

# Statistische und stochastische Grundlagen

VORLESUNGSMITSCHRIEB ZUM MODUL AN DER UNIVERSITÄT STUTTGART

---

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>I</b>	<b>Statistik</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>5</b>
1.1	Grundbegriffe der Statistik . . . . .	5
1.2	Charakterisierung der Merkmale . . . . .	5
1.3	Skalen . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Verteilungen und ihre Darstellungen</b>	<b>7</b>
2.1	Häufigkeiten . . . . .	7
2.2	Kumulierte Häufigkeiten . . . . .	8
2.3	Gruppierung . . . . .	8
2.4	Lagemaße . . . . .	8
2.4.1	Arithmetisches Mittel . . . . .	9
2.4.2	Median . . . . .	9
2.4.3	Modus . . . . .	10
2.4.4	Geometrisches Mittel . . . . .	10
2.4.5	Harmonisches Mittel . . . . .	10
2.5	Lageregeln . . . . .	10
2.6	Streuungsmaße . . . . .	10
2.6.1	Spannweite, Stichprobenspannweite . . . . .	11
2.6.2	Mittlere absolute Abweichung vom Median . . . . .	11
2.6.3	Quantile . . . . .	11
2.6.4	Fünf-Punkte-Zusammenfassung . . . . .	12
2.6.5	Standardabweichung . . . . .	12
2.6.6	Variationskoeffizient . . . . .	13
2.6.7	Varianz, empirische Varianz . . . . .	13
2.6.8	Stichprobenvarianz . . . . .	14
2.7	Konzentrationsmaße . . . . .	14
2.7.1	Lorenzkurve . . . . .	14
2.7.2	Gini-Koeffizient . . . . .	14
2.8	Schiefe und Wölbung . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Multivariate</b>	<b>16</b>
3.1	Kontingenztafel . . . . .	16
3.2	Bedingte Häufigkeiten . . . . .	16
3.3	Zusammenhangsmaße . . . . .	17
3.3.1	Chi-Quadrat-Koeffizient . . . . .	17
3.3.2	Kontingenzkoeffizient . . . . .	18
3.3.3	Empirischer Korrelationskoeffizient (Bravais-Pearson) . . . . .	18
3.3.4	$\phi$ -Koeffizient . . . . .	19

<b>II</b>	<b>Stochastik</b>	<b>20</b>
<b>1</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>21</b>
1.1	Allgemeine Definitionen . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>22</b>
2.1	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	22
2.1.1	Zufallsvariablen auf endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen . . . . .	23
2.1.2	Unabhängigkeit in endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen . . . . .	25
2.1.3	Binomialverteilung . . . . .	26
2.1.4	Hypergeometrische Verteilung . . . . .	27
2.2	Erweiterung auf allgemein diskrete Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	27
2.2.1	Geometrische Verteilung . . . . .	28
2.2.2	Poisson-Verteilung . . . . .	30
2.3	Grenzwertsätze . . . . .	30
2.3.1	Binomialverteilung im Grenzwert . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>32</b>
3.1	Zufallsvariablen auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsräumen . . . . .	32
3.1.1	Verteilungsfunktion . . . . .	32
3.1.2	Dichte- und Verteilungsfunktion . . . . .	33
3.2	Stetige Verteilungen . . . . .	34
3.2.1	Gleichverteilung . . . . .	34
3.2.2	Exponentialverteilung . . . . .	35
3.2.3	Normalverteilung . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Mehrdimensionale Zufallsvariablen</b>	<b>40</b>
4.1	Diskrete Zufallsvariablen . . . . .	40
4.2	Stetige Zufallsvariablen . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Zusammenhang von Zufallsvariablen</b>	<b>42</b>
5.1	Kovarianz . . . . .	42
5.2	Korrelationskoeffizient . . . . .	43
<b>III</b>	<b>Induktive Statistik</b>	<b>44</b>
<b>1</b>	<b>Schätzer</b>	<b>45</b>
1.1	Allgemeines zum Schätzen . . . . .	45
1.2	Punktschätzer . . . . .	45
1.2.1	Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	47
1.2.2	Bayes-Schätzer . . . . .	49
1.2.3	Kleinste Quadrate-Schätzer . . . . .	50
1.3	Intervallschätzer - Konfidenzintervalle . . . . .	51
1.3.1	Abschätzen mit der Tschebyscheff-Ungleichung . . . . .	51
1.3.2	Abschätzen über die Verteilungsfunktion . . . . .	51
1.3.3	Approximation über die Normalverteilung . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Hypothesentests</b>	<b>54</b>
2.1	Binomialtest . . . . .	54
2.1.1	Approximativer Binomialtest . . . . .	55
2.2	Gaußtest (Test mit der Normalverteilung) . . . . .	56
2.3	Chi-Quadrat-Anpassungstest . . . . .	56
2.4	Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest . . . . .	57
2.5	Lineare Einfachregression . . . . .	57

# 1

Kapitel 1: Statistik

---

# 1: GRUNDBEGRIFFE

## 1.1 Grundbegriffe der Statistik

**Statistische Einheit** Objekte die erfasst werden und an denen die interessierenden Größen erfasst werden

**Grundgesamtheit** Menge aller für die Fragestellung relevanten statistischen Einheiten

**Teilgesamtheit** Teilmenge der Grundgesamtheit

**Stichprobe** Tatsächlich untersuchte Teilmenge der Grundgesamtheit

**Merkmal, Variable** Größe von Interesse

**Merkmalsausprägung, Wert** Konkreter Wert des Merkmals für eine bestimmte statistische Einheit

## 1.2 Charakterisierung der Merkmale

**diskret** Merkmale, die nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Ausprägungen annehmen sind diskret.

**stetig** Merkmale, die Werte aus einem Intervall annehmen können heißen stetig.

**quasi-stetig** Merkmale, die sich nur diskret messen lassen aber aufgrund einer sehr feinen Abstufung wie stetige Merkmale behandelt werden können.

Die Ausprägungen eines stetigen Merkmals lassen sich immer so zusammenfassen, dass es als diskret angesehen werden kann. Die Ausprägungen heißen dann gruppiert oder klassiert.

## 1.3 Skalen

Zusätzlich zur Charakterisierung der Merkmale werden diese anhand ihres Skalenniveaus unterschieden.

**Nominalskala** Wenn die Ausprägungen Namen oder Kategorien sind, die den Einheiten zugeordnet werden heißt das Merkmal *nominalskaliert*. Beispielsweise Geschlecht oder Verwendungszweck.

**Ordinalskala** Merkmale mit Ausprägungen zwar mit Ordnung, bei denen allerdings ein Abstand der Merkmale nicht interpretierbar oder vergleichbar ist heißen *ordinalskaliert*. Ein Beispiel hierfür wären Schulnoten.

**Kardinalskala** Ein kardinalskaliertes Merkmal wird oft auch metrisch bezeichnet. Hierbei sind die Abstände der Ausprägungen interpretierbar und zusätzlich ist ein sinnvoller Nullpunkt der Skala festgelegt oder bestimmbar.

Auf Basis dieser Skalenmerkmale nennt man Merkmale mit endlich vielen Ausprägungen, die höchstens ordinalskaliert sind *qualitative* oder *kategoriale Merkmale*. Diese geben eine Qualität aber nicht ein Ausmaß wieder.

Geben die Ausprägungen jedoch eine Intensität oder Ausmaß wieder so spricht man von *quantitativen Merkmalen*. Alle Messungen mit Zahlenwerten stellen Ausprägungen quantitativer Merkmale dar. Ein kardinalskaliertes Merkmal ist stets quantitativ.

## 2: VERTEILUNGEN UND IHRE DARSTELLUNGEN

### 2.1 Häufigkeiten

Als *Urliste* bezeichnet man die Menge der Merkmale  $X$  der Untersuchungseinheiten  $U = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Die *auf tretenden Ausprägungen* von  $X$  sind die Werte  $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}, k \leq n$ . Oftmals treten in einem großen Datensatz der Größe  $n$  nicht auch  $n$  verschiedene Werte  $x_i$  auf. Damit definieren sich

#### Definition 1: Absolute Häufigkeit

Die absolute Häufigkeit einer auftretenden Ausprägung  $a$  in einer Urliste  $U$  ist

$$h(a) = |\{i \in \mathbb{N} \mid x_i = a, x_i \in U\}|.$$

Es gilt immer, dass die Summe aller absoluten Häufigkeiten gleich der Datensatzgröße ist

$$\sum_{i=1}^n h(a_i) = |U|.$$

Die absolute Häufigkeitsverteilung ist dargestellt durch die Folge von Werten

$$h_1, \dots, h_k = h(a_1), \dots, h(a_k)$$

#### Definition 2: Relative Häufigkeit

Die relative Häufigkeit einer auftretenden Ausprägung  $a$  in einer Urliste  $U$  ist

$$f(a) = \frac{h(a)}{|U|}.$$

Es gilt ähnlich wie bei der absoluten Häufigkeit für die Summe

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) = 1.$$

Eine grafische Darstellung einer Häufigkeitsverteilung nennt man ein *Histogramm*. Bei Histogrammen ist auf die Flächentreue zu achten, das bedeutet, dass der Flächeninhalt der aufgetragenen Rechtecke proportional (oder gleich) zu  $h_j$  oder  $f_j$  ist. So kann das menschliche Auge die Verteilung besser wahrnehmen.

Hat das Histogramm einer Verteilung nur einen deutlich erkennbaren Hochpunkt (Gipfel), heißt sie *unimodal*. Treten mehrere Gipfel auf nennt man die Verteilung *multimodal*. Bei zwei Gipfeln spricht man von einer *bimodalen* Verteilung.

Man nennt eine Verteilung *symmetrisch*, wenn es eine Symmetrieachse gibt, sodass die rechte und linke Hälfte der Verteilung annähernd zueinander spiegelbildlich sind. Eine Verteilung heißt *schief*, wenn

sie deutlich unsymmetrisch ist. Sie heißt dann *linksteil* oder *rechtsschief*, wenn der überwiegende Anteil von Daten linksseitig konzentriert ist. Dann steigt die Verteilung links deutlich steiler ab als rechts. Entsprechend *rechtssteile* oder *linksschiefe* Verteilungen.

## 2.2 Kumulierte Häufigkeiten

Die kumulierten Häufigkeitsverteilungen geben an, wie viele Datenpunkte der Urliste, beziehungsweise welcher Anteil der Daten unterhalb einer Schranke liegen. Um diese Aussage sinnvoll zu beantworten ist zumindest eine Ordinalskala nötig.

### Definition 3: Absolute kumulierte Häufigkeitsverteilung

Die absolut kumulierte Häufigkeitsverteilung ist die Funktion

$$H(x) = \sum_{i:a_i \leq x} h_i.$$

### Definition 4: Relative kumulierte Häufigkeitsverteilung

Die relative kumulierte Häufigkeitsverteilung oder auch empirische Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \sum_{i:a_i \leq x} f_i.$$

Die kumulierten Häufigkeitsverteilungen sind monoton wachsende Treppenfunktionen, die an den Sprungstellen rechtsseitig stetig sind.

## 2.3 Gruppierung

Sind alle auftretenden Ausprägungen Elemente eines Intervalls  $[a, b]$ , lässt sich dieses in gleich große Klassen der Größe  $d$  unterteilen.

Eine Klassifizierung ist allgemein

$$[a, c_1), \dots, [c_i, c_{i+1}), [c_{i+1}, c_{i+2}), \dots \quad \forall i : c_{i+1} - c_i = d$$

Klassifizierte Daten sind i.A. einfacher zu interpretieren als große Mengen von Daten, die sich nur wenig voneinander unterscheiden.

Der maximale Fehler bei der Klassifizierung ist die halbe Klassengröße.

## 2.4 Lagemaße

Lagemaße helfen beim Vergleich verschiedener Eigenschaften, bzw dem Vergleich verschiedener statistischer Einheiten mit einer gemeinsamen Eigenschaft.



**Definition 5: Lagemaß**

Ein *Lagemaß* ist eine Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$L(x_1 + a, \dots, x_n + a) = L(x_1, \dots, x_n) + a \quad \forall a, x_i \in \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Ein Lagemaß beschreibt das Zentrum einer Verteilung.

Beispiele für Lagemaße sind

**2.4.1 Arithmetisches Mittel**

Das arithmetische Mittel ist nur für quantitative Merkmale sinnvoll. Es berechnet sich durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (a_i \cdot f_i)$$

aus Rohdaten beziehungsweise aus den Häufigkeitsdaten.

Mit dem arithmetischen Mittel gilt die sogenannte *Schwerpunkteigenschaft*

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Unter einer linearen Transformation  $x \mapsto ax + b$  verhält sich das arithmetische Mittel analog

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n x_i + b = a\bar{x} + b$$

Wie aus der Formel erkennbar, ist das arithmetische Mittel extrem empfindlich gegen Ausreißer. Dafür wurden die folgenden Mittel eingeführt.

**DAS GETRIMMTE MITTEL** Um Ausreißer weniger stark ins Gewicht fallen zu lassen wird der Datensatz absichtlich verkleinert. Beim getrimmten Mittel aus einer sortiert vorliegenden Liste von Daten werden zum Beispiel die oberen und unteren 5% der Daten abgeschnitten, damit fallen auch eventuelle Ausreißer raus. Die Datensatzgröße bleibt jedoch nicht erhalten.

**DAS WINSORISIERTE MITTEL** Ähnlich wie beim getrimmten Mittel wird der Datensatz beim winsorisierten Mittel von oben und unten herein bearbeitet. Anstatt Daten zu löschen werden beispielsweise die oberen 5% durch den nächstkleineren Wert ersetzt. Hierbei bleibt also die Datensatzgröße gleich.

**2.4.2 Median**

Der Median stellt ein robusteres Lagemaß als das arithmetische Mittel dar, er ist resistenter gegen Ausreißer im Datensatz. Für  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , also einen sortiert vorliegenden Datensatz ist der Median

$$x_{\text{med}} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Benötigt eine Zahlenordnung, also eine Ordinalskala.

Der Modus verhält sich unter linearer Transformation  $y = ax + b$  genauso wie das arithmetische Mittel  $y_{\text{med}} = ax_{\text{med}} + b$ .

Mindestens 50% der Daten sind kleiner oder gleich  $x_{\text{med}}$ , genauso sind mindestens 50% der Daten größer oder gleich dem Median  $x_{\text{med}}$ .

### 2.4.3 Modus

Der Modus ist die Ausprägung größter Häufigkeit  $x_{\text{mod}} = a_i$  mit  $h(a_i) = \max \{h(a) \mid a \in A\}$  wobei  $A$  die Menge aller vorkommenden Ausprägungen der Urliste ist. Der Modus ist dann eindeutig, wenn die Häufigkeitsverteilung ein eindeutiges Maximum besitzt.

Der Modus empfiehlt sich schon für nominalskalierte Daten.

Der Modus verhält sich unter linearer Transformation  $y = ax + b$  genauso wie das arithmetische Mittel  $y_{\text{mod}} = ax_{\text{mod}} + b$ .

