Доверительные интервалы

Александр Миленькин
Биоинформатик в Insilico Medicine

Александр Миленькин

Биоинформатик в Insilico Medicine

О спикере

- Преподаватель в Нетологии
- Окончил МФТИ в 2019 году
- Активный участник соревнований по Data Science

Аккаунты в соц.сетях:

@Aleron

@Aleron75infskin

План занятия

1. Доверительные интервалы
2. Статистическая проверка гипотез для несвязанных выборок

План урока

1. Доверительные интервалы
2. Статистическая проверка гипотез для несвязанных выборок

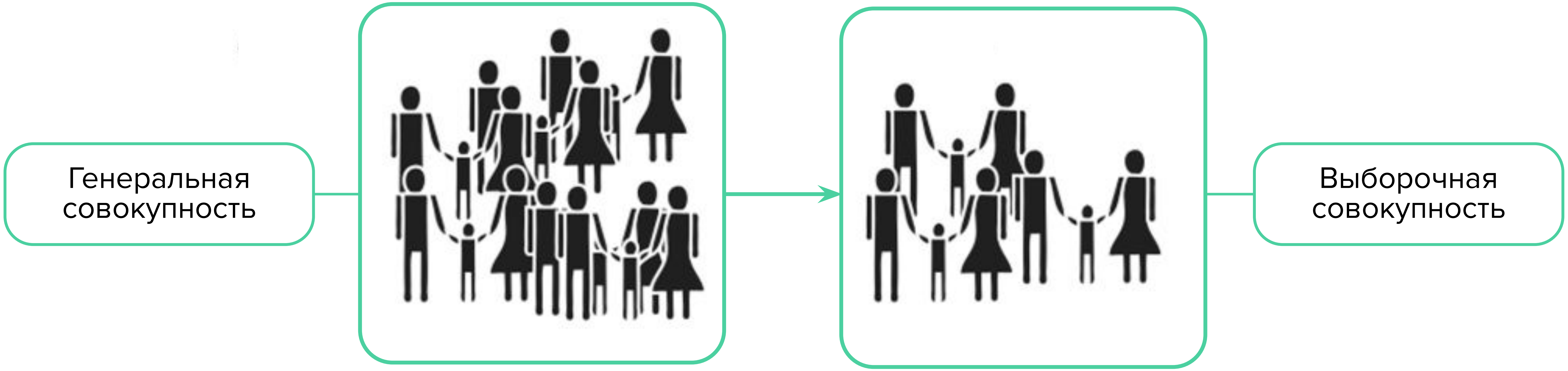
Наши цели

- Доверительный интервал
- Уровень значимости
- p-value
- *t*-критерий Стьюдента

Точечная оценка

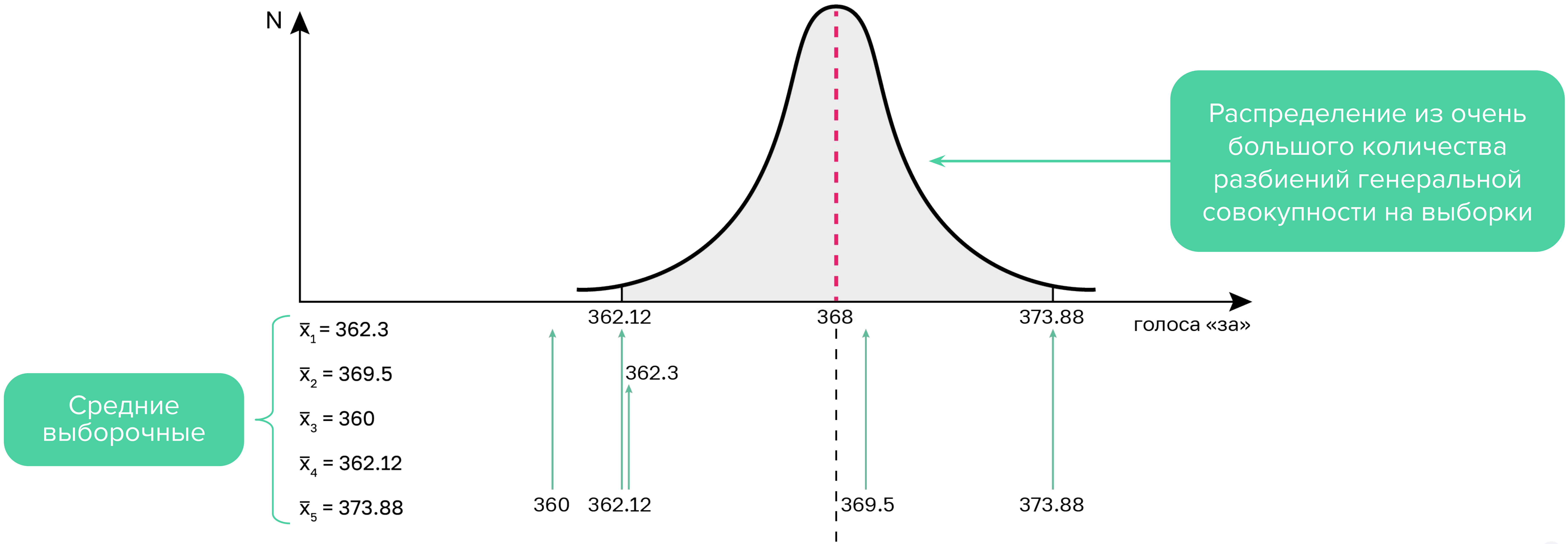
Точечной оценкой называется число, которое используют для оценки параметра генеральной совокупности (среднего).

Пример: Мы провели опрос с целью выявить потенциального кандидата в президенты какой-либо страны. Опрос 1000 человек показал, что за этого кандидата проголосовали 360 человек — это 36%. Это только показатель по малой выборке по сравнению со всей страной, поэтому такая оценка может не всё говорить о реальной картине. Что в таком случае делать?



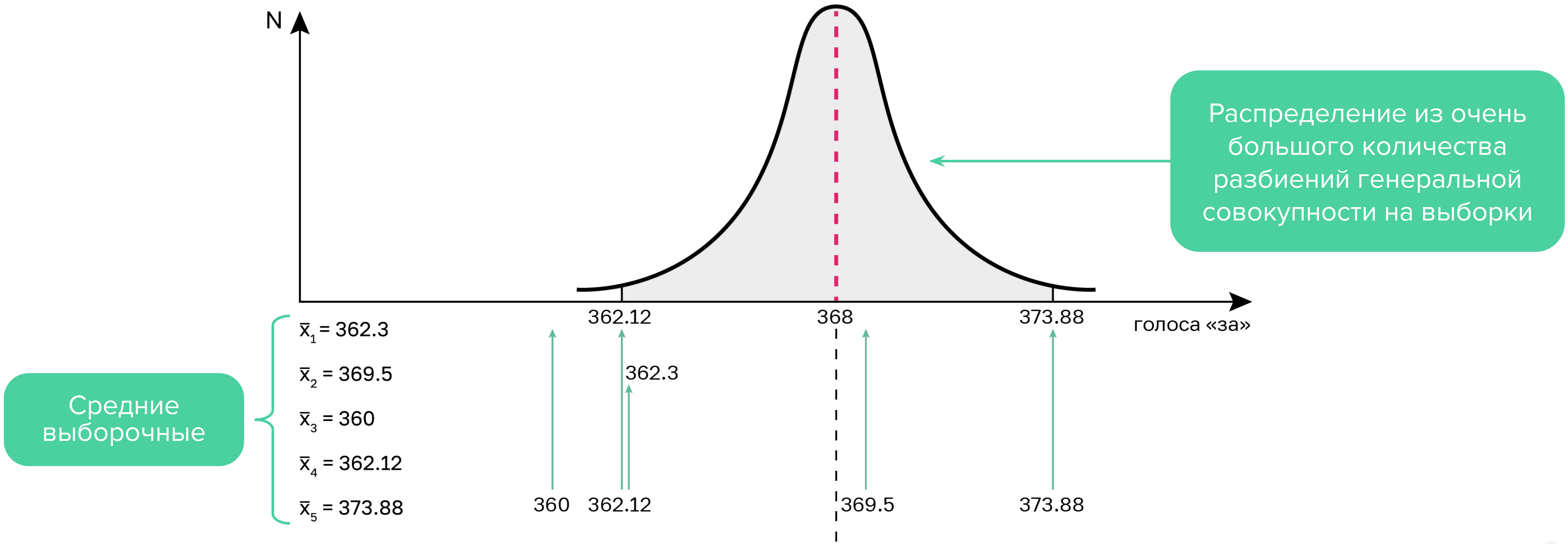
Точечная оценка

Проведём несколько таких независимых опросов на 1000 человек.



