MD1 APPELLO GIU 16, 2016

Esercizi

(1) Sia $V = \{1, 2, \dots, 7\}$. Quanti numeri interi che cominciano per 1 e finiscono per 7 si possono comporre utilizzando solo cifre in V (NB: ogni cifra può comparire al massimo una volta)? Quanti di questi numeri utilizzano (a parte l'1 e il 7) solo cifre pari ?

(2) Si consideri l'equazione a variabili intere non-negative

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

(a) Quante soluzioni esistono?
(b) Quante sono le soluzioni in cui ogni x_i è un numero pari positivo?
(c) Quante sono le soluzioni in cui $x_1 \neq x_2$?
(d) Quante sono le soluzioni in cui esattamente due degli x_i sono dei numeri dispari?

1. Soluzioni

(1) Ci possono essere k numeri interni (tra l'1 e il 7), con $k = 0, \dots, 5$. Fissato k li si può scegliere in $\binom{5}{k}$ modi e ordinare in $k!$ modi per un totale di

$$\sum_{k=0}^{5} k!\binom{5}{k} = \sum_{k=0}^{5} 5!/(5-k)! = \frac{5!}{5!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{1!}+\frac{5!}{0!} = 1+5+20+60+120+120 = 326$$

possibilità. Un ragionamento analogo si può fare se i numeri interni sono tutti pari, solo che anzichè tra 5 dobbiamo scegliere tra 3 possibilità:

$$\sum_{k=1}^{3} k!\binom{3}{k} = \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{1!} + \frac{3!}{0!} = 3 + 6 + 6 = 15$$

(2) (a) Le soluzioni sono in tutto

$$\binom{12+3}{3} = 455$$

(b) Ogni x_i deve essere pari ≥ 2. Poniamo $x_i = 2(y_i + 1)$ con $y_i \geq 0$ e otteniamo l'equazione

$$2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 4) = 12$$

ossia

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2$$

che ha

$$\binom{2+3}{3} = 10$$

soluzioni.

(c) Calcoliamo le soluzioni in cui $x_1 = x_2$ e poi le sottraiamo dal totale. Se $x_1 = x_2$ l'equazione diventa

$$x_3 + x_4 = 12 - 2x_1$$

Si vede che x_1 può valere da 0 a 6. Il numero di soluzioni è

$$\sum_{x_1=0}^{6} \binom{12 - 2x_1 + 1}{1} = \sum_{x_1=0}^{6} 13 - 2x_1 = 7 \times 13 - 2 \sum_{x_1=0}^{6} x_1 = 49$$

Sottraendo dal totale, si ha che esistono

$$455 - 49 = 406$$

soluzioni con $x_1 \neq x_2$.

(d) Consideriamo le soluzioni in cui x_1 e x_2 sono dispari (siccome x_1 e x_2 sono stati scelti tra 6 possibili coppie di variabili x_i e x_j, il totale andrà poi moltiplicato per 6).
Se x_1 e x_2 sono dispari (e quindi x_3 e x_4 sono pari, esistono variabili $y_1, \ldots, y_4$ tutte ≥ 0 tali che

$$x_1 = 2y_1 + 1, \quad x_2 = 2y_2 + 1, \quad x_3 = 2y_3, \quad x_4 = 2y_4$$

L'equazione diventa

$$2y_1 + 1 + 2y_2 + 1 + 2y_3 + 2y_4 = 12$$

ossia

$$y_1 y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

che ha

$$\binom{5+3}{5} = 56$$

soluzioni. Il totale di soluzioni in cui due delle variabili sono dispari è perciò:

$$6 \times 56 = 336$$