### 2.4.4 Geometrisches Mittel

Für eine Urliste  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  ist das geometrische Mittel definiert als

$$x_{\text{geom}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n u_i}.$$

Das geometrische Mittel wird z.B. bei der Berechnung des effektiven Jahreszinses verwendet, es stellt jedoch kein Lagemaß im engeren Sinne dar.

### 2.4.5 Harmonisches Mittel

Für eine Urliste  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  ist das harmonische Mittel definiert als

$$x_{\text{harm}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Genauso wie das geometrische Mittel zählt das harmonische nicht zu den Lagemaßen im engeren Sinne.

## 2.5 Lageregeln

Für symmetrische Verteilungen gilt  $\bar{x} \approx x_{\text{med}} \approx x_{\text{mod}}$ .

Für linkssteile Verteilungen  $\bar{x} > x_{\text{med}} > x_{\text{mod}}$ .

Und ebenso für rechtssteile Verteilungen  $\bar{x} < x_{\text{med}} < x_{\text{mod}}$ .

## 2.6 Streuungsmaße

Um eine Verteilung sinnvoll beschreiben zu können sind zusätzlich zu den Lagemaßen noch Aussagen über die Streuung der Daten um das Mittel nötig.

### Definition 6: Streuungsmaß

Ein *Streuungsmaß* ist eine Abbildung  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für die gilt

$$S(x_1 + a, \dots, x_n + a) = S(x_1, \dots, x_n) \quad \forall a, x_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq n)$$

Ein Streuungsmaß stellt dar, wie weit gestreut Werte einer Verteilung um ein Mittel liegen.

### 2.6.1 Spannweite, Stichprobenspannweite

Die Stichprobenspannweite stellt dar, in welchem Bereich die Ausprägungen liegen, denn diese ist einfach

$$x_{\max} - x_{\min}.$$

### 2.6.2 Mittlere absolute Abweichung vom Median

Die mittlere absolute Abweichung vom Median stellt eine robustere Alternative zur Stichprobenvarianz dar. Sie ist für eine Urliste  $U = \{x_1, \dots, x_n\}$  definiert als

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_{\text{med}}|$$

### 2.6.3 Quantile

Ein Quantil ist eine Kennzahl, die Daten nach einer relativen Häufigkeit trennt. So trennt das  $p$ -Quantil einer Verteilung die Daten so, dass etwa  $p \cdot 100\%$  der Daten darunter und  $(1 - p) \cdot 100\%$  darüber liegen. Damit ist der Median gerade das 50%-Quantil.

#### Definition 7: Quantile

Sei  $U = \{x_1, \dots, x_n\}$  eine geordnete Urliste, d.h.  $x_1 \leq \dots \leq x_j \leq \dots \leq x_n$ . Das  $p$ -Quantil  $x_p$  ist eine Ausprägung  $x_p \in U$  für die gilt

$$\frac{|\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \leq x_p, x_i \in U\}|}{n} \geq p \text{ und } \frac{|\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \geq x_p, x_i \in U\}|}{n} \geq 1 - p$$

Das heißt es liegen  $p\%$  der Daten unterhalb und  $(1 - p)\%$  der Daten oberhalb des  $p$ -Quantils. Sinnvoll berechnen lässt sich das  $p$ -Quantil durch die Formel

$$x_p = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p + 1)}) & \text{falls } n \cdot p \text{ ganzzahlig} \\ x_{(\lfloor n \cdot p \rfloor + 1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei nennt man das 25%-Quantil auch das *untere Quartil* und entsprechend das 75%-Quantil das *obere Quartil*.

#### Definition 8: Interquartilsabstand

Für metrische Merkmale ist der sogenannte *Interquartilsabstand* (*interquartile range*) die Distanz

$$d_Q = \text{IQR} = x_{0.75} - x_{0.25}.$$

Der IQR wird zum Beispiel beim Box-Plot verwendet.

Mit dem IQR können Zäune festgelegt werden, außerhalb derer sich höchstwahrscheinlich Ausreißer des Merkmals befinden. Ein Beispiel hierfür ist zum Beispiel der untere Zaun  $z_u = x_{0.25} - 1.5 \cdot d_Q$  und entsprechend die Obergrenze  $z_o = x_{0.75} + 1.5 \cdot d_Q$ , diese Werte werden wiederum beim Box-Plot verwendet.

### 2.6.4 Fünf-Punkte-Zusammenfassung

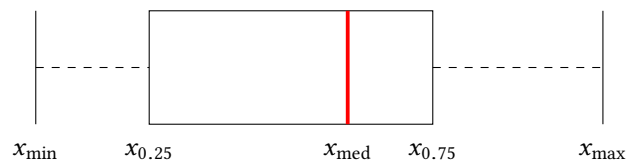
Die Quartile, das Minimum, Maximum sowie der Median teilen den Datensatz in vier Teile, wobei jeder etwa ein Viertel der Merkmale enthält. Die Angabe dieser fünf Werte wird auch als Fünf-Punkte-Zusammenfassung bezeichnet.

#### Box-Plot

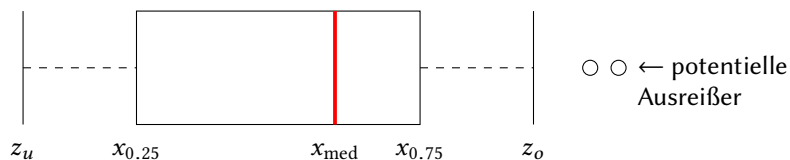
Das Box-Plot ist eine einfache Art und Weise die Ausprägungen einer Verteilung zu visualisieren. Für den Box-Plot wird eine fünf-Punkte-Zusammenfassung,  $(z_u, x_{0.25}, x_{\text{med}}, x_{0.75}, z_o)$  verwendet, wobei  $z_u$  und  $z_o$  beim modifizierten Box-Plot von der klassischen fünf-Punkte-Zusammenfassung abweichen können. Daran werden zwei Definitionen unterschieden, der „normale“ und der modifizierte Box-Plot.

Beim Box-Plot wird ein Rechteck zwischen den Quartilen gezeichnet, das  $x_{\text{med}}$  eingezeichnet als Linie oder Punkt beinhaltet. So sieht man dass sich 50% der Datenpunkte innerhalb der Box befinden. Die nach außen gezeichneten Linien geben an, wie weit die restlichen 50% der Datenpunkte gestreut liegen. Diese sogenannten Whiskers enden in Abhängigkeit von  $z_u$  bzw.  $z_o$ , diese Werte unterscheiden sich bei den beiden Definitionen.

**NORMALER BOX-PLOT** Das Fünftupel besteht aus den Werten  $(x_{\min}, x_{0.25}, x_{\text{med}}, x_{0.75}, x_{\max})$ . Wobei  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  die kleinste und größte Ausprägung der Verteilung darstellen. So sind alle Werte in der Spannweite der Whiskers enthalten. Ein Box-Plot sieht dann wie folgt aus



**MODIFIZIERTER BOX-PLOT (NACH FAHRMEIR)** Der wichtigste Unterschied zum normalen Box-Plot ist dass, anstatt der minimalen und maximalen Werte für  $z_u, z_o$  ein Zaun gewählt wurde. So ist  $z_u = x_{0.25} - 1.5 \cdot d_Q$  und  $z_o = x_{0.75} + 1.5 \cdot d_Q$  wobei  $d_Q$  der Interquartilsabstand ist. Allerdings ist zu beachten dass die Whiskers von der größten/ kleinsten Ausprägung innerhalb des Zauns zur Box ausgehen. Liegen also beispielweise innerhalb des Bereichs  $[z_u, x_{0.25}]$  keine Datenwerte, so existiert kein unterer Whisker. Datenpunkte, die außerhalb des Zauns liegen, werden mit Punkten dargestellt. Dies ist ein gutes Anzeichen für eventuelle Ausreißer.



### 2.6.5 Standardabweichung

Die Standardabweichung ist für eine Urliste  $U = \{x_1, \dots, x_n\}$  von metrischen Daten definiert als

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}$$

wobei die  $a_i$  die Ausprägungen der Urliste sind und  $f_i$  die relative Häufigkeit der Ausprägung  $a_i$  ist. Unter einer linearen Transformation  $x \mapsto ax + b$  der Ausprägungen wird  $\tilde{s}$  um  $|a|$  gedehnt. Eine Verschiebung der Werte um  $b$  hat keine Auswirkung.

### 2.6.6 Variationskoeffizient

Der Variationskoeffizient ist eine maßstabsunabhängige Maßzahl für die Streuung, sie basiert auf der Standardabweichung und ist definiert als

$$v = \frac{\tilde{s}}{\bar{x}}, \quad \bar{x} > 0$$

### 2.6.7 Varianz, empirische Varianz

Die empirische Varianz ist das Quadrat der Standardabweichung  $\tilde{s}^2$ .

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Sowohl Standardabweichung als auch die Varianz sind nicht resistent, reagieren also sehr empfindlich auf Ausreißer.

Für eine Berechnung von Hand gilt der sogenannte Verschiebungssatz

#### Satz 9: Verschiebungssatz

Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2.$$

Damit gilt insbesondere mit  $c = 0$  für die Varianz

$$\tilde{s}^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}.$$

**BEWEIS:**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} + \bar{x} - c)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ (x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) + (\bar{x} - c)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \underbrace{2(\bar{x} - c) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}_{=0} + \sum_{i=1}^n (\bar{x} - c)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2 \end{aligned}$$

**LINEARE TRANSFORMATION** Mit einer linearen Abbildung der Ausprägungen  $y_i = ax_i + b$  verhält sich die Varianz der Daten  $y_i$

$$\tilde{s}_y^2 = a^2 \tilde{s}_x^2 \text{ bzw. } \tilde{s}_y = |a| \tilde{s}_x$$

dies ergibt sich direkt aus den Formeln für die Varianz

$$\begin{aligned}\tilde{s}_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - a\bar{x} - b)^2 \\ &= a^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = a^2 \tilde{s}_x^2\end{aligned}$$

### 2.6.8 Stichprobenvarianz

Die Stichprobenvarianz stellt ein nicht resistentes Streuungsmaß dar. Sie ist für eine Urliste  $U = \{x_1, \dots, x_n\}$  definiert als

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2$$

## 2.7 Konzentrationsmaße

Konzentration geben Aufschluss über die Stärke der Konzentration von Daten.

### 2.7.1 Lorenzkurve

Ausgehend von geordneten Ausprägungen  $x_1 \leq \dots \leq x_n$  stellt die Lorenzkurve den Anteil der kumulierten relativen Merkmalssumme bezüglich dem Anteil der Merkmalsträger von der Grundgesamtheit dar.

#### Definition 10: Lorenzkurve

Die Lorenzkurve ergibt sich als Streckenzug durch die Punkte  $(0, 0), (u_1, v_1), \dots, (1, 1)$  wobei

$$u_j = \frac{j}{n} \quad \text{und} \quad v_j = \frac{\sum_{i=1}^j x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

ist.

Der Grundgedanke ist, darzustellen auf welchen Teil der Merkmalsträger welcher Anteil der Merkmalssumme zurückgeht.

Die Lorenzkurve wächst immer monoton und konvex, d.h. sie wölbt sich nach unten.

### 2.7.2 Gini-Koeffizient

In der Lorenzkurve drückt sich Konzentration der Daten durch Entfernung von der ersten Winkelhalbierenden aus. Genau dies nutzt der Gini-Koeffizient  $G$  aus.

$G$  ist gleich dem Verhältnis zwischen dem von Lorenzkurve und Diagonale eingeschlossenen Flächeninhalt und der Fläche unter der Winkelhalbierenden.

$$G = \frac{2 \sum_{i=1}^n i x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i} - \frac{n+1}{n} \quad G \in [0, \infty)$$

Dabei ist der minimale Wert des Gini-Koeffizienten  $G_{\min} = 0$  und das Maximum ist  $G_{\max} = \frac{n-1}{n}$ . Da der Wert des Gini-Koeffizienten mit von der Eingabegröße abhängen kann, bietet sich der normierte Gini-Koeffizient für Vergleiche an

$$G^* = \frac{G}{G_{\max}} = \frac{n}{n-1}G \quad G^* \in [0, 1]$$

## 2.8 Schiefe und Wölbung

//TODO

## 3: MULTIVARIATE

Bisher wurden nur eindimensionale Daten erfasst, nicht aber verschiedene Merkmale in Zusammenhang gebracht und gemeinsam betrachtet oder miteinander verglichen.

### 3.1 Kontingenztafel

Die Kontingenztafel eignet sich zur Darstellung der gemeinsamen Verteilung von zwei diskreten Merkmalen mit relativ wenigen Ausprägungen.

Auf Basis der Ausprägungen  $a_1, \dots, a_k$  des Merkmals  $X$  und  $b_1, \dots, b_m$  für  $Y$  liegen in der Urliste die gemeinsamen Messwerte vor. Das heißt die Urliste besteht aus den Tupeln  $(a_i, b_j)$ . Analog zum Eindimensionalen sind die absoluten Häufigkeiten  $h_{ij}$  definiert. Darauf aufbauend ebenfalls völlig analog die relativen Häufigkeiten  $f_{ij}$ .

**KONTINGENZTAFEL DER ABSOLUTEN HÄUFIGKEITEN** Die aus diesen Werten entstehende Tafel heißt  $(k \times m)$ -Kontingenztafel der absoluten Häufigkeiten. Sie enthält neben den Häufigkeitsdaten zusätzlich noch die Spalten- beziehungsweise Zeilensummen der Werte.

	$b_1$	$\dots$	$b_m$	
$a_1$	$h_{11}$	$\dots$	$h_{1m}$	$h_{1\cdot} = \sum_{i=1}^m h_{1i}$
$a_2$	$h_{21}$	$\dots$	$h_{2m}$	$h_{2\cdot} = \sum_{i=1}^m h_{2i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	
$a_k$	$h_{k1}$	$\dots$	$h_{km}$	$h_{k\cdot} = \sum_{i=1}^m h_{ki}$
	$h_{\cdot 1}$		$h_{\cdot m}$	$n$

Die Zeilensummen  $h_{i\cdot}$  werden auch als Randhäufigkeiten des Merkmals  $X$  bezeichnet. Diese Werte sind die einfachen Häufigkeiten mit denen das Merkmal  $X$  die Werte  $a_1, \dots, a_k$  annimmt, wenn  $Y$  nicht berücksichtigt wird.

Analog dazu sind die Spaltensummen die Häufigkeiten von  $Y$  unter Vernachlässigung des Merkmals  $X$ .

**KONTINGENZTAFEL DER RELATIVEN HÄUFIGKEITEN** Da Anteile beziehungsweise Prozente häufig anschaulicher sind als absolute Häufigkeitswerte betrachtet man häufig auch die Häufigkeitstafel der relativen Häufigkeiten. Diese entsteht durch teilen durch die Gesamtzahl  $n$ .

