MD2 FEB 2016 – SOLUZIONE

Sia $\mathbf{Mat}_{2\times 2}$ lo spazio vettoriale di tutte le matrici 2×2, la cui base canonica è

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{Mat}_{2\times 2} \mapsto \mathbf{Mat}_{2\times 2}$ definita da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & a-d \end{pmatrix}$$

(1) Determinare la matrice associata all'applicazione f rispetto alla base canonica.
(2) Siano $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare $f(AB)$ e $f(B^{-1})$.
(3) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ (il nucleo di f).
(4) Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ (l'immagine di f).
(5) Si consideri la base di $\mathbf{Mat}_{2\times 2}$ data dalle matrici

$$V_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_2 := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ V_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_4 := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si esprima la matrice $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare delle matrici V_1, V_2, V_3, V_4.

Soluzione.

(1) Calcoliamo il valore della funzione f nei vettori della base canonica. Esso è

$$f(E_1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ f(E_2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ f(E_3) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ f(E_4) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate degli $f(E_i)$ rispetto alla base canonica forniscono le colonne della matrice associata alla f che risulta quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(2) Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad f(AB) = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},$$

ed anche

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}, \qquad f(B^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(3) Il nucleo di f è l'insieme delle matrici $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tali che

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-w & y+z \\ y+z & x-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogni tale matrice deve soddisfare due equazioni lineari, ossia

$$x - w = 0, \qquad y + z = 0$$

La generica soluzione è del tipo

$$\begin{pmatrix} t & s \\ -s & t \end{pmatrix} \text{ con } t, s \in \mathbb{R}$$

Quindi il nucleo ha dimensione 2. Una sua base si ottiene per $t = 1, s = 0$ e $t = 0, s = 1$ ed è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) L'immagine di f è generata dai vettori $f(E_i)$ calcolati al punto 1. Si vede che $f(E_4)$ e $f(E_3)$ dipendono da $f(E_1)$ e $f(E_2)$ che invece sono linearmente indipendenti fra loro. Quindi l'immagine ha dimensione 2 e una sua base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(5) Per una generica combinazione lineare $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 + \delta V_4$ di $V_1, \ldots, V_4$ risulta

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\beta & 0 \\ -2\beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3\delta \\ -\delta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta - \gamma & \gamma - 3\delta \\ -2\beta - \delta & \delta \end{pmatrix}$$

e quindi si tratta di determinare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta - \gamma & \gamma + 3\delta \\ -2\beta - \delta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite. Dall'ultima equazione si ha $\delta = 4$. Sostituendo a ritroso si ottiene $\beta = 2$, $\gamma = -10$ e $\alpha = -5$. In conclusione

$$-5\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$