Точечная оценка

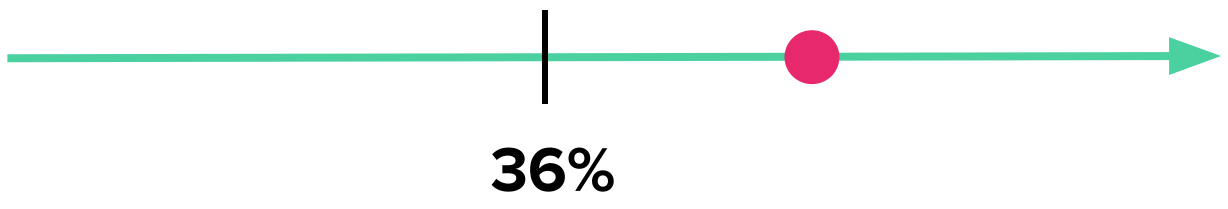
Вывод: **точечная оценка** не так информативна, как **Доверительный интервал!**



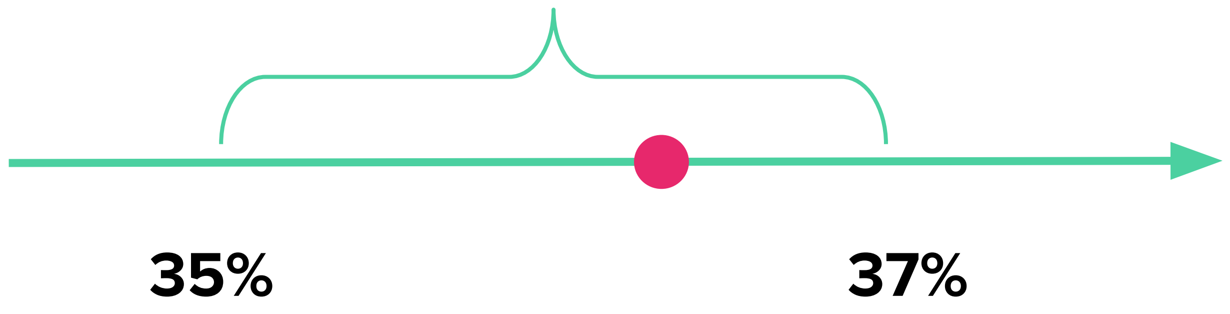
Что такое доверительный интервал?

Цель: научиться оценивать параметры не просто числом, а целым интервалом, который покрывает возможные значения параметра с заданной вероятностью

Параметр находится где-то вокруг точки 36%



Параметр находится где-то здесь с 95% вероятностью

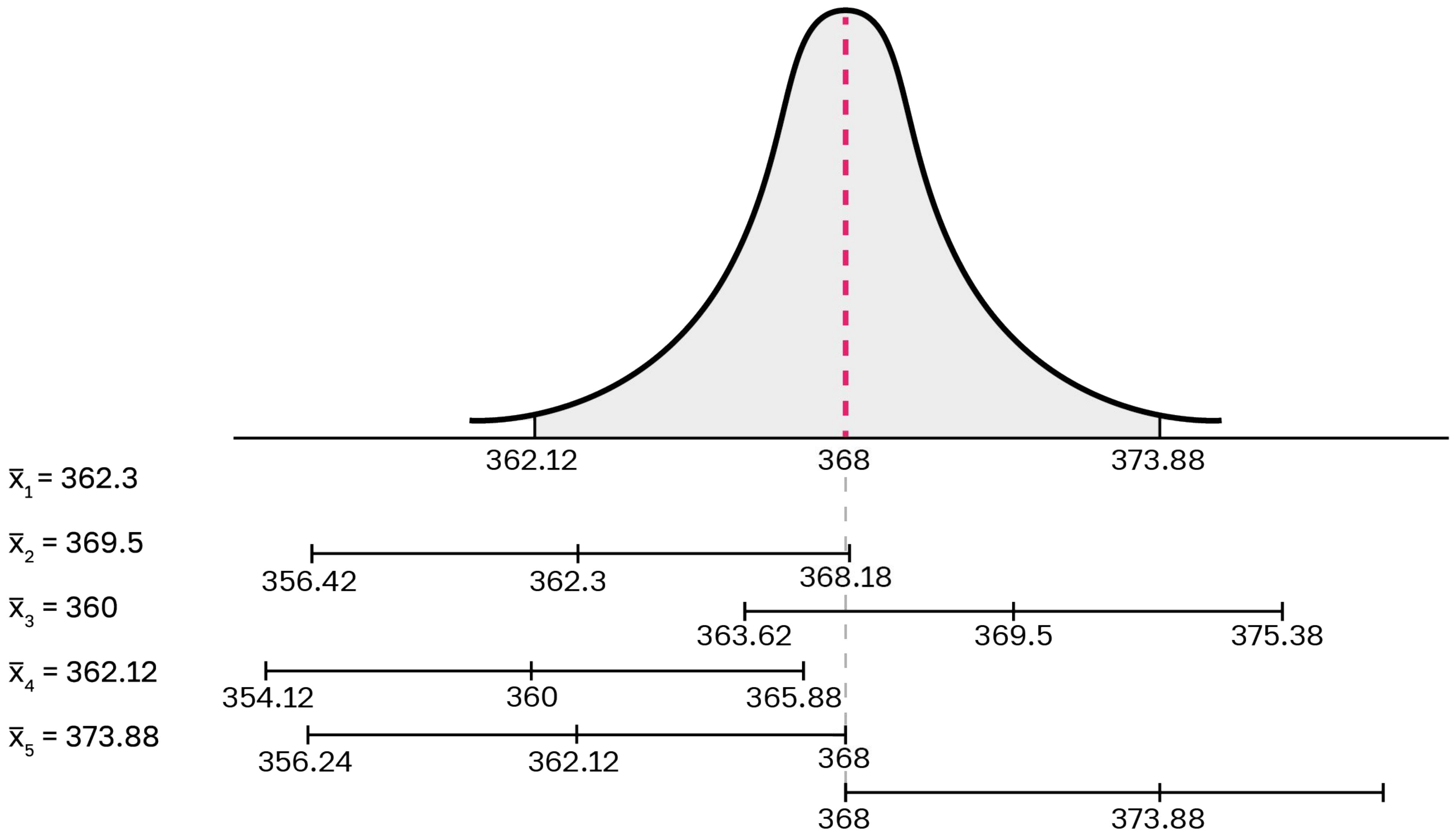


Намного лучше знать не просто оценку 36%, а интервал, в котором с большей вероятностью будет находится реальный процент сторонников нашего президента. Скажем, с вероятностью 95% доля сторонников президента лежит в интервале от 35% до 37%.

Точечная оценка vs. доверительный интервал

Доверительный интервал — это интервал, который с заданной вероятностью накрывает оцениваемый нами параметр ГС.

Заметим, что ДИ для разных выборок одной и той же ГС могут отличаться!



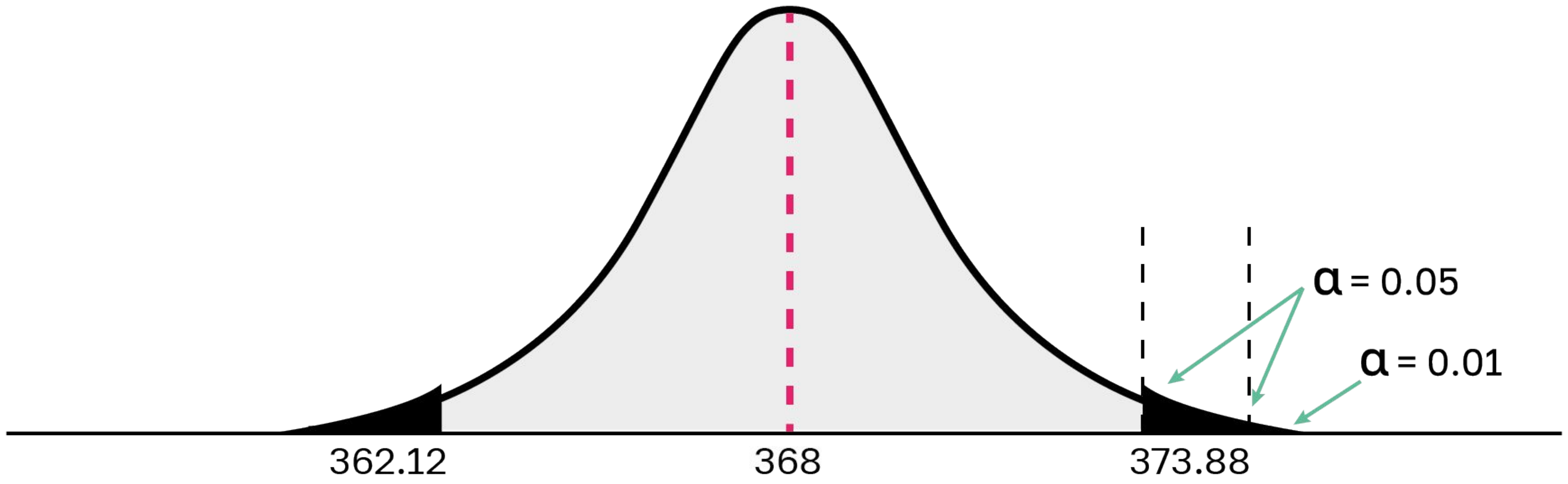
Первый шаг пройден!