	$b_1$	$\dots$	$b_m$	
$a_1$	$f_{11}$	$\dots$	$f_{1m}$	$f_{1\cdot} = \sum_{i=1}^m f_{1i}$
$a_2$	$f_{21}$	$\dots$	$f_{2m}$	$f_{2\cdot} = \sum_{i=1}^m f_{2i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	
$a_k$	$f_{k1}$	$\dots$	$f_{km}$	$f_{k\cdot} = \sum_{i=1}^m f_{ki}$
	$f_{\cdot 1}$		$f_{\cdot m}$	1

### 3.2 Bedingte Häufigkeiten

Aus den gemeinsamen Häufigkeiten lässt sich nicht direkt auf den Zusammenhang zweier Merkmale schließen. So kann man ein Merkmal fest wählen und dann die Häufigkeitsverteilung des anderen



Merkmals unabhängig davon betrachten, mit dieser Herangehensweise kommt man zu den bedingten Häufigkeiten.

**Definition 11: Bedingte Häufigkeiten**

Für zwei Merkmale  $X$  und  $Y$  mit den Ausprägungen  $a_1, \dots, a_k$  und  $b_1, \dots, b_m$  ist

$$f_Y(b_j|a_i) = \frac{h_{ij}}{h_i}$$

die Häufigkeit des Merkmals  $b_j$  aus  $Y$  unter der Bedingung  $X = a_i$ .

Daraus geht durch die Werte

$$f_Y(b_1|a_i), \dots, f_Y(b_m|a_i)$$

die bedingte Häufigkeitsverteilung von  $Y$  unter der Bedingung  $X = a_i$  (Kurzschreibweise:  $(Y|X = a_i)$ ) hervor.

Analog für eine fest gewählte Ausprägung  $Y = b_i$  die bedingte Häufigkeitsverteilung  $f_X(a_j|b_i)$ .

### 3.3 Zusammenhangsmaße

Wir betrachten zunächst wie sich zwei Merkmale zueinander verhalten würden, wenn keinerlei Zusammenhang zwischen ihnen bestünde.

In einer Kontingenztafel müssten sich dann die einzelnen Spalten proportional zu den Spaltensummen verhalten und analog die Zeilen zu den Zeilensummen. Daraus ergibt sich die *erwartete Häufigkeit einer Ausprägung bei unabhängigen Merkmalen*  $X$  und  $Y$

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i.} \cdot h_{.j}}{n}$$

Um den Zusammenhang zweier Merkmale zu untersuchen betrachten wir also den Unterschied zwischen den tatsächlichen Häufigkeiten  $h_{ij}$  und den jeweils erwarteten Häufigkeiten  $\tilde{h}_{ij}$ .

#### 3.3.1 Chi-Quadrat-Koeffizient

Basierend auf der oben angesprochenen Differenz wird das erste Zusammenhangsmaß konstruiert.

**Definition 12:  $\chi^2$ -Koeffizient**

Für zwei Merkmale  $X$  und  $Y$  mit den Ausprägungen  $a_1, \dots, a_k$  und  $b_1, \dots, b_m$  ist

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} \quad \chi^2 \in [0, \infty)$$

Ist  $\chi^2$  groß, weichen die Häufigkeiten also stark von der Erwartung ab, hängen die Merkmale vermutlich voneinander ab. Sind die Abweichungen allerdings relativ klein und damit  $\chi^2$  ebenfalls, so sind die Merkmale wahrscheinlich unabhängig. Selbst bei unabhängigen Merkmalen ist meist wegen zufälligem Rauschen  $\chi^2 \neq 0$ , eine Entscheidung ist so also nicht möglich.

### 3.3.2 Kontingenzkoeffizient

Problematisch am  $\chi^2$ -Koeffizienten ist die Abhängigkeit von der Dimension der Tafel. Es kann nicht ohne weiteres aus dem Wert des Koeffizienten auf eine Unabhängigkeit der Merkmale geschlossen werden. Als erster Normierungsschritt folgt daraus der Kontingenzkoeffizient.

#### Definition 13: Kontingenzkoeffizient

Aus dem  $\chi^2$ -Koeffizienten für zwei Merkmale mit der Urliste der Größe  $n$  ist der Kontingenzkoeffizient

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \quad K \in [0, K_{\max}] \text{ für } K_{\max} = \sqrt{\frac{M-1}{M}}, \quad M = \max\{m, k\}$$

Dabei seien  $m$  und  $k$  die Mächtigkeit der Ausprägungsliste der beiden Merkmale.

**KORRIGIERTER KONTINGENZKOEFFIZIENT** Da auch dieser für einen sinnvollen Vergleich nicht ausreichend normiert ist, wird der korrigierte Kontingenzkoeffizient eingeführt, wobei  $K$  durch  $K_{\max}$  normiert wird.

$$K^* = \frac{K}{K_{\max}} \quad K^* \in [0, 1]$$

Sowohl der Kontingenzkoeffizient als auch der  $\chi^2$ -Koeffizient stellen nur die Stärke des Zusammenhangs dar, nicht aber eine Richtung der Wirkungsweise.

### 3.3.3 Empirischer Korrelationskoeffizient (Bravais-Pearson)

Um nicht nur die Stärke des Zusammenhangs zu untersuchen sondern auch die Richtung der Wirkungsweise, wird der empirische Korrelationskoeffizient auf metrischen Merkmalen eingeführt.

#### Definition 14: Emp. Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson

Für zwei metrische Merkmale  $X$  und  $Y$  auf einer Urliste der Größe  $n$  ist der empirische Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\tilde{s}_{XY}}{\tilde{s}_X \cdot \tilde{s}_Y}$$

wobei  $\tilde{s}_X$  bzw.  $\tilde{s}_Y$  die Standardabweichungen der Merkmale  $X$  und  $Y$  sind.

Der Korrelationskoeffizient misst die Stärke des linearen Zusammenhangs. Damit ergibt sich für  $r > 0$  eine positive Korrelation also ein gleichsinniger Zusammenhang und ein gegensinniger Zusammenhang für  $r < 0$ . Bei  $r \approx 0$  sind die Merkmale nicht korreliert.

**EMPIRISCHE KOVARIANZ** Die Kovarianz ist die Summe der Abweichungsprodukte mit  $n$  normiert.

$$\tilde{s}_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

**RECHENGÜNSTIGE VARIANTE DES KORRELATIONSKOEFFIZIENTEN**

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

**3.3.4  $\phi$ -Koeffizient**

Für Merkmale mit nur zwei Ausprägungen (*dichotome* oder *binäre* Merkmale) wird der Bravais-Pearson-Koeffizient auch  $\phi$ -Koeffizient genannt. Er berechnet sich aus den Häufigkeitseinträgen der Kontingenztafel

$$r = \frac{h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}}{\sqrt{h_{1.} h_{2.} h_{.1} h_{.2}}} = \phi$$

Es gilt sogar zusätzlich

$$\phi^2 = \frac{\chi^2}{n}$$

# 2

Kapitel 2: Stochastik

---

# 1: WAHRSCHEINLICHKEITSRÄUME

## 1.1 Allgemeine Definitionen

- Ein Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus einem *Grundraum*  $\Omega$ , einem System  $\mathcal{A}$  von Teilmengen von  $\Omega$  und der *Wahrscheinlichkeitsverteilung*  $P$ .
- Der Grundraum  $\Omega \neq \emptyset$  ist nichtleer und ist die Menge der Ergebnisse. Elemente  $A \in \mathcal{A}$  heißen Ereignisse, ein Ereignis mit  $|A| = 1$  heißt Elementarereignis. Außerdem ist  $\emptyset \in \mathcal{A}$  das *unmögliche Ereignis* und  $\Omega \in \mathcal{A}$  das sogenannte *sichere Ereignis*.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist eine Abbildung  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Die Ereignismenge  $\mathcal{A}$  muss unter den Mengenoperationen  $\{\cap, \cup, \setminus\}$  und Komplement abgeschlossen sein. Man nennt zwei Ereignisse  $A, B \in \mathcal{A}$  *unvereinbar*, wenn  $A \cap B = \emptyset$  ( $A$  und  $B$  sind disjunkte Mengen). Für paarweise unvereinbare Ereignisse  $A_i$  definieren wir  $\bigcup_i A_i := \sum_i A_i$ .
- Eine *Zufallsvariable* ist eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sie ordnet einem Ergebnis einen Wert zu. Zum Beispiel wäre die Augensumme beim Werfen mehrerer Würfel eine Zufallsvariable. Für eine Zufallsvariable  $X$  sei  $X^{-1}$  für eine beliebige Teilmenge  $A \in \mathcal{A}$  definiert als das Urbild  $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ .

**KURZSCHREIBWEISEN:** Für das Urbild eines Ereignisses bezüglich einer Zufallsvariable wird eine Kurzschreibweise definiert. So ist zum Beispiel  $\{3 \leq X \leq 4\} := X^{-1}([3, 4])$ . Auch eine Schreibweise wie  $\{X = 3\} \cup \{X = 4\} := X^{-1}(\{3, 4\})$  ist möglich.

## 2: DISKRETE WAHRSCHEINLICHKEITSRÄUME

Einen einfachen Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsräume stellen die endlichen Wahrscheinlichkeitsräume dar. Sie sind ein Sonderfall der diskreten Wahrscheinlichkeitsräume.

### 2.1 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist endlich, wenn  $|\Omega| < \infty$  ist. Man verwendet dann üblicherweise  $\mathcal{A} = \text{Pot}(\Omega)$ . Damit ist  $\mathcal{A}$  unter allen Mengenoperationen abgeschlossen und für eine Zufallsvariable  $X$  ist  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  für alle  $B \subseteq \mathbb{R}$ .

#### Definition 15: Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Das Paar  $(\Omega, P)$  ist ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, wenn gilt

**EW1**  $\forall A \subseteq \Omega : P(A) \geq 0$

**EW2**  $P(\Omega) = 1$

**EW3**  $\forall A, B \subseteq \Omega, A \cap B = \emptyset : P(A \cup B) := P(A + B) = P(A) + P(B)$

#### Satz 16: Folgerungen aus der Definition

$$P(\emptyset) = 0$$

1.  $P(\sum_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

3.  $0 \leq P(A) \leq 1$

4.  $\forall A \subseteq \Omega : P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

5.  $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

6.  $\forall A, B \subseteq \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7.  $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$

8.  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

**BEISPIEL:** Wir werfen einen Oktaeder, das heißt  $\Omega = \{1, \dots, 8\}$  und  $\mathcal{A} = \text{Pot } \Omega$ . Es gilt  $p(\omega) = P(\{\omega\}) = \frac{1}{8}$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Wir definieren das Ereignis  $A_1 = \{2, 3, 5, 7\}$ , also alle Primzahlen auf dem Würfel.

$$P(A_1) = p(2) + p(3) + p(5) + p(7) = \sum_{\omega \in A_1} p(\omega) = \frac{1}{2}.$$

Analog ist für  $A_2 = \{1, 3, 5, 7\}$  die Wahrscheinlichkeit  $P(A_2) = \frac{1}{2}$ . Für die Vereinigung gilt

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

### 2.1.1 Zufallsvariablen auf endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

Zufallsvariablen auf endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen sind dann Abbildungen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Verteilung  $P^X : \text{Pot}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $P^X(B) := P(X^{-1}(B))$  für alle  $B \subseteq X(\Omega)$  ist.

#### KURZSCHREIBWEISEN:

- Völlig analog zu den bereits eingeführten Kurzschreibweisen definieren wir

$$\begin{aligned} P^X(B) &= P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ &= P(\{X \in B\}) \\ &= P(X \in B) \end{aligned}$$

- Darauf aufbauend ist  $P(a \leq X \leq b)$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  die Wahrscheinlichkeit  $P^X([a, b] \cap X(\Omega))$ .
- Und für einelementige Mengen ist  $P(X = x) = P(X \in \{x\})$ .

#### Definition 17: Verteilungsfunktion

Eine Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X$  ist eine Abbildung  $F^X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F^X(x) = P(X \leq x)$ . Dies ist eine monoton steigende, rechtsseitig stetige Funktion.

#### Definition 18: Laplace-Experiment

Ein Laplace-Experiment entspricht der intuitiven Gleichverteilung. Es handelt sich um einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  wobei  $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$  für alle  $\omega \in \Omega$  gilt.

Das bedeutet  $\forall A \subseteq \Omega : P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

**BEMERKUNG:** Für eine Zufallsvariable  $X$  ist  $P^X$  in der Regel keine Gleichverteilung, da  $|X^{-1}(\{\omega\})| > 1$  vorkommen kann.

**BEISPIEL:** Für zwei Würfel ist der Grundraum  $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$  und die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse ist  $p((\omega_1, \omega_2)) = \frac{1}{36}$  für alle  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ . Die Zufallsvariable  $M(\omega_1, \omega_2) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$  beschreibt das Maximum der beiden Würfelresultate. Damit ist

$m$	1	2	3	4	5	6
$P(M = m)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

#### Definition 19: Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen  $X$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  ist

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) \end{aligned}$$

**Satz 20: Sätze zum Erwartungswert**

Für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  und  $a \in \mathbb{R}$  gilt

**Linearität 1**  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

**Linearität 2**  $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$

**Indikatorfunktion**  $E(1_A) = P(A)$  mit  $1_A = 1 \Leftrightarrow X(\omega) \in A$

**Ordnung**  $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega) \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

**Definition 21: Varianz und Standardabw. von Zufallsvariablen**

Die Varianz einer Zufallsvariablen  $X$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  ist

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Entsprechend zur Standardabweichung von Merkmalen aus der Statistik ist die Standardabweichung einer Zufallsvariablen die Wurzel der Varianz

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Satz 22: Sätze zur Varianz**

Für eine Zufallsvariable  $X$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt für die Varianz

1.  $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$  (Lineare Transformation)
2.  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$  (Verschiebungssatz)
3.  $V(X) \geq 0$
4.  $V(X) = 0 \Leftrightarrow \exists! a \in \mathbb{R} : P(X = a) = 1$

**BEWEIS:**

1. Varianz einer linear transformierten Zufallsvariable

$$\begin{aligned} V(\alpha X + \beta) &= E[((\alpha X + \beta) - E(\alpha X + \beta))^2] \\ &= E[(\alpha X - \alpha E(X))^2] && \text{(Linearität)} \\ &= E[\alpha^2 (X - E(X))^2] \\ &= \alpha^2 E[(X - E(X))^2] \\ V(\alpha X + \beta) &= \alpha^2 V(X) \end{aligned}$$

2. Beweis des sog. Verschiebungssatzes mit der Linearität des Erwartungswerts

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2X \cdot E(X) + E(X)^2] \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(E(X)) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$



**Satz 23: Tschebyscheff-Ungleichung**

Für eine Zufallsvariable  $X$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  gilt für alle  $\epsilon > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

**Definition 24: Bedingte Wahrscheinlichkeit**

Auf Basis eines Zufallsexperiments wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis  $B$  eintritt, während zusätzlich ein fest gewähltes Ereignis  $A$  eingetreten ist, *bedingte Wahrscheinlichkeit* bezeichnet. Man interessiert sich also für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $B$  unter der Bedingung, dass  $A$  bereits eingetreten ist. In Zeichen ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(B|A) = P_A(B) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

**Definition 25: Satz von Bayes**

Der Satz von Bayes beschreibt das Verhältnis zwischen einer bedingten Wahrscheinlichkeit und seiner umgekehrten Form

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

**2.1.2 Unabhängigkeit in endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen****Definition 26: Unabhängigkeit von Ereignissen**

Man nennt zwei Ereignisse  $A, B \subset \Omega$  *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt.

