |\vec{n}_E|}\right)\\ &= \sin^{-1}\left(\frac{\vec{u}_g \cdot \vec{n}_E}{|\vec{u}_g| \cdot |\vec{n}_E|}\right)\end{aligned}$$

5.0.6 Spiegelungen.
Für eine Spiegelung eines Punktes an etwas anderem muss zuerst der Spiegelpunkt gefunden werden.
Spiegelt man also einen Punkt P an einer Geraden oder Ebene, möchte man darauf einen Punkt F finden, so dass $\overrightarrow{PF}$ senkrecht auf der Ebene oder Geraden steht.
Zum Spiegelpunkt gelangt man jetzt, indem man von P zweimal die Strecke $\overrightarrow{PF}$ läuft:

$$\vec{p'} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \vec{f} + \overrightarrow{PF}$$

Teil V

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Grundlagen

In diesem Abschnitt:

- Zufallsexperimente und deren Ausgänge/Ereignisse
- Ereignisse zusammensetzen
- absolute und relative Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeiten
- mehrstufige Zufallsexperimente, Pfadregeln

1.1 Grundlegende Begriffe

1.1.1 Zufallsexperiment, Ausgang.
Ein *Zufallsexperiment* ist ein Experiment, bei dem verschiedene Ausgänge mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten auftreten. Ausgänge werden häufig mit kleinen griechischen Buchstaben benannt (besonders gerne mit ω).
Beispiel: Das Werfen eines Würfels ist ein Zufallsexperiment. Seine Ausgänge sind $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

1.1.2 Ereignis.
Ein *Ereignis* ist eine Zusammenfassung mehrerer Ausgänge. Man verwendet für sie gerne Großbuchstaben vom Anfang des Alphabets.
Beispiel: $A =$ „Augenzahl kleiner 4“ ist ein Ereignis beim Wurf eines Würfels und besteht aus den Ausgängen $1, 2, 3$.

1.1.3 Stichprobe.
Wird ein Zufallsexperiment n mal durchgeführt, so erhält man, wenn man die Ausgänge (schriftlich) festhält, eine *Stichprobe vom Umfang* n.
Beispiel: Wirft man einen Würfel 100 mal, so erhält man eine Stichprobe vom Umfang 100.

1.1.4 absolute und relative Häufigkeit — Ausgang.

- **absolute Häufigkeit**: Die *absolute Häufigkeit* $H(\omega)$ gibt an, wie oft der Ausgang ω in der Stichprobe vorkommt.
- **relative Häufigkeit**: Die *relative Häufigkeit* $h(\omega)$ ist die absolute Häufigkeit geteilt durch den Umfang der Stichprobe: $h(\omega) = \frac{H(\omega)}{n}$.

Beispiel: Wurde ein normaler Würfel 10 Mal geworfen, so hat man zum Beispiel als Stichprobe $\{2, 5, 5, 1, 3, 6, 3, 2, 2, 1\}$ erhalten. Für den Ausgang $\omega = 3$ erhält man also die absolute Häufigkeit $H(\omega) = H(3) = 2$ und die relative Häufigkeit $h(\omega) = h(3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

1.1.5 absolute und relative Häufigkeit — Ereignis.

- **absolute Häufigkeit**: Die absolute Häufigkeit eines Ereignisses ist die Summe der absoluten Häufigkeiten seiner Ausgänge.
- **relative Häufigkeit**: Die relative Häufigkeit eines Ereignisses ist die Summe der relativen Häufigkeiten seiner Ausgänge.

Beispiel: Mit den Daten von oben ergibt sich für das Ereignis $A =$ „Augenzahl kleiner 4" die absolute Häufigkeit $H(A) = H(1) + H(2) + H(3) = 2 + 3 + 2 = 7$ und die relative Häufigkeit $h(A) = h(1) + h(2) + h(3) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$.

1.1.6 Wahrscheinlichkeit.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ausgangs ist die relative Häufigkeit auf lange Sicht. Wirft man zum Beispiel einen normalen Würfel sehr oft, so ist zu erwarten, dass die relative Häufigkeit jeder Augenzahl gegen $\frac{1}{6}$ geht. Wir nennen diesen Wert die *Wahrscheinlichkeit* $P(\omega)$ des Ausgangs ω. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Ausgänge.

