НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Факультет прикладної математики
Кафедра прикладної математики

Лабораторна робота №2
із дисципліни «Чисельні методи»
Варіант №17

Виконав:
студент групи КМ-02
Савченко С.В

Керівник:
доцент Андрусенко О. М.

Київ – 2022

ЗМІСТ

МЕТА РОБОТИ

Побудувати кубічний сплайн для заданої функції на довільному проміжку.

ОПИС МЕТОДУ

<u>Кубічний сплайн</u>

Нехай існує деяке розбиття проміжку $[a;\ b]$.

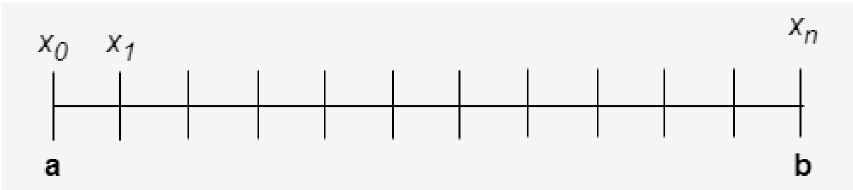

Рисунок 1 – Приклад розбиття проміжку $[a;\ b]$.

Тоді,

$x_i - x_{i-1} = h_i$

Нехай на цьому проміжку існує якась функція $f(x)$.

Тоді, на цьому проміжку може існувати функція:

$g(x)$: 1) $g(x) \in C^2[a;\ b]$

2) $\forall\ [x_{i-1};\ x_i]\ \ g(x) = g_i(x) = \sum_{k=0}^{3} d_k (x_i - x)^k$

3) $g(x_i) = f(x_i)$

4) $g''(a) = f''(b) = 0$

$\Rightarrow$ $g(x)$ називається кубічним сплайном.

<u>Метод прогонки</u>

$$a_i = \frac{h_i}{6}$$

$$c_i = \frac{h_{i+1}}{6}$$

$$b_i = -\frac{h_i + h_{i+1}}{3}$$

$$d_i = \frac{f_{i-1}}{h_i} - f_i\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) + f_{i+1}\frac{1}{h_{i+1}}$$

Прогоночні коефіцієнти

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad ; \gamma_1 = -\frac{d_1}{b_1}$$

$$\alpha_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \cdot \alpha_{i-1}} \quad ; \quad \gamma_i = \frac{a_i \cdot \gamma_{i-1} - d_i}{b_i - a_i \cdot \alpha_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n-2}$$

Обернений хід

$$m_{n-1} = \frac{a_{n-1} \cdot \gamma_{n-2} - d_{n-1}}{b_{n-1} - a_{n-1} \cdot \alpha_{n-2}} \quad ; \quad m_i = \alpha_i \cdot m_{i+1} + \gamma_i, \quad i = \overline{n-2, n-1, \dots, 1}$$

Побудова сплайну

$$g_i(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_i - m_i\frac{{h_i}^2}{6}\right)\frac{(x - x_{i-1})}{h_i}$$
$$+ \left(f_{i-1} - m_{i-1}\frac{{h_i}^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h_i}$$

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Згідно з варіантом №17 маємо функцію $f(x) = \lg(x^2 + 1)$.

Зобразимо $f(x)$ графічно.

