COGNOME E NOME MATR.

[(se già sostenuto:) DATA MD2 (mm/aa) VOTO]

MD1 APPELLO JUL 14, 2016

Esercizi

(1) (**Problema 1 – Difficoltà media**) Sia V l'insieme di tutte le parole formate con le lettere A, B, C tali che *ogni parola ha esattemente 5 lettere e contiene al massimo una lettera A.*

Sia $G = (V, E)$ il grafo in cui c'è un arco fra ogni coppia di parole $x, y \in V$ tali che x può essere ottenuta da y sostituendo esattamente una lettera (ad es. $x = ABCCB$ e $y = BBCCB$). Si risponda alle seguenti domande sul grafo G

(a) Quanti nodi e quanti archi possiede?
(b) è connesso?
(c) è bipartito?
(d) è euleriano?

(2) (**Problema 2 – Difficoltà medio-alta**) Una scalinata contiene 12 scalini, numerati $1, \ldots, 12$. Una persona che sale la scala determina una sequenza di scalini calpestati, che chiamiamo una *salita*. Ad esempio, la salita "normale" è

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$$

ma se una persona va di fretta e salta uno o più scalini alla volta potrebbe ad esempio determinare una salita tipo

$$(2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12)$$

Ogni salita finisce col gradino 12 (quello del piano d'arrivo), ma può cominciare da qualunque gradino.

(a) Quante sono le salite in cui si sale solo di uno o due gradini alla volta? (ossia se $(s_1, \ldots, s_t)$ è la salita, si ha $s_1 \leq 2$ e $s_{i+1} \leq s_i + 2$ per ogni i)
(b) in quante delle salite di cui al punto (a) non vengono calpestati nè il gradino 4 nè il 9 (come ad esempio $(1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12)$) ?
(c) Quante sono le salite in cui vengono calpestati complessivamente esattamente 5 scalini?

1. Soluzioni

Problema 1.

(1) Distinguiamo due tipi di nodi: V_S = nodi senza la A; V_c = nodi con una A. Abbiamo

$$|V_S| = 2^5 = 32$$

e

$$|V_c| = 5 \times 2^4 = 80$$

In totale $|V| = 32 + 80 = 112$.

Per quel che riguarda gli archi, ogni nodo in V_s ha grado $2 \times 5 = 10$ perchè ogni lettera può essere cambiata in 2 modi.

I nodi in V_c hanno grado $2 + 1 \times 4 = 6$ in quanto le lettere diverse da A non possono diventare A.

In totale la somma dei gradi è $32 \times 10 + 80 \times 6 = 320 + 480 = 800$ per cui ci sono $800/2 = 400$ archi.

(2) G è connesso in quanto ogni parola $x \in V$ può essere trasformata in una parola $y \in V$, ad es. cambiando una lettera alla volta, da sinistra a destra, laddove diversa.

(3) G non è bipartito. Ad esempio, G contiene il triangolo

$$ABBBB \mapsto BBBBB \mapsto CBBBB \mapsto ABBBB$$

(4) G è euleriano. Infatti, sappiamo che è connesso. Inoltre ogni nodo ha grado 10 o 6, e quindi pari.

Problema 2.

1. sia n il numero di gradini di una scala. Se a ogni passo possiamo salire solo di 1 o due gradini, le salite possibili $S(n)$ soddisfano alla relazione

$$S(n) = S(n-1) + S(n-2)$$

in quanto se cominciamo con un gradino ne restano da salire $n - 1$ e se cominciamo con 2 gradini ne restano $n - 2$. Si vede immediatamente che si tratta della successione di Fibonacci. Sapendo che $S(1) = 1$ e $S(2) = 2$, otteniamo la sequenza

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$$

e quindi ci sono 233 salite.

1bis (Soluzione alternativa –meno elegante– al punto 1). Possiamo vedere una salita come una stringa di U (uno) e D (due), contenente $2k$ U (dove k è un numero pari tra 0 e 6) e $6 - k$ lettere D. Per k fissato, tali parole sono in tutto

$$\binom{6-k+2k}{2k}$$

per cui il numero di salite è

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6+k}{2k} = \binom{6}{0}+\binom{7}{2}+\binom{8}{4}+\binom{9}{6}+\binom{10}{8}+\binom{11}{10}+\binom{12}{12} = 1+21+70+84+45+11+1 = 233$$

2. Usiamo il principio di inclusione-esclusione. Chiamiamo P_i la proprietà di una salita di passare per il gradino i, con $i = 4, 7$. Ci interessa sapere quante salite non hanno alcuna delle P_i. Sia A_i l'insieme delle salite che hanno la proprietà P_i.

Abbiamo

$$|A_4| = S(4) \times S(8) = 5 \times 34 = 170$$

in quanto una salita che passa per il gradino 4 è data da una qualsiasi salita di 4 gradini seguita da una qualsiasi salita dei restanti 8. Allo stesso modo

$$|A_9| = S(9) \times S(3) = 55 \times 3 = 165$$

Veniamo alle salite che toccano i due scalini vietati. Abbiamo

$$|A_4 \cap A_9| = S(4) \times S(5) \times S(3) = 5 \times 8 \times 3 = 120$$

in quanto una salita che passa per il gradino 4 e il 9 è data da una qualsiasi salita di 4 gradini seguita da una qualsiasi salita di 5 gradini (dal 4 al 9) seguita da una qualsiasi salita dei restanti 3.

Dal principio di inclusione esclusione abbiamo allora che il numero totale di salite che non passano da alcuno scalino vietato è

$$233 - (170 + 165) + 120 = 18$$

3. Sia x_i il numero di scalini saliti con l'i-mo passo. Allora il problema equivale a chiedersi quante sono le soluzioni dell'equazione a variabili intere

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

in cui $x_i \geq 1$ per ogni i. Posto $x_i = 1 + y_i$ con $y_i \geq 0$ l'equazione diventa

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7$$

che sappiamo avere

$$\binom{7+4}{4} = \binom{11}{4} = 330$$

soluzioni.