1.2 Arbeiten mit Ereignissen

1.2.1 Mengenschreibweise.
Wie wir oben gesehen haben setzt sich die relative/absolute Häufigkeit und die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus seinen Ausgängen zusammen. Deswegen schreibt man ein Ereignis meistens als Menge seiner Ausgänge.
Beispiel: Das Ereignis $A =$ „Augenzahl kleiner 4" beim normalen Würfelwurf kann man auch schreiben als $A = \{1, 2, 3\}$.

1.2.2 Besondere Ereignisse.

- **Unmögliches Ereignis**: Ein Ereignis ohne Ausgänge, also $A = \{\}$, hat die Wahrscheinlichkeit 0.
- **Sicheres Ereignis**: Ein Ereignis A, dass alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments beinhaltet, hat die Wahrscheinlichkeit 1.

1.2.3 Operationen für Ereignisse.
Durch die Mengenoperationen lassen sich neue Ereignisse konstruieren (hier seien A und B Ereignisse):

- **Vereinigung**: Die Vereinigung $A \cup B$ von A und B ist das Ereignis, dass A oder B eintritt.
- **Schnitt**: Der Schnitt $A \cap B$ von A und B ist das Ereignis, dass A und B eintreten.
- **Differenz**: Die Differenz $A \backslash B$ von A und B ist das Ereignis, dass A eintritt, aber B nicht.
- **Komplement**: Das Komplement $\overline{\mathrm{A}}$ eines Ereignisses ist das Ereignis, dass A **nicht** eintritt.

Beispiel: Ist $A =$ „Augenzahl kleiner 4“ und $B =$ „Ungerade Augenzahl“, so lassen sich diese Ereignisse auch schreiben als $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 3, 5\}$. Also ist zum Beispiel $A \cap B = \{1, 3\}$.

1.2.4 Disjunkte Ereignisse.
Ist für zwei Ereignisse A, B der Schnitt leer, also $A \cap B = \{\}$, so nennt man die beiden Ereignisse *disjunkt*.

1.2.5 Rechnen mit der Wahrscheinlichkeit konstruierter Ereignisse.

- **Vereinigung**: Für die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Sind A und B disjunkt, so ist $P(A \cap B) = P(\{\}) = 0$, also $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- **Komplement**: $P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(A)$.

1.2.6 Erwartungswert.
Der *Erwartungswert* μ gibt an, welcher Ausgang im Durchschnitt zu erwarten ist. Man berechnet ihn, indem man die Summe des Produktes von jedem Ausgang mit seiner Wahrscheinlichkeit berechnet.
Beispiel: Bei einem normalen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Ausgang $\frac{1}{6}$, deswegen ist der Erwartungswert $\mu = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3{,}5$.

1.3 Zufallsexperimente, Baumdiagramme, Pfadregeln

1.3.1 Mehrstufiges Zufallsexperiment.
Besteht ein Zufallsexperiment aus mehreren Teilexperimenten, so spricht man von einem *mehrstufigen Zufallsexperiment*. Die einzelnen Stufen können sich gegebenenfalls gegenseitig beeinflussen (zum Beispiel beim Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen, siehe später).

1.3.2 Beeinflusst und unbeeinflusst.

Je nach Zufallsexperiment muss man entscheiden, ob sich die einzelnen Stufen beeinflussen oder nicht. Beispielsweise beeinflussen sich die einzelnen Stufen beim Ziehen aus einer Urne *ohne Zurücklegen* gegenseitig, beim Ziehen mit Zurücklegen beeinflussen sie sich nicht.

1.3.3 Ausgänge von mehrstufigen Zufallsexperimenten.

Wir geben Ausgänge von mehrstufigen Zufallsexperimenten als *Tupel* an; das sind einfach sortierte Mengen: Würfeln wir mit einem normalen Würfel zuerst eine 1 und dann eine 2, so ist der Ausgang $(1, 2)$. Wir können hier die Mengenschreibweise deswegen nicht verwenden, weil der Ausgang $(2, 1)$ ein ganz anderer als $(1, 2)$ sein kann. Die Mengenschreibweise beachtet diese Ordnung nicht.