Наши цели

- Доверительный интервал
- Уровень значимости
- p-value
- *t*-критерий Стьюдента

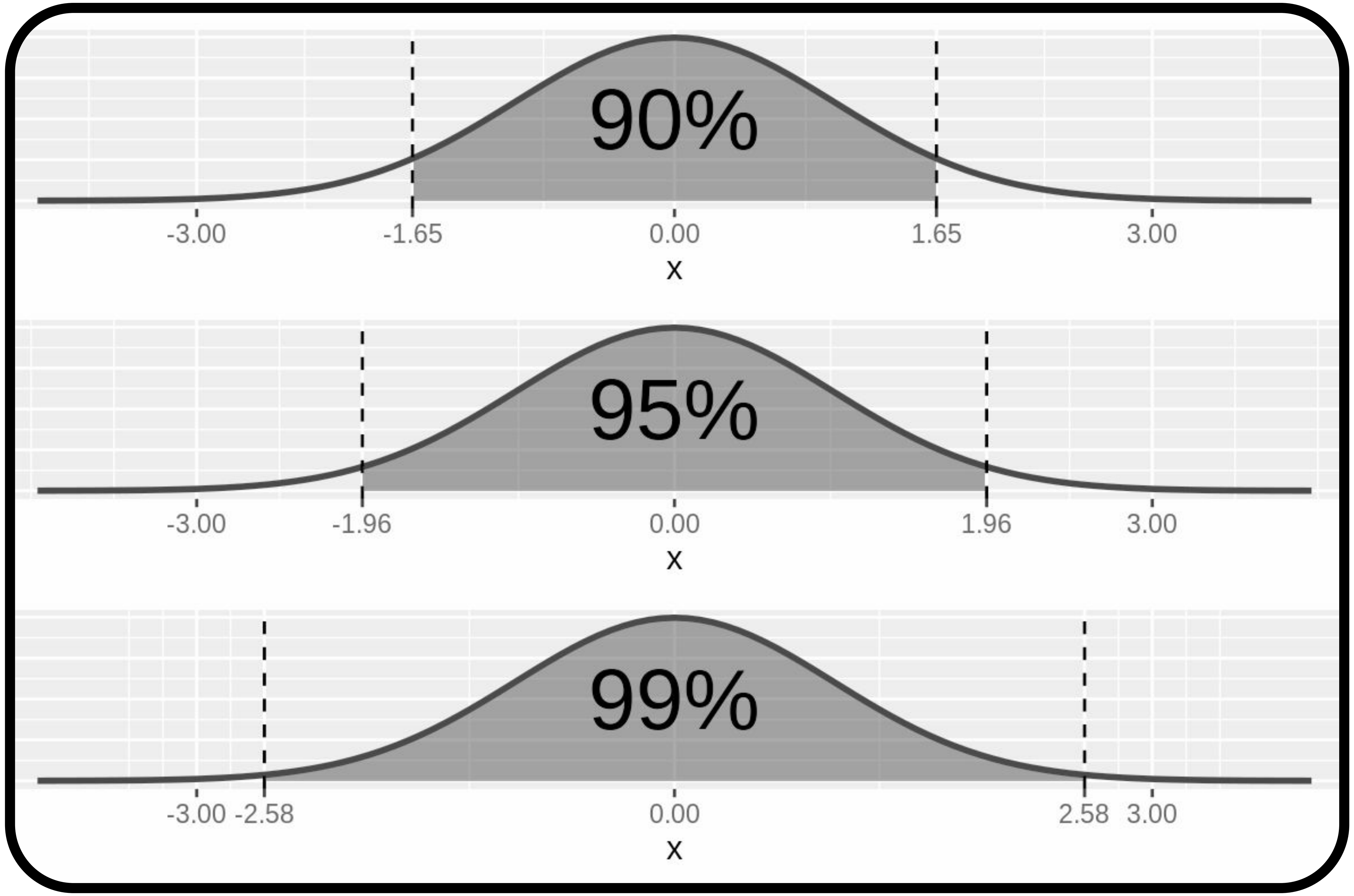
Уровень значимости и уровень доверия

Уровень значимости α — это вероятность, с которой значение параметра не попадает в доверительный интервал.
Уровень доверия β = 1 - α — это вероятность того, что доверительный интервал накрывает значение параметра.



Уровень значимости 0.1, 0.05 и 0.01 соответствуют уровням доверия 0.90, 0.99 и 0.95. Величины могут выражаться в процентах, то есть уровень доверия 0.99 и 99% — это одно и то же.

Уровень значимости и уровень доверия



Уровень значимости 0.1, 0.05 и 0.01 соответствуют уровням доверия 0.90, 0.95 и 0.99.

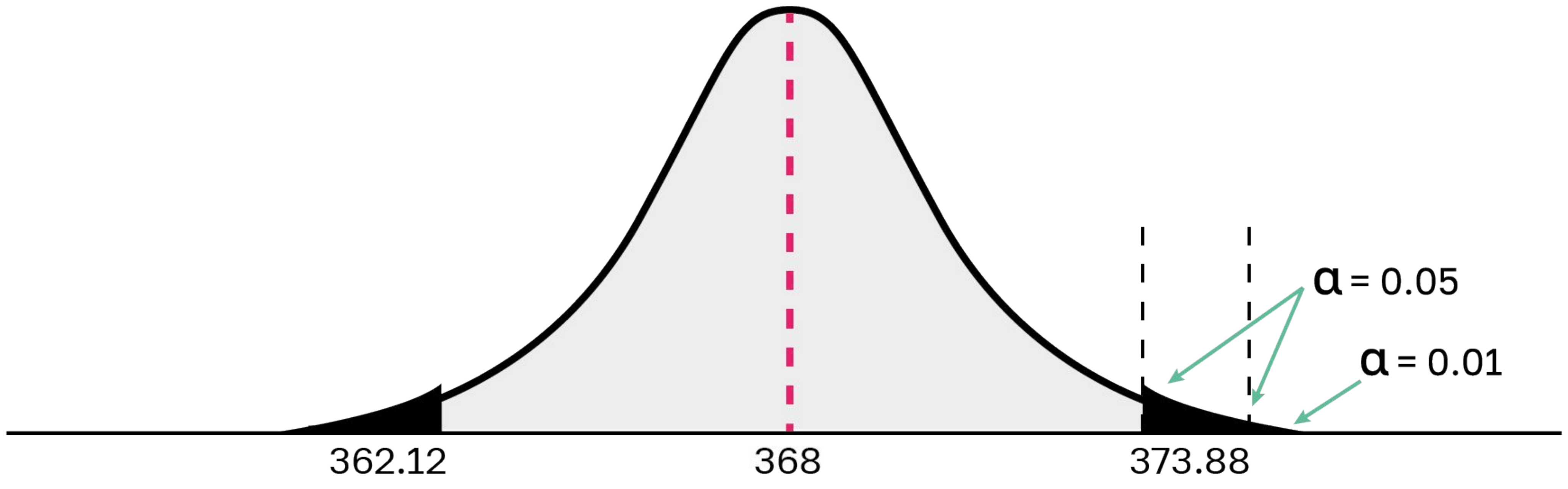
Величины могут выражаться в процентах, то есть уровень доверия 0.99 и 99% — это одно и то же.

Уровень значимости и уровень доверия

«Что-то доказано на уровне значимости 5%».

Что это значит в терминах доверительного интервала?

В какой области лежит наше значение?



Второй шаг пройден!

