Métodos numéricos y Optimización - primer cuatrimestre de 2023

Trabajo Práctico 2 - Estudio numérico de péndulos simples y dobles

Escribir un informe reportando los resultados de los siguientes experimentos numéricos. Los códigos desarrollados se deben entregar junto al informe. Las secciones 1, 2, 3 sirven como introducción de los temas. Los objetivos a resolver se detallan en la sección 4.

1 Péndulo simple

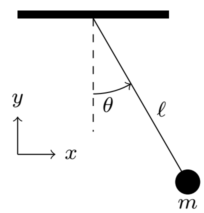

Figura 1: Esquema de un péndulo simple. El origen de coordenadas se encuentra en el punto de agarre.

Un péndulo simple está compuesto por una partícula de masa m sujeta a un punto de agarre por una vara sin masa de largo ℓ y bajo la acción de la gravedad. La figura 1 muestra un diagrama del sistema [1]. La gravedad tiene aceleración g. Tomando los ejes de coordenadas que se usan en la figura y utilizando el hecho de que la longitud de la vara es fija, el vector posición de la partícula **r** puede escribirse como

$$\boldsymbol{r} = (\ell \sin\theta(t), -\ell\cos\theta(t)), \tag{1}$$

y la gravedad como

$$\boldsymbol{g} = (0, -g). \tag{2}$$

La dinámica del péndulo está descripta por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \tag{3}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$. La energía total del sistema viene dado por

$$E = T + V, \tag{4}$$

donde

$$T = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2, \tag{5}$$

es la energía cinética, y

$$V = -mg\ell\cos\theta + mg\ell. \tag{6}$$

es la energía potencial. La energía total de este sistema se conserva en el tiempo, es decir, el valor de E es siempre el mismo, tanto a $t = 0$ como a t más grande. Los valores de T y V, en cambio, fluctúan.

[1] Aclaración importante: el "techo" de la figura está puesto a modo de referencia y no interfiere con la dinámica, el péndulo puede dar toda la vuelta y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

1.1 Sistema linealizado

El sistema tiene un punto de equilibrio estable en $\theta = 0$. Esto quiere decir que si la condición inicial es tal que el péndulo está en reposo y $\theta = 0$ este se quedará ahí. Nada muy sorprendente. Ahora bien, la existencia de este punto de equilibrio nos permite hacer una expansión de $\sin\theta$ alrededor de $\theta = 0$. A primer orden está toma la forma

$$\sin\theta \approx \theta. \tag{7}$$

Si reemplazamos esta expresión en la ecuación (3) obtenemos una ecuación lineal para la dinámica

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \tag{8}$$

la cual podemos resolver analíticamente. Es importante notar que la expansión (7), y por lo tanto su aplicación, solo vale para valores de θ cercanos a cero, el punto de equilibrio. Por eso se refiera a esta aproximación como una aproximación de "pequeñas oscilaciones".

2 Péndulo doble

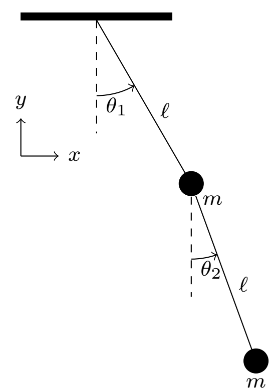

Figura 2: Esquema de un péndulo simple. El origen de coordenadas se encuentra en el punto de agarre.

Un péndulo doble está compuesto por dos péndulos simples, uno sujeto a un punto fijo, y otro sujeto a la primera partícula. En la figura 2 se muestra un diagrama. Notar que el ángulo θ_2 está medido desde la vertical. Bajo esta elección de coordenadas, la posición de cada partícula puede escribirse como

$$\boldsymbol{r}_1 = (\ell\cos\theta_1(t), \ell\sin\theta_1(t)), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + (\ell\sin\theta_2(t), -\ell\cos\theta_2(t)). \tag{10}$$

Para simplificar el análisis, tomaremos que las longitudes de cada péndulo y las masas de cada partícula son las mismas. Bajo estas suposiciones las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-\omega_0^2(2\sin\theta_1 - \cos\Delta\sin\theta_2) - \sin\Delta(\dot{\theta}_2^2 + \cos\Delta\dot{\theta}_1^2)}{2 - \cos^2\Delta}, \tag{11}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-\omega_0^2(\sin\theta_2 - 2\cos\Delta\sin\theta_1) + \sin\Delta(\dot{\theta}_1^2 + \cos\Delta\dot{\theta}_2^2)}{2 - \cos^2\Delta}, \tag{12}$$

donde $\Delta = \theta_1 - \theta_2$. Como tal vez podrán intuirlo al ver las ecuaciones, la dinámica de un péndulo doble es bastante más compleja que la de un péndulo simple y exhibe comportamientos caóticos.