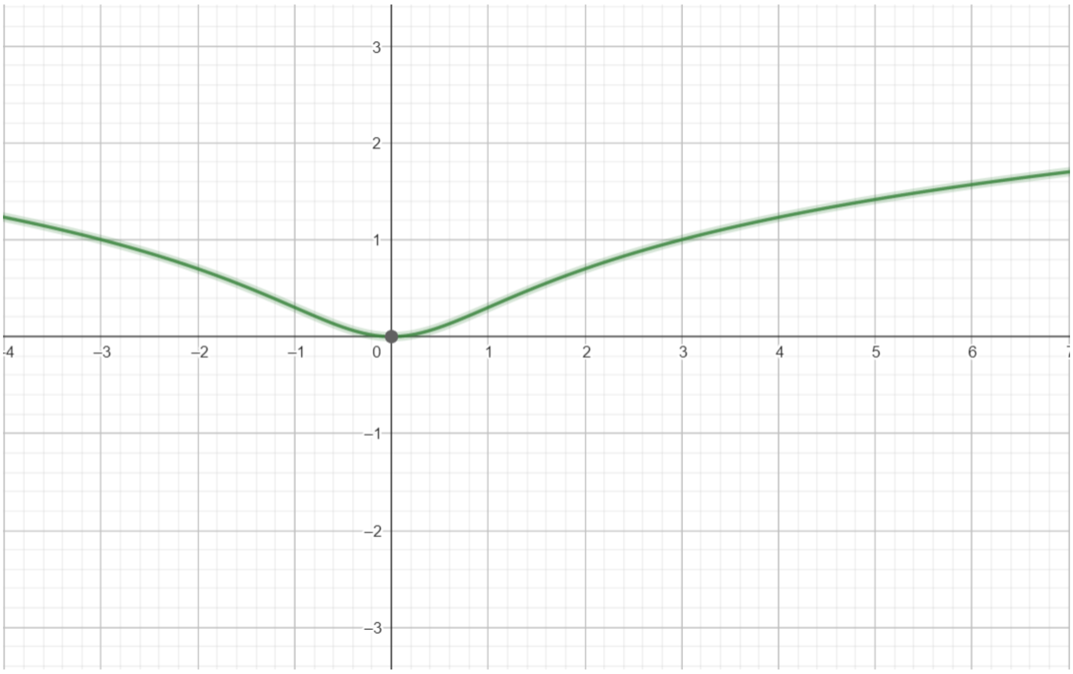

Рис. 1 – Графік функції $f(x) = \lg(x^2 + 1)$.

Для побудови сплайну оберемо проміжок [0; 6], Точки будуть відповідно $[0, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3, 3.6, 4.2, 4.8, 5.4, 6]$.

$h_i = const = 0.6$

Тоді $a_i = 0.1, i = \overline{1, n-1}$

$b = [0\ , -0.4, -0.4, -0.4, -0.4, -0.4, -0.4, -0.4, -0.4, 0]$
$c = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0]$
$d = [0, 0.20052002, -0.02312481, -0.06232532, -0.05421256,$
$-0.04194648, -0.03220821, -0.02511989, -0.01998614, 0]$

Обчислимо прогоночні коефіцієнти
$\alpha = [0, -0.25, -0.26666667, -0.26785714, -0.26794258,$
$-0.26794872, -0.26794916, -0.26794919, -0.26794919]$
$\gamma = [0, 0.50130004, -0.19534618, -0.11461795, -0.1145475,$
$-0.08170219, -0.06440961, -0.05005004, -0.04014182]$
Обернений хід
$m = [0, 0.54421534, -0.17166121, -0.08881863, -0.09631745,$
$-0.06803714, -0.05099874, -0.05005004, 0, -0.14981132, 0]$

Побудова сплайнів

$g_1(x) = 0.1511709x^3 + 0.1681433x.$
$g_2(x) = -0.1988546x^3 + 0.6300459x^2 - 0.209884184x + 0.0756054744.$
$g_3(x) = 0.0230119x^3 - 0.1686735x^2 + 0.748579188x - 0.307779948.$
$g_4(x) = -0.00208299999999999x^3 - 0.03316104x^2 + 0.504656648x - 0.1614262896.$
$g_5(x) = 0.00785559999999999x^3 - 0.10471896x^2 + 0.676395624x - 0.2988174192.$
$g_6(x) = 0.0047329x^3 - 0.07661466x^2 + 0.592082596x - 0.2145041352.$
$g_7(x) = 0.000263500000000002x^3 - 0.02834514x^2 + 0.418312432x - 0.00598019759999824.$
$g_8(x) = 0.0139028x^3 - 0.20020032x^2 + 1.140104036x - 1.0164880176.$
$g_9(x) = -0.0416143x^3 + 0.59924592x^2 - 2.697237816x + 5.1232586256.$
$g_{10}(x) = 0.0416143x^3 - 0.7490574x^2 + 4.6273139x - 8.2183041.$

Побудуємо $f(x)$ та $g(x)$ на одному графіку.