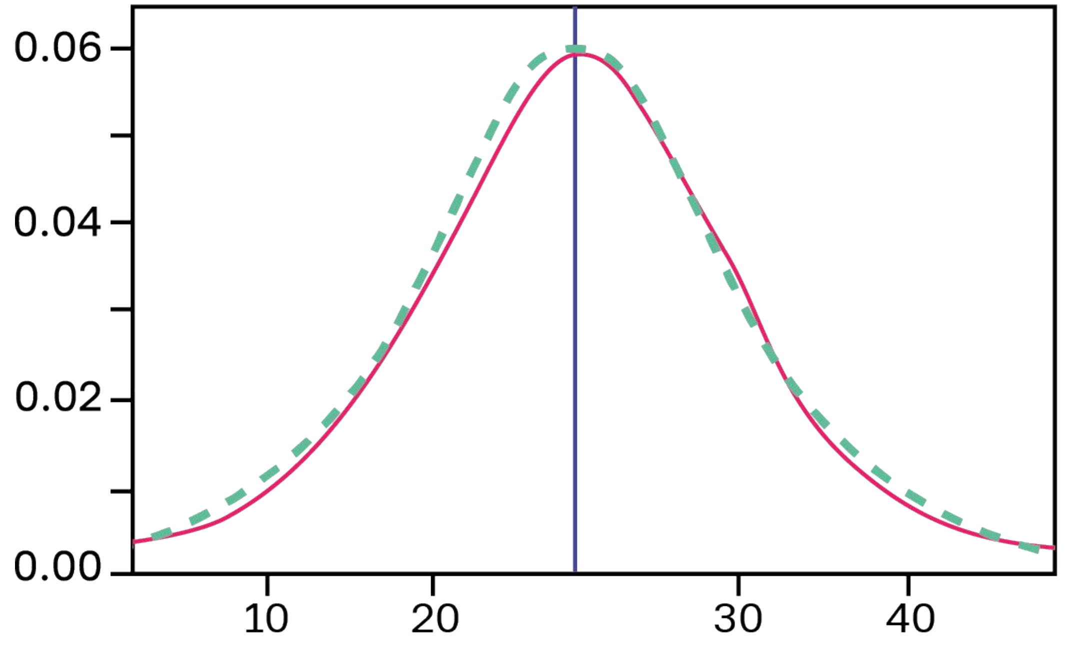
Наши цели

- Доверительный интервал ✓
- Уровень значимости ✓
- p-value
- *t*-критерий Стьюдента

Условия для построения доверительного интервала

Теорема*: Если распределение генеральной совокупности имеет **конечные математическое ожидание и дисперсию**, то при $n \to \infty$ основные выборочные характеристики (среднее, дисперсия, эмпирическая функция распределения) являются нормальными.

Важно! Далее мы часто будем предполагать, что генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения.



*Центральная предельная теорема

Подсчёт доверительного интервала

Рассмотрим случайную выборку объема n, вычислим среднее значение $\bar{x}$ по выборке и зададим уровень значимости β.

Доверительный интервал для среднего имеет вид $(\bar{x} - \triangle; \bar{x} + \triangle)$
где Δ — точность интервальной оценки.

Подсчёт доверительного интервала

Вычисление **Δ** зависит от наших знаний о ГС и от выборки, с которой мы имеем дело.
Допустим нам известно стандартное отклонение σ генеральной совокупности.
Тогда $\triangle = \frac{a}{\sqrt{n}} z_a$, где Z_a это квантиль нормального распределения уровня 1 - α/2.

Теорема: Доверительный интервал для среднего
с известной дисперсией имеет следующий вид.

$$\boxed{(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a; \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a)}$$

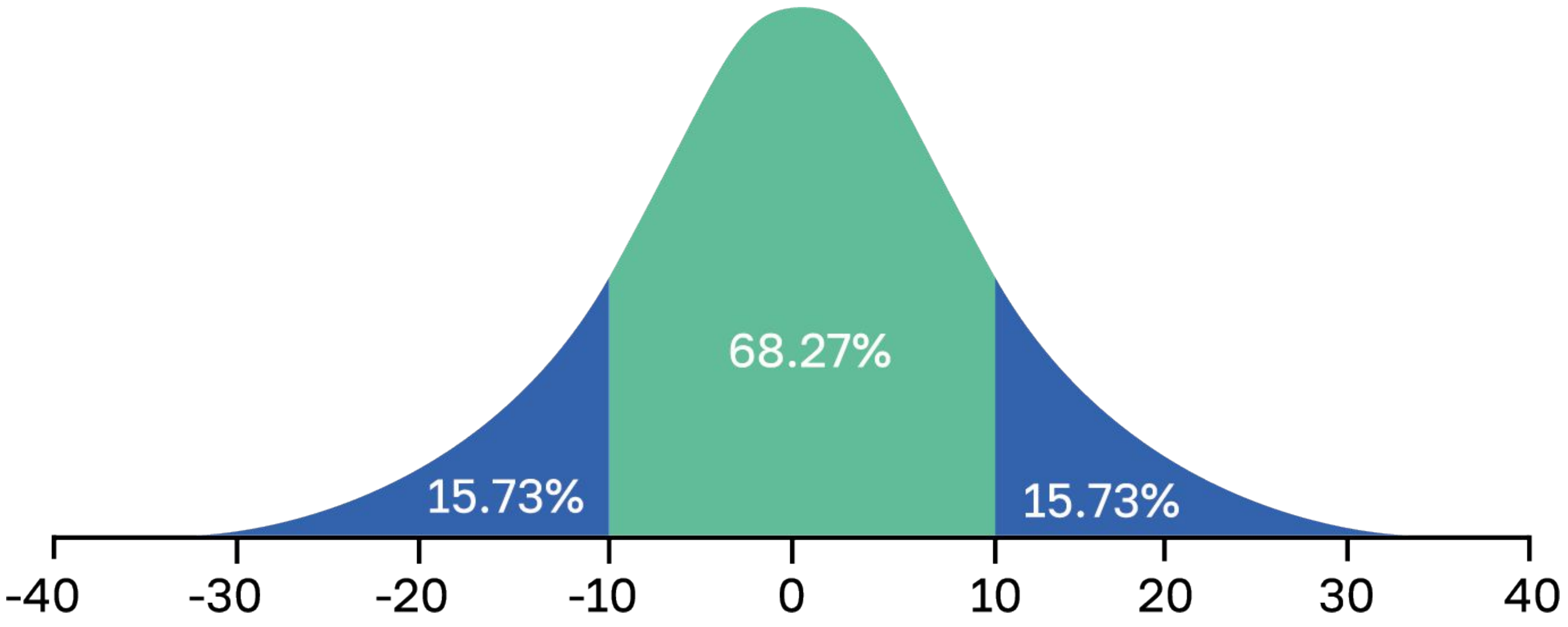
Двусторонняя область

Подсчёт доверительного интервала

Вычисление **Δ** зависит от наших знаний о ГС и от выборки, с которой мы имеем дело. Допустим нам известно стандартное отклонение σ генеральной совокупности. Тогда $\triangle = \frac{a}{\sqrt{n}} z_a$, где Z_a это квантиль нормального распределения уровня 1 - α/2.

Квантиль — значение, которое наше величина не превышает с фиксированной вероятностью. Если вероятность задана в процентах, то квантиль называется **процентилем** или **перцентилем.**

Например, фраза «80-й процентиль времени выхода из строя станка на заводе 3 года» означает, что 80% станков работает 3 года или меньше, а 20% станков работает больше 3-х лет.



Подсчёт доверительного интервала

Вычисление **Δ** зависит от наших знаний о ГС и от выборки, с которой мы имеем дело.
Допустим нам известно стандартное отклонение σ генеральной совокупности.
Тогда $\triangle = \frac{a}{\sqrt{n}} z_a$, где Z_a это квантиль нормального распределения уровня 1 - α/2.

А где найти этот квантиль?

