НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Факультет прикладної математики
Кафедра прикладної математики

Лабораторна робота №3
із дисципліни «Чисельні методи»
Варіант №17

Виконав:
студент групи КМ-02
Савченко С.В

Керівник:
доцент Андрусенко О. М.

Київ – 2022

ЗМІСТ

МЕТА РОБОТИ

Ознайомлення з чисельними методами обчислення визначених інтегралів.

ОПИС МЕТОДУ

Чисельне інтегрування

<u>Загальні положення</u>

$\boxed{I = \int_a^b \rho(x) f(x) dx}$ (1)

$\rho(x), f(x)$ – функції, $x \in [a; b]$

$\rho(x) > 0$ – деякий ваговий множник. $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \int_a^b \rho(x) \varphi(x) dx$

$\varphi(x) = \int_a^b \rho(x) \varphi(x) dx$

Квадратурна формула:

$\boxed{\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(x_i) + R(f)}$ (2),

x_i – вузли;
c_i – вагові коефіцієнти;
$R(f)$ – похибка (залишковий член).

Квадратурна форма (2) називається квадратурною формою замкненого типу, якщо $x_0 = a, x_n = b$, інакше – відкритого типу.

Алгебраїчним степенем точності m квадратичної форми називають найбільший степінь алгебраїчного полінома $P_m(x)$, для якого $R\left(P_m(x)\right) = 0$

<u>Метод трапецій</u>

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Оцінка залишкового члена

$$|R(f)| \leq \frac{M_2}{12} |b-a| \cdot h^2, M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|, h \leq \sqrt{\frac{12\varepsilon}{M_2 |b-a|}}, n > \frac{b-a}{h_0}$$

Метод Сімпсона

$[a; b]$ ділимо на $2m$ частин

$$h = \frac{b-a}{2m}, n = 2m,\ \ h_1 = \frac{b-a}{2m}, \qquad h_2 = \frac{h_1}{2},\ \ \mathrm{I}_{h_1};\ \mathrm{I}_{h_2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}(f_0 + 4S_1 + 2S_2 + f_{2m})$$

$$S_1 = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2m-1}; \quad S_2 = f_2 + f_4 + \cdots + f_{2m-2};$$

За правилом Рунге:

Якщо нерівність $\frac{|\mathrm{I}_{h_1} - \mathrm{I}_{h_2}|}{2^q - 1} \leq \varepsilon; q = 4$, НЕ виконується, крок ділиться на 2 і інтеграл обчислюється з новими точками. Ця операція проводиться допоки нерівність не буде виконуватись.

Метод Гаусса

Поліноми Лежандра

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, n = 0,1,2 \ldots$$

Рекурентне співвідношення

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x),$$

ортогональне на $[-1; 1], \rho(x) \equiv 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k f(x_k);$$

x_k – корені полінома Лежандра

$$c_k \equiv \frac{2}{(1-x_k{}^2)\cdot L_n{}'(x_k)^2}$$

Перехід до інтеграла з межами $[-1; 1]$

$$x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}t;\ \ dx = \frac{b-a}{2}dt$$

Залишковий член

$$|R(f)| \leq \frac{M_{2n}\cdot 2^{2n+1}\cdot (n!)^4}{(2n+1)(2n!)^3};\ M_{2n} = \max_{t\in[-1;1]}\left|f^{(2n)}(t)\right|$$

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Згідно з варіантом №17 маємо функцію $f(x) = \cos(3\mathrm{x} + x^{-1})$.

$$\varepsilon = 10^{-5}; a = 1; b = 1.3$$

Метод трапецій

Знайдемо h та n, за формулами $h \leq \sqrt{\frac{12\varepsilon}{M_2|b-a|}}, n > \frac{b-a}{h_0}$

$$h = 0.009844; n = 31$$

Скориставшись формулами отримаємо значення інтегралу

$$\int_1^{1.3} \cos(3\mathrm{x} + x^{-1})\,\mathrm{d}x \approx -0.1136959867$$

Метод Сімпсона

$$h_1 = 0.00967;\ S_1 = -5.56881;\ S_2 = -5.21819;\ \mathrm{I}_{h_1} = -0.11136145$$

$$h_2 = 0.004835;\ S_1 = -11.507709;\ S_2 = -11.158236;\ \mathrm{I}_{h_2} = -0.11136145$$

