1) Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=1$, $f_3(x)=x+1$, $f_4(x)=x-e^x$

$\lambda_1\cdot e^x+\lambda_2\cdot 1+\lambda_3\cdot(x+1)+\lambda_4\cdot(x-e^x)=0$

$1 \qquad 1 \qquad -1 \qquad 1$

$1\cdot e^x+1\cdot 1+(-1)(x+1)+1\cdot(x-e^x)=0 \qquad e^x+1-x-1+x-e^x=0$

Т.к. $\exists\lambda_n\neq 0$ и при этом $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\ldots+\lambda_n u_n=0$, то ф-ции линейно зависимы.

2). Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x)=2$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2$, $f_4(x)=(x+1)^2$

$\lambda_1\cdot 2+\lambda_2\cdot x+\lambda_3\cdot x^2+\lambda_4\cdot(x+1)^2=0 \qquad 1/2\cdot 2+2\cdot x+1\cdot x^2+(-1)(x^2+2x+1)=0$

$1/2 \qquad 2 \qquad 1 \qquad -1$

$1+2x+x^2-x^2-2x-1=0$

Ф-ции линейно зависимы.

3) Найти координаты вектора $x=(2,3,5)\in\mathbb{R}^3$ в базисе $b_1=(0,0,10)$, $b_2=(2,0,0)$, $b_3=(0,1,0)$.

$x=(2,3,5)=(2,0,0)+(0,3,0)+(0,0,5)=\frac{1}{2}\cdot(0,0,10)+1\cdot(2,0,0)+3\cdot(0,1,0)=\frac{1}{2}b_1+b_2+3b_3$

Координаты вектора x в заданном базисе: $x=(\frac{1}{2};\ 1;\ 3)$.

4) Найти координаты вектора $3x^2-2x+2\in\mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе $1, x, x^2$ $\qquad x=(3;-2;2)=2\cdot(0,0,1)+(-2)(0,x,0)+3\cdot(x^2,0,0)=2-2x+3x^2$

$x=(2;-2;3)$

б) в базисе $x^2, x-1, 1$ $\qquad x=(3;-2;2)=3(x^2,0,0)+\left(-\frac{2x}{x-1}\right)(0,x-1,0)+2\cdot(0,0,1)=3x^2-2x+2$

$x=\left(3;-\frac{2x}{x-1};2\right)$

5) Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трёхмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

Не является, т.к. как минимум у двух векторов будут нули в разных координатах, что при сумме этих двух векторов даст нам выход за пределы подпространства.

б) все векторы, являющиеся комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Является, т.к. для любых векторов и будут выполняться условия

$u_n+u_k\in L$

$\alpha\cdot u\in L$