Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовой проект по курсу «Уравнения математической физики»

Студент:	Лихарев С. С.
Преподаватели:	Колесник С. А.
	Формалёв В. Ф.
Группа:	М8О-307Б
Дата:	
Оценка:	
Подпись:	

Москва, 2019

Содержание

1 Задача №1

1.1 Формулировка задачи

О распределении температур в конечном стержне $x \in [0; l]$ с начальным распределением $T_0 = 300 (a^2 = 10^{-6})$ и источником тепла $f(x,t) = 300(1 + e^{-t})$, когда на левом конце задана температура $\mu_1 = 500$, а правый - теплоизолирован. Исследовать ортогональность и нормировку собственных функций, построить графики $u(x,t)$, $l = 0,1$ м.

1.2 Постановка задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 300(1 + e^{-t}), & x \in (0; l); t > 0; \quad (1) \\ u(x,0) = \varphi(x) = 300k = T_0, & x \in (0; l); t = 0; \quad (2) \\ \left.\begin{array}{ll} u(0,t) = \mu_1, & x = 0; t > 0; \\ u_x(l,t) = 0, & x = l; t > 0 \end{array}\right] & \quad (3) \end{cases}$$

1.3 Теоретические сведения

Рассмотрим часть стержня на отрезке $[x, x + \Delta x]$ и воспользуемся законом сохранения количества тепла, согласно которому общее количество тепла на отрезке $[x, x+\Delta x]$ равно сумме полного количества тепла, прошедшему через границы, и полного количества тепла, образованного внутренними источниками. Формула общего количества тепла, которое необходимо сообщить участку стержня, чтобы повысить его температуру на Δu: $\Delta Q = C\rho S \Delta x \Delta u$, где C – удельная теплоёмкость материала, S – площадь поперечного сечения. Формула количества тепла прошедшего через левый конец участка стержня за время Δt: $Q_1 = -kSu_x(x,t)\Delta t$, где k – коэффициент теплопроводности материала.

Аналогично, тепловой поток через правый конец участка вычисляется по формуле: $Q_2 = -kSu_x(x + \Delta x, t)\Delta t$.

По закону сохранения тепла:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 \Rightarrow C\rho S \Delta x \Delta u = kSu_x(x + \Delta x, t)\Delta t - kSu_x(x,t)\Delta t$$

Поделим на $S\Delta x \Delta t$ и устремим Δx и Δt к нулю, получим:

$$\frac{C\rho S \Delta x \Delta u}{S \Delta x \Delta t} = \frac{kSu_x(x + \Delta x, t)\Delta t - kSu_x(x,t)\Delta t}{S \Delta x \Delta t} \Rightarrow C\rho u_t = k u_{xx},$$

так как $\frac{\Delta u}{\Delta t} \to u_t$, $\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} \to u_{xx}$,
тогда уравнение теплопроводности имеет вид: $u_t = a^2 u_{xx}$, где $a = \sqrt{\frac{k}{C\rho}}$ - коэффициент температуропроводимости.

Если внутри стержня имеются непрерывно распределённые источники тепла, уравнение становится неоднородным и обретает вид: $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, где $f(x,t) = \frac{1}{C\rho S} q(x,t)$.

1.4 Решение задачи

Представим решение в виде суммы: $u(x,t) = v(x,t) + \mu_1$. Будем приводить начально-краевую задачу (1)-(3) к задаче с однородными граничными условиями (3).

Представим $u(x,t)$ в таком виде в уравнение (1), получим:

$$v_t = a^2 v_{xx} + 300(1 + e^{-t}), \tag{4}$$

в начальное условие (2):

$$\begin{cases} u(x,0) = (v + \mu_1)|_{t=0} = v(x,0) + \mu_1 = T_0; \\ v(x,0) = T_0 - \mu_1 \end{cases} \tag{5}$$

и в граничные условия (3):

$$\begin{cases} u(0,t) = (v + \mu_1)|_{x=0} = v(0,t) + \mu_1 = \mu_1; \\ u_x(l,t) = (v + \mu_1)_x|_{x=l} = v_x(l,t) = 0; \\ v(0,t) = 0; \\ v_x(l,t) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Найдём собственные функции задачи (4)-(6), но с однородным волновым уравнением:

$$v_t = a^2 v_{xx} \tag{7}$$

Метод Фурье разделения переменных:

$$v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Подставим в (7):

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = const$$

Получим две обыкновенные дифференциальные линейные уравнения:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Подставляя $v(x,t)$ в виде $X(x) \cdot T(t)$ в граничные условия (6), получим:

$$u(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0;\;\; u_x(l,t) = X'(l)\cdot T(t) = 0$$

Поскольку равенства должны выполняться тождественно (зная, что $T(t)\neq 0$), то:

$$X(0) = 0;\;\; X'(l) = 0$$

Получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0; \\ X(0) = 0; \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим различные значения λ^2:

$$1)\ \lambda^2 > 0: \qquad \begin{cases} X(x) &= C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}; \\ X(0) &= C_1 + C_2 = 0; \\ X'(l) &= -\lambda C_1 e^{-\lambda l} + \lambda C_2 e^{\lambda l} = 0 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ -\lambda C_1 e^{-\lambda l} & \lambda C_2 e^{\lambda l} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ единственное решение, а $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0$, что не удовлетворяет условиям задачи.