1.3.4 Zweifaches Würfeln, Baumdiagramm.

Wir spielen Monopoly und werfen zwei Würfel. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 2 (oder 7,$\ldots$) beträgt?
Offensichtlich beeinflussen sich die Würfel nicht gegenseitig, also können wir auch einfach gedanklich einen Würfel zweimal werfen, das Ergebnis ist dasselbe. Wir haben nun ein zweistufiges Experiment vorliegen und wollen dieses als Baumdiagramm darstellen.
Den Ursprung des Baumes nennen wir die *Wurzel*, von ihr gehen die *Äste* zu den *Knoten* des Baumes. Gehen von einem Knoten keine Äste ab, so nennen wir ihn ein *Blatt* des Baumes. Ein Weg vom Knoten zu einem Blatt nennt man einen *Pfad*.

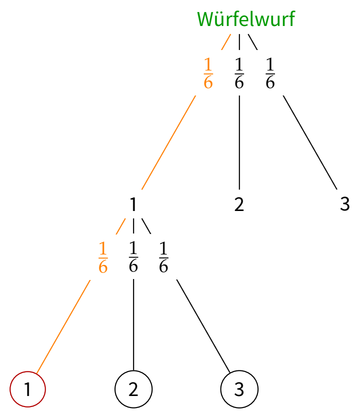

Abbildung 1.1: Das Baumdiagramm des zweifachen Würfelwurfs (zur Übersichtlichkeit mit nur einer zweiten Stufe und mit jeweils nur drei Zwischenausgängen). Markiert sind die **Wurzel**, ein **Blatt**, sowie der **Pfad** von der Wurzel zu diesem Blatt.

1.3.5 1. Pfadregel.

Die Wahrscheinlichkeit eines Blattes ist das Produkt der Kantenwahrscheinlichkeiten des Pfades zu ihm.
Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, bei Monopoly zwei Einsen zu würfeln, ist $P((1, 1)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

1.3.6 2. Pfadregel.

Besteht ein Ereignis aus mehreren Ausgängen, so ist dessen Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Blätter.
Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A $=$*Weniger als vier Punkte bei Monopoly würfeln* ist $P(A) = \frac{3}{36}$, denn das Ereignis besteht aus den Ausgängen $(1, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 1)$, die jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ haben.

Kombinatorik

In diesem Abschnitt:

- Multiplikationsformel
- Urnenmodelle

2.1 Multiplikationsformel

CAS:

Calculator:
Menü > Wahrscheinlichkeit > Fakultät

2.1.1 Fakultät.
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$.

2.1.2 Multiplikationsformel.
Die Multiplikationsformel stellt die Basis der Kombinatorik dar. Sie sagt aus:
Möchte man n Dinge auf k Stellen verteilen, so gibt es für die erste Stelle n Möglichkeiten, für die zweite $n-1$ Möglichkeiten,…und für die letzte $n-k$ Möglichkeiten.
Beispiel: Möchte man seine 7 Sockenpaare auf die 7 Plätze für Socken im Schrank verteilen, so gibt es dafür $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ Möglichkeiten. Insbesondere gilt also, dass es $n!$ Möglichkeiten gibt, n Dinge anzuordnen.

2.2 Urnenmodell

Um kombinatorische Zusammenhänge veranschaulichen zu können werden häufig *Urnenmodelle* verwendet.

2.2.1 Ziehen mit vs. ohne Zurücklegen.
Wir stellen uns eine Urne vor, also ein undurchsichtiges Gefäß, in dem verschiedenfarbige Kugeln sind. Wir haben zwei Möglichkeiten, wie wir ihr Kugeln entnehmen können:

- **Ziehen mit Zurücklegen**: Wir ziehen eine Kugel, merken uns ihre Farbe und legen sie wieder zurück. Diesen Vorgang können wir dann beliebig oft wiederholen. Hier beeinflussen sich die einzelnen Ziehungen offensichtlich nicht.
- **Ziehen ohne Zurücklegen**: Wir ziehen eine Kugel, merken uns ihre Farbe und legen sie beiseite. Diesen Vorgang kann man nur so oft wiederholen wie Kugeln in der Urne sind. Man kann übrigens alternativ auch mehrere Kugeln auf einmal ziehen (das ist identisch zum Ziehen ohne Zurücklegen). Offensichtlich beeinflussen sich die einzelnen Ziehungen gegenseitig.

