

1. (a) 解: $(A|P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 17 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 5 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ \frac{2}{3} & -1 & 5 & 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

$\square PA=LU$

(b) 解: $AX=b \rightarrow PAX=Pb$
 $\because PA=LU \therefore LUX=Pb$
 $\Rightarrow \therefore LUX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}$ 令 $y=UX$ 则 $Ly = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}$

即 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}$ 求得 $\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=4 \\ x_3=16 \\ x_4=5 \end{cases}$ 则 $UX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$

即 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix}$ 求得 $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \\ x_3=0 \\ x_4=1 \end{cases}$