$$2)\ \lambda^2 = 0: \qquad \begin{cases} X(x) &= C_1 x + C_2; \\ X(0) &= C_2 = 0; \\ X'(l) &= C_1 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = C_2 = 0,\ \text{что снова не удовл. условиям задачи.}$$

$$3)\ \lambda^2 < 0: \qquad \begin{cases} X(x) &= C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x; \\ X(0) &= C_2 = 0; \\ X'(l) &= \lambda C_1 \cos\lambda l = 0 \end{cases} \qquad\qquad l = \frac{(1+2n)\pi}{2}, n = 0, 1, 2\ldots$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}} \qquad \boxed{X_n = \sin\lambda_n x = \sin\frac{(1+2n)\pi}{2l}x}$$

Проверим ортогональность собственных функций:

$$(X_n(x), X_k(x)) = \int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2k)}{2l}x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\cos\left(\frac{\pi(1+2n)x}{2l} - \frac{\pi(1+2k)x}{2l}\right) - \cos\left(\frac{\pi(1+2n)x}{2l} + \frac{\pi(1+2k)x}{2l}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\cos\left(\frac{\pi(n-k)x}{l}\right) - \cos\left(\frac{\pi(n+k)x}{l}\right)\right) dx =$$

Если $n \neq k$, то:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{l}{\pi(n-k)}\sin\left(\frac{\pi(n-k)x}{l}\right)\Bigg|_0^l - \frac{l}{\pi(n+k)}\sin\left(\frac{\pi(n+k)x}{l}\right)\Bigg|_0^l\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{l}{\pi(n-k)}\sin\left(\pi(n-k)\right) - \frac{l}{\pi(n+k)}\sin\left(\pi(n+k)\right)\right) = 0;$$

Если $n = k$, то:

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(n+k)x}{l}\right)\right) dx = \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \cancelto{0}{\frac{l}{\pi(n+k)}\sin\left(\frac{\pi(n+k)x}{l}\right)\Bigg|_0^l}\right) = \frac{l}{2}$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|X_n\|^2 = \int\limits_0^l X_n^2(x)dx = \int\limits_0^l \sin^2\lambda_n x dx = \int\limits_0^l \frac{1-\cos 2\lambda_n x}{2}dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\lambda_n x\Bigg|_0^l = \frac{l}{2}$$

Решение задачи (4)-(6) с неоднородным уравнением будем искать в виде ряда по собственным функциям однородной задачи:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)$$

Подставим функцию $v(x,t)$ в таком виде в неоднородное уравнение (4) в начальное условие (5):

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) = a^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}\right)T_n(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) + 300(1+e^{-t}),$$

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) = T_0 - \mu_1.$$

Разложим неоднородность $300(1+e^{-t})$ в ряд Фурье по собственным функциям $\left\{\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$.

$$300(1+e^{-t}) = 300(1+e^{-t})\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)$$

Коэффициенты разложения равны:

$$f_n = \frac{(1, X_n(x))}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)dx = \frac{2}{l}\cdot\left(-\frac{2l}{\pi(1+2n)}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)\Bigg|_0^l =$$

$$= -\frac{4}{\pi(1+2n)}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2}\right)-1\right) = \frac{4}{\pi(1+2n)}$$

Подставляем полученное разложение в уравнение и начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) = a^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}\right)\cdot T_n(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) +$$
$$+ 300(1+e^{-t})\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) = (T_0-\mu_1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right),$$

Учитывая полноту системы собственных функций $\left\{\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[0;l]$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)$, получим следующие задачи Коши для функций $T_n(t)(n=0,1,2\ldots)$.

$$\begin{cases} T_n'(t) = -\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}T_n(t) + 300f_n(1+e^{-t}); \\ T_n(0) = (T_0-\mu_1)\cdot f_n \end{cases}$$

Общее решение уравнения:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}t} + T_{n_{\text{част}}}(t)$$

Частное решение неоднородного уравнения $T_{n_{\text{част}}}(t)$ ищем исходя из вида неоднородности, т.е. в виде:

$$T_{n_{\text{част}}}(t) = C_n + D_n e^{-t}$$

Подставляем в уравнение:

$$-D_n e^{-t} = -\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}\left(C_n + D_n e^{-t}\right) + 300 f_n(1+e^{-t})$$

$$\begin{matrix} e^{-t}: \\ 1: \end{matrix} \quad \begin{cases} -D_n = -\dfrac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} D_n + 300 f_n \\ \quad 0 = -\dfrac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} C_n + 300 f_n \end{cases}$$

