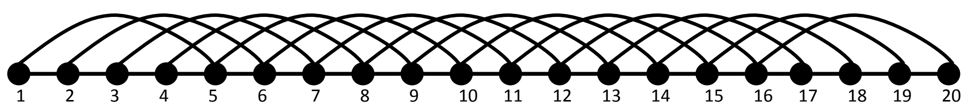
Soluzione esame MD1 Febbraio 2016



Es. A1. Sia G il grafo i cui vertici sono i numeri $1, \ldots, 20$ e in cui si ha un arco tra i e $i+1$, per $i = 1, \ldots, 19$ e tra i e $i+4$ per $i = 1, \ldots, 16$ (si veda la figura). Un cammino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tra $v_1 = 1$ e $v_k = 20$ si dice *aumentante* se $v_1 < v_2 < \cdots < v_k$ (ossia se va da 1 a 20 "muovendosi sempre verso destra"). Quanti sono i cammini aumentanti in G?

Sol: In un cammino aumentante possono esserci c archi curvi con c che va da 0 ad un massimo di 4. Ogni arco curvo conta come 4 orizzontali per cui ne restano $19 - 4c$ orizzontali. Gli archi curvi separano i tratti orizzontali creando $c+1$ cammini orizzontali, la lunghezza dei quali è una variabile x_i tale che

$$x_1 + \cdots + x_{c+1} = 19 - 4c$$

I cammini sono tanti quanti le soluzioni a tale equazione, ossia

$$\binom{19 - 4c + c}{c}$$

In conclusione si hanno

$$\sum_{c=0}^{4} \binom{19 - 3c}{c}$$

111cammini aumentanti, ossia

$$\binom{19}{0} + \binom{16}{1} + \binom{13}{2} + \binom{10}{3} + \binom{7}{4} = 1 + 16 + 78 + 120 + 35 = 250$$

Soluzione alternativa: Denotiamo con C_n il numero di cammini aumentanti dal nodo 1 al nodo n. Per $n = 1, \ldots, 4$ si ha $C_n = 1$, mentre $C_5 = 2$ in quanto si può raggiungere il nodo 5 o con un cammino orizzontale o direttamente con l'arco $1,5$. In generale, al nodo n si può arriuvare con un arco orizzontale dal nodo $n-1$ o con un arco curvo dal nodo $n-4$ e quindi

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-4}$$

Usando questa relazione si ha: $C_6 = C_5 + C_2 = 2+1 = 3$; $C_7 = 3+1 = 4$; $C_8 = 4+1 = 5$; $C_9 = 5+2 = 7$; $C_{10} = 7+3 = 10$; $C_{11} = 10+4 = 14$; $C_{12} = 14+5 = 19$; $C_{13} = 19+7 = 26$; $C_{14} = 26+10 = 36$; $C_{15} = 36+14 = 50$; $C_{16} = 50+19 = 69$; $C_{17} = 69+26 = 95$; $C_{18} = 95+36 = 131$; $C_{19} = 131+50 = 181$; $C_{20} = 181+69 = 250$.

Commento: La seconda soluzione è un'enumerazione esplicita che può funzionare in questo caso, ma che diventerebbe impraticabile se il grafo avesse, ad esempio, $n = 200$ nodi e archi curvi che saltano 40 nodi alla volta anzichè 4. La prima soluzione rimarrebbe sostanzialmente identica, mentre la seconda richiederebbe il calcolo di 200 valori anzichè 20. Quindi il primo metodo è senz'altro da preferirsi.

