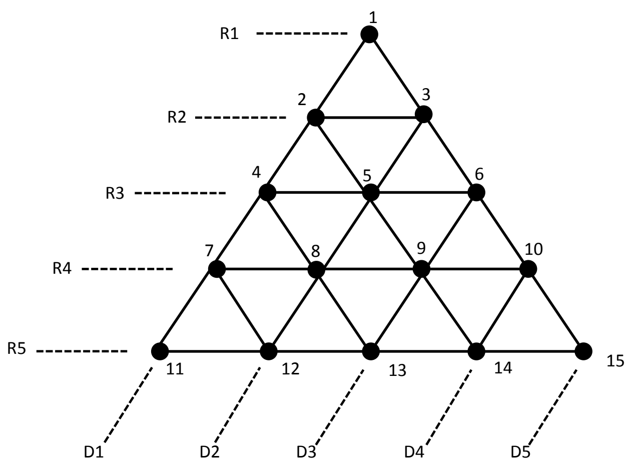
MD1 APPELLO FEB 18, 2016



Sia $G(n)$ il grafo così definito. I nodi sono disposti su n righe $(R_1, \ldots, R_n)$ e n diagonali $(D_1, \ldots, D_n)$. In ogni riga R_i ci sono i nodi. In ogni diagonale D_i ce ne sono $n+1-i$. Da ogni nodo delle righe $R_1, \ldots, R_{n-1}$ partono due archi diagonali (uno a sinistra e uno a destra) verso nodi della riga successiva. Inoltre i nodi di ogni riga sono collegati fra loro da un cammino orizzontale. Nel complesso il grafo ha una forma di triangolo, e contiene vari triangoli più piccoli (si veda la figura che rappresenta $G(5)$). I nodi del grafo sono numerati (etichettati) dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra. Il vertice in alto è il numero 1, mentre in basso a destra c'è il numero $n(n+1)/2$.

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si trovi una formula $f(i,j)$ che, dati due valori $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, i\}$ restituisca l'etichetta del nodo che si trova in riga R_i e diagonale D_j (per verificare la correttezza della funzione trovata, si verifichi che $f(1,1) = 1$, $f(3,2) = 5$, $f(n,n) = n(n+1)/2$. La formula deve risultare chiusa, ossia essere una funzione polinomiale di i e di j).

(2) Quanti archi ci sono in $G(10)$? Quante qlique di 3 nodi (ossia, triangoli di lato 1) ci sono in $G(21)$?

(3) Quanti archi in $G(20)$ collegano nodi che hanno entrambi un'etichetta dispari?

(4) Qual è il numero t di archi che bisogna togliere come minimo da $G(3)$ per renderlo bipartito? Si argomenti la risposta, ossia si dimostri che possibile rendere bipartito $G(3)$ togliendo t archi, ma non è possibile togliendone $t-1$.

1. Soluzione

(1) Nella generica riga k ci sono k nodi. Per arrivare a un nodo in riga i dobbiamo passare tutti i nodi nelle righe $1, \ldots, i-1$ e poi spostarci di j nodi nella riga i in modo da raggiungere la diagonale j. Quindi la funzione cercata è

$$f(i,j) = \sum_{k=1}^{i-1} k + j = \frac{i(i-1)}{2} + j$$

Abbiamo $f(1,1) = 1 \times 0/2 + 1 = 1$; $f(3,2) = 3 \times 2/2 + 2 = 5$; $f(n,n) = n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$.

(2) Contiamo gli archi orizzontali. In riga R_i ve ne sono $i-1$, per cui ci sono in tutto

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i = n(n-1)/2$$

archi orizzontali. Nel caso specifico in cui $n = 10$ si hanno 45 archi orizzontali. Per ragioni di simmetria ci sono 45 archi diagonali "di tipo SO-NE" e 45 diagonali "di tipo NO-SE". Quindi in totale ci sono 135 archi in $G(10)$.

Per quel che riguarda i triangolini (i.e., triangoli di lato 1), notiamo che se tra la riga R_i e R_{i+1} ci sono x triangolini, tra la R_{i+1} e R_{i+2} ce ne sono $x + 2$. Siccome tra R_1 e R_2 c'è un triangolino, il numero complessivo di triangolini è la somma dei primi $n - 1$ numeri dispari, ossia

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 2n(n-1)/2 - (n-1) = (n-1)^2$$

In particolare, si sono 400 triangolini in $G(21)$.

(3) Consideriamo i nodi fino alla riga $n - 1$. In totale ce ne sono $n(n - 1)/2$ (nel caso specifico 190). Si tratta di nodi "interni" in $G(20)$, ossia non sulla base. Di questi, 95 hanno etichetta dispari. Siccome gli archi orizzontali non collegano mai nodi entrambi dispari, gli unici archi da contare sono archi diagonali, ossia uscenti dai nodi interni verso nodi interni una riga sotto. Per ogni nodo interno dispari, esattamente uno dei nodi sotto di lui a cui è collegato è dispari, e quindi ci sono tanti archi fra nodi dispari quanti sono i nodi interni dispari, ossia 95.

(4) Si può rendere bipartito $G(3)$ togliendo 3 archi: ad esempio 23, 25 e 35. Non è possibile renderlo bipartito togliendo 2 archi. Infatti i triangoli 123, 245 e 356 non hanno lati in comune, e per distruggerli dobbiamo togliere almeno un arco da ciascuno di essi.