Pflichtteil

A1: Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2+5)e^{-2x}$ (2 VP)

Lösung 1: Es handelt sich um ein Produkt, Anwenden der Produktregel:
$u(x) = 2x^2+5 \quad u'(x) = 4x$
$v(x) = e^{-2x} \quad v'(x) = (-2)e^{-2x}$
$\Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 4x \cdot e^{-2x} + (2x^2+5) \cdot (-2e^{-2x})$

A2: Berechnen Sie das Integral (2 VP)

$$\int_0^1 (2x-1)^4 \mathrm{d}x$$

Lösung 2: Es handelt sich um eine Verkettung. Die äußere Funktion ist x^4, die innere Funktion ist $2x-1$.

- Berechnung der Stammfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{5} \cdot (2x-1)^5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{10} \cdot (2x-1)^5 \end{aligned}$$

- Integralberechnung:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (2x-1)^4 \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{10} \cdot (2x-1)^5\right]_0^1 = \frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

A3: Lösen Sie die Gleichung $\mathrm{e}^x - \frac{3}{\mathrm{e}^x} + 2 = 0$ (3 VP)

Lösung 3:

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^x - \frac{3}{\mathrm{e}^x} + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \mathrm{e}^{2x} - 3 + 2\mathrm{e}^x = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & u^2 + 2u - 3 = 0 \quad \text{Substitution: } \mathrm{e}^x = u \\ \Rightarrow\quad & u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2 \\ & u_1 = -3 \rightarrow \mathrm{e}^x = -3 \quad \text{keine Lösung} \\ & u_2 = 1 \rightarrow \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{0\}$

A4: Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitung f' einer Funktion f. Skizzieren Sie grob den Verlauf von f'' in die Abbildung und geben Sie für jeden der folgenden Sätze an ob er richtig, falsch oder unentscheidbar ist:

a) f schneidet die y-Achse bei $(0|1)$.

b) Das Schaubild von f hat bei $x = -1$ einen Tiefpunkt.

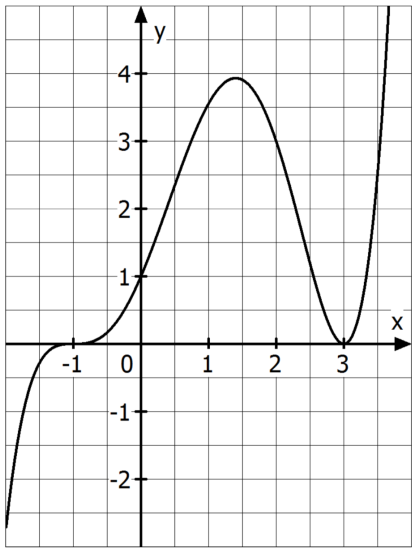
c) Das Schaubild von f hat für $-2 \leq x \leq 2$ genau einen Wendepunkt.

d) Das Schaubild von f verläuft an der Stelle 1 steiler als die erste Winkelhalbierede.

e) f ist im Intervall $[-2; 1]$ streng monoton wachsend.

f) Es gilt $f(3) < f(1)$

g) f'' schneidet die x-Achse im Intervall $[1; 3]$ zwei mal.



(4 VP)

Lösung 4:

a) unentscheidbar
b) falsch
c) richtig
d) richtig
e) falsch
f) falsch
g) richtig

A5: Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E = 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2.$ (4 VP)

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel sind, und berechnen Sie den Abstand von g und E.

b) Die Ebene F ist orthogonal zu E und enthält die Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F.

Lösung 5:

a) Für den Normalenvektor der Ebene E gilt: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ von g ist

$$\vec{u} \bullet \vec{n}_E = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 0$$

d.h. Gerade und Ebene sind parallel.
Der Abstand von g und E ist gleich dem eines beliebigen Punktes von g zu E. Wählt man also z.B. den Stützpunkt $P(3|-3|1)$:

$$\mathrm{d}(g, E) = \mathrm{d}(P, E) = \frac{|2 \cdot 3 - (-3) + 2 \cdot 1 - 2|}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

b) Da g in F liegt und parallel zu E ist, ist die Schnittgerade s parallel zu g. Die Orthogonale h zur Ebene E durch den Stützpunkt $P(3|-3|1)$ von g liegt in F und schneidet E in einem Punkt S, den man als Stützpunkt von s wählen kann.