Отсюда:

$$C_n = \frac{1200 l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2}; \qquad D_n = \frac{300 f_n}{\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} - 1} = \frac{1200 l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2};$$

$$T_{n_{\text{част}}}(t) = \frac{1200 l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2} + \frac{1200 l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2} \cdot e^{-t} =$$

$$= 1200 l^2 f_n \left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2} + \frac{e^{-t}}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2}\right)$$

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} t} + 1200 l^2 f_n \left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2} + \frac{e^{-t}}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2}\right)$$

Коэффициенты A_n найдём из начального условия:

$$T_n(0) = A_n + 1200 l^2 f_n \left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2} + \frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2}\right) = (T_0 - \mu_1) f_n$$

$$A_n = (T_0 - \mu_1) f_n - 1200 l^2 f_n \left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2} + \frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2}\right)$$

$$T_n(t) = \left((T_0 - \mu_1) f_n - 1200 l^2 f_n \left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2} + \frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2}\right)\right) e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}} + \\ + 1200 l^2 f_n \left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2} + \frac{e^{-t}}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2}\right) =$$

$$= (T_0 - \mu_1) f_n e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} t} + 1200 l^2 f_n \left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2} + \frac{e^{-t}}{a^2\pi^2(1+2n)^2 - 4l^2}\right) \cdot (1 - e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} t}).$$

$\Rightarrow$ решение задачи (4)-(6) имеет вид:

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left((T_0-\mu_1)e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}t}+1200l^2\left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2}+\frac{e^{-t}}{a^2\pi^2(1+2n)^2-4l^2}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(1-e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}t}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x$$

Решение задачи (1)-(3) будет:

$$u(x,t)=\mu_1+\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left((T_0-\mu_1)e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}t}+1200l^2\left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2}+\frac{e^{-t}}{a^2\pi^2(1+2n)^2-4l^2}\right)\cdot\right.$$

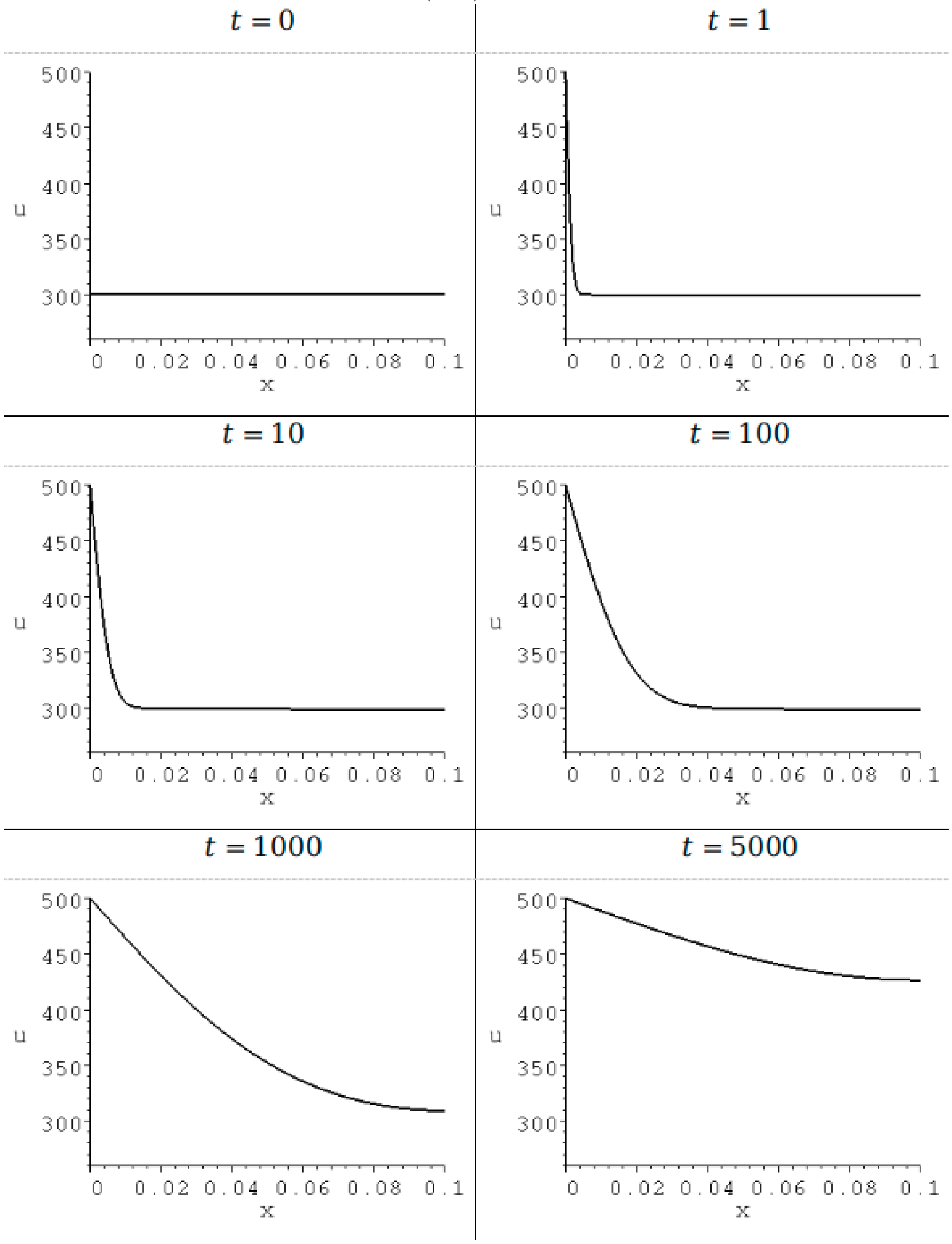
$$\left.\cdot\left(1-e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}t}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)=\mu_1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(1+2n)}\left((T_0-\mu_1)e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}t}+\right.$$

