MD2 APPELLO SEP 20, 2016

(NB: esistono varie versioni diverse –ma equivalenti– degli esercizi. Viene data la soluzione ad una di esse. Chi avesse ricevuto una versione diversa non dovrebbe aver difficoltà ad apportare le modifiche necessarie e ricostruire la soluzione per la propria versione)

1. Problema 1

Sia $\mathbb{R}^{2\times 2}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2, la cui base canonica $\mathcal{C}$ è

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo inoltre con $\mathcal{B}$ la seguente base di $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si trovino coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che

$$A = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 + \delta V_4$$

(2) Sia $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \mapsto \mathbb{R}^{2\times 2}$ l'applicazione biiettiva definita da

$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & a-d \end{pmatrix}$$

Sia $g = f^{-1}$.

Si calcoli la matice $M[g; \mathcal{C}; \mathcal{B}]$ che rappresenta g rispetto alle basi $\mathcal{C}$ (base di partenza) e $\mathcal{B}$ (base di arrivo). Si esprima inoltre g tramite quattro funzioni lineari $g_{11}(a', b', c', d')$, $g_{12}(a', b', c', d')$, $g_{21}(a', b', c', d')$, $g_{22}(a', b', c', d')$ che determinano le coordinate dell'immagine di una generica matrice $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$g : \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_{11}(a', b', c', d') & g_{12}(a', b', c', d') \\ g_{21}(a', b', c', d') & g_{22}(a', b', c', d') \end{pmatrix}$$

(similmente a come è stata descritta f in precedenza, dove $f_{11}(a, b, c, d) = (a + b)/2$, $f_{12}(a, b, c, d) = (b + c)/2$,... ecc.)

Soluzione.

(1) Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta & = 3 \\ \alpha - 2\delta & = 1 \\ \alpha + \gamma - 3\delta & = -1 \\ \beta + 4\delta & = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\alpha = 9/5$, $\beta = -3/5$, $\gamma = -8/5$, $\delta = 2/5$.

(Per chi aveva la versione in cui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la soluzione è $\alpha = 7/5$, $\beta = 1/5$, $\gamma = -9/5$, $\delta = 1/5$).

(2) La matrice di f rispetto alla base canonica è

$$M[f;\mathcal{C};\mathcal{C}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è

$$M[g;\mathcal{C};\mathcal{C}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando

$$M[g;\mathcal{C};\mathcal{C}] \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' - b' + c' + d' \\ a' + b' - c' - d' \\ -a' + b' + c' + d' \\ a' - b' + c' - d' \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$g : \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' - b' + c' + d' & a' + b' - c' - d' \\ -a' + b' + c' + d' & a' - b' + c' - d' \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{cases} g_{11}(a', b', c', d') & = a' - b' + c' + d' \\ g_{12}(a', b', c', d') & = a' + b' - c' - d' \\ g_{21}(a', b', c', d') & = -a' + b' + c' + d' \\ g_{22}(a', b', c', d') & = a' - b' + c' - d' \end{cases}$$

Calcoliamo la matrice del cambiamento di base: si ha

$$M[id;\mathcal{B};\mathcal{C}] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

da cui, calcolandone l'inversa, si ha

$$M[id;\mathcal{C};\mathcal{B}] = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & -11 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

In conclusione, si ha

$$M[g;\mathcal{C};\mathcal{B}] = M[id;\mathcal{C};\mathcal{B}]M[g;\mathcal{C};\mathcal{C}] = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & -11 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 14 & 2 & -6 & -10 \\ 2 & 6 & 2 & -10 \\ -18 & -4 & 22 & 20 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

***Per esercizio, verifichiamo che f e g sono inverse utilizzando le funzioni che definiscono le componenti dell'immagine:

$$(fg)\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a' - b' + c' + d' & a' + b' - c' - d' \\ -a' + b' + c' + d' & a' - b' + c' - d' \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a'-b'+c'+d'+a'+b'-c'-d' & a'+b'-c'-d'-a'+b'+c'+d' \\ -a'+b'+c'+d'+a'-b'+c'-d' & a'-b'+c'+d'-(a'-b'+c'-d') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

ed anche

$$(gf)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}g\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & a-d \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)-(b+c)+(c+d)+(a-d) & (a+b)+(b+c)-(c+d)-(a-d) \\ -(a+b)+(b+c)+(c+d)+(a-d) & (a+b)-(b+c)+(c+d)-(a-d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. Problema 2

Si determinino $a, d \in \mathbb{R}$ in modo tale che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 114 & 48 \\ 48 & 86 \end{pmatrix}$$

abbiano i medesimi autovalori.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} 114 & 48 \\ 48 & 86 \end{pmatrix}$ è

$$\det\begin{pmatrix} 114-\lambda & 48 \\ 48 & 86-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 200\lambda + 7500$$

che ha come radici 150 e 50. Quindi gli autovalori di B sono $\lambda_1 = 150/25 = 6$ e $\lambda_2 = 50/25 = 2$.

Il polinomio caratteristico di A è

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ 3 & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - 3$$

Imponendo che 6 e 2 ne siano radici, otteniamo i vincoli

$$6(a+d) - ad = 33$$

$$2(a+d) - ad = 1$$

Sottraendo si ha $4(a+d) = 32$, ossia $a + d = 8$. Abbiamo allora, nella seconda,

$$a(8-a) = 15$$

i.e., $a^2 - 8a + 15 = 0$, che ha come radici $a = 3$ e $a = 5$. Quindi la soluzione del problema è porre $a = 3, d = 5$ (oppure $a = 5, d = 3$).

3. Problema 3

Si determinino $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo tale che il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

sia $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico è (sviluppando la prima riga)

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & c-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \lambda c - b) + a = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$$

da cui si ricava la soluzione $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$.