$$\text{Orthognale } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnit von h mit E:

$$\begin{aligned} 2(3 + 2t) - (-3 - t) + 2(1 + 2t) &= 2 \\ 9t + 11 &= 2 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Geradengleichung von h ergibt den Schnittpunkt $S(1|-2|-1)$. Da g und s parallel sind, erhält man mit dem Richtungsvektor von g und S eine Gleichung für die Schnittgerade:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A6: Analytische Geometrie (vgl. Abitur 2007)
Von einem Senkrechten Kegel kennt man die Koordinaten der Spitze S, die Koordinaten eines Punktes P des Grundkreises sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der der Grundkreis liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Mittelpunkt M und den Radius r des Grundkreises zu bestimmen.
(3 VP)

Lösung 6:

- Mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ist der Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ von E gegeben.
  Das Lot l von S auf E hat $\vec{n}_E$ als Richtungsvektor.
- Der Durchstoßpunkt von l durch E ist der Mittelpunkt M des Grundkreises.
- Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MP}$ ist der Radius r des Grundkreises.

A7: Stochastik (vgl. Abitur 2017)
In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht. (2 VP)

Lösung 7: 3 Rot, 2 Grün, 1 Blau. Insgesamt 6.
$$\frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{30} + \frac{18}{120} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20} = \frac{19}{20}$$

(20 VP)

Wahlteil Analysis

A1: (vgl. Abitur 2006)
Gegeben ist die Funktion von f durch:

$$f(x) = \frac{120(x-120)^2}{(x-120)^2+7200} + 10 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 130$$

Ihr Schaubild sei K. Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -0.015x^2 + 0.15x + 95$ sei C.

Eine Skisprunganlage besteht aus Sprungschanze und Aufsprunghang. Das Schaubild K beschreibt das Profil des Aufsprunghangs, die Kurve C die Flugbahn eines Skispringers. Der Absprung erfolgt bei $x = 0$. Alle Angaben in Metern.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Springer auf dem Aufsprunghang aufsetzt. Wie groß ist die maximale vertikal gemessene Höhe des Springers über dem Hang? (2 VP)

b) Der Wendepunkt $W(71|40)$ von K entspricht dem kritischen Punkt des Aufsprunghangs. Mögliche Flugbahnen des Skispringers werden nun durch Schaubider der Funktionen $g_k = -0.015x^2 + kx + 95$ beschrieben. Welchen Wert darf der Parameter k höchstens annehmen, damit der Springer mit dieser Flugbahn nicht hinter dem kritrischen Punkt landet? (3 VP)

c) Beim Umbau dieser Schanze soll das Profil des Aufsprunghangs verändert werden. Er soll nach dem Umbau durch die Funktion h mit

$$h(x) = 0.0001(1,25x^3 - 225x^2 + 2150x + 900000) \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 130$$

beschrieben werden. Muss zur Realisierung des neuen Profils insgesamt Erde weggefahren oder angeliefert werden, wenn angenommen wird, dass der Hang überall gleich breit ist? (3 VP)

Lösung 1:

a) Gleichsetzen der Funktionen f und g mit $0 \leq x \leq 130$ ergibt $S(60|50)$ als Schnittpunkt.

Für die maximale vertikale Höhe wird die Differenzfunktion aufgestellt: $d(x) := g(x) - f(x)$. Nun ist der Hochpunkt von d gesucht. Dieser befindet sich bei $x_{max} \approx 26,08$. $d(x_{max}) = 12,64$.

b) g_k muss f spätestens im Punkt $W(71|40)$ schneiden, berechnen des k, sodass sich g_k und f in W schneiden:

$$g_k(71) = f(71) \rightsquigarrow k \leq 0,29$$

c) Berechnung der Integrale der beiden Funktionen f und h im Intervall $[0; 130]$:

$$\int_0^{130} f(x)\,\mathrm{d}x = 5978,15$$

$$\int_0^{130} h(x)\,\mathrm{d}x = 5964,56$$

Das das neue Profil eine geringere Querschnittsfläche besitzt, muss Erde weggefahren werden.