$$\left.+1200l^2\left(\frac{1}{a^2\pi^2(1+2n)^2}+\frac{e^{-t}}{a^2\pi^2(1+2n)^2-4l^2}\right)\cdot\left(1-e^{-\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}t}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)$$

Подставим $l=0,1\text{м}; a^2=10^{-6}; \mu_1=500; T_0=300$:

$$u(x,t)=500+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(1+2n)}\left(-200e^{\frac{-\pi^2(1+2n)^2}{4\cdot10^4}t}+12\left(\frac{10^6}{\pi^2(1+2n)^2}+\frac{10^6e^{-t}}{\pi^2(1+2n)^2-4\cdot10^4}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(1-e^{-\frac{\pi^2(1+2n)^2}{4\cdot10^4}t}\right)\right)\sin\left(5\pi(1+2n)x\right)$$

Построим графики функции $u(x,t)$ в разные моменты времени:



По этой картине можно сказать следующее, при $t = 0$ значение u будет равным 300, что верно, благодаря условию $u(x, 0) = \varphi(x)$. При изменении t мы видим, что график функции $u(x,t)$ принимает своё начало в 500, что тоже верно, благодаря другому условию: $u(0,t) = \mu_1(t)$. При небольших t можно чётко увидеть, как функция u к концу стержня стремится к 300, что соответствует условию $u_x(l,t) = 0$. В целом график функции полностью соответствует краевым условиям задачи.

2 Задача №2

2.1 Формулировка задачи

О вынужденных колебаниях конечного стержня $x \in [0; l], l = 0,1\text{м}, a^2 = 10^6, f(x,t) = x + t$ с нулевым начальным отклонением и начальной скоростью, когда левый конец зажат, а правый свободен. Результат $u(x,t)$ оформить графически.

2.2 Постановка задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0; \quad (1) \\ \left.\begin{aligned} u(x,0) = 0, & \quad 0 < x < l, t = 0; \\ u_t(x,0) = 0, & \quad 0 < x < l, t = 0; \end{aligned}\right] & \quad (2) \\ \left.\begin{aligned} u(0,t) = 0, & \quad x = 0, t > 0; \\ u_x(l,t) = 0, & \quad x = l, t > 0 \end{aligned}\right] & \quad (3) \end{cases}$$

2.3 Теоретические сведения

Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

обычно называют уравнением колебаний струны.

Уравнения продольных колебаний для струны, стержня и пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке $(0, l)$ оси x. Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией $u(x,t)$, представляющей в момент t смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x. При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Подсчитаем относительное удлинение элемента $(x, x + \Delta x)$ в момент t. Координаты концов этого элемента в момент t имеют значения $x + u(x,t), x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$, а относительное удлинение равно:

$$\frac{(\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x,t)) - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta \Delta x, t) \qquad 0 \le \theta \le 1$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что относительное удлинение в точке x определяется функцией $u_x(x,t)$. В силу закона Гука натяжение $T(x,t)$ равно

$$T(x,t) = k(x) u_x(x,t),$$

где $k(x)-$ модуль Юнга в точке $x (k(x)) > 0$.

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)) \cdot \rho(\xi) d\xi = \int\limits_{t_1}^{t_2} (k(x_2) u_x(x_2, \tau) - k(x_1) u_x(x_1, \tau))\, d\tau + \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где $F(x,t)-$ плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины.

Предположим существование и непрерывность вторых производных функции $u(x,t)$. Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход при $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ и $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня:

$$[k(x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x,t).$$

Если стержень однороден ($k(x) = const, \rho = const$), то это уравнение записывают следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \right), \qquad \text{где } \; f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$$

2.4 Решение задачи

Найдём собственные функции задачи с однородным волновым уравнением:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0 \tag{4}$$

Метод Фурье разделения переменных: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

Подставим в (4): $X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = const$$

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0 \qquad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Подставим $u(x,t)$ в виде $X(x) \cdot T(t)$ в граничные условия (3):

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \;\; u_x(l,t) = X'(l) \cdot T(t) = 0$$

Задача Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; \\ X(0) = 0; \\ X'(l) = 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{X''}{X} = -\lambda^2$

$$\text{При } \lambda^2 < 0: \qquad \begin{cases} X = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x; \\ X(0) = C_2 = 0; \\ X'(l) = \lambda C_1 \cos \lambda l = 0 \end{cases}$$

$$\lambda l = \frac{(1+2n)\pi}{2}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{(1+2n)\pi}{2l}} \qquad \boxed{X_n = \sin \frac{(1+2n)\pi}{2l} x}$$