**BEMERKUNG:**

- Die Unabhängigkeit von Ereignissen ist offensichtlich eine symmetrische Relation.
- Unabhängigkeit ist nicht mit stochastischer Kausalität zu verwechseln
- Sind zwei Ereignisse unabhängig, dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit gleich der totalen

$$P(A|B) = P(A).$$

- Sind zwei Ereignisse  $A, B$  unvereinbar, das heißt  $A \cap B = \emptyset$ , sind sie genau dann unabhängig, wenn  $P(A) = 0$  oder  $P(B) = 0$  gilt.
- Sind zwei Ereignisse  $A, B$  unabhängig, so sind auch deren Komplemente  $\bar{A}, \bar{B}$  unabhängig.

**Definition 27: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen**

Zwei Zufallsvariablen in einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  heißen unabhängig, wenn für alle  $B_X, B_Y \subseteq \Omega$  gilt

$$\begin{aligned} P(X \in B_X \wedge Y \in B_Y) &= P(X \in B_X) \cdot P(Y \in B_Y) \\ P(X^{-1}(B_X) \cap Y^{-1}(B_Y)) &= P(X^{-1}(B_X)) \cdot P(Y^{-1}(B_Y)) \end{aligned}$$

**BEMERKUNG:** Es reicht zwar diese Eigenschaft nur für die einelementigen Teilmengen von  $\Omega$  zu zeigen, allerdings entstehen auch damit bereits zu viele Kombinationen.

**Satz 28: Erwartungswert bei unabhängigen ZV**

Für zwei unabhängige Zufallsvariablen gilt für das Produkt der beiden

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

**BEWEIS:** Für das Produkt zweier unabhängiger Zufallsvariablen ist der Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{z \in (X \cdot Y)(\Omega)} z \cdot P(X \cdot Y = z) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \cdot P(X = x \wedge Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[ x \cdot P(X = x) \cdot \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot P(Y = y) \right] && \text{(Unabhängigkeit)} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) \cdot \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot P(Y = y) \\ &= E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

**2.1.3 Binomialverteilung****Definition 29: Bernoulli-Experiment**

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ausgängen. Das heißt für eine Zufallsvariable  $X$  gilt  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = 1) = p \qquad P(X = 0) = (1 - p) = q$$

**BEMERKUNG:** Der Erwartungswert eines Bernoulli-Experiments ist  $E(X) = p$ . Für die Varianz gilt

$$V(X) = E(X)^2 - 2p \cdot E(X) + p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Führt man nun  $n$  *unabhängige* Bernoulli-Experimente  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$  durch, erhält man eine sogenannte *Bernoulli-Kette* der Länge  $n$ . Ein Ereignis dieses Grundraums ist  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  wobei  $X_i(\omega) = \omega_i$  gilt. Der Grundraum der Bernoulli-Kette ist also  $\Omega = \{0, 1\}^n$ . Damit gilt für die Verteilung des Wahrscheinlichkeitsraums

$$\begin{aligned}
P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) &= P(X_1 = \omega_1, X_2 = \omega_2, \dots, X_n = \omega_n) \\
&= \prod_{i=1}^n P(X_i = \omega_i) && \text{(Unabhängigkeit)} \\
&= \prod_{i: \omega_i=1} p \cdot \prod_{i: \omega_i=0} (1-p)
\end{aligned}$$

Damit ist bei  $n$  Durchführungen die Wahrscheinlichkeit  $k$  mal das Ergebnis  $\omega_i = 1$  zu erhalten ( $k$  Treffer bei  $n$  Versuchen)

$$p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Betrachten wir nun also die Zufallsvariable  $X$ , die die Summe der Treffer beschreibt  $X : \sum_{i=1}^n X_i$ . Das Ereignis  $\{X = k\} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}$  beschreibt die Ausgänge, bei denen genau  $k$  von  $n$  Treffern aufgetreten sind. Es ist  $|\{X = k\}| = \binom{n}{k}$ . Damit erhält man insgesamt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Man nennt  $X$  dann *binomialverteilt* mit den Parametern  $n$  und  $p$ , man schreibt  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Für den Erwartungswert und die Varianz von binomialverteilten Zufallsvariablen gilt

$$\begin{aligned}
E(X) &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \cdot p \\
V(X) &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{\text{unabh.}}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) = n \cdot p(1-p)
\end{aligned}$$

### 2.1.4 Hypergeometrische Verteilung

Man betrachtet eine Grundgesamtheit der Größe  $N$ , in der  $M$  Elemente eine gewünschte Eigenschaft besitzen, d.h. einen Treffer darstellen.

Eine Zufallsvariable die bei einer Stichprobe der Größe  $n$  (ohne Zurücklegen) die Anzahl Treffer zählt heißt dann *hypergeometrisch verteilt*, man schreibt  $X \sim \text{Hyp}(n, M, N - M)$ .

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Sei  $A_j$  das Ereignis, dass die  $j$ te Kugel die gewünschte Eigenschaft hat. Die Zufallsvariable lässt sich also schreiben als

$$X = \sum_{j=1}^n 1_{A_j}$$

Die Wahrscheinlichkeit, für  $A_j$  ist  $P(A_j) = \frac{M}{N}$ . Damit ist der Erwartungswert einer hypergeometrisch verteilten Zufallsvariable

$$E(X) = E\left(\sum_{j=1}^n 1_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^n E(1_{A_j}) = n \cdot \frac{M}{N}$$

## 2.2 Erweiterung auf allgemein diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Bisher haben wir endliche Wahrscheinlichkeitsräume betrachtet, das heißt  $0 < |\Omega| < \infty$ . Wir erlauben nun eine Erweiterung auf  $0 < |\Omega| \leq |\mathbb{N}|$ .

**Definition 30: Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**

Das Paar  $(\Omega, P)$  ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, wenn

**Nicht Negativität**  $\forall A \subseteq \Omega : P(A) \geq 0$

**Normiertheit**  $P(\Omega) = 1$

**$\sigma$ -Additivität** Für alle paarweise disjunkten Teilmengen  $A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$  gilt  $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  gilt.

**KONSEQUENZEN AUS DER ERWEITERUNG:**

- Endliche Wahrscheinlichkeitsräume sind Sonderfälle von diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.
- Es gilt wie im endlichen Fall  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ . Hier kann aber potentiell  $A$  unendlich viele Elemente beinhalten, allerdings handelt es sich stets um eine absolut konvergente Reihe.
- Alle Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten gelten weiter.
- Aber  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$  ist eventuell eine nicht konvergente Reihe. Der Erwartungswert einer Zufallsvariable ist nur definiert, wenn  $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot P(\{\omega\}) < \infty$ .

**BEISPIEL:** Das sogenannte *Sankt-Petersburg-Paradoxon* behandelt das Problem von nicht existierendem Erwartungswert. Es wird eine Münze geworfen bis zum ersten Vorkommen von Zahl im Wurf  $k$ . Der Grundraum ist also  $\Omega = \mathbb{N}$ . Damit ist  $P(\{k\}) = \frac{1}{2^k}$ , die Zufallsvariable  $X$  beschreibt die Auszahlung in Abhängigkeit von  $k$ ,  $X(k) = 2^k k - 1$ . Die Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} X(k) \cdot P(\{k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \rightarrow \infty$$

ist divergent - der Erwartungswert  $E(X)$  existiert nicht.

**2.2.1 Geometrische Verteilung**

Wir führen nun unabhängige Bernoulli-Experimente mit Trefferwahrscheinlichkeit  $0 < p < 1$  so oft hintereinander aus, bis ein Erfolg eintritt. Damit ist der Grundraum die Menge

$$\Omega = \left\{ \underset{\omega_1}{1}, \underset{\omega_2}{01}, \underset{\dots}{001}, 0001, \dots \right\}.$$

$\Omega$  ist abzählbar unendlich groß. Aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Experimente ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis

$$P(\{\omega_k\}) = (1-p)^{k-1} \cdot p = q^{k-1} p.$$

Die Zufallsvariable, die die Anzahl Misserfolge bis zum Erfolg zählt  $X(\omega_k) = k-1$  heißt dann *geometrisch verteilt* mit Parameter  $p$ , in Zeichen  $X \sim G(p)$ .

Es ist also

$$P(X = k) = q^k p.$$

Die Verteilungsfunktion an den Stellen  $i \in \mathbb{N}$  der geometrisch verteilten Variable ist

$$F^X(i) = P(X \leq i) = \sum_{k=0}^i P(X = k) = p \cdot \sum_{k=0}^i q^k = p \cdot \frac{1 - q^{i+1}}{1 - q} = 1 - q^{i+1}.$$

Und analog gilt für den Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot q^i p = pq \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot q^{i-1} \stackrel{2.1}{=} p \cdot q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p \cdot q}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

Mit der Umformung

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dq} q^i = \frac{d}{dq} \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (2.1)$$

Die Varianz von  $X$  ist dann

$$V(X) = \frac{1-p}{q^2} = \frac{q}{p^2}.$$

**BEISPIEL:** Wir betrachten ein Spiel mit Sammelbildern (z.B. Fußballspieler aus Hanuta). Die Zufallsvariable  $Y_i$  beschreibt die Anzahl Bilder, die man ziehen muss um seine Sammlung von  $i$  Bildern auf  $i+1$  zu vergrößern.

Damit ist die Anzahl an Misserfolgen vor dem richtigen Bild geometrisch verteilt

$$(Y_i - 1) \sim G\left(\frac{n-i}{n}\right) \Rightarrow E(Y_i) = E(Y_i - 1) + 1 = \frac{1}{\frac{n-i}{n}} = \frac{n}{n-i}$$

Insgesamt beschreibt die Zufallsvariable  $Y$  die benötigten Bilder für eine Sammlung der Größe  $n$

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \Rightarrow E(Y) = \sum_{i=0}^{n-1} E(Y_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i} = n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx n \cdot \ln(n)$$

Für maximal 63 mögliche Bilder ist  $E(Y) = 297.88$  und die Näherung  $63 \ln(63) = 261.01$ .

### Satz 31: Gedächtnislosigkeit der geom. Verteilung

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable  $X \sim G(\lambda)$  und  $x, y \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$P(X \geq x+y \mid X \geq x) = P(X \geq y)$$

das heißt,  $X$  ist gedächtnislos.

**BEWEIS:**

$$\begin{aligned} P(X \geq x+y \mid X \geq x) &= \frac{P(X \geq x+y) \cap P(X \geq x)}{P(X \geq x)} \\ &= \frac{P(X \geq x+y)}{P(X \geq x)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq x+y-1)}{1 - P(X \leq x-1)} \\ &= \frac{1 - F^X(x+y-1)}{1 - F^X(x-1)} \\ &= \frac{q^{x+y}}{q^x} \\ &= q^y = P(X \geq y) \end{aligned}$$

**Bedeutung:** Diese Aussage widerspricht der Intuition, dass zum Beispiel beim Würfeln die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu werfen größer werden *muss*, wenn schon lange keine geworfen wurde.

### 2.2.2 Poisson-Verteilung

Eine Zufallsvariable  $X$ , die Ereignisse in einem Zeitintervall zählt, wobei im Mittel  $\lambda$  Ereignisse auftreten heißt *Poisson-verteilt* mit Parameter  $\lambda$ , in Zeichen  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ .

**HERLEITUNG:** Die Poisson-Verteilung entsteht als Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ , wenn man das betrachtete Zeitintervall in  $n$  Teile der Länge  $1/n$  aufteilt, so dass in jedem Teilintervall genau 1 oder 0 Ereignisse auftreten.

Die Anzahl der Ereignisse  $X_n$  im gesamten Intervall ist damit  $\text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ -verteilt. (Hieraus folgt,  $E(X_n) = \lambda$ .) Für  $X_n$  gilt dann nach der Binomialverteilung

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n \cdot p_n)^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{n \cdot p_n}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{n \cdot p_n}{n}\right)^n \\ &= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n!}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

für  $k \rightarrow \infty$  folgt

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{n^k}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion konvergiert damit gegen 1, denn

$$\begin{aligned} F^X(k) &= \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} F^X(k) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}} = 1. \end{aligned}$$

**FOLGERUNG:**

- Für die Wahrscheinlichkeiten einer Poissonverteilten Zufallsvariablen gilt

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \quad i \in \mathbb{N}_0$$

- Die Varianz ist, wie der Erwartungswert  $V(X) = E(X) = \lambda$ .
- Für zwei unabhängige Zufallsvariablen  $X \sim \text{Po}(\lambda)$  und  $Y \sim \text{Po}(\mu)$  ist

$$(X + Y) \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$$

## 2.3 Grenzwertsätze

Wollen wir ein Experiment oft wiederholen, erhalten wir eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

Wird dieses Experiment durch die Zufallsvariable  $X$  auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  beschrieben, so stellt sich die Frage was der Grundraum der Folge von  $X_i$  ist.

$$(\Omega^n, P^{(n)}) \text{ mit } P^{(n)}(\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\}) \stackrel{\text{unabh.}}{=} \prod_{i=1}^n P(\{\omega_i\})$$

Wobei die  $X_i(\omega) = X(\omega_i)$  wie  $X$  verteilt und unabhängig sind.

Das Problem ist der Grundraum dieser Folge, das unendliche kartesische Produkt ist überabzählbar, es handelt sich nicht mehr um einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

### Satz 32: Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Sei  $(\Omega, P)$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen auf  $\Omega$ .

Gelte weiter für alle diese Zufallsvariablen, dass ihr Erwartungswert und ihre Varianz gleich sind

$$\begin{aligned}\mu &= E(X_1) = E(X_2) = \dots \\ \sigma^2 &= V(X_1) = V(X_2) = \dots\end{aligned}$$

Bildet man nun das arithmetische Mittel  $M_n$  über die ersten  $n$  Zufallsvariablen

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

dann gilt für  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

Das bedeutet für große Werte  $n$  konvergiert das tatsächlich errechnete Mittel  $M_n$  gegen den Mittelwert des Experiments  $\mu$ . Man kann also (unendlich) große Folgen von Zufallsvariablen mit einer genügend großen Anzahl von Wiederholungen approximieren.

### 2.3.1 Binomialverteilung im Grenzwert

Betrachten wir nun das Verhalten der Binomialverteilung für große  $n$

#### Satz 33: Zentraler Grenzwertsatz

Sei  $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$  mit festem  $0 < p < 1$  und  $q = 1 - p$ , dann gilt für

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Dies wird auch noch einmal bei Punkt 3.2.3 aufgegriffen.

## 3: ALLGEMEINE WAHRSCHEINLICHKEITSRÄUME

Wird der Grundraum überabzählbar, reicht das diskrete Modell nicht mehr aus.

