Inhalt des Übungsblatts:

- Wachstum*(S. 47)*
- LGS-Rechnung *(S. 53)*, Vektorrechnung *(S. 63)*
- Geraden und Ebenen *(S. 67)*

A1: Wachstum (CAS)

a) Bakterien vermehren sich durch Teilung, wobei sich eine Bakterienzelle durchschnittlich alle 10 Minuten teilt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei genau eine Bakterienzelle vorhanden.

- Wie viele Bakterien sind dann nach 1 Stunde, 2 Stunden bzw. 6 Stunden vorhanden?
- Finde eine Formel für die Anzahl $B(t)$ der Bakterien nach der Zeit t.
- Eine Bakterienzelle hat ein Volumen von ca. $2 \times 10^{-18}\mathrm{m}^3$. Wie lange dauert es, bis die Bakterienkultur ein Volumen von $1\mathrm{m}^3$ bzw. $1\mathrm{km}^3$ einnimmt? Ist das Ergebnis plausibel?

b) Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel $M(t) = M_0 \cdot \mathrm{e}^{\delta t}$.

1960 gab es ca. 3 Milliarden Menschen, 1995 etwa 5,6 Milliarden.

- Bestimme die Konstante δ.
- Wieviel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
- Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben, wenn die Bevölkerung im selben Tempo weiterwächst?

c) Eine Tasse kochendheißer Kaffee (100°C) kühlt bei Zimmertemperatur (20°C) in 10 Minuten auf 30°C ab.

- Geben Sie eine Funktionsgleichung für die Temperatur des Kaffees an.
- Frau M mischt den Kaffee mit der gleichen Menge Milch aus dem Kühlschrank (4°C). Sie hat zwei Möglichkeiten: die Milch sofort dazugeben, danach 3 Minuten warten oder die Milch erst nach 3 Minuten dazugeben.
  Welche Temperatur hat der Milchkaffee in beiden Fällen? *(Hinweis: Die Temperatur der Mischung ist der Mittelwert der einzelnen Temperaturen: $T = \frac{(T_1 + T_2)}{2}$.)*

Lösung 1:

a)
- Exponentielles Wachstum, allgemeine Form: $B(t) = c \cdot a^x = c \cdot \mathrm{e}^{\ln(a)x}$

  $$c = 1, \text{ da } B(0) = 1$$

  Es soll gelten:

  $$\begin{aligned} B(10) = 2 &= a^{10} \\ a &= \sqrt[10]{2} \\ a &\approx 1{,}072 \end{aligned}$$

  Bakterien nach einer, zwei und sechs Studen:

  $$\begin{aligned} B(60) &= 1{,}072^{60} \approx 64 \\ B(120) &= 1{,}072^{120} \approx 4201 \\ B(360) &= 1{,}072^{360} \approx 74 \times 10^9 \end{aligned}$$

- $B(t) = 1 \cdot 1{,}072^t = \mathrm{e}^{\ln(1{,}072)t}$

- Es soll gelten:

$$2 \times 10^{-18}\mathrm{m}^3 \cdot B(n) = 1\mathrm{m}^3 \qquad 2 \times 10^{-18}\mathrm{m}^3 \cdot B(n) = 1000000000\mathrm{m}^3$$
$$\rightsquigarrow t \approx 586,16 \hat{=} 9,77\mathrm{h} \qquad \rightsquigarrow t \approx 884,23 \hat{=} 14,74\mathrm{h}$$

b) -

$$M(t) = M_0 \cdot \mathrm{e}^{\delta t}$$

$t = 0$: 1960

$$M(0) = M_0 = 3 \times 10^9$$

$t = 1995 - 1960 = 35$

$$M(35) = 3 \times 10^9 \cdot \mathrm{e}^{\delta 35} = 5,6 \times 10^9$$
$$\delta = 0,017833$$

- Jährliches Wachstum: e^{δ}

$$\mathrm{e}^{\delta} = \mathrm{e}^{0,017833} = 1,01799 \hat{=} 101,8\%$$

-

$$M(t) = 3 \times 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0,017833 \cdot t} = 15 \times 10^9$$
$$\rightsquigarrow t = 90 \hat{=} 1960 + 90 = 2050$$

c) - Beschränktes Wachstum, allgemein: $T(t) = S - (S - T(0)) \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot t}$

$$S = 20, S - T(0) = 20 - 100 = -80$$
$$\Rightarrow T(t) = 20 + 80 \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot t}$$

Berechnung von k durch einsetzen der bekannten Werte:

$$T(10) = 30 = 20 + 80 \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot 10} \quad | \text{ Auflösen nach k}$$
$$\rightsquigarrow k = \frac{3 \cdot \ln(2)}{10}$$
$$\rightsquigarrow T(t) = 20 + 80 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{3\ln(2)}{10} \cdot t}$$

- Erst abkühlen, dann Milch dazu: $33,44°\mathrm{C}$ Variante 2: $37,14°\mathrm{C}$