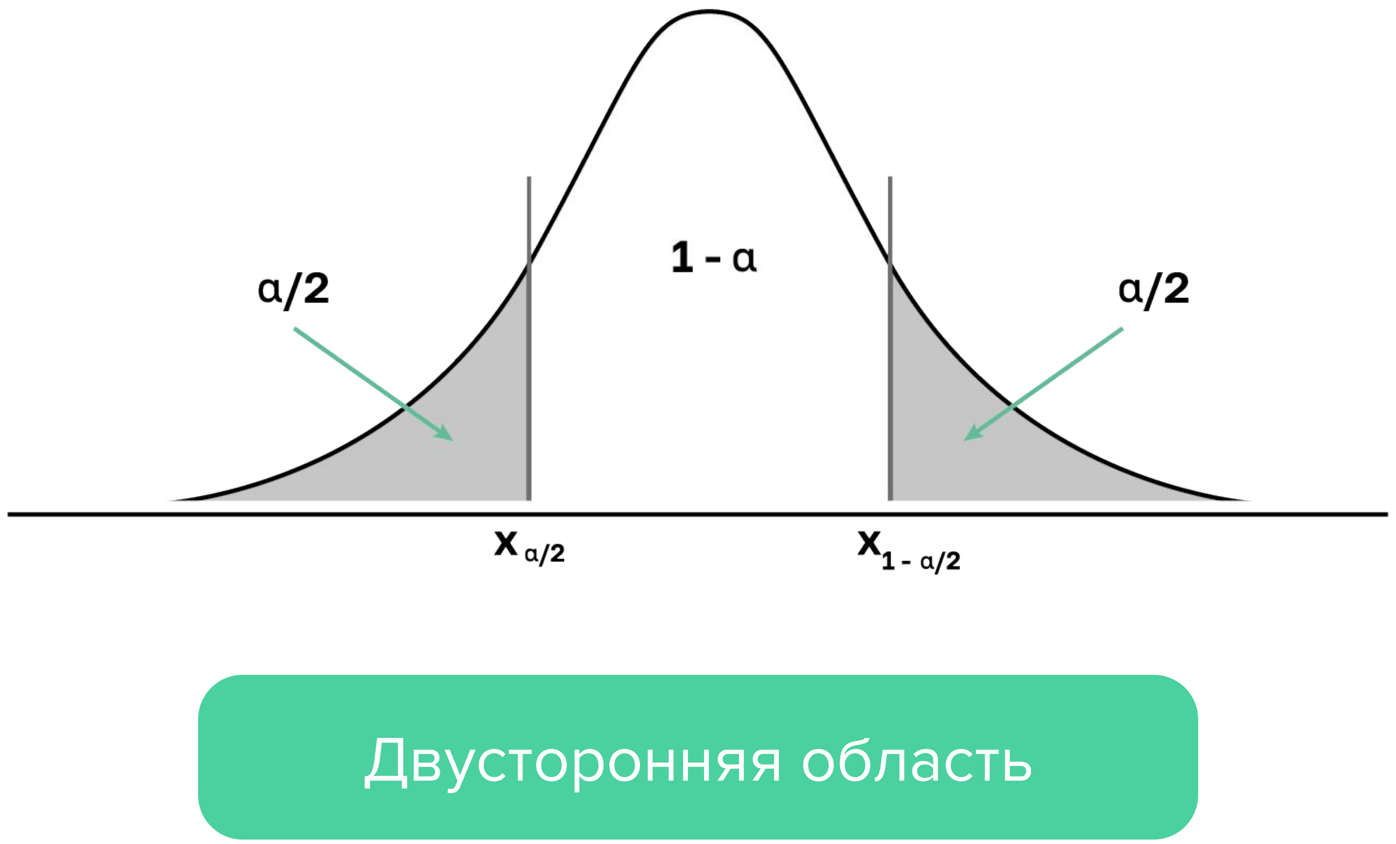
Надо взять из таблички!
(легко гуглится)

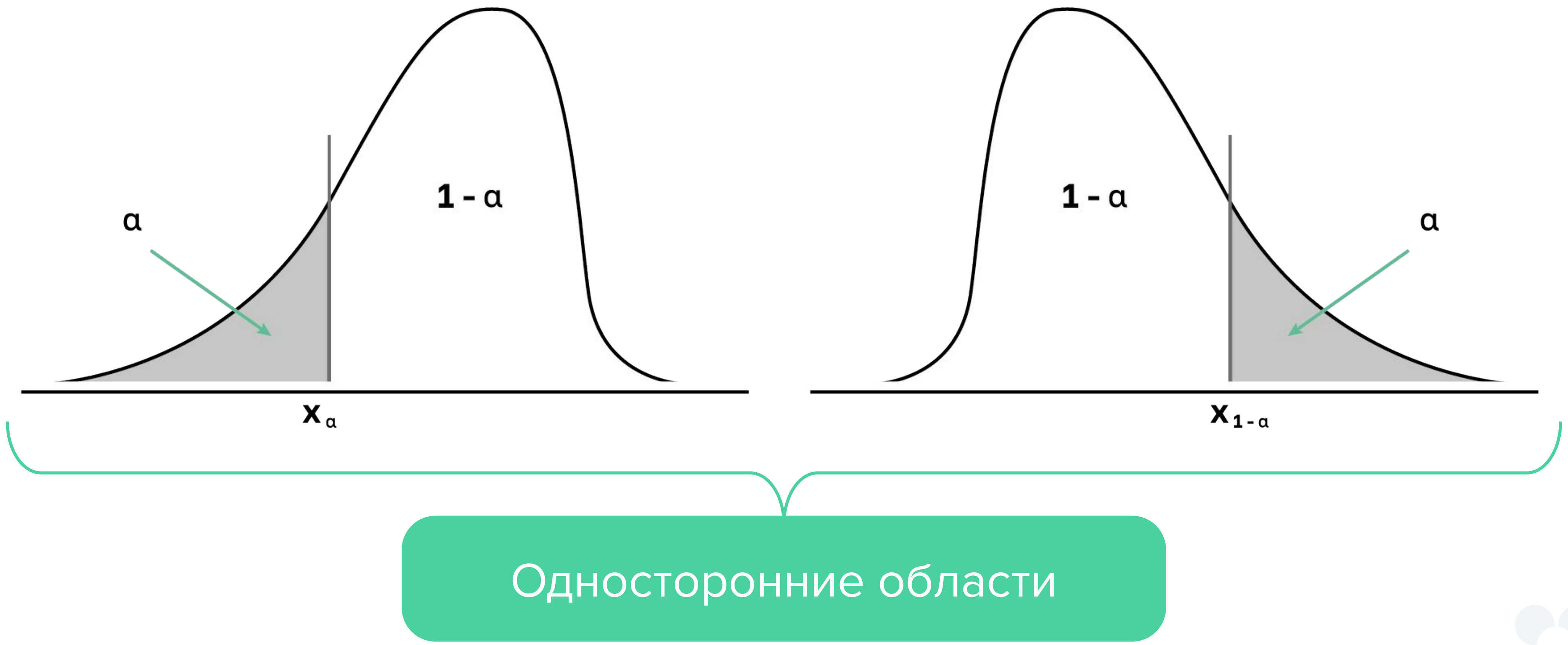
уровень	0,90	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999
односторонняя	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291	3,719
двусторонняя	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,291	3,481	3,891

Подсчёт доверительного интервала

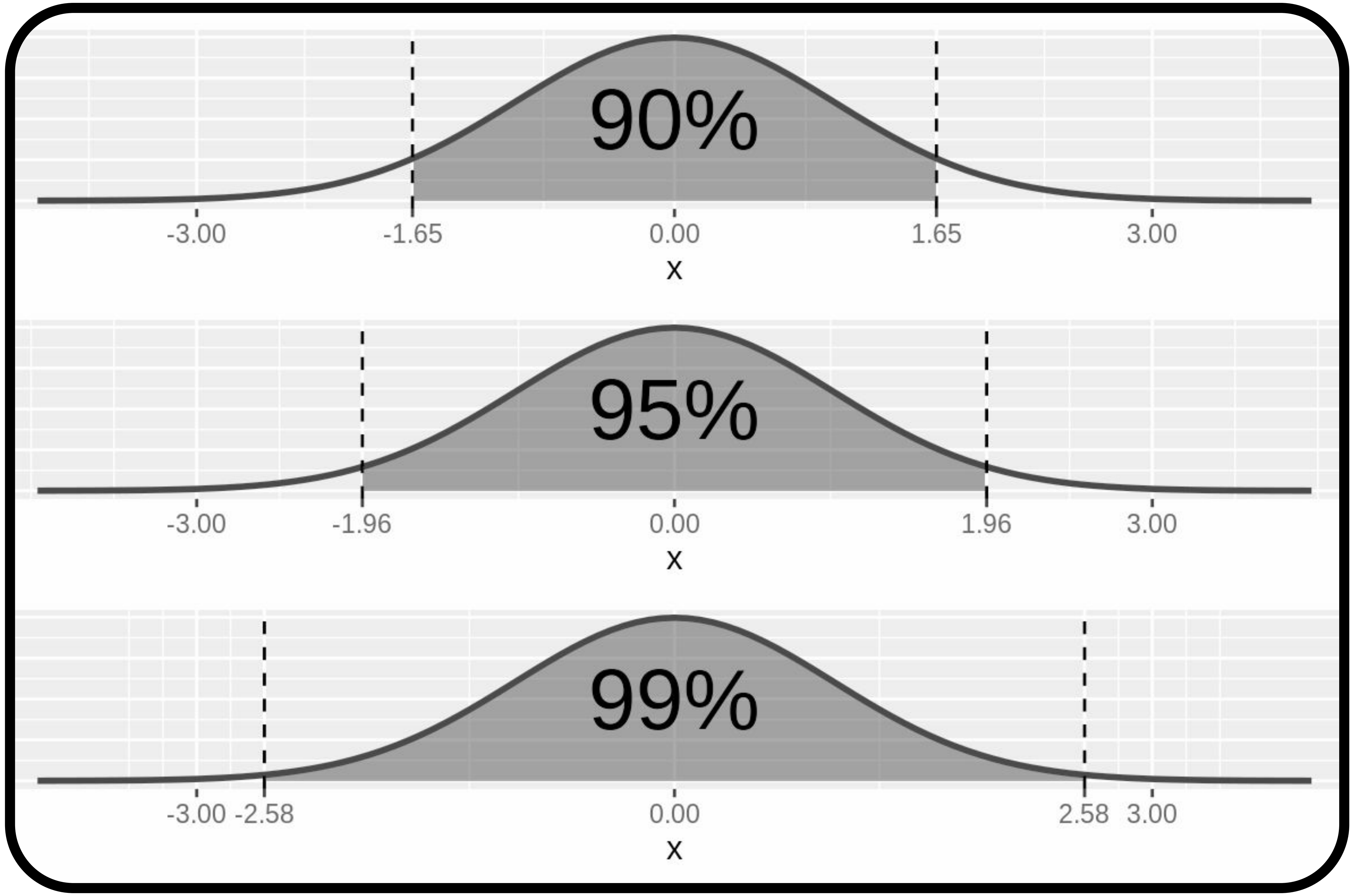
Какой выбрать?

