**Inhalt des Übungsblatts:**

- Lagebeziehungen *(S. 71)*, Abstände *(S. 73)*
- Winkelberechnungen und Spiegelungen *(S. 77)*

**A1: Lagebeziehungen und Ebene aufstellen:** Gegeben sind die Geraden $g$ und $h$:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Welche der beiden Geraden geht durch den Ursprung?

b) Wie liegen die beiden Geraden zueinander?

c) Gib eine Gleichung der Ebene an, in der beide Geraden liegen.

**Lösung 1:**

a) $h$ geht (mit $s = -4$) durch den Ursprung.

b) Sie sind parallel denn die beiden Richtungsvektoren sind vielfache voneinander.

c) Stützvektor der Ebene ist der Ursprung, beide Stützvektoren der Geraden bilden die Spannvektoren der Ebene:

$$E : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**A2: Abstands- und Lageberechnungen:** Gegeben sind die Ebene $E$ und die Gerade $g$:

$$E : \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0, \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass $E$ und $g$ parallel zueinander sind.

b) Bestimme den Abstand von $E$ und $g$.

**Lösung 2:**

a) Dafür müssen der Normalenvektor von $E$ und der Richtungsvektor von $g$ orthogonal sein.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$$

b) Aufstellen einer Hilfsgeraden:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $h$ in $E$:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}7\\5\\-7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}=0$$

$$\left[\begin{pmatrix}7+8r\\5+r\\-7-4r\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}8+8r\\1+r\\-4-4r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}=0$$

$$8(8+8r)+(1+r)-4(-4-4r)=0$$

$$64+64r+1+r+16+16r=0$$

$$81+81r=0$$

$$1+r=0$$

$$r=-1$$

Schnittpunkt mit der Ebene durch Einsetzen von $r$ in h:

$$\begin{pmatrix}7\\5\\-7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$$

Abstand zwischen den Punkten (Stützpunkt von $g$ und Schnittpunkt $h$ mit $E$):

$$\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}7\\5\\-7\end{pmatrix}$$

$$d(E,g)=\sqrt{8^2+1+(-4)^2}=\sqrt{81}=9$$

**A3: Abstandsberechnungen:**

a) Wie lauten die Koordinaten von $Q$, wenn $P(1|3|-4)$ und $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$ sind? Wie groß ist der Abstand $d(P,Q)$?

b)

**Lösung 3:**

a)

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\rightsquigarrow Q(-3|5|0)$$

Für den Abstand gilt: $d(P,Q)=\sqrt{(-4)^2+2^2+4^2}=6$

**A4: Lage- und Vektorrechnung:** Gegeben sind die Punkte $A(2|-1|2), B(5|-2|4), C(4|3|1)$ und $D(3|8|3)$. (CAS)

a) Zeige, dass die Punkte $A, B, C$ und $D$ nicht in einer Ebene liegen.

b) Prüfe, ob sich die Geraden $g$ durch $A$ und $B$ sowie die Gerade $h$ durch $A$ und $C$ orthogonal schneiden.

c) Untersuche, ob das Dreieck $ABC$ gleichschenklig ist.

**Lösung 4:**

a) Aufstellen einer Ebenengleichung, die $B, C$ und $D$ enthält:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $A$ in $\vec{x}$, lösen des LGS mit dem CAS: Keine Lösung, d.h. liegen nicht in einer Ebene.

b)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \overset{!}{=} 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 - 2 = 0$$

Die Geraden schneiden sich also rechtwinklig.

c) Da $ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck ist, müssen nur die Katheten, also die Längen $|\overrightarrow{AB}|$ und $|\overrightarrow{AC}|$ betrachtet werden.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$

Da $\sqrt{21} \neq \sqrt{14}$ ist, kann das Dreieck nicht gleichschenklig sein.

**A5: Geometriegewurschtel:** Die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide liegt in der Ebene $E$ und hat die Eckpunkte $A(0|1|1), B(2|4|-5), C(-1|10|-3), D(-3|7|3)$. Die Spitze der Pyramide liegt auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat ist. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $E$.

b) Die Pyramidenspitze kann auf der Geraden $g$ so gewählt werden, dass die vier von der Grundfläche zur Pyramidenspitze verlaufenden Kanten gleich lang sind. Berechne die Koordinaten der Spitze für diesen Fall.

c) Die Pyramidenspitze $S$ kann auf der Geraden $g$ auch so gewählt werden, dass die Seitenfläche $ABS$ orthogonal ist. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze für diesen Fall.

**Lösung 5:**

a) Es müssen die **vier** Seitenlängen auf Gleichheit geprüft werden. Zusätzlich muss mindestens ein Winkel auf Rechtwinkligkeit geprüft werden. (Alle Seitenlängen sind $7$)

Koordinatengleichung:

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix} = 0$$
$$\rightsquigarrow E : 42x_1 + 14x_2 + 21x_3 = 35$$

b) Damit alle vier Kanten die gleiche Länge haben, muss sich die Spitze rechtwinklig über dem Schnittpunkt der Diagonalen, also dem Mittelpunkt $M$ befinden.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\9\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,5\\5,5\\-1\end{pmatrix}$$

Aufstellen einer Gerade, die rechtwinklig zur Grundebene $E$ verläuft:

$$m : \vec{x} = \begin{pmatrix}-0,5\\5,5\\-1\end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix}42\\14\\21\end{pmatrix}$$

Die gesuchte Spitze ist der Schnittpunkt von $g$ mit $m$: Aufstellen eines LGS und Lösen mit dem CAS liefert die Ergebnise $q = \frac{3}{14}, s = -0,5$ Einsetzen von $s$:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}9\\10\\12\end{pmatrix} - 0,5 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17/2\\17/2\\7/2\end{pmatrix}$$

c) Aufstellen einer Ebene $K$, die rechtwinklig auf $E$ steht und die Punkte $A$ und $B$ enthält.

$$K : \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}42\\14\\21\end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Schnittpunkt von $K$ und $g$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}9\\10\\12\end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\17\end{pmatrix}}_{g} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}42\\14\\21\end{pmatrix}}_{K}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\17\end{pmatrix} - b \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix} - c \cdot \begin{pmatrix}42\\14\\21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-9\\-11\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -42 & -9\\3 & -3 & -14 & -9\\17 & 6 & -21 & -11\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 10/7\\0 & 0 & 1 & 6/49\end{array}\right)$$

Einsetzen von $a = s = -1$ in die Geradengleichung ergibt den Ortsvektor der Spitze:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}9\\10\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\7\\-5\end{pmatrix}$$