Разложим в ряд по собственным функциям искомую $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right)$$

Подставим $u(x,t)$ в (1) и начальные условия (2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}\right) \cdot T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) + x + t;$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) = 0;$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) = 0$$

Также разложим неоднородность $x+t$ в ряд Фурье по собственным функциям $\left\{\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x + t = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) + t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right).$$

Коэффициенты разложения равны:

$$\boldsymbol{f_n} = \frac{2}{l} \int\limits_0^l x \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l x \left(-\frac{2l}{\pi(1+2n)}\right) d \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi(1+2n)} \cdot \left(x \cdot \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)\Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) dx \right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi(1+2n)} \cdot \left(l \cdot \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2}x\right) - \frac{2l}{\pi(1+2n)} \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)\Big|_0^l \right) =$$

$$= \frac{8l}{\pi^2(1+2n)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2}\right) = \frac{8l(-1)^n}{\pi^2(1+2n)^2}$$

$$\boldsymbol{g_n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) dx = \frac{2}{l} \cdot \left(-\frac{2l}{\pi(1+2n)}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)\Big|_0^l =$$

$$= -\frac{4}{\pi(1+2n)} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2}\right) - 1 \right) = \frac{4}{\pi(1+2n)};$$

Подставляем полученное разложение в уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) + t\sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right).$$

Учитывая полноту системы собственных функций $\left\{\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[0;l]$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right)$, получим следующие задачи Коши для функций $T_n(t)(n = 0, 1, 2\ldots)$.

$$\begin{cases} T_n''(t) = -\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} T_n(t) + f_n + g_n t; \\ T_n(0) = 0, \qquad T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Общее решение уравнения:

$$T_n(t) = A_n \cdot \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right) + T_{n_{\text{част}}}(t)$$

Частное решение неоднородного уравнения $T_{n_{\text{част}}}(t)$ ищем исходя из вида неоднородности, т.е. в виде:

$$T_{n_{\text{част}}}(t) = C_n t + D_n$$

Подставляем в уравнение $0 = -\frac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}(C_n t + D_n) + f_n + g_n t$

$$\begin{matrix} t: \\ \\ 1: \end{matrix} \quad \begin{cases} 0 = -\dfrac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} C_n + g_n; \\ 0 = -\dfrac{a^2\pi^2(1+2n)^2}{4l^2} D_n + f_n \end{cases}$$

Отсюда:

$$C_n = \frac{4l^2 g_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2}; \qquad D_n = \frac{4l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2};$$

$$T_{n_{\text{част}}}(t) = \frac{4l^2 g_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2} t + \frac{4l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2} = \frac{4l^2(f_n + g_n t)}{a^2\pi^2(1+2n)^2}$$

$$T_n(t) = A_n \cdot \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right) + \frac{4l^2(f_n + g_n t)}{a^2\pi^2(1+2n)^2}$$

$$T_n'(t) = \frac{a\pi(1+2n)}{2l}\left(-A_n \sin\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right) + B_n \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right)\right) + \frac{4l^2 g_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2}$$

Коэффициенты A_n, B_n найдём из начальных условий:

$$\begin{cases} T_n(0) = A_n + \frac{4l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2} = 0; \\ T_n'(0) = \frac{a\pi(1+2n)}{2l} B_n + \frac{4l^2 g_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_n = -\frac{4l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2}; \\ B_n = -\frac{8l^3 g_n}{a^3\pi^3(1+2n)^3} \end{cases}$$

$$T_n(t) = -\frac{4l^2 f_n}{a^2\pi^2(1+2n)^2} \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right) - \frac{8l^3 g_n}{a^3\pi^3(1+2n)^3} \sin\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right) + \frac{4l^2(f_n + g_n t)}{a^2\pi^2(1+2n)^2} =$$

$$= \frac{8l^3}{a^3\pi^3(1+2n)^3}\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} f_n \left(1 - \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right)\right) + g_n\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t - \sin\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right)\right)\right).$$

$\Rightarrow$ решение задачи (1) - (3) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8l^3}{a^3\pi^3(1+2n)^3}\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} f_n \left(1 - \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right)\right) + \right.$$
$$\left. + g_n\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t - \sin\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right)\right)\right) \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8l^3}{a^3\pi^3(1+2n)^3} \left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} \cdot \frac{8l(-1)^n}{\pi^2(1+2n)^2} \left(1 - \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\pi(1+2n)} \left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t - \sin\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right)\right)\right) \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) =$$

$$= \frac{32l^3}{a^3\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^4} \left(a(-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \sin\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right) + \frac{a\pi(1+2n)}{2l}t\right) \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right).$$

Подставим параметры задачи $l = 0,1\text{м}, a^2 = 10^6$:

