

③ Пусть линейный оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+1 = 1 \cdot \lambda \\ -1+3 = 1 \cdot \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \lambda \\ 2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2$$

λ имеет единственное значение \Rightarrow вектор $x = (1, 1)$ является собственным для этого оператора.

④ Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -9 = 3 \cdot \lambda \\ 9 = -3 \cdot \lambda \\ -12 = -4 \cdot \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Система не имеет решения, следовательно, вектор $x = (3, -3, -4)$ не является собственным вектором линейного оператора, заданного матрицей A .