### Definition 34: Allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum

Ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  wobei

- der Grundraum nicht leer ist  $\Omega \neq \emptyset$ ,
- die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt

$$\Omega \in \mathcal{A} \quad (3.1)$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A} \quad (\text{Abschluss unter Komplement}) \quad (3.2)$$

$$A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A} \quad (\text{Abschluss unter Vereinigung}) \quad (3.3)$$

- die Abbildung  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt

$$\forall A : P(A) \geq 0 \quad (\text{Nichtnegativität}) \quad (3.4)$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (\text{Normiertheit}) \quad (3.5)$$

Und für paarweise disjunkte  $A_i \in \mathcal{A}$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\sigma\text{-Additivität}) \quad (3.6)$$

#### BEMERKUNGEN:

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume lassen sich mit  $\mathcal{A} = \text{Pot}(\Omega)$  als allgemeine Wahrscheinlichkeitsmodelle darstellen. Das allgemeine Modell ist also wirklich das mächtigste.

## 3.1 Zufallsvariablen auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsräumen

Für Zufallsvariablen auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsräumen muss die sogenannte Messbarkeitseigenschaft gelten

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

### 3.1.1 Verteilungsfunktion



**Satz 35: Eigenschaften der Verteilungsfunktion**

Für die Verteilungsfunktion  $F$  einer Zufallsvariable  $X$  gilt

1.  $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ .
2. sie ist rechtsseitig stetig.
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
4.  $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$ .
5.  $P(X = x) = F(x) - F(x^-) = F(x) - F(\lim_{x \rightarrow x^-} x)$ .

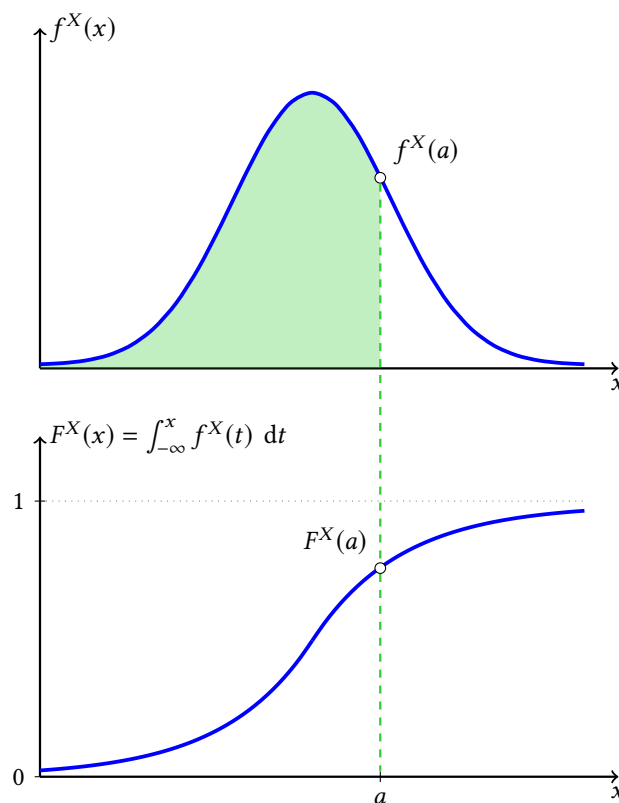
**3.1.2 Dichte- und Verteilungsfunktion****Definition 36: Verteilungsfunktion**

Wie bereits im diskreten Modell ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable  $X$  definiert als

$$F^X(x) = P(X \leq x)$$

In einem allgemeinen Wahrscheinlichkeitsraum ist diese Wahrscheinlichkeit über die sogenannte Dichtefunktion von  $X$  gegeben

$$F^X(x) = P(X \leq x) := \int_{-\infty}^x f^X(t) \, dt.$$



**BEMERKUNG:** Aus der Normiertheit von  $P$  folgt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = 1$$

### Definition 37: Erwartungswert und Varianz im allgemeinen W-Raum

Analog zur Definition von Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen sind die beiden Kennzahlen definiert als

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) \, dx = E((X - E(X))^2) = \sigma(X)^2.$$

## 3.2 Stetige Verteilungen

### 3.2.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist wahrscheinlich die einfachste stetige Verteilung.

Stellt man sich einen  $n$  seitigen Würfel vor und betrachtet dieses Experiment für  $n \rightarrow \infty$ , so verwandelt sich der Würfel immer mehr hin zu einer Kugel. Aussagen über genau einen Punkt auf der Oberfläche machen nun keinen Sinn mehr, stattdessen können Aussagen über Flächen beziehungsweise Intervalle gemacht werden.

$$P(X = i) \rightarrow 0 \quad \text{aber} \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Betrachten wir eine Zufallsvariable mit Werten aus  $[a, b] = \Omega$  für die gilt

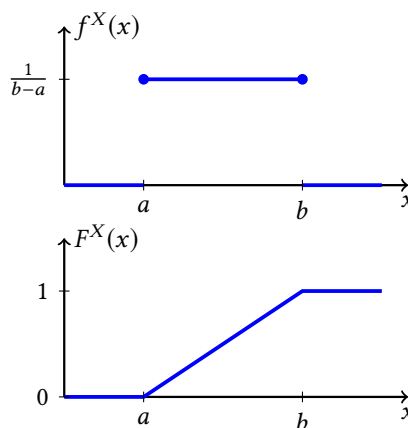
$$\forall [c, d] \subseteq [a, b] : P([c, d]) = \frac{|d - c|}{|b - a|}$$

dann nennen wir diese gleichverteilt. Man schreibt dann  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ .

Das heißt eine Zufallsvariable  $X$  heißt *gleichverteilt* auf dem Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , wenn für Dichte und Verteilung gilt

$$f^X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F^X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$



**ERWARTUNGSWERT UND VARIANZ** Wie man leicht erkennt, ist der Erwartungswert einer Standard-Gleichverteilten Zufallsvariable  $X$

$$X \sim \mathcal{U}(0, 1) \rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx = \int_0^1 x \cdot f(x) \, dx = \frac{1}{2}.$$

Und für die Varianz gilt

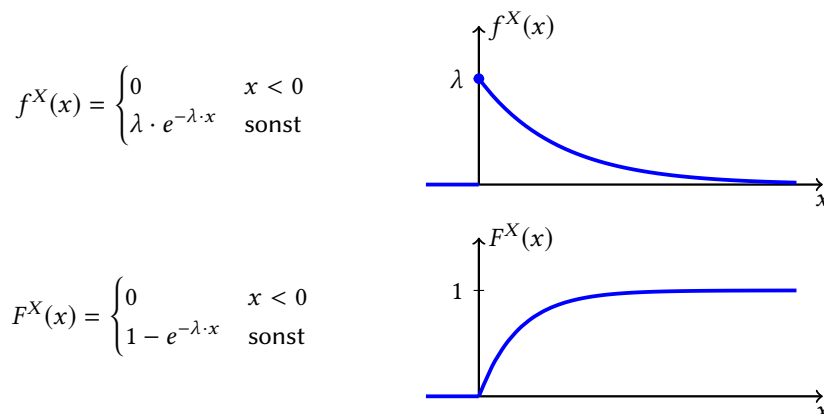
$$X \sim \mathcal{U}(0, 1) \rightarrow V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{1}{2})^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Diese Ergebnisse lassen sich nun aber auch leicht auf den allgemeinen Fall einer gleichverteilten Zufallsvariablen übertragen. Sei  $Y \sim \mathcal{U}(a, b)$ , dann ist  $Y = a + (b - a)X$ , damit ist

$$\begin{aligned} Y \sim \mathcal{U}(a, b) \rightarrow E(Y) &= E(a + (b - a)X) = a + (b - a)E(X) = \frac{a + b}{2} \\ V(Y) &= V(a + (b - a)X) = (b - a)^2 V(X) = \frac{(b - a)^2}{12} \end{aligned}$$

### 3.2.2 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung stellt das kontinuierliche Äquivalent zur geometrischen Verteilung dar. Eine Zufallsvariable  $X$  heißt *exponentialverteilt* mit Parameter  $\lambda$ , wenn für Dichte und Verteilung gilt



Man schreibt dann  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

**ERWARTUNGSWERT UND VARIANZ** Für eine Zufallsvariable  $Y \sim \text{Exp}(1)$  ist  $E(Y) = V(Y) = 1$ . Damit lässt sich der allgemeine Fall einfach berechnen

$$\begin{aligned} X \sim \text{Exp}(\lambda) \rightarrow E(X) &= E\left(\frac{Y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \\ V(X) &= V\left(\frac{Y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

#### Satz 38: Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$P(X \geq x + y \mid X \geq x) = P(X \geq y)$$

das heißt,  $X$  ist gedächtnislos. Dies ist analog zur geometrischen Verteilung.

**BEWEIS:**

$$\begin{aligned}
P(X \geq x+y | X \geq x) &= \frac{P(X \geq x+y \wedge X \geq x)}{P(X \geq x)} = \frac{P(X \geq x+y)}{P(X \geq x)} \\
&= \frac{1 - F^X(x+y)}{1 - F^X(x)} \\
&= \exp(-\lambda(x+y) - (-\lambda x)) = \exp(-\lambda y) \\
&= 1 - F^X(y) = P(X \geq y)
\end{aligned}$$

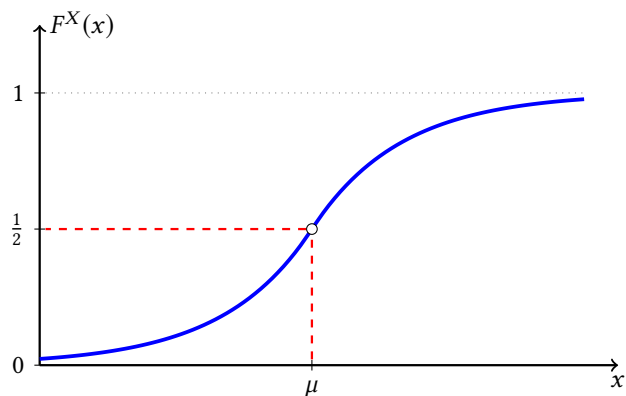
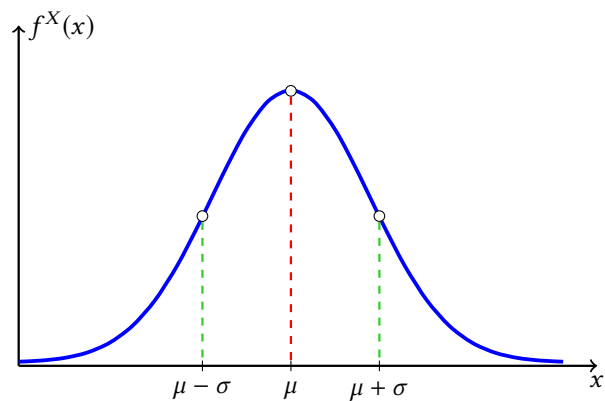
### 3.2.3 Normalverteilung

Die Normalverteilung wird verwendet bei Merkmalen,

- die stetig oder quasi-stetig sind,
- deren Daten um einen Mittelwert streuen,
- deren Daten seltener werden, je größer der Abstand zum Mittelwert.

Eine Zufallsvariable  $X$  ist *normalverteilt* mit Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ , wenn für ihre Dichte gilt

$$f^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Wir schreiben dann  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

**EIGENSCHAFTEN:**

- $f$  ist symmetrisch zum Mittelwert  $\mu$ .
- Der Erwartungswert von  $X$  ist der Mittelwert, d.h.  $E(X) = \mu$ . Die Lage der Dichtefunktion wird durch  $\mu$  bestimmt.
- Für die Dichtefunktion gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} f^X(t) dt = 1$ .

- Für die Varianz gilt  $V(X) = \sigma^2$ . Der zweite Parameter der Normalverteilung gibt also die Breite der Dichtefunktion an.
- Die Dichtefunktion hat ihre Wendepunkte bei  $\mu \pm \sigma$ .
- Die Verteilung  $F^X(x) = \int_{-\infty}^x f^X(t) dt$  hat keine geschlossene Form und ist daher teuer/ aufwändig zu berechnen. Man verwendet daher oft die *Standardnormalverteilung* um Werte zu berechnen.
- **Transformiert** man eine normalverteilte Zufallsvariable  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , zu  $Y = aX + b$ , dann ist  $Y$  wiederum normalverteilt mit  $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ .
- Für zwei *unabhängige* Zufallsvariablen  $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$  und  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$  ist die **Summe** der beiden wieder normalverteilt,  $(X + Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ .

### Standardnormalverteilung

Eine Zufallsvariable  $Z$  ist Standard-normalverteilt, wenn  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Ihre Dichte ist dann gegeben als

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Dann ist  $E(Z) = 0$  und  $V(Z) = 1$ . Eine allgemeine normalverteilte Zufallsvariable  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  lässt sich damit einfach wie folgt auf  $Z$  reduzieren

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Z : \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Damit folgt dann

1. Tabellieren von  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$  reicht aus um die Verteilungsfunktion einer beliebig parametrisierten Normalverteilung zu berechnen.

$$\begin{aligned} F^X(X) &= P(X \leq x) \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

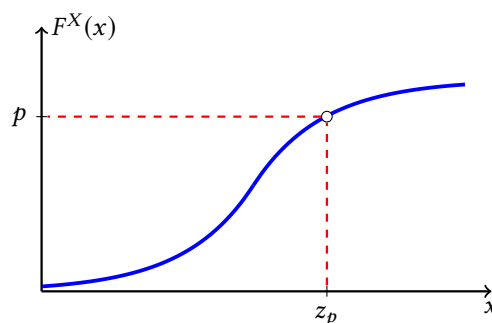
2. Analog ist  $X = \mu + \sigma Z$ , damit sind dann Varianz und Erwartungswert

$$E(X) = E(\mu + \sigma Z) = \mu$$

$$V(X) = V(\mu + \sigma Z) = \sigma^2$$

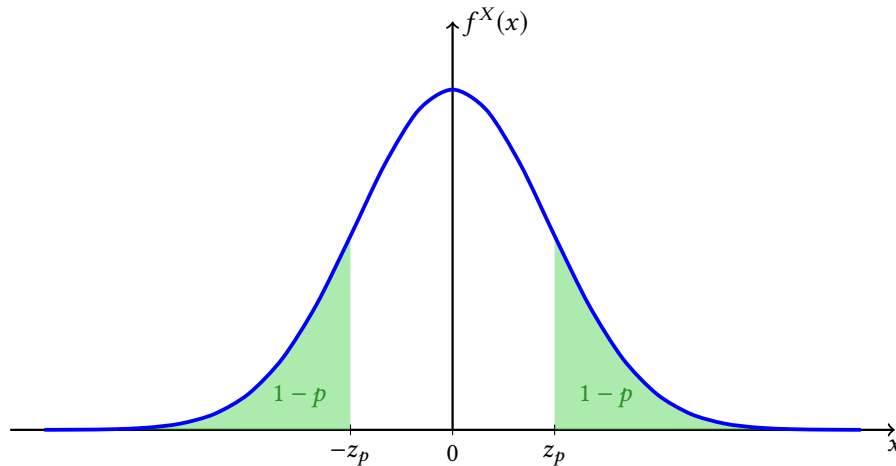
### Quantile der Normalverteilung

Die Quantile von Verteilungen können immer über die inverse Verteilungsfunktion berechnet werden. Das heißt für die (Standard-) Normalverteilung ist  $z_p$  das  $p$ -Quantil, wenn  $\Phi(z_p) = p$  ist ( $0 < p < 1$ ).



