6. $A=\begin{bmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{bmatrix}$ 对A进行变换得 $\begin{bmatrix}1&3&1&-4\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore r(A)=2.$

$A^T=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\1&1&2\\-4&0&-8\end{bmatrix}$ $A\cdot A^T=\begin{bmatrix}27&-9&54\\-9&11&-18\\54&-18&108\end{bmatrix}$ 进行变换得 $\begin{bmatrix}-9&11&-18\\0&24&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore r(AA^T)=2.$

$A^TA=\begin{bmatrix}6&18&4&-20\\18&54&12&-60\\4&12&6&-20\\-20&-60&-20&80\end{bmatrix}$ 进行行变换得 $\begin{bmatrix}4&12&6&-20\\0&0&-5&10\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore r(A^TA)=2$

综上所述. $r(A)=r(A^TA)=r(AA^T)=2.$

9. 对于 $y=\alpha_0+\alpha_1 x$ 设

$A=\begin{bmatrix}1&-5\\1&-4\\1&-3\\1&-2\\1&-1\\1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4\\1&5\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}2\\7\\9\\12\\13\\14\\14\\13\\10\\8\\4\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $A^TA=\begin{bmatrix}11&0\\0&110\end{bmatrix}$ $A^Tb=\begin{bmatrix}106\\20\end{bmatrix}$

求解 $A^TAx=A^Tb$ 即可.

即 $\begin{pmatrix}11&0\\0&110\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}106\\20\end{pmatrix}$

解得 $\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9.64\\0.18\end{pmatrix}$

对于 $y=\alpha_0+\alpha_1 x$ 适用性(或契合程度) 计算 $\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2=(Ax-b)^T(Ax-b)$

其中 $A=\begin{bmatrix}1 & -5\\1 & -4\\1 & -3\\1 & -2\\1 & -1\\1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\\1 & 3\\1 & 4\\1 & 5\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}9.64\\0.18\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}2\\7\\9\\12\\13\\14\\14\\13\\10\\8\\4\end{bmatrix}$ 算得 $\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2=162.0117$

对于 $y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$ 令

$$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 25\\1 & -4 & 16\\1 & -3 & 9\\1 & -2 & 4\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\\1 & 4 & 16\\1 & 5 & 25\end{bmatrix}\quad x=\begin{bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}2\\7\\9\\12\\13\\14\\14\\13\\10\\8\\4\end{bmatrix}\Rightarrow A^TA=\begin{bmatrix}11 & 0 & 110\\0 & 110 & 0\\110 & 0 & 1958\end{bmatrix}\quad A^Tb=\begin{bmatrix}106\\26\\688\end{bmatrix}$$

求解 $A^TAx=A^Tb$ 即可

即 $$\begin{bmatrix}11 & 0 & 110\\0 & 110 & 0\\110 & 0 & 1958\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}106\\26\\688\end{bmatrix}$$ 解得 $$\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13.94\\0.24\\-0.43\end{pmatrix}$$

对于 $y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$ 适用性 计算 $\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2=(Ax-b)^T(Ax-b)$

其中 $A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 25\\ 1 & -4 & 16\\ 1 & -3 & 9\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 4 & 16\\ 1 & 5 & 25\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}13.94\\ 0.24\\ -0.43\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}2\\ 7\\ 9\\ 12\\ 13\\ 14\\ 14\\ 13\\ 10\\ 8\\ 4\end{bmatrix}$ 算得 $\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2=11.2698$.

综上所述 对于 $y=\alpha_0+\alpha_1 x$ $\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2=162.0117$ $y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$ $\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2=11.2698$.

$\therefore$ $y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$ 更加契合.