Elmar Schömer
Lukas Birklein

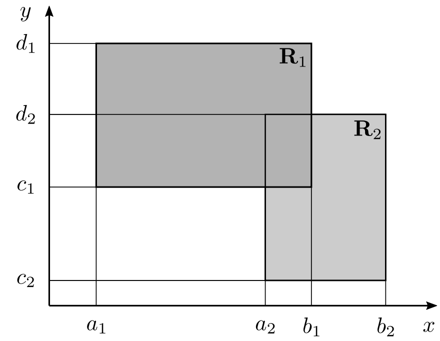
2. Übungsblatt

Abgabe: Montag, der 05.05.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Alte Klausuraufgabe: Rechtecke

In der Datei `rechtecke.py` finden sie zwei Intervalle I_1 und I_2 und zwei Rechtecke R_1 und R_2.

a) Gegeben die zwei Intervalle $I_1 = [a_1, b_1] = \{x \in \mathbb{R} \mid a_1 \leq x \leq b_1\}$ und $I_2 = [a_2, b_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid a_2 \leq x \leq b_2\}$. Schreiben Sie eine Programm, das entscheidet, ob sich die beiden Intervalle schneiden.



b) Gegeben die zwei achsenorientierte Rechtecke

$$\begin{aligned} R_i &= [a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_i \leq x \leq b_i \text{ und } c_i \leq y \leq d_i\} \\ &\quad \text{für } i = 1, 2 \end{aligned}$$

Schreiben Sie ein Programm, das entscheidet, ob sich die beiden Rechtecke R_1, R_2 schneiden. *Hinweis: Sie dürfen ihre Ergebnisse aus der ersten Teilaufgabe verwenden.*

Aufgabe 2: Seriöse Investments

Erstellen Sie eine Datei `investments.py` und schreiben Sie zur Lösung dieser Aufgabe ein Programm unter Verwendung der Formel für den Zinseszins. Mit dieser lässt sich bei festem Startkapital K_0 und jährlichem Zinssatz p das Kapital K nach n Jahren berechnen:

$$K = K_0 \cdot (1 + p)^n$$

Sie haben eine E-Mail von einem alten Schulfreund erhalten. Er arbeitet mittlerweile in der Vermögensberatung und will Sie von einem 100% sicheren Investment überzeugen. In dieser E-Mail bietet er Ihnen an, 1.000 € zu investieren und verspricht Ihnen, den Betrag innerhalb von 5 Jahren zu verdoppeln.

a) Berechnen Sie den jährlichen Zinssatz p, den Sie erhalten, wenn Sie das Angebot annehmen.

b) Sie sind ein wenig skeptisch, aber Ihr Freund hat Ihnen ja versprochen, dass es 100% sicher ist, also nehmen Sie sein Angebot an. Nach 5 Jahren erhalten Sie tatsächlich die 2.000 €. Ihr Freund bietet Ihnen nun an, den kompletten Betrag für weitere 10 Jahre zum gleichen Zinssatz p zu investieren. Wie viel Geld erhalten Sie nach weiteren 10 Jahren, wenn sie die 2.000 € investieren?

c) Das ist zwar nicht schlecht, aber wirklich reich werden Sie so nicht. Sie wollen Millionär:in werden! Sie suchen all Ihr Geld zusammen und investieren 10.000 € zum gleichen Zinssatz p. Wie viele Jahre müssen Sie warten, bis Sie 1 Million Euro zusammen haben? *Hinweis:* Sie können die Funktion `math.log()` aus dem `math`-Modul benutzen.

Aufgabe 3: Das Collatz-Problem

Das Collatz-Problem ist ein bis heute ungelöstes mathematisches Problem - das wollen wir hier ändern (oder uns wenigstens damit beschäftigen)! Beim Collatz-Problem geht es um Folgen natürlicher Zahlen, die denkbar einfach definiert sind: Gegeben eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\mathrm{Col}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ 3n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Die Behauptung ist, dass für jede natürliche Zahl n das wiederholte Anwenden der Definition, also die Folge $\{n, \mathrm{Col}(n), \mathrm{Col}^2(n) := \mathrm{Col}(\mathrm{Col}(n)), \mathrm{Col}^3(n), \ldots\}$ immer im Zyklus $4, 2, 1$ endet. Das heißt für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\mathrm{Col}^k(n) = 1$.

a) Erstellen Sie ein Programmablaufdiagramm (wie in der Vorlesung gezeigt) zu einem Algorithmus, der zu einem gegebenen n die Länge k der Collatz-Folge, also wann das erste Mal die Zahl 1 auftaucht, berechnet.