уровень	0,90	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999
односторонняя	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291	3,719
двусторонняя	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,291	3,481	3,891





Подсчёт доверительного интервала



Какой выбрать?

уровень	0,90	0,98	0,99
односторонняя	1,282	2,054	2,326
двусторонняя	1,645	2,326	2,576

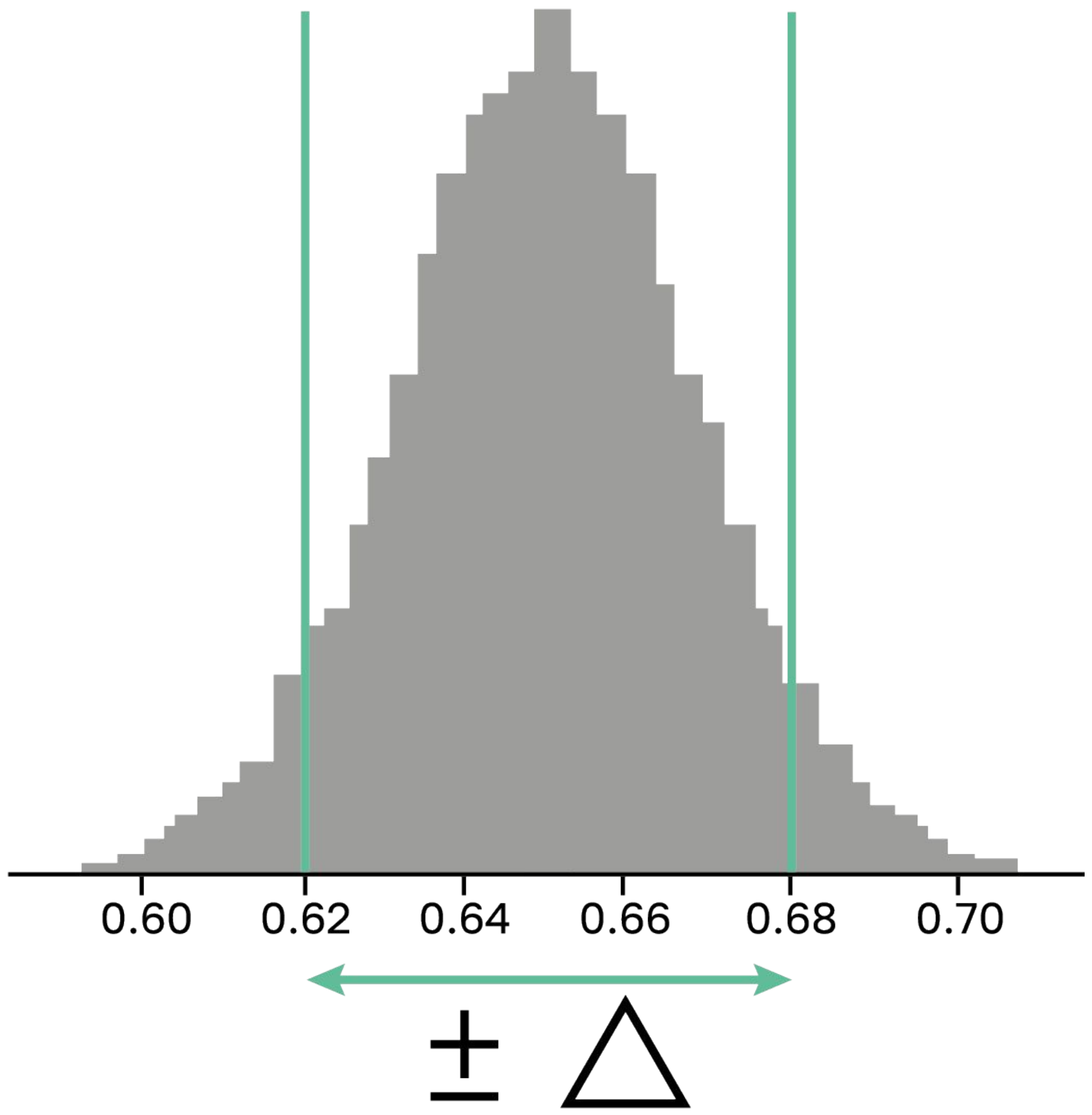
Задача

Пример

Дана выборка 9, 5, 7, 7, 4, 10, дисперсия $\sigma^2 = 1$.
Постройте доверительный интервал 99%.

$$(\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta)$$

$$\Delta = \frac{a}{\sqrt{n}} z_a$$

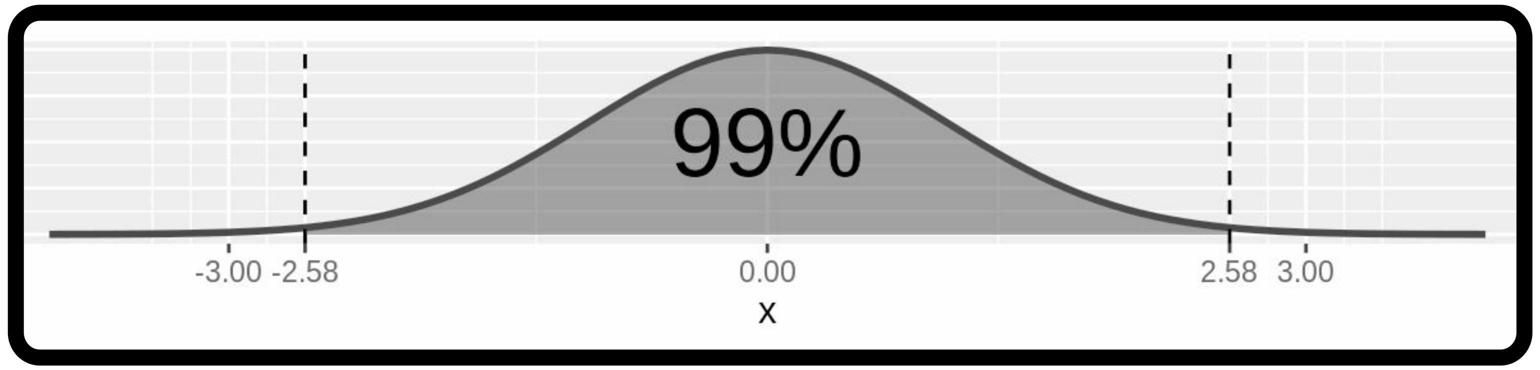


Задача

Задача

Дана выборка 9, 5, 7, 7, 4, 10, дисперсия $\sigma^2 = 1$.
Постройте доверительный интервал 99%.

уровень	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
односторонняя	1,282	1,645	2,326	**2,576**	3,090
двусторонняя	1,645	1,960	2,576	2,807	3,291



Решение:

Среднее значение равно $\bar{x} = (9+5+7+7+4+10) / 6 = 7$.
Доверительный интервал имеет вид $(\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta)$.
По таблице нормального распределения находим
$1 - \alpha/2 = 0.995$ и определяем квантиль $z\_\alpha = 2.81$.

Теперь можем найти точность $\Delta = (\sigma/\sqrt{n})*z\_\alpha = 1/\sqrt{6}*2.81 \approx 1.14$ (здесь мы воспользовались тем, что известна дисперсия генеральной совокупности). Искомый 99%-доверительный интервал имеет вид $(7 - 1.14; 7 + 1.14) = (5.86; 8.14)$.

Задача

Задача:
(Похожие задачи буду в домашней работе)

Пример:
Пусть для выборки объема $n = 25$ вычислено среднее $\bar{x} = 130$.
Из предыдущих исследований известно стандартное отклонение $\sigma = 12$.
Постройте 98% доверительный интервал для среднего значения.

Решение:
Доверительный интервал имеет вид $(\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta)$.
Уровень доверия равен $\beta = 0.98$, поэтому $\alpha = 0.02$.
По таблице нормального распределения находим
$1 - \alpha/2 = 0.99$ и определяем квантиль $z_\alpha = 2.33$.
Теперь можем найти точность $\Delta = (\sigma/\sqrt{n}) * z_\alpha = (12/\sqrt{25}) * 2.33 \approx 5.59$.
Искомый 98%-доверительный интервал имеет вид $(130 - 5.59; 130 + 5.59) = (124.41; 135.59)$.