A2: (vgl. Abitur 2015) Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt $O(0|0)$ und die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte des Kreises mit dem Graphen von f in Abhängigkeit vom Kreisradius. (4 VP)

Lösung 2: Für die Entfernung des Punktes $P(u|f(u))$ vom Ursprung gilt: $d(u) = \sqrt{u^2 + (f(u))^2}$ Gesucht ist das Minimum: $d_{\min} \approx 1,94$ d.h. der Kreis mit dem Radius $d_{\min}$ berührt den Graphen in genau zwei Punkten. Der Kreis mit Radius 4 geht durch den Hochpunkt und hat damit 3 Schnittpunkte.

Radius	Schnittpunkte
$0 < r < d_{\min}$	0
$r = d_{\min}$	2
$d_{\min} < r < 4$	4
$r = 4$	3
$r > 4$	2

A3: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion g_t mit

$$g_t(x) = \mathrm{e}^{t-x} + x$$

gegeben.

a) Der Graph jeder Funktion g_t besitzt einen Tiefpunkt T_t. Bestimmen Sie die Ortskurve dieser Tiefpunkte. (3 VP)

b) Der Graph von g_0, die y-Achse und die erste Winkelhalbierede begrenzen eine nach rechts offene Fläche mit endlichem Inhalt. Berechnen sie den Inhalt dieser Fläche.

Die Gerade $x = a$ mit $a > 0$ halbiert diese Fläche. Bestimmen Sie den Wert von a exakt. (5 VP)

Lösung 3:

a) Koordinaten der Tiefpunkte: $T_t(t|1+t) \rightsquigarrow$ Gleichung der Ortskurve $y_t(x) = x + 1$

b) $A(z) = \int\limits_0^z (g_0(x) - x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-z} + 1$

Dann ergibt sich für den Grenzwert $A = \lim\limits_{z\to\infty} (-\mathrm{e}^{-z} + 1) = 1$

Halbierung der Fläche, gesucht ist der Wert von a so, dass $A(a) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} -\mathrm{e}^{-a} + 1 &= \frac{1}{2} \\ \mathrm{e}^{-a} &= \frac{1}{2} \\ -a &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ -a &= -\ln(2) \\ a &= \ln(2) \end{aligned}$$

(20 VP)

Wahlteil Analytische Geometrie

Gegeben sind die Gerade g durch die Punkte $A(0|-4|1)$ und $B(1|-2|0)$ sowie für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_a durch $x_1 + (a-1)x_2 + 2ax_3 = -2a + 1$.

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g mit der Ebene E_0.
Begründen Sie, dass A und B auf der gleichen Seite der Ebene E_0 liegen.
Bestimmen Sie den Schnittwinkel von g und der Ebene E_0. (2,5 VP)

b) Berechnen Sie den Wert von a, für den die Ebene E_a parallel zur x_2-Achse ist. Für welche Werte von a mit $-1 \leq a \leq 1$ schneidet die x_1-Achse die Ebene E_a unter einem Winkel von 45°? (3 VP)

c) Zeigen Sie, dass eine Gerade h gibt, die in allen Ebenen E_a liegt. (2,5 VP)

d) Welcher Punkt der x_3-Achse liegt in keiner Ebene E_a? (2 VP)

Lösung 0:

a) $S(3|2|-2)$

Wegen $\vec{OS} = \vec{OA} + 3\vec{AB}$ liegt S nicht zwischen A und B.

$\alpha = 16,8°$

b) $E_a||x_2$-Achse, wenn $\vec{n_{E_a}} \cdot \vec{u_a} = 0 \rightsquigarrow a = 1$ Ebene E_a ist parallel zur x_2-Achse

Es muss gelten: $\sin(45°) = \dfrac{|u_1 \cdot n_a|}{|u_1| \cdot |n_a|} \rightsquigarrow a_1 = 0, a_2 = 0,4$

c) Schnittgerade von E_0 und E_1 berechnen und zeigen, dass sie in allen Ebenen E_a liegt.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) $P(0|0|s)$ in E_a einsetzen $\rightsquigarrow a = \dfrac{1}{2(s+1)} \rightsquigarrow s \neq -1$

$P(0|0|-1)$ liegt in keiner Ebene E_a

(10 VP)

Wahlteil Stochastik

Die Tabelle zeigt die Häuftigkeitsverteilung von Rauchern und Nichtrauchern unter den Personen im Alter von 50 bis 55 Jahren in Deutschland.