Diese Berechnungen lassen sich ebenso transformieren um Quantile für Normalverteilungen mit allgemeinen Parametern zu berechnen.

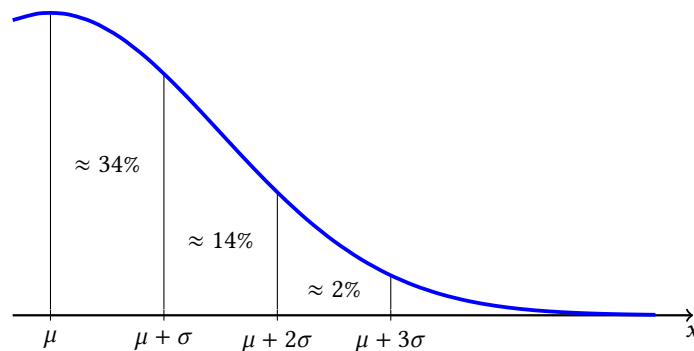
In der Abbildung unten ist das  $p$ -Quantil und das  $(1-p)$ -Quantil in die Dichtefunktion eingezeichnet, die grünen Flächen entsprechen jeweils der Wahrscheinlichkeit  $1-p$ .



Davon ausgehend erhält man die sogenannten zentralen Schwankungsbereiche, auch Sigma-Bereiche. Diese sind für  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  die Intervalle

$$\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma \quad k \in \{1, 2, \dots\}$$

In der unten stehenden Abbildung sind rechts vom Mittelwert die ersten drei (halben) Sigma-Bereiche eingezeichnet, diese erweitern sich symmetrisch auf die linke Seite. Die Flächen stehen für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable  $X$  Werte im  $x$ -Abschnitt der Fläche annimmt.



Es ergeben sich damit also die Wahrscheinlichkeiten

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68\%$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95.5\%$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 99.7\%$

### Approximation der Binomialverteilung

Man kann eine binomialverteilte Zufallsvariable  $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$  durch die Normalverteilung approximieren. Dafür verwendet man die Zufallsvariable

$$S_n^* = \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Dies gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz. Dabei wurde im Zähler der Erwartungswert und im Nenner die Standardabweichung normalisiert. Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq S_n^* \leq b) = \int_a^b \varphi(x) \, dx$$

wobei  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$  ist. Hierbei ist die Faustregel für eine gute Approximation üblicherweise  $n \cdot p \cdot (1 - p) > (1 - p)$ .

## 4: MEHRDIMENSIONALE ZUFALLSVARIABLEN

### 4.1 Diskrete Zufallsvariablen

#### Definition 39: Mehrdimensionale diskrete Zufallsvariablen

Eine *mehrdimensionale Zufallsvariable* auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  lässt sich schreiben als die Abbildung

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

wobei die  $X_i$  einzelne (eindimensionale) Zufallsvariablen sind.

Die *gemeinsame Verteilung* der  $X_i$  ist dann

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) \quad B_i \in \Omega.$$

Wir betrachten nun den zweidimensionalen Fall.

Sei der Grundraum  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots\} \times \{y_1, y_2, \dots\}$ . Damit ist die gemeinsame Verteilung bzw. die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$

$$f^{X,Y}(x_i, y_j) = \begin{cases} P(X = x_i, Y = y_j) & (x_i, y_j) \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sind  $X$  und  $Y$  aus einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum, so kann man die Kontingenztafel der Wahrscheinlichkeiten (vgl. Kontingenztafel der Häufigkeiten Abschnitt 3.1) schreiben als

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_m$	
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$\dots$	$p_{1m}$	$p_{1\cdot}$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$		$\ddots$		
$x_3$	$p_{31}$		$\ddots$		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				
$x_n$	$p_{n1}$		$\dots$		$p_{nm}$	$p_{n\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$				$p_{\cdot m}$	1

dabei seien die Einträge

$$p_{ij} := f(x_i, y_j)$$

Die daraus hervorgehende Randverteilung von  $X$  beziehungsweise  $Y$  ist

$$f_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^m p_{ij} = p_{i\cdot}$$

$$f_Y(y_i) = P(Y = y_i) = \sum_{j=1}^n P(X = x_j, Y = y_i) = \sum_{j=1}^n p_{ji} = p_{\cdot i}$$

Und die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$  bei gegebenem Ereignis  $y$  ist

$$f_X(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$



**BEISPIEL:** Wir betrachten das Ergebnis vom Werfen eines Würfels und die Zufallsvariablen mit Werten

$$X = \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} \text{Primzahl} \\ \text{nicht Prim} \end{cases}$$

dabei versteht sich selbst wann die Zufallsvariablen die jeweiligen Werte annehmen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Würfelergebnis ungerade und eine Primzahl ist, ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit

$$f(\text{ungerade}, \text{Primzahl}) = P(X = \text{ungerade}, Y = \text{Primzahl}) = P(\{3, 5\}) = \frac{1}{3}.$$

Da dieses Experiment endlich ist, schreiben wir die Kontingenztafel

	Prim	nicht Prim	
gerade	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
ungerade	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Wir betrachten damit die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $X$  unter der Bedingung  $Y = \text{nicht Prim}$

$$f_X(x|\text{nicht Prim}) = \begin{cases} \frac{2/6}{1/2} = \frac{2}{3} & x = \text{gerade} \\ \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} & x = \text{ungerade} \end{cases}$$

## 4.2 Stetige Zufallsvariablen

Bei stetigen Zufallsvariablen müssen einige Eigenschaften gelten

- Eine Normalisierungsbedingung

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) = 1$$

- Die Dichtefunktionen müssen stückweise glatt sein.
- Die Randdichte von  $X$  ist

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy$$

## 5: ZUSAMMENHANG VON ZUFALLSVARIABLEN

### 5.1 Kovarianz

Für diskrete Zufallsvariablen wurde die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen definiert als

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Allerdings macht es auch Sinn für abhängige Zufallsvariablen zu untersuchen, wie sich die Abhängigkeit ausprägt.

#### Definition 40: Kovarianz

Die Kovarianz von zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist

$$\text{Cov}(X, Y) := E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

$$(\text{diskret}) = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) \cdot f(x_i, y_j)$$

$$(\text{stetig}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) \cdot f(x, y) \, dy \, dx$$

- $\text{Cov}(X, Y)$  ist groß, wenn  $X$  und  $Y$  gleichförmig von den jeweiligen Erwartungswerten abweichen.
- Die Kovarianz ist negativ bei gegenläufiger Abweichung.
- Ist  $\text{Cov}(X, Y) \approx 0$ , so besteht keine besondere Wirkungsbeziehung zwischen den Variablen.

**Satz 41: Eigenschaften der Kovarianz**

Für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  gilt immer

1. Die Kovarianz ist symmetrisch,

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

2. Es gilt der Verschiebungssatz

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Hieraus wird klar, dass wenn Variablen unabhängig sind, dann ihre Kovarianz immer 0 ist. Ist eine Kovarianz 0 hat das zunächst keine Aussage über die Unabhängigkeit.

3. Die Kovarianz ist extrem maßstabsabhängig. Für linear transformierte  $X$  und  $Y$  ist

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = a \cdot c \cdot \text{Cov}(X, Y).$$

4. Für die Varianz der Addition zweier Zufallsvariablen gilt außerdem

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

**BEWEIS:**

1. Ergibt sich direkt aus dem Erwartungswert.
2. Lässt sich leicht durch Ausmultiplizieren sehen

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] \\ &= E[X \cdot Y - E(Y) \cdot X - Y \cdot E(X) + E(X) \cdot E(Y)] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)\end{aligned}$$

## 5.2 Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient stellt ein maßstabsunabhängiges Zusammenhangsmaß dar.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$\bullet -1 \leq \rho \leq 1$$

# 3

Kapitel 3: Induktive Statistik

---

# 1: SCHÄTZER

## 1.1 Allgemeines zum Schätzen

Beim Schätzen wollen wir von einer Beobachtung einer (teilweise) unbekannten Verteilung auf Parameter der Verteilung schließen.

Das kann zum einen bedeuten, dass man versucht aus einer Stichprobe zu folgern, um welche Art von Verteilung es sich handelt. Ebenso kann man Parameter einer bekannten Verteilung schätzen.

Man sieht sofort dass man beim Schätzen einige Angaben entweder wissen oder Annahmen treffen muss. Selbstverständlich kann man nur Parameter einer Verteilung schätzen wenn man annimmt dass sich beim zugrundeliegenden Experiment um diese Verteilung handelt.

Es gibt verschiedene Arten zu Schätzen, so kann man einerseits einen Bereich angeben in dem sich der Parameter mit einer gewissen Sicherheit befindet (Intervallschätzer). Andererseits kann man auch einen Wert angeben den der Parameter bei gegebener Stichprobe am wahrscheinlichsten annimmt (Punktschätzer).

## 1.2 Punktschätzer

Punktschätzer liefern einen genauen Wert als Ergebnis des Schätzens. Dabei ist dieser Wert der, der bei gegebener Stichprobe am wahrscheinlichsten ist.

**UNSPECIFISCHE PARAMETER** Es wird zwischen zwei Arten der Schätzparameter unterschieden, unspezifische Parameter die keine Informationen über das Experiment beinhalten. So sind die folgenden zum Beispiel unspezifische Parameter

- Erwartungswert  $E(X)$  oder Varianz  $V(X)$ ,
- der Median oder andere Quantile einer Zufallsvariable,
- die Korrelation von zwei Zufallsvariablen.

**SPEZIFISCHE PARAMETER** Dagegen enthalten spezifische Parameter Informationen auch über das konkrete Experiment. Einige Beispiele hierfür wären

- Der Parameter  $p$  der Binomialverteilung  $\text{Bin}(n, p)$ ,
- $\sigma^2, \mu$  einer Normalverteilung  $\mathcal{N}(n, p)$ ,
- oder  $\lambda$  von  $\text{Po}(\lambda)$ .

Um diese Parameter zu schätzen benötigt man eine sogenannte Schätzstatistik.

**Definition 42: Schätzstatistik**

Eine Schätzstatistik oder Schätzfunktion ist eine Abbildung

$$g(X_1, \dots, X_n)$$

in den Stichprobenvariablen  $X_i$ . Für eine Stichprobe  $\omega$  (Realisierung)  $x_1, \dots, x_n$  heißt der Wert

$$g(x_1, \dots, x_n) = g(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

Schätzwert der Realisierung.

**BEISPIELE:** Die folgenden Zufallsvariablen sind Schätzstatistiken

$$\begin{aligned}\bar{X} &= g(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i && \text{für } \mu = E(X) \\ S^2 &= g(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 && \text{für } \sigma^2 = V(X) \\ \tilde{S}^2 &= g(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 && \text{für } \sigma^2 = V(X)\end{aligned} \quad (1.1)$$

Betrachtet man Schätzstatistiken, stellt sich die Frage ob diese tendenziell den richtigen Wert liefern. Diese Eigenschaft nennt man Erwartungstreue.

**Definition 43: Erwartungstreue**

Man nennt eine Schätzstatistik  $g(X_1, \dots, X_n)$  für den Parameter  $\alpha$  *erwartungstreu*, falls

$$E_\alpha(g(X_1, \dots, X_n)) = \alpha.$$

Gilt lediglich, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\alpha(g(X_1, \dots, X_n)) = \alpha$$

so nennt man  $g$  *asymptotisch erwartungstreu*.

Allgemein ist die *Verzerrung* oder der *Bias*

$$\text{Bias}_\alpha(g(X_1, \dots, X_n)) = E_\alpha(g(X_1, \dots, X_n)) - \alpha$$

Untersuchen wir nun die Schätzstatistiken aus Gleichung 1.1 auf Erwartungstreue.

Wir sehen aus der Linearität

$$E_\mu(\bar{X}) = E_\mu\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_\mu(X_i) = \mu,$$

dass  $\bar{X}$  erwartungstreu ist.

Für  $S^2$  und  $\tilde{S}^2$  betrachten wir zunächst die folgende Umformung

$$\begin{aligned}
 E_{\sigma^2}(S^2) &= E_{\sigma^2} \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot E_{\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot E_{\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot E_{\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}n\bar{X} + n\bar{X}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot E_{\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X} \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n E_{\sigma^2}(X_i^2) - nE_{\sigma^2}(\bar{X}) \right)
 \end{aligned}$$

Mit dem Verschiebungssatz  $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$  folgt daraus nun, dass  $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2$  und analog  $E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 E_{\sigma^2}(S^2) &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - n \left( \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 + n\mu^2 - (\sigma^2 + n\mu^2)) \\
 &= \frac{1}{n-1} (n-1) \cdot \sigma^2
 \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass  $S^2$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\sigma^2$  während  $\tilde{S}^2$  nicht erwartungstreu ist. Allerdings  $\tilde{S}^2$  ist asymptotisch erwartungstreu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\sigma^2}(\tilde{S}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2$$

Hieraus ausgehend ist die Abweichung einer erwartungstreuen Schätzstatistik interessant.

#### Definition 44: Standardfehler für erwartungstreue Schätzstatistiken

Der Standardfehler einer erwartungstreuen Schätzstatistik  $g$  ist definiert als der Wert

$$\sigma_g = \sqrt{V(g(X_1, \dots, X_n))}$$

Der Standardfehler von  $\bar{X}$  ist

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

So wird ein weiteres Problem klar -  $\sigma^2$  ist möglicherweise unbekannt und muss ebenfalls geschätzt werden.

### 1.2.1 Maximum-Likelihood-Schätzer

Die Maximum-Likelihood-Schätzmethode verwendet eine sogenannte Likelihoodfunktion  $L$ . Diese ist abhängig vom zu schätzenden Parameter  $\alpha$ , man sucht dann den Wert für  $\alpha$  so, dass  $L(\alpha)$  ein Maximum annimmt. Häufig wird dieser Wert mit einem Dach gekennzeichnet. Es liegen die Stichproben  $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$  zugrunde.

Das Ergebnis dieses Schätzers wäre also allgemein

$$\hat{\alpha} = \operatorname{argmax}_{\alpha} L(\alpha)$$

Hierbei hängt die Likelihoodfunktion davon ab, was bei welcher Verteilung geschätzt wird. Sie wird immer bestimmt durch das Produkt aus den Wahrscheinlichkeitsfunktionen gegebener Stichproben  $x_i$  abhängig vom zu schätzenden Parameter.

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n f(\alpha|x_i) \quad (1.2)$$

Wir wollen den Maximum-Likelihood-Schätzer anhand der Binomialverteilung betrachten. Hierbei macht nur Schätzen des Parameters  $p$  Sinn, denn selbst wenn nur eine einzige Stichprobe vorliegt, sieht man sofort welchen Wert  $n$  hat.

Es liegt also eine Verteilung

$$X \sim \operatorname{Bin}(n, p)$$

zugrunde, hierbei ist  $n$  bekannt und fest,  $p \in (0, 1)$  wollen wir herausfinden.

