6.(1). 由题意得其增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 10^3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$E_2-10^3E_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 10^3 & -1 & 1 \\ 0 & 10^3 & -10^3 \end{bmatrix}$ 解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

(2) 由题意得其增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 10^{-3} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 选取第一列主元"1"

得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 10^3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2-10^3E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 解. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

4. a. 由题意得增广矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 得 $\begin{cases} x_1 = 1-2x_2-x_4 \\ x_2 \text{ 为 "Free"} \\ x_3 = 2-x_4 \\ x_4 \text{ 为 "Free"} \end{cases}$

$$\therefore x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x_2-x_4 \\ x_2 \\ 2-x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$