Урок 3. Матрицы и матричные операции. Часть 1

① Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размеры полученных матриц:

а) A - матрица 4×2, B - матрица 4×2. AB и BA неприменимы, т.к. в обих случаях не будут совпадать кол-во столбцов первой и кол-во строк второй матрицы.

б) A - матрица 2×5, B - матрица 5×3.
AB - итоговая размерность - 2×3.
BA - невозможно перемножить.

в) A - матрица 8×3, B - матрица 3×8. AB - размер итоговой матрицы - 8×8.
BA - размер итоговой матрицы - 3×3.

г) A и B - квадратные матрицы 4×4.
AB и BA будут иметь итоговый размер 4×4.

② Найти сумму и произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

Сумма $A+B=B+A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

Произведение $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4+(-2)\cdot0 & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot5\\ 3\cdot4+0\cdot0 & 3\cdot(-1)+0\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -11\\ 12 & -3\end{pmatrix}$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot1+(-1)\cdot3 & 4\cdot(-2)+(-1)\cdot0\\ 0\cdot1+5\cdot3 & 0\cdot(-2)+5\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 15 & 0\end{pmatrix}$

③ Вычислить линейную комбинацию $3A-2B+4C$ для матриц

$A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -6\end{pmatrix}$ $\quad 3A=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 21\\ 9 & -18\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $\quad 2B=2\cdot\begin{pmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ $\quad 3A-2B=\begin{pmatrix}3 & 21\\ 9 & -18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 10\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 11\\ 5 & -16\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad 4C=4\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -16\\ 4 & 4\end{pmatrix}$ $\quad (3A-2B)+4C=\begin{pmatrix}3 & 11\\ 5 & -16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -16\\ 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -5\\ 9 & -12\end{pmatrix}$

④ Дана матрица $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Вычислить AA^T и A^TA.

$A^T=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$

$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot4+1\cdot1 & 4\cdot5+1\cdot(-2) & 4\cdot2+1\cdot3\\ 5\cdot4+(-2)\cdot1 & 5\cdot5+(-2)\cdot(-2) & 5\cdot2+(-2)\cdot3\\ 2\cdot4+3\cdot1 & 2\cdot5+3\cdot(-2) & 2\cdot2+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 18 & 11\\ 18 & 29 & 4\\ 11 & 4 & 13\end{pmatrix}$

$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot4+5\cdot5+2\cdot2 & 4\cdot1+5\cdot(-2)+2\cdot3\\ 1\cdot4+(-2)\cdot5+3\cdot2 & 1\cdot1+(-2)\cdot(-2)+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 0\\ 0 & 14\end{pmatrix}$