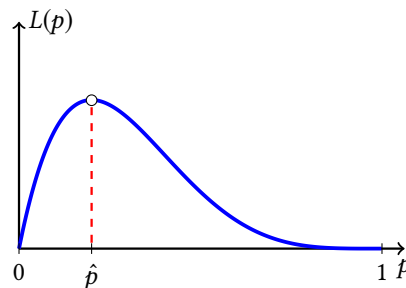
Liegt uns nun eine Stichprobe  $\omega$  vor, so ist auch  $X(\omega) = k$  bekannt als die Anzahl Treffer in den  $n$  Bernoulli-Experimenten.

Zum Schätzen fehlt uns noch die Likelihoodfunktion, diese ist hier

$$L : (0, 1) \rightarrow [0, 1], \quad L(p) = f(p|k) = P_p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

da die einzige Stichprobe  $X(\omega) = k$  ist und somit  $f(p|k) = P_p(X = k)$  ist (siehe Gleichung 1.2).

Das heißt, es ist die Wahrscheinlichkeit dass  $X$  mit Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  (als Parameter!) den Wert  $k$  annimmt. Man sieht, dass diese Funktion ihr Maximum bei dem Wert für  $p$  annimmt, unter dem es am wahrscheinlichsten ist, die Stichprobe  $\omega$  zu erhalten.



Den Wert  $\hat{p}$  zu berechnen würde hier durch Ableiten und anschließendem Bestimmen der Nullstelle erfolgen

$$\frac{d}{dp} L(\hat{p}) \stackrel{!}{=} 0.$$

**BEISPIEL:** Wir wollen dies nun nochmal an einem Beispiel veranschaulichen. Wir schätzen wiederum  $p$  einer Binomialverteilung, schließen damit später aber auf einen anderen Wert.

Um die Populationsgröße  $N$  einer Fischart in einem See zu schätzen, gehen wir folgendermaßen vor: Wir markieren von dieser Art  $m = 50$  Fische in einem See, fangen später  $n = 200$  Stück und stellen fest, dass  $k = 16$  davon markiert sind.

Wir nehmen an, dass das Untersuchen der Stichprobe auf Markierungen eine Folge von  $n$  unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Trefferwahrscheinlichkeit  $p = \frac{m}{N}$  ist. Also beschreibt  $p$  den Anteil der markierten Fische im See.



Wir verwenden die zuvor besprochene Likelihoodfunktion  $L(p)$ , denn mit  $p = \frac{m}{N}$  können wir auf  $N$  schließen.

Sei  $X$  eine Zufallsvariable die die Anzahl markierter Fische in der Stichprobe beschreibt, damit ist  $X \sim \text{Bin}(200, p)$  verteilt.

Die Likelihoodfunktion ist mit diesen Werten

$$L(p) = P_p(X = k) = \binom{200}{k} \cdot p^k (1-p)^{200-k}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} L(p) &= \binom{200}{k} \cdot \left[ k \cdot p^{k-1} (1-p)^{200-k} - p^k \cdot (200-k) \cdot (1-p)^{200-k-1} \right] \\ &= \underbrace{\binom{200}{k} \cdot p^{k-1} (1-p)^{200-k-1}}_{>0} \cdot [k(1-p) - 200p + kp] \end{aligned}$$

Da wir uns für Nullstellen interessieren, betrachten wir nur noch den rechten Teil und erhalten

$$\begin{aligned} k(1 - \hat{p}) - 200\hat{p} + k\hat{p} &\stackrel{!}{=} 0 \\ k - k\hat{p} - 200\hat{p} + k\hat{p} &= 0 \\ k - 200\hat{p} &= 0 \end{aligned}$$

Für unsere Stichprobe  $\omega$  ist  $X(\omega) = k = 16$ , damit ist

$$\begin{aligned} \hat{p} = \frac{m}{N} = \frac{k}{200} &\Rightarrow N = \frac{m \cdot 200}{k} \\ &\Rightarrow N = \frac{50 \cdot 200}{16} = 625 \end{aligned}$$

Wir haben damit die Populationsgröße der Fischart auf 625 geschätzt.

## 1.2.2 Bayes-Schätzer

Wir betrachten die Zufallsvariable  $X$  mit dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum  $(X(\Omega), P_\theta)$ . Hierbei wollen wir den Parameter  $\theta$  schätzen.

Der Bayes-Schätzer stellt eine komplett andere Herangehensweise an das Schätzen dar, hier wird der gesuchte Parameter als eine Zufallsvariable aufgefasst. So können weitere Annahmen wie Erfahrung aus anderen Experimenten oder ein grobes Vorwissen über den Sachverhalt in den Schätzvorgang eingehen. Achtung, die Werte der Zufallsvariable  $\theta$  werden ebenfalls  $\theta$  genannt.

- Wir betrachten also zunächst die gemeinsame Dichte  $f(x, \theta)$  wobei  $x \in X(\Omega)$  und  $\theta \in \Theta \subseteq [0, 1]$ .

Der einfachere Fall ist hierbei, wenn es sich sowohl bei  $X$  als auch  $\theta$  um diskrete Zufallsvariablen handelt (wir betrachten nur diesen), dann kann man die gemeinsame Verteilung durch die Kontingenztafel darstellen

gem. Dichte	$x_1$	$x_2$	$x_i$	$x_m$	
$\theta_1$	$f(x_1, \theta_1)$	$f(x_2, \theta_1)$	$\dots$	$f(x_m, \theta_1)$	
$\theta_2$	$f(x_1, \theta_2)$	$\ddots$			
$\vdots$	$\vdots$		$f(x_i, \theta_j)$	$\vdots$	$f(\theta_j) = \sum_{i=1}^m f(x_i, \theta_j)$
$\theta_n$	$f(x_1, \theta_n)$	$\dots$		$f(x_m, \theta_n)$	
Randdichte	$f(x_j) = \sum_{i=1}^n f(x_i, \theta_j)$				

2. Nun kann man die bedingte Verteilung von  $X$  unter gegebenem  $\theta$  darstellen als

$$f(x_i|\theta_j) = P_\theta(X = x_i)$$

Da hierbei  $\theta$  nun fest gewählt ist, kann man dies problemlos berechnen.

3. Jetzt kommt der Punkt an dem die Besonderheit der Bayes-Schätzung eingeht, man legt eine sogenannte *a-priori-Dichte* für  $\theta$  fest. Zum Beispiel kann dies eine Gleichverteilung auf ganz  $\Theta$  sein, das würde bedeuten, man hat kein besonderes Vorwissen über  $\theta$ . Man kann aber genauso vorgeben, dass einige Werte für  $\theta$  wahrscheinlicher als andere sind, dies beeinflusst das Ergebnis und kann so zu genaueren Schätzergebnissen führen.
4. Als letztes berechnet man noch die Randdichte von  $X$ , unabhängig vom Parameter  $\theta$

$$\begin{aligned} f(x_j) &= P(X = x_j) = \sum_{i=1}^n f(x_j|\theta_i) \cdot f(\theta_i) \quad (\text{Satz v. d. totalen Wahrscheinlichkeit}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_j, \theta_i) \end{aligned}$$

Jetzt führen wir ein Experiment durch. Liegt uns nun eine Stichprobe  $\tilde{x} \in \{x_1, \dots, x_m\}$  vor, so können wir damit von der a-priori-Dichte auf die sogenannte a-posteriori-Dichte  $f(\theta_i|\tilde{x})$  schließen. Wir erhalten also eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit eines  $\theta_i$  bei gegebenem Ergebnis  $\tilde{x}$ .

$$\begin{aligned} f(\theta_i|\tilde{x}) &= \frac{f(\tilde{x}|\theta_i) \cdot f(\theta_i)}{f(\tilde{x})} \quad (\text{Satz von Bayes}) \\ &= \frac{f(\tilde{x}, \theta_i)}{\sum_{k=1}^m f(\tilde{x}|\theta_k) \cdot f(\theta_k)} \end{aligned}$$

Hiervon ausgehend gibt es zwei Arten, sich auf ein  $\theta$  festzulegen.

**A-POSTERIORI-ERWARTUNGSWERT** Die erste Variante ist, das Schätzergebnis als den Erwartungswert

$$\hat{\theta}_p = E(\theta|\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot f(\theta_i|\tilde{x})$$

zu wählen. (Beziehungsweise das nächstgelegene  $\theta \in \Theta$ .)

**MAXIMUM-A-POSTERIORI-SCHÄTZER** Analog zum Maximum-Likelihood-Schätzer kann man das Maximum der a-posteriori-Dichte als Schätzergebnis wählen

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} f(\theta|\tilde{x}).$$

Führt man den Bayes-Schätzer ohne Vorwissen - d.h. gleichverteiltes  $\theta$  - durch, so stimmt  $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$  mit dem Maximum-Likelihood-Schätzer überein.

### 1.2.3 Kleinste Quadrate-Schätzer

Der kleinste Quadrate-Schätzer minimiert die Summe der quadratischen Abweichungen. So eignet er sich zum Beispiel zum Schätzen des Erwartungswerts  $\mu$ ,

$$Q(\mu) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

dabei wird das arithmetische Mittel als Schätzstatistik verwendet

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} Q(\mu) &= -2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}. \end{aligned}$$

## 1.3 Intervallschätzer - Konfidenzintervalle

Die Intervallschätzer geben ein Intervall an, in dem sich der zu schätzende Parameter höchstwahrscheinlich befindet. Hierbei sind möglichst kleine Intervalle bei einer hohen Sicherheit natürlich gewünscht, aber diese Einschränkungen widersprechen sich. Verkleinert man das Intervall wird die Sicherheit, dass der geschätzte Parameter wirklich enthalten ist im Allgemeinen kleiner.

Wir möchten nun zum Beispiel herausfinden, wie sicher wir uns sind, dass das Ergebnis eines Punktschätzers stimmt. Dafür bestimmen wir das *Vertrauens- bzw. Konfidenzintervall*

$$J_n := [\theta_u \circ X, \theta_o \circ X]$$

wobei wir den Parameter  $\theta$  schätzen, der Werte aus  $\Theta$  annimmt. Die Zufallsvariablen

$$\theta_u \circ X, \theta_o \circ X : \Omega \rightarrow \Theta$$

stellen dabei die untere und die obere Intervallgrenze dar (sinnvollerweise soll also  $\theta_u \circ X \leq \theta_o \circ X$  gelten). Sie beschreiben einen Grenzwert von  $\theta$  in Abhängigkeit von der Stichprobe.

Dieses Intervall  $J_n$  soll das unbekannte  $\theta$  mit einer *Garantiewahrscheinlichkeit* von  $(1 - \alpha)$  enthalten, das heißt

$$P_\theta(\theta \in J_n) = P_\theta(\theta_u \circ X \leq \theta \leq \theta_o \circ X) \geq 1 - \alpha \quad (1.3)$$

für alle Werte des Parameters  $\theta$ .

### 1.3.1 Abschätzen mit der Tschebyscheff-Ungleichung

Eine grobe Abschätzung dieser Grenzen kann zum Beispiel über die Tschebyscheff-Ungleichung erfolgen. Damit kann man die Wahrscheinlichkeit, dass der Parameter außerhalb des Intervalls liegt

$$P_\theta(|X - \theta| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2} = \alpha$$

beschränken. Es ergibt sich mit der Umformung

$$\frac{V(X)}{\epsilon^2} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon = \sqrt{\frac{V(X)}{\alpha}}$$

die Abschätzung für die beiden Intervallgrenzen

$$\begin{aligned} \theta_u(X) &= X - \sqrt{\frac{V(X)}{\alpha}} \\ \theta_o(X) &= X + \sqrt{\frac{V(X)}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Diese garantiert für alle  $\theta \in \Theta$ , dass der unbekannte Parameter  $\theta$  nur mit Unsicherheit  $\alpha$  außerhalb des geschätzten Intervalls liegt.

$$P_\theta(\theta \notin J_n) = P_\theta\left(\theta \notin \left[X - \sqrt{\frac{V(X)}{\alpha}}, X + \sqrt{\frac{V(X)}{\alpha}}\right]\right) \leq \alpha.$$

### 1.3.2 Abschätzen über die Verteilungsfunktion

Die Ergebnisse, die man durch die Abschätzung mit Tschebyscheff erhält, sind sehr grob. Einen genaueren Ansatz bietet die Abschätzung der Intervallgrenzen über die Verteilungsfunktion.

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit der Garantiewahrscheinlichkeit beschränken, siehe Gleichung 1.3. Dieses vom Parameter  $\theta$  abhängige Ereignis ist

$$A_\theta = \{\theta_u \circ X \leq \theta \leq \theta_o \circ X\} = \{\theta \in J_n\}$$

Um die beiden Schranken mit der Verteilungsfunktion abzuschätzen, betrachten wir das Komplement dieses Ereignisses

$$\bar{A}_\theta = \{\theta_u \circ X > \theta\} + \{\theta_o \circ X < \theta\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses soll durch die Unsicherheit beschränkt sein

$$P_\theta(\bar{A}_\theta) = P_\theta(\theta_u \circ X > \theta) + P_\theta(\theta_o \circ X < \theta) \stackrel{!}{\leq} \alpha$$

Man sieht, dass dies durch Abschätzen der beiden Teile mit  $\beta = \frac{\alpha}{2}$  erreicht werden kann

$$P_\theta(\theta_u \circ X > \theta) \stackrel{!}{\leq} \beta \quad (1.4)$$

$$P_\theta(\theta_o \circ X < \theta) \stackrel{!}{\leq} \beta \quad (1.5)$$

Wir bestimmen die Schranken  $\theta_u(k)$  und  $\theta_o(k)$  so, dass die folgenden beiden Gleichungen gelten. Diese implizieren dann die Forderung.

$$P_{\theta_u(k)}(X \geq k) \stackrel{!}{=} \beta \Rightarrow (1.4)$$

$$P_{\theta_o(k)}(X \leq k) \stackrel{!}{=} \beta \Rightarrow (1.5)$$

**BEISPIEL:** Ein kleines Beispiel, bei dem wir die Intervallgrenzen in Abhängigkeit von  $\beta$  bestimmen werden. Ist  $X \sim \text{Bin}(2, p)$ , dann betrachten wir zunächst die Funktion

$$P_p(X = k) = \binom{2}{k} \cdot p^k (1-p)^{2-k} = \begin{cases} (1-p)^2, & k = 0 \\ 2 \cdot p(1-p), & k = 1 \\ p^2, & k = 2 \end{cases}$$

Möchten wir nun die Intervallgrenzen  $p_u(k)$  beziehungsweise  $p_o(k)$  bestimmen ergeben sich wie oben die folgenden Gleichungen

$$P_{p_o(0)}(X \leq 0) = (1 - p_o(0))^2 \stackrel{!}{=} \beta \Rightarrow p_o(0) = 1 - \sqrt{\beta}$$

$$P_{p_o(1)}(X \leq 1) = (1 - p_o(1))^2 + 2p_o(1) \cdot (1 - p_o(1)) \stackrel{!}{=} \beta \Rightarrow p_o(1) = \sqrt{1 - \beta}$$

$$P_{p_u(1)}(X < 1) = (1 - p_u(1))^2 \stackrel{!}{=} 1 - \beta \Rightarrow p_u(1) = 1 - \sqrt{1 - \beta}$$

$$P_{p_u(2)}(X < 2) = (1 - p_u(2))^2 + 2p_u(2) \cdot (1 - p_u(2)) \stackrel{!}{=} 1 - \beta \Rightarrow p_u(2) = \sqrt{\beta}$$

### 1.3.3 Approximation über die Normalverteilung

Für große  $n$  werden Binomialverteilungen und das Schätzen von  $p$  in der Praxis oft auf die Normalverteilung zurückgeführt und das Problem auf eine Quantilsbestimmung reduziert. Denn es gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz für  $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$  und große  $n$

$$P_p(S_n \leq k) = F_p^{S_n}(k) \stackrel{\text{ZGWS}}{\approx} \Phi\left(\frac{k - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

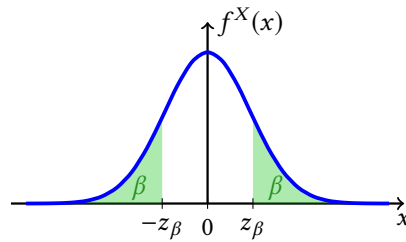
Hierbei ist die Korrektur um  $\frac{1}{2}$  eine sogenannte Stetigkeitskorrektur.