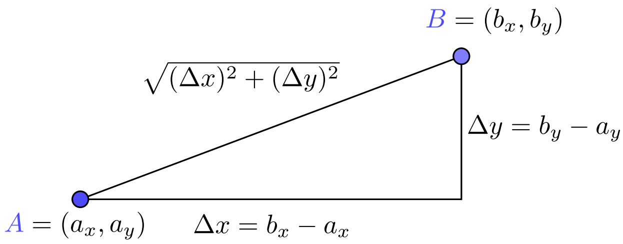
b) Schreiben Sie ein Programm `collatz.py`, das ihr Aktivitätsdiagramm implementiert. Das Programm soll eine natürliche Zahl n einlesen (mit `input()`) und die Länge k ausgeben.

c) In Ihren Experimenten scheint die Vermutung zu stimmen, für einen mathematischen Beweis ist das aber noch nicht genug. Beweisen Sie die Collatz-Vermutung! *Hinweis:* Zusätzlich zu den 10.000 Bonuspunkten erwarten Sie bei einem korrekten Beweis auch diverse Preisgelder. Der bedeutende Mathematiker Paul Erdős sagte dazu: “Hopeless. Absolutely hopeless.”

Aufgabe 4: Verschlafen

Sie wohnen über dem Kulturclub schonschön in Mainz und waren gestern Abend mal wieder dort feiern - was für ein Abend! Ihren Wecker haben sie auf 9:30 Uhr gestellt, um am nächsten Tag rechtzeitig zur Vorlesung zu kommen. Leider haben Sie verschlafen und sind erst um 10:00 Uhr aufgewacht. Jetzt müssen Sie schnell zur Uni.

a) Erst einmal wollen Sie wissen, wie weit der Weg ist. Für zwei gegebene Punkte (a_x, a_y) und (b_x, b_y) ist das der euklidische Abstand, definiert als $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, wobei $\Delta x = b_x - a_x$ und $\Delta y = b_y - a_y$ (siehe Abbildung). In `euclidean.py` sind die Koordinaten der Uni als `(ux, uy)` und die Ihres Wohnortes als `(ax, ay)` gegeben. Berechnen Sie den Abstand zur Uni.



b) Das ist weiter als gedacht! Leider ist Ihre Haltestelle gesperrt und es gibt keinen direkten Bus zur Uni, aber Sie können ja zu einer anderen Haltestelle laufen und von dort aus fahren. Es gibt nur zwei Optionen: Höfchen (H) oder Goethestraße (G). Legen Sie die Variablen `hx, hy` bzw. `gx, gy` in `euclidean.py` an. Die Haltestellen haben folgende Koordinaten: $H = (18, 2)$, $G = (12, 12)$. Sie können nun entweder zur Uni, zum Höfchen oder zur Goethestraße laufen, wobei Sie am liebsten möglichst wenig laufen wollen. Berechnen Sie, welcher Fußweg am kürzesten ist.

c) Ob Sie es noch rechtzeitig zur Vorlesung um 10:15 Uhr schaffen wissen Sie aber immer noch nicht. Es ist noch etwas früh und Sie sind noch etwas langsam und laufen mit 1 LE/min (Längeneinheit pro

Minute). Vom Höfchen fährt ein Bus, z.B. die Linie 54, mit 2 LE/min, von der Goethestraße sogar eine Bahn mit 3 LE/min. Berechnen Sie, ob Sie es noch rechtzeitig zur Vorlesung schaffen wenn Sie (i) zur Uni laufen, (ii) zum Höfchen laufen und von dort aus fahren oder (iii) zur Goethestraße laufen und dann fahren. Welcher Weg ist am schnellsten? *Hinweis:* Sie können davon ausgehen, dass sofort ein Bus/eine Bahn kommt, sobald Sie an der Haltestelle ankommen.