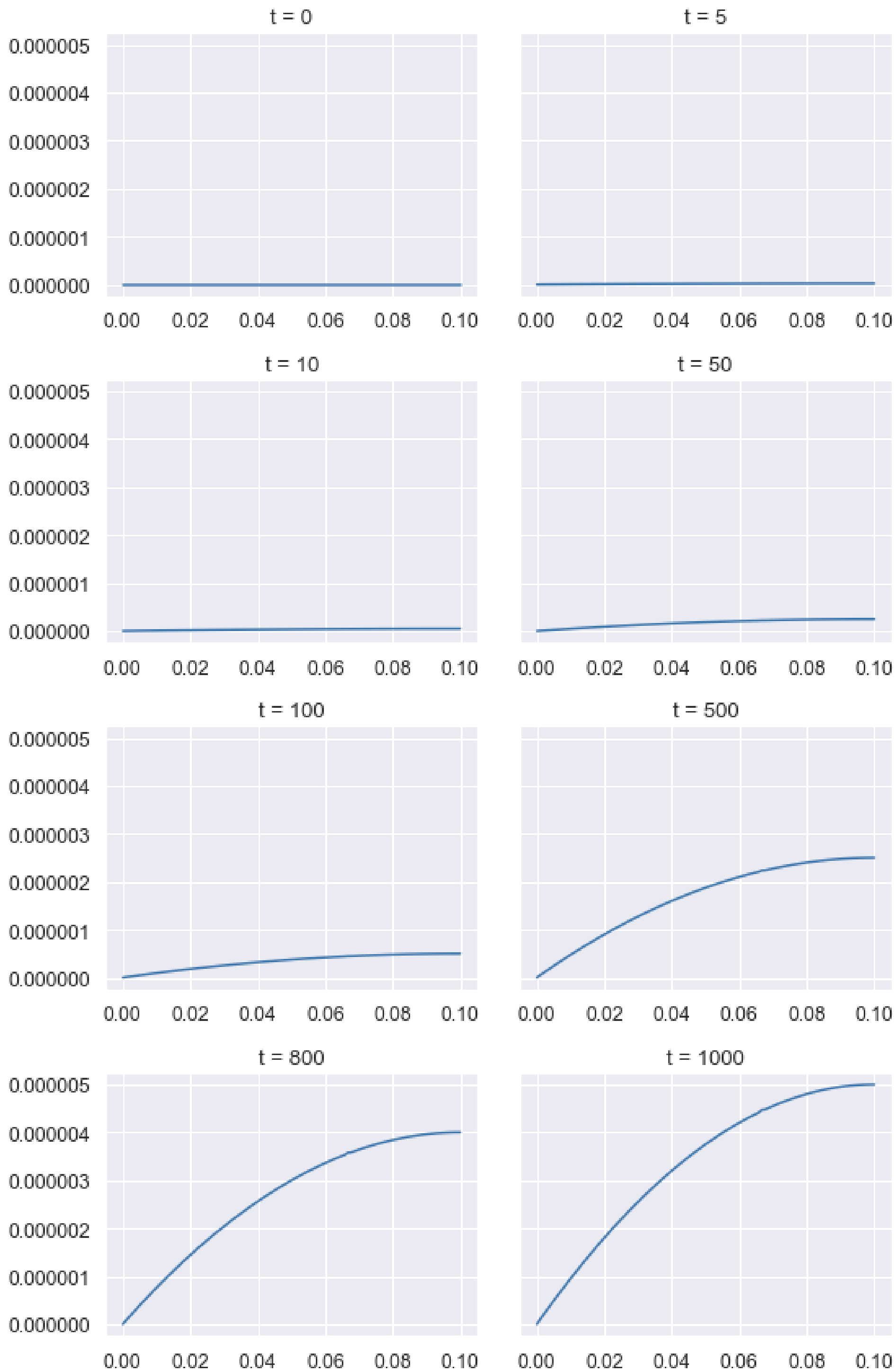
$$u(x,t) = \frac{32}{10^6\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^4} \left(10^3(-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{10^3\pi(1+2n)}{0.2}t\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \sin\left(\frac{10^3\pi(1+2n)}{0.2}t\right) + \frac{10^3\pi(1+2n)}{0.2}t\right) \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{0.2}x\right) =$$

$$= \frac{32}{10^6\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^4} \left(1000(-1)^n \left(1 - \cos(5000\pi(1+2n)t)\right) - \right.$$

$$\left. - \sin\left(5000\pi(1+2n)t\right) + 5000\pi(1+2n)t\right) \sin\left(5\pi(1+2n)x\right).$$

Построим графики функции $u(x,t)$ в разные моменты времени:



Как мы видим, задан стержень и на его левом конце в разные моменты времени функция u принимает значение 0. Это верно, поскольку по условию задачи, левый конец стержня зажат. При этом мы видим, что на правом конце функция меняется при изменении времени t, что тоже верно, так как правый конец свободен.

