

Системы линейных уравнений. Часть 1.

① Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

$$n=4$$

$$\text{rang } A = 3$$

$$\text{rang } \tilde{A} = 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_4 = c$$

$$-2x_3 + 3c = 4 \Rightarrow x_3 = \frac{3c-4}{2}$$

$$-x_2 + \frac{3c-4}{2} + 5c = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3c-4}{2} + 5c + 2 = \frac{13c}{2}$$

$$x_1 + \frac{13c}{2} - \frac{3c-4}{2} - 2c = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Отв: } x_1 = -3c-2, x_2 = \frac{13c}{2}, x_3 = \frac{3c-4}{2}, x_4 = c. \Rightarrow x_1 = 2c + \frac{3c-4}{2} - \frac{13c}{2} = -3c-2$$

② Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

$$a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{array} \right)$$

$$n=3, A=3, \tilde{A}=3 \Rightarrow \text{система совместная, определенная (единств. решение).}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Нет решений.} \\ \text{Система несовместна.} \end{array}$$

$$n=3, A=1, \tilde{A}=3.$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array} \right)$$

$$n=3, A=2, \tilde{A}=2 \Rightarrow \text{система совместная, неопределенная (решений > одного).}$$

③ Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенными матрицами

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} n=4 \\ A=4 \\ \tilde{A}=4 \end{array} \Rightarrow \text{Система совместна и имеет единственное решение (определенная).}$$

④ Дана система линейных уравнений, заданная расширенными матрицами

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array} \right). \quad \text{Найти соотношение между параметрами } a, b \text{ и } c, \text{ при которых система является несовместной.}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \quad \det A = 0 \Rightarrow \text{система не имеет решений (несовместна) при любых значениях } a, b \text{ и } c.$$