Raucher	Nichtraucher
gelegentlich: 4,0%, regelmäßig: 28,1%	früher geraucht: 22,1%, nie geraucht: 45,8%

Im Folgenden werden nur Personen der angegebenn Altersgruppe betrachtet.

a) Zwanzig zufällig ausgewählte Personen gehen nacheinander zu einer Gesundheitsuntersuchung. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- A: Genau acht Personen sind Raucher.
- B: Mehr als acht Personen haben noch nie geraucht.
- C: Genau acht Personen sind Raucher, wobei die letze Person ein Raucher ist.
- D: Die ersten drei Personen sind Nichtraucher und von den übrigen rauchen mindestens sechs regelmäßig.

b) Acht Raucher beginnen ihre Entwöhnungskur. Sieben von ihnen sind regelmäßige Raucher. Die Erfolgschancen betragen unabhängig voneinander für regelmäßige Raucher 60%, für Gelegenheitsraucher 80%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens sieben Personen die Kur mit Erfolg beenden.

c) Eine Krankenkasse gewährt ihren Mitgliedern einen Bonus, wenn sie Nichtraucher sind. Wie groß müsste der Anteil der Nichtraucher unter ihren Mitgliedern im Alter von 50-55 Jahren mindestens sein, damit von 100 zufällig ausgewählten Mitgliedern dieser Altersgruppe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 70 den Bonus erhalten.

Lösung 0:

a)
- X_1 beschreibt die Anzahl der Raucher unter 20 Personen. X_1 kann als $\mathrm{B}_{20;0,321}$-verteilt angenommen werden.
  $P(A) = P(X_1 = 8) = 0,1364 \approx 13,6\%$
- X_2 beschreibt die Anzahl der Personen, die noch nie geraucht haben, unter 20 Personen an.
  X_2 kann als $\mathrm{B}_{20;0,458}$-verteilt angenommen werden.
  $P(B) = P(X_1 > 8) = 0,6137 \approx 61,4\%$
- Der letzte ist Raucher, d.h. vorher 7 Raucher. X_3 beschreibt die Anzahl der Raucher unter 19 Personen.
  X_3 kann als $\mathrm{B}_{19;0,321}$-verteilt angenommen werden.
  $P(C) = P(X_1 = 7) \cdot 0321 = 0,0546 \approx 5,5\%$
- Die ersten drei Nichtraucher X_4 beschreibt die Anzahl der regelmäßigen Raucher unter 17 Personen.
  X_2 kann als $\mathrm{B}_{20;0,458}$-verteilt angenommen werden.
  $P(B) = 0,679^3 \cdot P(X_1 \geq 6) = 0,1053 \approx 10,5\%$

b) Es gibt zwei Pfade: 6 regelmäßige Raucher und ein Gelegenheitsraucher bestehen die Kur oder 7 regelmäßige Raucher schaffen es.

$w = P(X = 7) \cdot 0,8 + P(X = 7) \cdot 0,2 + P(X = 6) \cdot 0,8 = 0,1325 \approx 13,3\%$

c) Der Anteil der Nichtraucher unter unter den Mitgliedern der Krankenkasse sei p.

Y beschreibt die Anzahl der Nichtraucher unter 100 Mitgliedern. Y kann als $\mathrm{B}_{100;p}$-verteilt gesehen werden.

Gesucht ist die kleinste positive Zahl p mit $P(Y \geq 70) \geq 0,9$

Mit dem Tabellenmodus des CAS erhält man $p = 0,751 : P(Y \geq 70 \approx 0,9004$ und $p = 0,750 : P(Y \geq 70 \approx 0,8962$. Somit ist $p = 0,751$ der gesuchte Wert.

Somit müsste der Nichtraucheranteil mindestens $75,1\%$ betragen.

(10 VP)