Von Treffern und Nieten

In diesem Abschnitt:

- Bernoulli-Versuche und -Ketten
- Binomialverteilung

3.0.1 BERNOULLI-Versuch.
Ein Bernoulli-Versuch ist ein Zufallsexperiment, bei dem es nur die beiden Ausgänge 0 und 1 gibt (sie werden oft als *Treffer* und *Niete* bezeichnet).

3.0.2 Bernoulli-Kette.
Führt man einen Bernoulli-Versuch n mal hintereinander (und unabhängig voneinander!) durch, so liegt eine *Bernoulli-Kette* vor.

3.0.3 Binomialkoeffizient.
Um Schreibaufwand zu sparen schreiben wir

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Wir nennen diese Zahl den *Binomialkoeffizienten*. Er gibt an, auf wieviele Arten man r Dinge aus einer Menge von n Dingen auswählen kann.

3.0.4 Binomialverteilung.
Gegeben sind folgende Informationen:

- die *Trefferwahrscheinlichkeit* p (damit erhält man auch die Nietenwahrscheinlichkeit $1-p$),
- die Länge n der Bernoulli-Kette.

Mit diesen Informationen können wir berechnen, wie wahrscheinlich eine bestimmte Anzahl r an Treffern in der Bernoulli-Kette aufgetreten ist. Sie berechnet sich durch $B_{n,p}(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$. Der Erwartungswert ist $\mu = n \cdot p$.
Anmerkung: $B_{n,p}(r)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit und ist eine Funktion. Wir nennen Beschreibungen einer Wahrscheinlichkeit durch eine Funktion eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung*.

CAS:

Calculator:
Menü › Wskt › Kombination
$\rightsquigarrow$ NCR$(2,2) \rightsquigarrow 1$

CAS:

Calculator:
Menü › Wskt › Verteilungen › binPdf
$\rightsquigarrow$ Werte eintragen
kumuliert:
Menü › Wskt › Verteilungen › binCdf

Hypothesentests

In diesem Abschnitt:

- Was sind Hypothesentests?
- Einseitige Hypothesentests

4.0.1 Hypothesentests.
Für ein gegebenes Bernoulli-Experiment stellt sich in der echten Welt oft die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer wirklich ist. Nachprüfen kann man dies allerdings nur in stichprobenartigen Tests.
Da so ein Experiment aber zufällig verläuft, kann das Ergebnis von dem Erwartungswert abweichen (zum Beispiel kann beim Münzwurf tausendmal nacheinander Kopf fallen, auch wenn die Münze mit $p = 0{,}5$ perfekt funktioniert), also kann man aus einer kleinen Stichprobe nicht garantiert auf die Wahrscheinlichkeit der echten Welt schließen. Im Fall der Münze könnte man aber vermuten, dass sie kaputt ist. Das Ziel ist es deswegen, eine Aussage zu machen, von der man sich sehr sicher ist: "Ich bin mir sehr sicher (95%), dass ich mit mehr als 50% Kopf werfe."
Mathematisch ist also gesucht: Ein alternative Vermutung für die Trefferwahrscheinlichkeit (hier $p > 0{,}5$) und zusätzlich die Wahrscheinlichkeit, dass man falsch liegt und die echte Welt doch anders aussieht (hier $\sigma = 0{,}05$). Das nennt man das Signifikanzniveau.

4.0.2 Nullhypothese und Alternative.
Mathematisch baut man das so auf: Man beginnt mit der sogenannten Nullhypothese H_0 und nimmt zunächst einmal für das Experiment feste Werte an. Dabei wird auch eine Wahrscheinlichkeit für Treffer angenommen, z.B. $p = 0{,}5$, damit man überhaupt etwas ausrechnen kann.
Dann formuliert man die *Alternative* H_1, zum Beispiel die Vermutung $p > 0{,}5$.