ES. A2. In una sartoria vengono prodotte bandiere utilizzando tele di c colori diversi. Ogni bandiera è un rettangolo diviso in tre strisce verticali, ognuna delle quali può assumere uno dei c colori. Quindi, in una bandiera, possono comparire da uno a tre colori. Ad esempio, con i colori V (verde), R (rosso) e B (bianco) della bandiera italiana si possono fare bandiere di tre colori, tipo

V	B	R

B	R	V

oppure di due colori, tipo

V	B	V

B	R	R

Due bandiere sono effettivamente diverse solo se non è possibile ottenere la prima girando al contrario la seconda. Quindi le bandiere RBV e VBR non sono diverse ma uguali (dal punto di vista della sartoria che le deve produrre), mentre RBV e VRB sono diverse. Ci chiediamo:

1. Quante bandiere diverse si possono produrre utilizzando i colori $\{1, 2, \ldots, 10\}$?
2. In quante di tali bandiere tra i colori 1, 2 e 3, ne compare al massimo uno? (ad es. vanno bene le bandiere 114 e 579, mentre non vanno bene 153 nè 212)

Sol:

1. Distinguiamo 3 casi a seconda del numero di colori che compaiono:
   (a) Bandiere monocolore: ci sono c bandiere (10)
   (b) Bandiere bicolore: i pattern possibili sono XXY e XYX, per cui si hanno

   $$2c(c-1)$$

   bandiere (nello specifico 180)

(c) Bandiere tricolore: ci sono $c(c-1)(c-2)/2$ tali bandiere (la divisione per 2 è dovuta al fatto che ogni bandiera rimane la stessa anche se rovesciata). Nello specifico 360.

In totale si hanno $10 + 180 + 360 = 550$ bandiere diverse.

2. Consideriamo le bandiere in cui compaiono solo i colori $4, \dots, 10$. Ci sono $c = 7$ colori. Con le considerazioni del punto precedente si possono fare

$$c + 2c(c-1) + c(c-1)(c-2)/2 = 7 + 84 + 105 = 196$$

bandiere, che vanno tutte bene.

Consideriamo ora le bandiere che contengono il colore 1 ma non il 2 nè il 3 e contiamole. Distinguiamo 3 casi

(a) Bandiere monocolore: ce n'è una

(b) Bandiere bicolore: I pattern possibili sono 11X, 1X1 e XX1 e X1X. Per ciascuno di essi ci sono 7 bandiere possibili, per cui in totale sono 28

(c) Bandiere tricolore: I pattern possibili sono 1XY ($7 \times 6 = 42$ possibilità) e X1Y ($42/2 = 21$ possibilità, in quanto girando una bandiera di tale pattern, il pattern rimane lo stesso). In totale si hanno 63 bandiere possibili.

In conclusione ci sono $1 + 28 + 63 = 92$ bandiere che contengono il colore 1 ma non il 2 nè il 3. Analogamente, ci sono 92 bandiere che contengono il colore 2, ma non l'1 nè il 3, e 92 che contengono il colore 3, ma non l'1 nè il 2.

In totale, le bandiere che contengono al massimo uno tra i colori 1, 2 e 3 sono

$$196 + 92 + 92 + 92 = 472$$

Soluzione alternativa al pto 2: Chiamiamo $B(n)$ il numero di bandiere possibili avendo a disposizione n colori. Dalla soluzione del punto 1 vista in precedenza si ha

$$B(n) = n + 2n(n-1) + n(n-1)(n-2)/2 = n^2(n+1)/2$$

Le bandiere che non usano alcun colore tra 1,2,3 sono

$$B(7) = 49 \times 4 = 196$$

Le bandiere che usano il colore 1 (ma non il 2 o il 3) sono

$$B(8) - B(7) = 64 \times 9/2 - 196 = 288 - 196 = 92$$

in quanto $B(8)$ sono le bandiere che possono usarlo (date dai colori 1,4,..,10) da cui tolgo $B(7)$ bandiere che non lo usano. Allo stesso modo, si hanno 92 bandiere che usano il colore 2 (ma non l'1 o il 3) e 92 bandiere che usano il colore 3 (ma non l'1 o il 2). In conclusione quindi

$$B(7) + 3(B(8) - B(7)) = 196 + 3 \times 92 = 196 + 276 = 472$$

bandiere che usano al massimo un colore tra 1,2,3.