COGNOME E NOME MATR.

[(se già sostenuto:) DATA MD1 (mm/aa) VOTO]

MD2 APPELLO LUG 14, 2016

Esercizi

(1) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, indichiamo con A_k la matrice definita da

$$A_k := \begin{pmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix}$$

(a) L'insieme $V = \{A_k \,:\, k \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3\times 3}$? Se sì, qual'è la sua dimensione?
(b) Si risolva il sistema di equazioni lineari

$$A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c) Si calcoli il rango di A_k al variare del parametro k.
(d) Si determini il valore di k per il quale la matrice A_k abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A_k.

(2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a valori reali. Sia A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Diciamo che una matrice $M \in V$ *commuta* con A se si ha che $AM = MA$. Sia S il sottoinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:

$$S = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \,:\, AM = MA \right\}$$

(a) Mostrare che S è un sottospazio di V.
(b) Calcolare la dimensione e una base di S.

1. Soluzioni

(1) (a) V non è uno spazio vettoriale in quanto $\mathbf{0} \notin V$.
(b) La soluzione è $x = -13/3$, $y = 14/3$, $z = 4/3$
(c) Si noti che le prime due righe sono lin. indipendenti per qualsiasi k. Per $k = 0$, rango di $A_k = 2$,in quanto la terza riga contiene tutti zeri. Per $k \neq 0$, rango di $A_k = 3$, in quanto la terza riga non è combinazione lineare delle prime due.
(d) Si ha $det(A_k) = 3k(4-2) = 6k$, da cui $det(A_k) = 1$ per $k = 1/6$. Si ha

$${A_{1/6}}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) (a) Per mostrare che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^{2\times 2}$ facciamo vedere che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $B, C \in S$, detta $M = \alpha B + \beta C$ si ha $M \in S$. Abbiamo

$$AM = A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC = \alpha BA + \beta CA = (\alpha B + \beta C)A = MA$$

e quindi $M \in S$.

(b) Sia

$$M := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

un generico elemento di S. La condizione di appartenere a S può essere scritta come

$$\begin{pmatrix} 8x - 7z & 8y - 7w \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x + y & -7x \\ 8z + w & -7z \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} -y - 7z & 7x + 8y - 7w \\ x - 8z - w & y + 7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema di 4 equazioni in 4 incognite, che, risolto, corrisponde al seguente insieme di soluzioni:

$$x = s + 8t, y = -7t, z = t, w = s$$

per $s, t \in \mathbb{R}$. Si vede che l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Una sua base può essere ottenuta per $s = 1, t = 0$, nel qual caso $M = I$, e per $s = 0, t = 1$, nel qual caso $M = A$. Quindi una base di S è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$