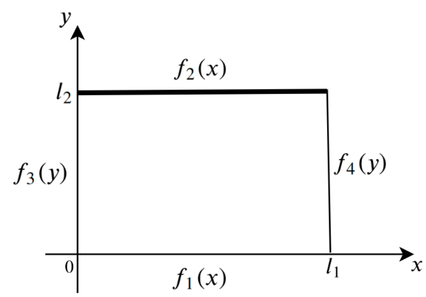
3 Задача №3

3.1 Формулировка задачи

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $l_1 \times l_2$, когда на верхней границе задан поток $\frac{\partial u(x,l_2)}{\partial y} = \sin\left(\frac{\pi x}{l_1}\right)$, а на остальных границах заданы нулевые значения функции.

3.2 Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ - условие Лапласа,} \qquad 0 < x < l_1; 0 < y < l_2; & (1) \\ u(x,0) = f_1(x) = 0; & (2) \\ u_y(x,l_2) = f_2(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{l_1}\right); & (3) \\ u(0,y) = f_3(y) = 0; & (4) \\ u(l_1,y) = f_4(y) = 0 & (5) \end{cases}$$



3.3 Теоретические сведения

При решении первой краевой задачи для прямоугольника требуется найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям (2)-(5) на границах прямоугольника.

Решим задачу методом разделения переменных, найдя частное решение уравнения (1) вида $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \not\equiv 0$.

Подставляя это решение в оператор Лапласа: $X''Y + Y''X = 0$, получим:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \text{ (задача Штурма-Лиувилля), где } \lambda = const.$$

Для нахождения функции X получим уравнение второго порядка: $\frac{X''}{X} = -\lambda^2$, чтобы функция u удовлетворяла нужному из условий, функция X должна удовлетворять условиям: $X(a) = X(0) = 0$.

Далее задача решается совершенно обычным способом, а её общее решение этой задачи - функцию $u(x,y)$ можем искать в виде суммы основных решений.

3.4 Решение задачи

Решим задачу методом разделения переменных: $u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$. Подставим в оператор Лапласа: $X''Y + Y''X = 0$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

В решении уравнения теплопроводности при $\lambda^2 \geq 0$ решений нет.

$$\text{Рассмотрим } \lambda^2 < 0: \quad \begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0; \\ X = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x \end{cases}$$

Из граничных условий (4), (5) получим:

$$\begin{array}{c} X(0) = C_2 = 0; \\ X(l_1) = C_1 \sin\lambda l_1 = 0; \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \sin\lambda l_1 = 0; \\ \lambda l_1 = \pi n, \quad n = 1,2,3\ldots \end{array}$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{\pi n}{l_1}} \qquad \boxed{X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l_1}x}$$

Найдём $Y(y)$:

$$-\frac{Y''}{Y} = \lambda^2 \Rightarrow \begin{array}{l} Y'' - \lambda^2 Y = 0; \\ Y = A_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{l_1}y} + B_n \cdot e^{\frac{\pi n}{l_1}y} \end{array}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l_1}x \cdot \left(A_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{l_1}y} + B_n \cdot e^{\frac{\pi n}{l_1}y}\right)$$

Подставим в краевые условия:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\cdot\sin\frac{\pi n}{l_1}x = 0 \Rightarrow A_n + B_n = 0$$

$$u_y(x,l_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi n}{l_1}A_n\cdot e^{-\frac{\pi n}{l_1}l_2} + \frac{\pi n}{l_1}B_n\cdot e^{\frac{\pi n}{l_1}l_2}\right)\cdot\sin\frac{\pi n}{l_1}x \overset{\left(\lambda_n = \frac{\pi n}{l_1}\right)}{=} \sin\frac{\pi x}{l_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi}{l_1} \Rightarrow n = 1, \qquad \begin{array}{l} \left(-\frac{\pi}{l_1}\right)\cdot A_1\cdot e^{-\frac{\pi}{l_1}l_2} + \left(\frac{\pi}{l_1}\right)\cdot B_1\cdot e^{\frac{\pi}{l_1}l_2} = 1, \\ \left(-\frac{\pi n}{l_1}\right)\cdot A_n\cdot e^{-\frac{\pi n}{l_1}l_2} + \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)\cdot B_n\cdot e^{\frac{\pi n}{l_1}l_2} = 0 \end{array}$$

Разобьём на две системы:

$$\text{I}\ \begin{cases} A_1 + B_1 = 0; \\ -\lambda_1 \cdot A_1 \cdot e^{-\lambda_1 l_2} + \lambda_1 \cdot B_1 \cdot e^{\lambda_1 l_2} = 1 \end{cases} \qquad \text{II}\ \begin{cases} A_n + B_n = 0; \\ -\lambda_n \cdot A_n \cdot e^{-\lambda_n l_2} + \lambda_n \cdot B_n \cdot e^{\lambda_n l_2} = 0 \end{cases}$$

II имеет единственное решение, поскольку: $\begin{vmatrix} A_n & B_n \\ -\lambda_n A_n e^{-\lambda_n l_2} & \lambda_n B_n e^{\lambda_n l_2} \end{vmatrix} \neq 0$, а это значит $A_n = B_n = 0$.