A2: Geraden und Ebenen aufstellen:

a) Gib eine Geradengleichung so an, dass sie durch die gegebenen Punkte läuft:
   - $P(1|3|5)$, $Q(2|2|2)$
   - $R(-2|2|0)$, $S(1|3|4)$

b) Berechne eine Ebenengleichung, die senkrecht zur Gerade g liegt und die den Punkt $P(5|5|5)$ enthält.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Gegeben sind die Gerade h und der Punkt $P(2|2|2)$, gib eine Ebenengleichung an, die sowohl die Gerade als auch den Punkt enthält.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Gib einen Vektor an, der senkrecht zu den beiden angegebenen Vektoren ist. Berechne außerdem den Flächeninhalt des durch die gegebenen Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung 2:

a)
- $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
- $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

c) Zwei Punkte H_t berechnen, die auf der Geraden liegen: $H_0(2|5|1)$, $H_1(8|7|2)$
Berechnen der Richtungsvektoren von P zu den zwei Punkten:

$$\overrightarrow{PH_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PH_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Ebenengleichung mit P als Stützpunkt:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) (a) Kreuzprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 3 \\ 3 \cdot 2 - 3 \\ 1 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ (Alternativ auch durch LGS berechenbar, zwei Gleichungen mit dem Skalarprodukt aufstellen.)
Nachweis durch Skalarprodukt mit beiden Vektoren, jedes mal muss Null rauskommen.
$12 + 3 \cdot 5 - 9 \cdot 3 = 0, 12 \cdot 2 + 3 - 9 \cdot 3 = 0$
Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms ist gleich dem Betrag des Vektors, der durch das Kreuzprodukt entsteht:
$A = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{144 + 9 + 81} = \sqrt{234} \approx 15,30$

(b) Kreuzprodukt: $\vec{r} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 - 7 \cdot 2 \\ 7 - 6 \cdot 4 \\ 6 \cdot 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 9 \end{pmatrix}$
Nachweis durch Skalarprodukt mit beiden Vektoren, jedes mal muss Null rauskommen.
$-2 \cdot 6 - 17 \cdot 3 + 9 \cdot 7 = 0, -2 - 17 \cdot 2 + 9 \cdot 4 = 0$
Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms ist gleich dem Betrag des Vektors, der durch das Kreuzprodukt entsteht:
$A = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 289 + 81} = \sqrt{374} \approx 19,34$

A3: Ebenengleichungen: Bestimme die Ebene in der angegebenen Darstellungsform:

a) E enthält die Punkte $A(2|2|2), B(4|1|3)$ und $C(8|4|5)$. Gib E in Normalenform an.

b) Die gesuchte Ebene F ist die Spiegelebene zwischen $A(1|4|7)$ und $A'(3|2|3)$. Gib F in Parameterform an.

c) Die Ebene G ist orthogonal zur Ebene $H : -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2 = 0$ und enthält die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Gib die Ebene G in Koordinatenform an.

d) Gegeben ist die Gleichung einer Ebene E mit $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$. Bestimme die Gleichung der Ebene in Normalen- und Parameterform.

Lösung 3:

a) Parameterform von E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$

Umformen nach Normalenform: $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\\10\end{pmatrix}$

$E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-5\\0\\10\end{pmatrix} = 0$

b) In Normalenform aufstellen:

$$F : \left[\vec{x} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{OA}\right] \cdot \overrightarrow{AA'} = 0 \rightsquigarrow F : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix} = 0$$

In Parameterform umwandeln: Beliebiger Spannvektor senkrecht zum Normalenvektor

$\Rightarrow$ setze $\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ setze $\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow b = -\frac{1}{2}$

Damit gilt für die Ebene: $F : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1/2\end{pmatrix}$

c) Aus der Geraden und dem Normalenvektor von H bildet sich die Parameterform von G:

$G : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

Parameter in Koordinatenform: $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = 4$

damit gilt $G : x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4$

d) Zunächst in die Parameterform:

$3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \Longleftrightarrow x_2 = 2 - 3x_1 + 4x_3$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix}0 & + & x_1 & + & 0\\2 & - & 3x_1 & + & 4x_3\\0 & + & 0 & + & x_3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Und aus der Parameterform in die Normalenform:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

A4: Lineare Gleichungssysteme: Gib die Lösungsmenge der Gleichungssysteme an:

a)

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 \ -x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -8 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 &= -15 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 19 \\ 4x - 8z &= 20 \\ 5y - 4z &= -7 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} -5x_1 + x_2 \ -x_3 &= 7 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2_3 &= -11 \\ x_1 \qquad\quad x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Lösung 4:

a) Zeile 1 auf Zeilen 2 und 3 addieren, dann ergibt sich sofort $x_2 = 4$. x_2 in die dritte Zeile einsetzen $\rightarrow x_1 = 1$. Beide Werte in die erste Gleichung einsetzen, $x_3 = -2$.

$\mathbb{L} = \{(1, 4, -2)\}$

b) Aufstellen einer geeigneten Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 19 \\ 4 & 0 & -8 & 20 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 19 \\ 0 & -6 & 8 & 18 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 19 \\ 0 & -6 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{L} = \{(11, 1, 3)\}$$

c) Aufstellen einer geeigneten Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -1 & 7 \\ 5 & -3 & -2 & -11 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mathbb{L} = \{(-1, 2, 0)\}$$