4.0.3 Testen: Testumfang, Annahme- und Ablehnungsbereich.
Man muss sich jetzt entscheiden, ob die Welt so funktioniert wie die Nullhypothese es aussagt, oder eben nicht.
Dazu führt man einen Test mit einem gewissen *Testumfang* n durch.
Dann rechnet man: Wenn das System funktionieren würde, wie in H_0 behauptet, kann man einen Bereich an Ergebnissen finden, der sehr unwahrscheinlich getroffen wird (Zum Beispiel mehr als 530 Mal 'Kopf' von 1000 Münzwürfen ist seltener als 3%).

Wenn das Experiment jetzt also mehr als 530 Köpfe liefert, kann man mit hoher Wahrscheinlichkeit (97%) sagen, dass die Münze nicht richtig funktioniert. Man nennt den Bereich, in dem Ergebnisse liegen müssen, damit man die Nullhypothese verwirft, den *Ablehnungsbereich*, der Rest ist der *Annahmebereich*.

4.1 Einseitiger Hypothesentest

4.1.1 Beispiel — rechtsseitiger Hypothesentest.
Wir haben einen normalen Würfel, vermuten aber, dass er mehr Sechsen würfelt als er sollte.

1. **Nullhypothese**: $H_0 : p = \frac{1}{6}$, **Alternative**: $H_1 : p > \frac{1}{6}$
2. **Signifikanzniveau**: Wir legen ein Signifikanzniveau von 5% fest.
3. **Stichprobenumfang**: Wir werfen den Würfel $n = 300$ mal.
4. **Annahmebereich**: Der Annahmebereich ist $A = [0, b]$. b ist die kleinste Zahl, für die noch $P(X \leq b) > 95\%$ ist (X ist die Zahl der Sechsen bei n Würfen). Wir lassen hierfür vom CAS den Graphen von

$$\textsc{binomPdf}\left(300, \frac{1}{6}, 0, \textsc{int}(x)\right)$$

zeichnen und anschließend die Wertetabelle angeben. Nun können wir b einfach ablesen.

5. **Irrtumswahrscheinlichkeit**: Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Ausgang im abgelehnten Bereich liegt. Dieser ist hier $(b, 300]$, also ist die Irrtumswahrscheinlichkeit $P(X > b) = P(X \geq (b+1))$.

CAS:

1. Calculator:
Menü › Wskt › Verteilung › binomCdf
$\rightsquigarrow f(x) :=$
$\textsc{binomCdf}(300, \frac{1}{6}, 0, \textsc{int}(x))$
(INT rundet x auf die nächste ganze Zahl herab, weil wir ja nur ganze Male würfeln können)

2. Graph:
$f1(x) = f(x)$ liefert den gesuchten Graph,
Menü › Tabelle › Tabelle mit … die gesuchte Tabelle

Wir erhalten $b = 61$ und eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $P(X \geq 62) = 0{,}0402 = 4{,}02\%$. Würfelt man also bei einem Test 65 Sechsen, so wird die Hypothese abgelehnt.

4.1.2 Beispiel — linksseitiger Hypothesentest.
Wir haben einen normalen Würfel, vermuten aber, dass er weniger Sechsen würfelt als er sollte.

1. **Nullhypothese**: $H_0 : p = \frac{1}{6}$, **Alternative**: $H_1 : p < \frac{1}{6}$
2. **Signifikanzniveau**: Wir legen ein Signifikanzniveau von 5% fest.
3. **Stichprobenumfang**: Wir werfen den Würfel $n = 300$ mal.
4. **Annahmebereich**: Der Annahmebereich ist $A = [b, 300]$. Hier ist b die kleinste Zahl, für die noch $P(X \leq b) > 5\%$ ist. Wir ermitteln diese wieder mit dem Taschenrechner.

CAS:

1. Calculator:
Menü › Wskt › Verteilung › binomCdf
$\rightsquigarrow f(x) :=$
$\textsc{binomCdf}(300, \frac{1}{6}, \textsc{int}(x), 300)$

2. Graph:
$f1(x) = f(x)$ liefert den gesuchten Graph,
Menü › Tabelle › Tabelle mit … die gesuchte Tabelle

Wir erhalten mit dem Taschenrechner $b = 40$ und eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $P(X \leq 39) = 0{,}0486 = 4{,}86\%$. Würfelt man also bei einem Test 35 Sechsen, so wird die Hypothese abgelehnt.

Ende.