ДИ для среднего при неизвестной дисперсии и маленькой выборке

Бывают случаи, когда выборка маленькая
и про её параметры ещё и мало чего известно.

Тогда в таком случае вместо нормального
распределения используем t-распределение.

Формула: в формуле процентиль z_α заменяем на $t\_\alpha(n - 1)$ —
это квантиль распределения Стьюдента уровня $1 - \alpha/2$ со степенью
свободы $n - 1$ (это число дано в таблице распределения).

ДИ для среднего при неизвестной дисперсии

Что делать, если дисперсия нам по каким-то причинам неизвестна? Тогда мы можем посчитать её вручную!

Важно, чтобы выборка была больше 30, тогда вместо σ мы будем использовать выборочное стандартное отклонение

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Теорема

Доверительный интервал для среднего при неизвестной дисперсии, но при большой выборке (n > 30), имеет вид **x¯ - (s/√n)*z_α; ¯x + s/√n*z_α** .

Степень свободы

Степень свободы = n - 1

Значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости
(0,01; 0,05; 0,1; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30)

Таблица 1

n	P - 0,01	P - 0,05	P - 0,1	P - 0,15	P - 0,2	P - 0,25	P - 0,3
1	63,6567412	12,7062047	6,3137515	4,1652998	3,0776835	2,4142136	1,9626105
2	9,9248432	4,3026527	2,9199856	2,2819306	1,8856181	1,6035675	1,3862066
3	5,8409093	3,1824463	2,3533634	1,9243197	1,6377444	1,4226253	1,2497781
4	4,6040949	2,7764451	2,1318468	1,7781922	1,5332063	1,3443976	1,1895669
5	4,0321430	2,5705818	2,0150484	1,6993626	1,4758840	1,3009490	1,1557673
6	3,7074280	2,4469119	1,9431803	1,6501732	1,4397557	1,2733493	1,1341569
7	3,4994833	2,3646243	1,8945786	1,6165917	1,4149239	1,2542787	1,1191591
8	3,3553873	2,3060041	1,8595480	1,5922214	1,3968153	1,2403183	1,1081454
9	3,2498355	2,2621572	1,8331129	1,5737358	1,3830287	1,2296592	1,0997162
10	3,1692727	2,2281389	1,8124611	1,5592359	1,3721836	1,2212554	1,0930581

Что за степени свободы и кто такой Стьюдент?

Замечание

Число степеней свободы зависит от того, сколько имеется связей между наблюдениями. Так как мы знаем среднее, то наблюдения связаны одним равенством и степеней свободы становится на одну меньше. То, что других связей нет, надо доказывать, но их действительно нет..

Замечание

Распределение Стьюдента было введено в 1908 году **В. С. Госсетом**, ирландским служащим пивоваренного завода, который участвовал в разработке новых технологий производства пива и **никаким студентом не был**. Обнародовать результаты исследований означало открыть корпоративную тайну, поэтому Госсет напечатал свои материалы под псевдонимом Стьюдент. Фишер ввёл для него обозначение t-распределение

Пример для подсчета ДИ в случае маленькой выборки:

Задача

Пусть объём выборки $n = 16$, выборочное среднее $\bar{x} = 5$, выборочная дисперсия $s^2 = 4$. Постройте доверительный интервал 99%.

Решение

Среднее значение равно $\bar{x} = 5$, а выборочная дисперсия $s^2 = 4$.
Так как неизвестна дисперсия генеральной совокупности и $n < 30$, поэтому точность интервальной оценки $\Delta = s/\sqrt{n} * t_\alpha$. По таблице распределения Стьюдента находим $1 - \alpha/2 = 0.995$ и, так как у нас $n - 1 = 16 - 1 = 15$ степеней свободы, определяем квантиль $t_\alpha = 2.95$. Теперь можем найти точность $\Delta = (s/\sqrt{n}) * t_\alpha = (2/\sqrt{16}) * 2.95 \approx 0.74$. Искомый 99%-доверительный интервал имеет вид $(5 - 0.74; 5 + 0.74) = (4.26; 5.74)$.

Вернёмся к нашим президентским выборам

Скольких людей надо опросить, чтобы наши результаты давали 95% точность?

Обратная задача: раз мы знаем ДИ, то можно ли найти минимальный объем выборки голосовавших, для того, чтобы с заданной точностью и уровнем доверия найти среднее?

Важно! Чтобы найти минимальный необходимый объём выборки для построения доверительного интервала для среднего значения с заданной точностью Δ и уровнем значимости α, достаточно применить формулу:

$$n = \left(\frac{z_a \sigma}{\Delta}\right)^2$$

Теперь понятно, как определить объём выборки при проведении собственных исследований!

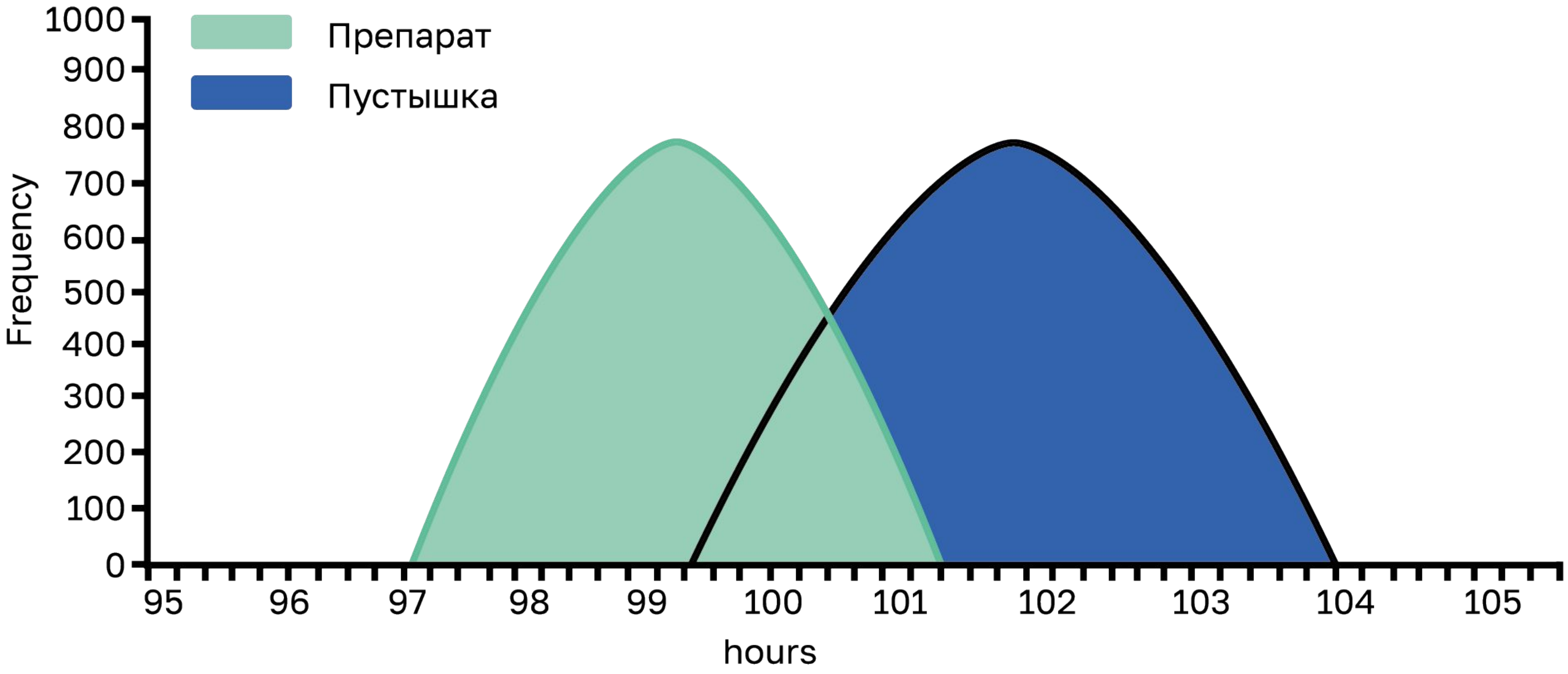
Шаг пройден!

