

Урок 3. Матрицы и матричные операции. Разв. 1.

① Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерность полученных матриц:

а) A - матрица 4×2 , B - матрица 4×2

AB и BA невозможны, т.к. количество столбцов первого и количество строк второй матрицы не совпадают.

б) A - матрица 2×5 , B - матрица 5×3

AB - возможна размерность - 2×3

BA - невозможно перемножить.

в) A - матрица 8×3 , B - матрица 3×8 .

AB - размер исходных матриц - 8×8 .

BA - размер исходных матриц - 3×3 .

г) A и B - квадратные матрицы 4×4 .

AB и BA будут иметь исходный размер 4×4 .

② Найти сумму и произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Сумма $A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Произведение $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 0 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$

③ Из законов сложения, вычитания и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Выписать линейную комбинацию $3A - 2B + 4C$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$, $2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$4C = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & -20 \end{pmatrix}$

$(3A - 2B) + 4C = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$

④ Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить AA^T и $A^T A$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 & 5 \cdot 5 + (-2) \cdot (-2) & 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$