Решим систему I:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0; \\ -\frac{\pi}{l_1} \cdot A_1 \cdot e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} + \frac{\pi}{l_1} \cdot B_1 \cdot e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} = 1 \end{cases}$$

Применим правило Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\pi}{l_1} \cdot e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} & \frac{\pi}{l_1} \cdot e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{l_1} \left(e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} + e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} \right)$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{\pi}{l_1} e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} \end{vmatrix} = -1; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\pi}{l_1} e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{\frac{\pi}{l_1} \left(e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} + e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} \right)}; \qquad B_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\frac{\pi}{l_1} \left(e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} + e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} \right)}$$

Подставим в $u(x, y)$: $\boxed{\sin \frac{\pi}{l_1} x \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{l_1} \left(e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} + e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} \right)} \cdot \left(-e^{-\frac{\pi}{l_1} y} + e^{\frac{\pi}{l_1} y} \right) = u(x, y)}$

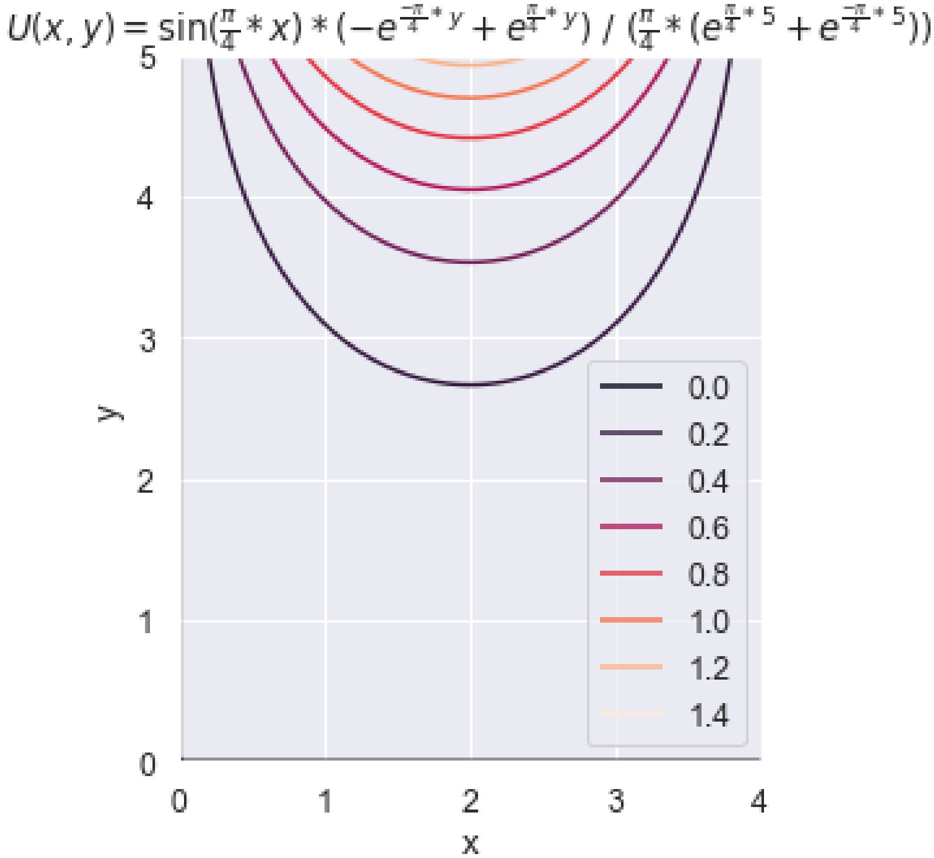
Проверка: $u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{l_1} x \cdot \cancelto{0}{\frac{(-1+1)}{\frac{\pi}{l_1} \left(e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} + e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} \right)}} = 0$

$$u_y(x, l_2) = \sin \frac{\pi}{l_1} x \cdot \cancelto{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{l_1} \left(e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} + e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} \right)} \cdot \left(\frac{\pi}{l_1} \cdot e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} + \frac{\pi}{l_1} \cdot e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} \right)} = \sin \frac{\pi}{l_1} x$$

$u(0, y) = \sin 0 \cdot \ldots = 0; \qquad u(l_1, y) = \sin \frac{\pi \cancel{l_1}}{\cancel{l_1}} \cdot \ldots = 0,$ получили верные равенства.

Ответ: $u(x, y) = \sin \frac{\pi}{l_1} x \cdot \frac{\left(-e^{-\frac{\pi}{l_1} y} + e^{\frac{\pi}{l_1} y} \right)}{\frac{\pi}{l_1} \left(e^{\frac{\pi}{l_1} l_2} + e^{-\frac{\pi}{l_1} l_2} \right)}$

Построим график функции $u(x, y)$:



Из этой картины можно увидеть, что решение данной задачи было найдено верно, поскольку на верхней границе прямоугольника $l_1 \times l_2$ происходит изменение потока, а на остальных границах - ничего, что полностью удовлетворяет поставленной задаче.