Согласно формуле (47.20),

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_{\gamma^*} x\,dy, \tag{47.25}$$

где $\varepsilon = +1$, если ориентация контура γ^* положительна, и $\varepsilon = -1$ в противоположном случае. Иначе говоря, $\varepsilon = +1$ (соответственно $\varepsilon = -1$), если положительному обходу данного контура γ соответствует при отображении (47.23) положительный же (соответственно отрицательный) обход контура $\gamma^* = F(\gamma)$.

Вычисляя интеграл (47.25) по формуле (47.8), используя представление (47.24) контура γ^*, получим

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_a^b x y'_t\,dt = \varepsilon \int\limits_a^b x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt =$$

$$= \varepsilon \int\limits_{\gamma} x\frac{\partial y}{\partial u}\,du + x\frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

К получившемуся интегралу применим формулу Грина (47.12) (здесь нами и используется потребованная выше непрерывность вторых производных $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$). Полагая $P = x\frac{\partial y}{\partial u}$ и $Q = x\frac{\partial y}{\partial v}$ и замечая, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)},$$

получим

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_{\gamma^+} P\,du + Q\,dv = \varepsilon \iint\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)}\,du\,dv.$$

Левая часть получившегося равенства больше нуля, значит, правая часть также положительна, и так как якобиан отображения (47.22) не меняет знака, то это возможно лишь в том случае, когда число ε имеет тот же знак, что и якобиан $\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}$, а в этом случае $\varepsilon\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} = \left|\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right|$. Тем самым знак ε не зависит от выбора контура γ, а определяется знаком якобиан, который один и тот же во всех точках области G.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены сделанные выше предположения, то справедлива формула*

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)}\right| du\,dv. \tag{47.26}$$

Кроме того, если якобиан $\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} > 0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon = +1$, *иначе говоря, если якобиан отображения* F *положителен, то положительному обходу всякого контура* $\gamma\subset G$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma\subset G$, *при отображении* F *соответствует положительный обход контура* $\gamma^* = F(\gamma)$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma^* = F(\Gamma)$. *Если же якобиан* $\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} < 0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon = -1$, *т. е. положительному обходу всякого контура* γ, *указанного типа, соответствует при отображении* F *отрицательный обход контура* $\gamma^* = F(\gamma)$.

Таким образом, *геометрический смысл знака якобиана состоит в том, что при положительном якобиане ориентация контуров сохраняется, а при отрицательном — меняется.*

С помощью формулы (47.19) формула (47.26) легко обобщается на случай, когда граница области Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров.

Отметим еще, что с помощью формулы (47.26) можно без труда получить более простое доказательство теоремы 1 из п. 46.1 о геометрическом смысле модуля якобиана. Действительно, пусть $M_0\in\Gamma$, $d\,(\Gamma)$ — диаметр области Γ, и область Γ каким-либо образом стягивается к точке M_0 и, следовательно, $d(\Gamma) \to 0$.

По теореме о среднем (см. п. 44.5)

$$\operatorname{mes}\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)}\right| du\,dv = \left|\frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)}\right|_M \operatorname{mes}\Gamma,\ \ M\in\Gamma,$$

поэтому

$$\frac{\operatorname{mes}\Gamma^*}{\operatorname{mes}\Gamma} = \left|\frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)}\right|_M.$$

В силу непрерывности якобиана

$$\lim_{d\,(\Gamma)\to 0}\left|\frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)}\right|_M = \left|\frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)}\right|_{M_0},$$

поэтому

$$\lim_{d\,(\Gamma)\to 0}\frac{\operatorname{mes}\Gamma^*}{\operatorname{mes}\Gamma} = \left|\frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(u,\,v)}\right|_{M_0}, \tag{47.27}$$

т. е. мы доказали формулу (46.6) и в некотором смысле даже в более общем виде; так, здесь Γ — не обязательно квадрат (правда, на