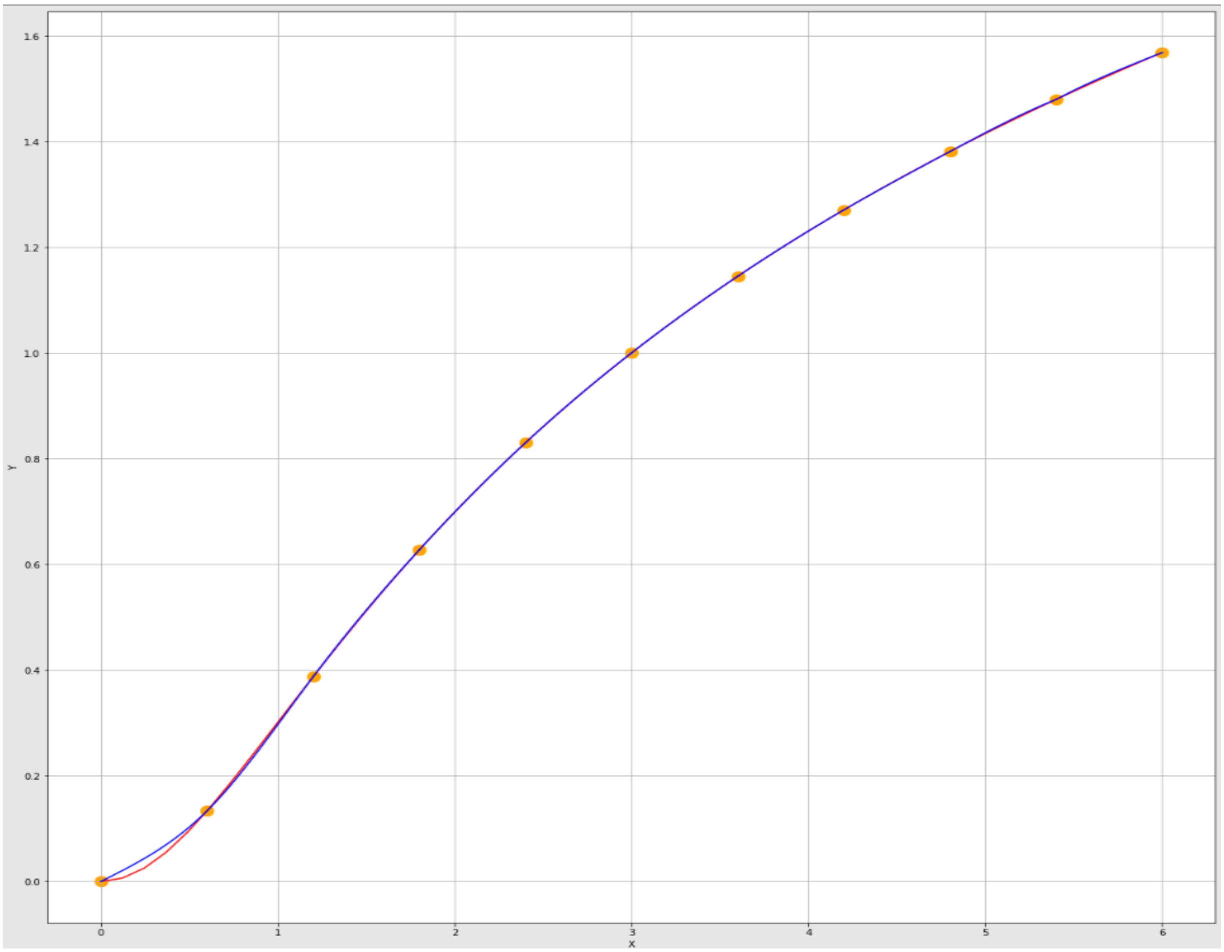

Рис. 2 – Графіки $f(x)$ та $g(x)$.

Червоним кольором зображено графік функції $f(x)$, синім відповідно $g(x)$.

ДОДАТОК А

Перевіримо результати обчислень, порівняємо значення функції у точках інтервалу та значення сплайну:

g_1(x).....
g_1(0.0) = 0.
f(0.0) = 0.0.

g_2(x).....
g_2(0.6) = 0.133538894400000.
f(0.6) = 0.13353890837021748.

g_3(x).....
g_3(1.2) = 0.387389800800000.
f(1.2) = 0.3873898263387294.

g_4(x).....
g_4(1.8) = 0.627365851200000.
f(1.8) = 0.6273658565927326.

g_5(x).....
g_5(2.4) = 0.829946683200000.
f(2.4) = 0.829946695941636.

g_6(x)....
g_6(3.0) = 1.00000001280000.
f(3.0) = 1.0.

g_7(x).....
g_7(3.6) = 1.14488539920000.
f(3.6) = 1.1448854182871422.

g_8(x).....
g_8(4.2) = 1.27044593520000.
f(4.2) = 1.2704459080179626.

g_9(x).....
g_9(4.8) = 1.38093444000000.
f(4.8) = 1.380934463330702.

g_10(x).....
g_10(5.4) = 1.47943131120000.
f(5.4) = 1.4794313371977363.
g_10(6.0) = 1.56820170000000.
f(6.0) = 1.568201724066995.

Висновок:
Результати задовольняють точності $e = 10^{-7}$.

Знайдемо другу похідну першого та останнього сплайну...
g1''(x) = 0.9070254*x.
g10''(x) = 0.2496858*x - 1.4981148.
Сплайн побудований правильно, якщо $g''(a) = f''(b) = 0$
Перевіримо:
g1''(0.0) = 0.
g10''(6.0) = -2.220446049250313E-16.

Отже, сплайн побудований правильно.