Damit lassen sich dann die Intervallgrenzen  $p_u, p_o$  mit den Quantilen der Standardnormalverteilung bestimmen. Natürlich sind  $n, k$  sowie  $\beta$  bekannt.

$$P_{p_o}(S_n \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - np_o + \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot p_o(1-p_o)}}\right) \stackrel{!}{=} \beta \Rightarrow \frac{k - np_o + \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot p_o(1-p_o)}} = z_\beta$$

$$P_{p_u}(S_n \geq k) = 1 - P_{p_u}(S_n < k) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - np_u + \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot p_u(1-p_u)}}\right) \stackrel{!}{=} \beta \Rightarrow \frac{k - np_u + \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot p_u(1-p_u)}} = z_{1-\beta} = -z_\beta$$

Diese Gleichungen muss man nur noch nach  $p_u$  bzw.  $p_o$  auflösen (eventuell mit der Mitternachtsformel) und man erhält die Intervallgrenzen zur gegebenen Unsicherheit  $\alpha = 2\beta$ .



**BEISPIEL:** Sei  $X \sim \text{Bin}(n = 50, p)$  und es liegt eine Stichprobe mit  $k = X(\omega) = 30$  vor. Wir möchten nun zur Unsicherheit  $\alpha = 2\beta = 0.1$ , d.h. mit 90%-iger Sicherheit angeben, in welchem Intervall sich  $p$  befindet. Wir verwenden wieder die Gleichungen von oben und möchten die Intervallgrenzen  $p_u, p_o$  bestimmen

$$P_{p_o}(X \leq 30) \approx \Phi\left(\frac{30 - 50p_o + \frac{1}{2}}{\sqrt{50p_o \cdot (1 - p_o)}}\right) \stackrel{!}{=} \beta = 0.05$$

$$P_{p_u}(X < 30) \stackrel{!}{=} 1 - \beta = 0.95$$

Wir bestimmen also das  $\beta$  sowie das  $1 - \beta$ -Quantil

$$\Phi(-1.6449) = 0.05$$

$$\Phi(1.6449) = 0.95$$

Dies können wir dann in folgende Formel einsetzen. Da es sich jeweils um  $\pm z_\beta$  handelt, muss die Formel nur einmal ausgerechnet werden, denn  $z_\beta$  wird quadriert und wir finden beide Lösungen.

$$\frac{k - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}} = \pm z_\beta$$

$$\Leftrightarrow (n^2 - z_\beta^2 n)p^2 + (-2nk - z_\beta^2 n)p + k^2 + \frac{1}{4} = 0.$$

Mit den eingesetzten Werten erhält man schließlich

$$\frac{30 - 50 \cdot p + \frac{1}{2}}{\sqrt{50p(1-p)}} = \pm 1.6449$$

$$\stackrel{\text{MNF}}{\Rightarrow} p_u = 0.42049, p_o = 0.90537.$$

## 2: HYPOTHESENTESTS

### 2.1 Binomialtest

Man beginnt mit einer Hypothese, zum Beispiel möchte man Prüfen ob die Trefferwahrscheinlichkeit einer Binomialverteilung tatsächlich einem bestimmten Wert  $p_0$  entspricht. Die Nullhypothese wäre dann  $H_0 : p = p_0$ , das heißt keine Besonderheiten. Wir führen später eine Stichprobe durch und entscheiden uns dann abhängig von dessen Ergebnis für oder gegen  $H_0$ .

Nun kann man sich entscheiden wie man die Gegenhypothese aufstellen will. Abhängig davon ergibt sich die Testcharakteristik

1. Linksseitiger Test:  $H_1 : p < p_0$
2. Rechtsseitiger Test:  $H_1 : p > p_0$
3. Beidseitiger Test:  $H_1 : p \neq p_0$

Um  $p \in \Theta = (0, 1)$  einer  $\text{Bin}(n, p)$ -Verteilung zu testen sehen die wichtigen Werte in etwa so aus (kann insbesondere bei  $\Theta$  abweichen)

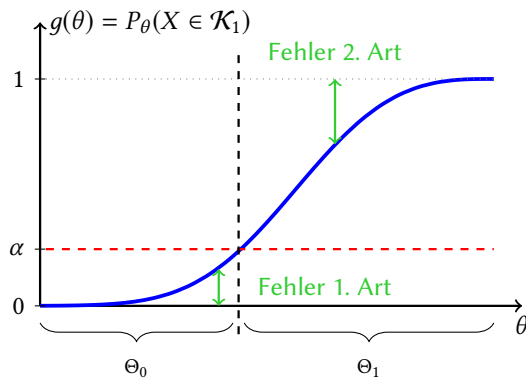
	linksseitig	gemeinsam	rechtsseitig
Annahmebereich:	$\Theta_0 = [p_0, 1)$		$\Theta_0 = (0, p_0]$
Ablehnungsbereich:		$\Theta_1 = (0, 1) \setminus \Theta_0$	
Kritischer Punkt:	$k^*$ maximal mit $P_{p_0}(X \leq k^*) \leq \alpha$		$k^*$ minimal mit $P_{p_0}(X \geq k^*) \leq \alpha$
Kritischer Bereich:	$\mathcal{K}_1 = \{0, \dots, k^*\}$		$\mathcal{K}_1 = \{k^*, \dots, n\}$
Gütefunktion:	$g(p) = P_p(X \in \mathcal{K}_1)$		

Im Beispiel von oben wäre  $\Theta_0 = \{p_0\}$  und  $\Theta_1$  abhängig von der Testcharakteristik so zum Beispiel für einen rechtsseitigen Test  $\Theta_1 = (p_0, 1)$ .

Den Ablehnungsbereich bestimmt man mithilfe der Gütefunktion an der Stelle  $p_0$ . Das heißt man bestimmt  $k^*$  als Grenze des  $\mathcal{K}_1$  so, dass

$$\forall p \in \Theta_0 : g(p) = P_p(X \in \mathcal{K}_1) \stackrel{!}{\leq} \alpha.$$

Das heißt insbesondere, dass die Wahrscheinlichkeit eine falsche Aussage für  $H_1$  zu treffen kleiner als  $\alpha$  ist (Fehler 1. Art). Für einen rechtsseitigen Test könnte eine Gütefunktion wie folgt aussehen



Abhängig von der durchgeführten Stichprobe entscheidet man sich für die wahrscheinlichere Hypothese. Das heißt falls  $X(\omega) \in \mathcal{K}_1$  gilt, steht die Stichprobe im Widerspruch zu  $H_0$  und der Parameter  $p_0$  ist sehr unwahrscheinlich, so wird  $H_0$  zugunsten von  $H_1$  verworfen. Ist allerdings  $X(\omega) \in \mathcal{K}_0$ , so kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

#### FEHLERARTEN

	Realität	
	$H_0$ gilt	$H_1$ gilt
$H_0$ nicht verworfen	Spezifität	Fehler 2. Art false negative
$H_0$ verworfen	Fehler 1. Art false positive	Sensitivität

Der Fehler erster Art beschreibt die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen

$$P_{p_0}(X \in \mathcal{K}_1),$$

er ist beschränkt durch  $\alpha$ . Verwirft man also  $H_0$ , so stimmt diese Aussage mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$ .

### 2.1.1 Approximativer Binomialtest

Der approximative Binomialtest unterscheidet sich nur in der Bestimmung von  $k^*$ . Dies geschieht hier durch den zentralen Grenzwertsatz, man führt die Binomialverteilung auf eine Standardnormalverteilung zurück und verfährt analog zum Gaußtest. Es gilt für  $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Man bestimmt  $k^*$  wie folgt

linksseitiger Test

$$\begin{aligned} P_{p_0}(X \leq k^*) &\leq \alpha \\ \Phi\left(\frac{k^* - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) &\leq \alpha \\ \frac{k^* - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} &\leq z_\alpha \end{aligned}$$

rechtsseitiger Test

$$\begin{aligned} P_{p_0}(X \geq k^*) &\leq \alpha \\ \Phi\left(\frac{k^* - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) &\leq 1 - \alpha \\ \frac{k^* - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} &\leq z_{1-\alpha} \end{aligned}$$

Dann wird wie bei einem normalen Binomialtest entschieden.

## 2.2 Gaußtest (Test mit der Normalverteilung)

Wir wollen mit dem Mittelwert der Normalverteilung einen Hypothesentest durchführen. Das heißt also zum Beispiel prüfen ob der Mittelwert tatsächlich einem erwarteten Wert  $\mu$  entspricht.

1. Wir verwenden hierfür die Teststatistik  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  als Schätzer für den Mittelwert. Wir benötigen außerdem den Standardfehler  $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$  um auf die Standardnormalverteilung reduzieren zu können.
2. Nun führen den Test auf eine Standardnormalverteilung zurück, indem wir die folgende Zufallsvariable festlegen

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

3. Wir können nun die Quantile  $z_p$  der Standardnormalverteilung aus einer Tabelle ablesen. Dann wird der Ablehnungsbereich  $\Theta_1$  entsprechend dem Signifikanzniveau  $\alpha$  wie folgt bestimmt

linksseitiger Test	rechtsseitiger Test	beidseitiger Test
$\Theta_1 = (-\infty, z_\alpha]$	$\Theta_1 = [z_{1-\alpha}, \infty)$	$\Theta_1 = (-\infty, z_{\alpha/2}] + [z_{1-\alpha/2}, \infty)$

4. Als letztes muss man noch prüfen, ob der beobachtete Wert aus der Teststatistik im Ablehnungsbereich liegt. Das heißt, falls

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in \Theta_1$$

für die gegebene Stichprobe gilt, so wird  $H_0$  zum gegebenen Signifikanzniveau verworfen.

## 2.3 Chi-Quadrat-Anpassungstest

Der  $\chi^2$ -Anpassungstest testet eine gegebene Stichprobe auf die zugrundeliegende Verteilung. Die Fragestellung ist also „Sind die gegebenen Werte  $\ast$ -verteilt?“

Stehen  $n$  unabhängige, identische Wiederholungen  $X_i$  des Merkmals  $X = \{1, 2, \dots, k\}$  zur Verfügung, kann die folgende Tabelle (gedanklich) aufgestellt werden

Ausprägung	1	2	...	k	
absolute Häufigkeit	$h_1$	$h_2$	...	$h_k$	$\sum = n$
erwartete W.-keit	$\pi_1$	$\pi_2$	...	$\pi_k$	$\sum = 1$

Dabei ist dann die Nullhypothese

$H_0$  die Elemente sind verteilt wie  $X$ , d.h.  $\forall i \ P(X = i) = \pi_i$ .

Man erhält also durch  $\tilde{h}_i = n \cdot \pi_i$  die erwartete Häufigkeit, wenn die Verteilung von  $X$  zugrunde liegt. Wir testen nun simultan alle Abweichungen der  $h_i$  von den erwarteten  $\tilde{h}_i$  mit der  $\chi^2$ -Teststatistik

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(h_i - n \cdot \pi_i)^2}{n \cdot \pi_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(h_i - \tilde{h}_i)^2}{\tilde{h}_i}.$$

Ist dieser Wert groß, so handelt es sich höchstwahrscheinlich nicht um die richtige Verteilung.

Da die Zufallsvariable (Teststatistik)  $\chi^2$  nun auch  $\chi^2(k-1)$ -verteilt ist, können wir mit dem  $(1-\alpha)$ -Quantil der  $\chi^2(k-1)$ -Verteilung den Ablehnungsbereich bestimmen, dabei ist  $\alpha$  das Signifikanzniveau. Das heißt, wir verwerfen  $H_0$  falls

$$\chi^2 > \chi_{(1-\alpha)}^2(k-1)$$

gilt. Dann kann man mit Sicherheit  $1 - \alpha$  sagen, die Urliste ist nicht verteilt wie  $X$ .



## 2.4 Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

Der  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest testet eine Stichprobe von zwei Zufallsvariablen  $(X, Y)$  auf Unabhängigkeit. Die Nullhypothese lautet also

$$H_0 : X \text{ und } Y \text{ sind unabhängig, d.h. } \forall i, j \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j).$$

Aus der Stichprobe erhält man wieder eine Tabelle der absoluten Häufigkeiten mit den Randhäufigkeiten

	$Y = 1$	$Y = 2$	$\dots$	$Y = m$	
$X = 1$	$h_{11}$	$h_{12}$		$h_{1m}$	$h_{1\cdot}$
$X = 2$	$h_{21}$	$h_{22}$		$h_{2m}$	$h_{2\cdot}$
$\vdots$			$\ddots$		
$X = k$	$h_{k1}$	$h_{k2}$		$h_{km}$	$h_{k\cdot}$
	$h_{\cdot 1}$	$h_{\cdot 2}$		$h_{\cdot m}$	$n$

Aus den Randhäufigkeiten bestimmt man dann die erwarteten Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen bei unabhängigen Merkmalen

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$$

Damit bestimmt man schließlich wieder die Chi-Quadrat-Teststatistik

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}.$$

Den so erhaltenen Wert vergleicht man wiederum mit dem  $1 - \alpha$ -Quantil. Falls

$$\chi^2 > \chi_{(1-\alpha)}^2((k-1) \cdot (m-1))$$

gilt, so ist die Nullhypothese zu verwerfen.

## 2.5 Lineare Einfachregression

– Ende.

# LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. FAHRMEIR, *Statistik: Der Weg zur Datenanalyse*, Springer-Lehrbuch : SpringerLink : Bücher, Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 8. Aufl. 2016 ed., 2016.
- [2] N. HENZE, *Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*, SpringerLink : Bücher, Springer Spektrum, Wiesbaden, 10., überarb. Aufl. 2013 ed., 2013.
- [3] U. KRENGEL, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg Studium, Aufbaukurs Mathematik : SpringerLink : Bücher, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 8., erweiterte Auflage ed., 2005.
- [4] D. PFLÜGER, *Skript zur Vorlesung Statistische und stochastische Grundlagen*, Universität Stuttgart, Wintersemester 2018/19.