3 Métodos numéricos

En esta práctica se propone estudiar cuatro esquemas numéricos distintos: tres variantes del método de Euler, y el método de Runge-Kutta de orden 4. Dada una ecuación de segundo orden del tipo

$$\ddot{\theta} = f(\theta), \tag{13}$$

ésta puede escribirse como un sistemas de dos ecuaciones de primer orden de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= f(\theta), \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \tag{14}$$

En el método de Euler explícito, estas ecuaciones se discretizan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \omega_{t+1} &= \omega_t + hf(\theta_t), \\ \theta_{t+1} &= \theta_t + h\omega_t, \end{aligned} \tag{15}$$

donde h es el paso temporal. Una primera modificación que puede realizarse a este método (sin tener que pasar a métodos de mayor orden), es evaluar a la evolución de las variables en el paso futuro, es decir,

$$\begin{aligned} \omega_{t+1} &= \omega_t + hf(\theta_{t+1}), \\ \theta_{t+1} &= \theta_t + h\omega_{t+1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Este método se conoce como Euler implícito. En el caso que f sea una función no-lineal se deben emplear métodos como el de Newton-Raphson para resolver el sistema de ecuaciones a cada paso. Si las ecuaciones son lineales, éstas se puede resolver para obtener expresiones para las variables en el tiempo $t + 1$ que dependan solo de las variables en a tiempo t. Una simplificación a este esquema que evita tener que resolver el sistema de ecuaciones es el llamado método de Euler semi-implícito, este tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \omega_{t+1} &= \omega_t + hf(\theta_t), \\ \theta_{t+1} &= \theta_t + h\omega_{t+1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Finalmente, para el método de Runge-Kutta de orden 4, las ecuaciones quedan

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4), \tag{18}$$

donde $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \omega)$ es el vector de variables y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}) = (f(\theta), \omega)$ es el lado derecho de la ecuación (14) en forma vectorial y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_1 &= h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}_t), \\ \boldsymbol{k}_2 &= h\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\theta}_t + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1\right), \\ \boldsymbol{k}_3 &= h\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\theta}_t + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2\right), \\ \boldsymbol{k}_4 &= h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}_t + \boldsymbol{k}_3). \end{aligned}$$

4 Objetivos

El objetivo de este trabajo es estudiar la estabilidad y convergencia de los distintos métodos numéricos y la dinámica de los distintos sistemas físicos. Deberá resolver las ecuaciones de los péndulos simples y dobles y analizar el comportamiento de sus soluciones y de los métodos numéricos. Para esto deberá probar distintas condiciones iniciales y distintos pasos temporales.

Algunas consideraciones para el péndulo simple:

- Estudie tanto las trayectorias obtenidas como la evolución de E, T, y V. Recuerde que, en este sistema, E debería ser constante en el tiempo.
- Resuelva utilizando distintas condiciones iniciales, todas con $\dot{\theta}(0) = 0$, pero con distinto $\theta(0)$.
- Considere solo los métodos de Euler explícito, Euler semi-implícito y Runge-Kutta.
- Como vimos en clase, las ecuaciones pueden linealizarse en el caso que los ángulos sean pequeños. Utilice la solución analítica del sistema linealizado para comprar con los resultados que obtienen numéricamente. ¿Se recupera la solución analítica en el caso que las condiciones iniciales sean las correspondientes?
- El informe deberá incluir un análisis teórico (no sólo numérico) de la estabilidad de los métodos propuestos para las ecuaciones del péndulo simple *linealizadas*.
- ¿Qué un método sea incondicionalmente estable nos asegura convergencia? No se olviden de mostrar que sucede con pasos temporales grandes.
- **OPCIONAL** El esquema de Euler implícito puede resultar complicado de aplicar: puede omitirlo, aplicarlo solamente a las ecuaciones linealizadas del péndulo simple, o animarse a probar con el método de Newton-Raphson.

Y para el péndulo doble:

- Aquí pasen a utilizar directamente el método de Runge-Kutta con un paso temporal adecuado (chico) y a estudiar las trayectorias del sistema. No deben mostrar análisis de estabilidad (numérico ni teórico) en este caso. Aquí la dificultad reside en la complejidad de estas trayectorias. Además de gráficos pueden hacer videos de las trayectorias. Pruebe con distintas condiciones iniciales (ángulos pequeños, medianos, y grandes). Intente encontrar y catalogar distintos tipos de soluciones. Por ejemplo, existe más de un tipo de solución periódica en este sistema, ¿cómo puede encontrarla? ¿Se cumple en este sistema que un pequeño desplazamiento de en las condiciones iniciales genera un cambio continuo en la solución?