„Линейное преобразование"

① Найти собственные вектора и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\quad (-1-\lambda)(6-\lambda)+12=0$

$-6+\lambda-6\lambda+\lambda^2+12=0$

$\lambda^2-5\lambda+6=0$

$D = b^2-4ac = 25-4\cdot6\cdot1 = 1$

$\lambda_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{5-1}{2} = 2$

$\lambda_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = 3$

Собственные значения: 2 и 3.

$\begin{pmatrix} -1-\lambda_1 & -6 \\ 2 & 6-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} -1-\lambda_2 & -6 \\ 2 & 6-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1-6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1+6x_2 = 2x_2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -x_1-6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1+6x_2 = 3x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} -3x_1-6x_2 = 0 \\ 2x_1+4x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -4x_1-6x_2 = 0 \\ 2x_1+3x_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -3\cdot(-2x_2)-6x_2 = 0 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -4\cdot(-\frac{3}{2}x_2)-6x_2 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x_2 = 6x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 6x_2 = 6x_2 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$ $\quad X = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} x_2 = x_2 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \end{cases}$ $\quad X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

② Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Показать, что любой вектор является для него собственным.

$Ax = \lambda x$

Возьмём 3 вектора и найдём λ

1) $x = (1, -2)$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -1 = 1\cdot\lambda \\ 2 = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$

2) $x = (3, 5)$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -3 = 3\lambda \\ -5 = 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$

3) $x = (-1, 2)$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1 = -1\cdot\lambda \\ -2 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$

Во всех случаях $\exists$ единственное значение $\lambda = -1$ $\Rightarrow$ для заданного оператора любой вектор является собственным.

Кроме того, сама матрица предусматривает умножение на то же значение, что и λ, только со знаком минус, а нулевые значения в каждой строке убирают из уравнения второе значение, оставляя только $-1\cdot x_1 = \lambda\cdot x_1$ и $-1\cdot x_2 = \lambda x_2$. В итоге у λ остаётся только одно решение при любом векторе, и это $\lambda = -1$.