Перевіримо виконання правила Рунге

$$\frac{|\mathrm{I}_{h_1} - \mathrm{I}_{h_2}|}{2^q - 1} = \frac{|-0.11136145 - -11.158236|}{2^4 - 1} = 6.83 \cdot 10^{-10} \leq \varepsilon = 10^{-5}$$

Отже значення інтегралу дорівнює

$$\int_1^{1.3} \cos(3\mathrm{x} + x^{-1})\,\mathrm{d}x \approx -0.11136145$$

Метод Гаусса

Виконаємо перехід до інтеграла з межами $[-1; 1]$

$$x = 1.15 + 0.15t; dx = 0.15t$$

$$\int_{-1}^{1} 0.15 \cdot \cos(3(1.15 + 0.15t) + (1.15 + 0.15t)^{-1})dt$$

$$f(t) = \cos(3(1.15 + 0.15t) + (1.15 + 0.15t)^{-1})$$

Після обчислень залишків при різних значеннях n, було обчислено, що при $n = 25, |R(f)| \leq \varepsilon$

Отже, обрахуємо

$$|R(f)| \leq \frac{M_{2n} \cdot 2^{2n+1} \cdot (n!)^4}{(2n+1)(2n!)^3};\ M_{2n} = \max_{t\in[-1;1]} \left|f^{(2n)}(t)\right|$$

$$M_{50} = \max_{t\in[-1;1]} \left|f^{(50)}(t)\right|$$

$$= \max_{t\in[-1;1]} \left|\cos\left(3(1.15+0.15t) + (1.15+0.15t)^{-1}\right)^{(50)}\right|$$

$$= 1.768 \cdot 10^{15}$$

$$|R(f)| = \frac{M_{2n} \cdot 2^{2n+1} \cdot (n!)^4}{(2n+1)(2n!)^3} = \frac{1.768 \cdot 10^{15} \cdot 2^{51} \cdot (25!)^4}{(51)(50!)^3} \approx 8.09 \cdot 10^{-6}$$

$$|R(f)| \le \varepsilon$$

Отже, значення інтегралу при використанні полімона Лежандра 25-го степеня нас влаштовує.

Обчислення полінома Лежандра і процес обчислення коренів можна переглянути у файлі Jupyter Notebook, доданого до цієї лабораторної роботи.

Корені полінома Лежандра 25-го степеня:
[0.0, -0.995557, -0.976664, -0.942975, -0.894992, -0.833443, -0.759259, -0.673566, -0.577663, -0.473003, -0.361172, -0.243867, -0.122865, 0.122865, 0.243867, 0.361172, 0.473003, 0.577663, 0.673566, 0.759259, 0.833443, 0.894992, 0.942975, 0.976664, 0.995557]

Коефіцієнти c_k:
[0.123176, 0.011394, 0.026355, 0.040939, 0.054905, 0.068038, 0.080141, 0.091028, 0.100536, 0.108520, 0.114858, 0.119456, 0.122242, 0.122242, 0.119456, 0.114858, 0.108520, 0.100536, 0.091028, 0.080141, 0.068038, 0.054905, 0.040939, 0.026355, 0.011394]

Обчислимо інтеграл

$$0.15 \cdot \int_{-1}^{1} \cos(3(1.15+0.15t) + (1.15+0.15t)^{-1})\, dt = 0.15 \cdot \sum_{k=1}^{25} c_k f(x_k)$$

$$\int_{1}^{1.3} \cos(3x + x^{-1})\, dx \approx -0.11136144$$

Порівняємо результати отримані трьома різними методами

Назва методу	**Значення інтегралу**
Метод трапецій	-0.11369
Метод Сімпсона	-0.11136
Метод Гаусса	-0.11136

Як бачимо, найбільш точними методами є метод Сімпсона та метод Гаусса. Хоча треба зазначити, що метод Гаусса використовує набагато більше ресурсів аніж метод Сімпсона.