Наши цели

- Доверительный интервал
- Уровень значимости
- p-value
- *t*-критерий Стьюдента

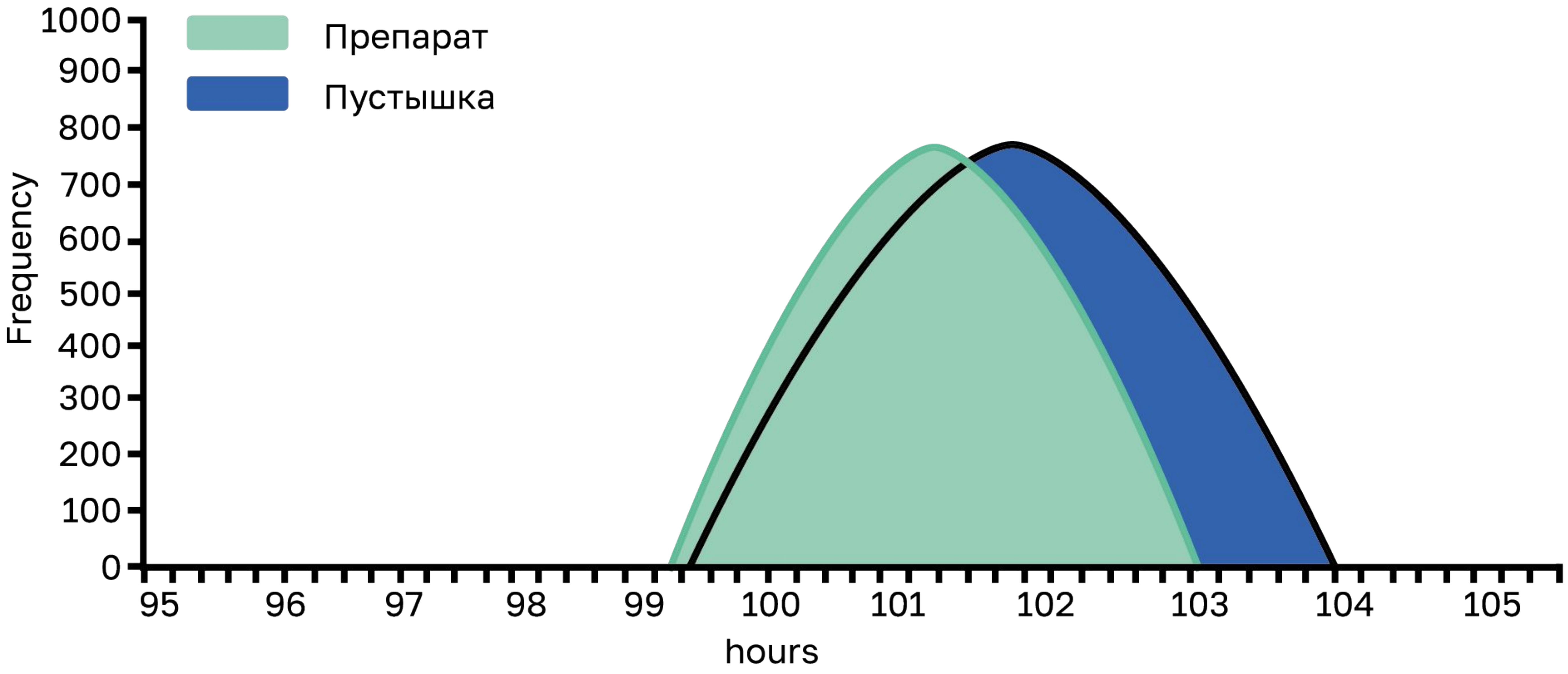
Проверка гипотез

Что можно сказать о результативности препарата?



Проверка гипотез

Что можно сказать о результативности препарата?

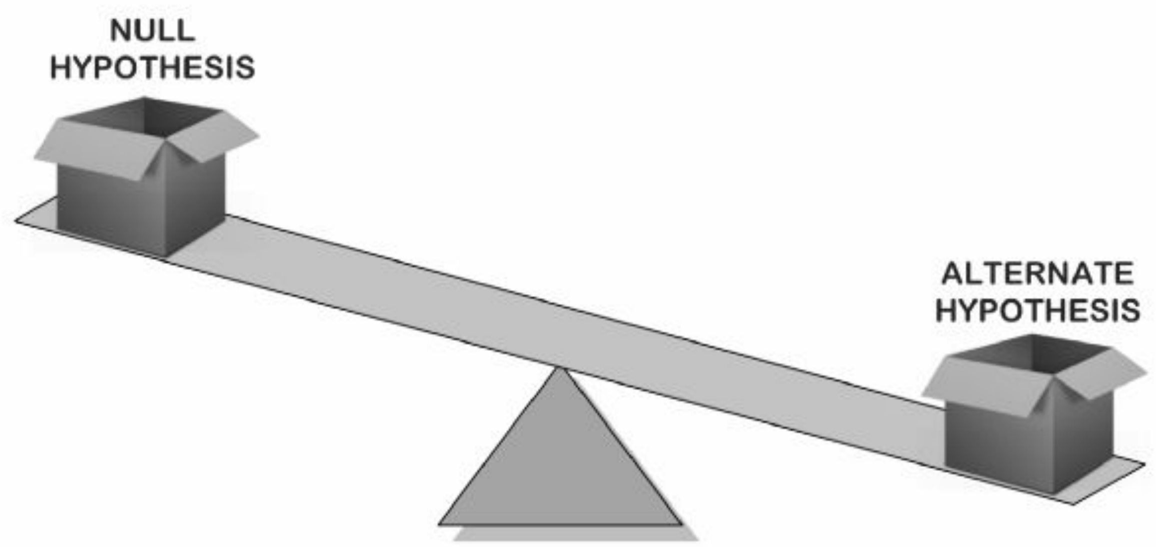


Проверка гипотез

Этот процесс известен как **проверка гипотез** — проверка статистических гипотез или проверка значимости.

В рамках проверки гипотезы мы либо отвергаем **нулевую гипотезу** и принимаем **альтернативную**, либо **НЕ** отвергаем **нулевую гипотезу**.

Замечание
Нулевая гипотеза всегда относится к популяции, представляющей больший интерес.



Логика проверки гипотез

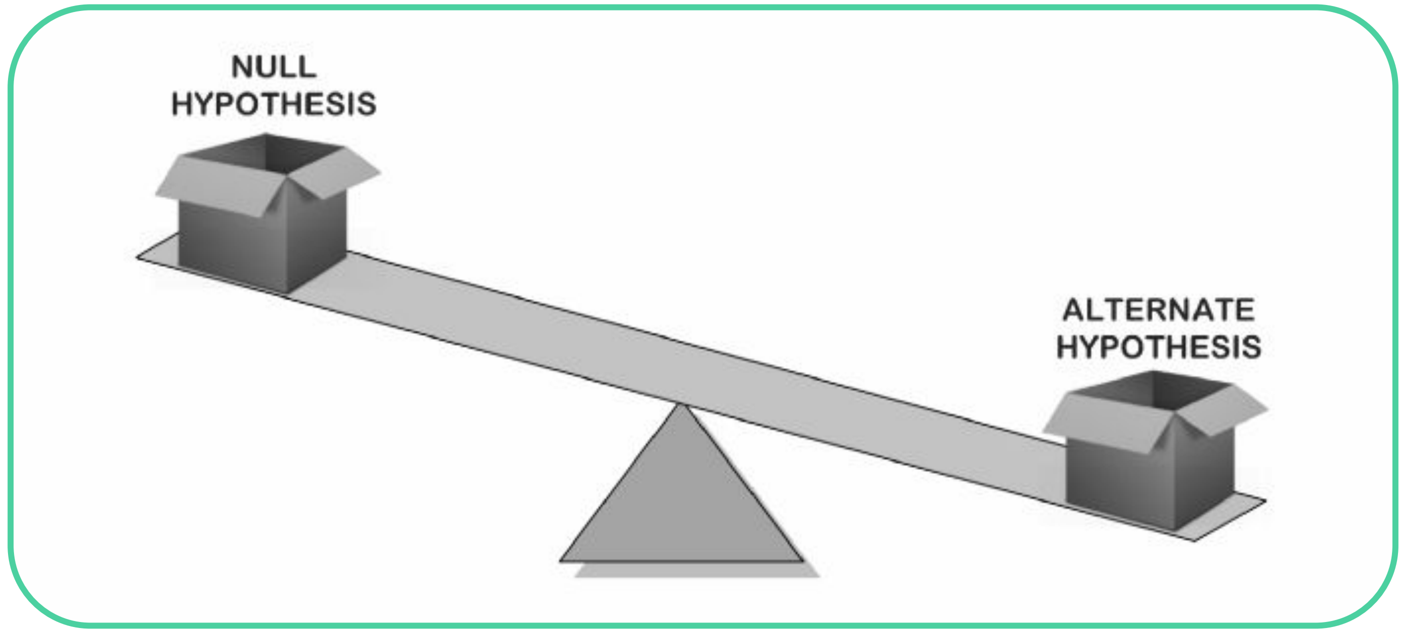
1. Всегда составляют и проверяют нулевую гипотезу **(H_0)**, которая отвергает эффект (например, эффект случайный) в генеральной совокупности. Например, при времени выздоровления пациентов — **нулевая гипотеза H_0** означала бы, что показатели времени выздоровления **не отличаются** от времени выздоровления без лекарства.

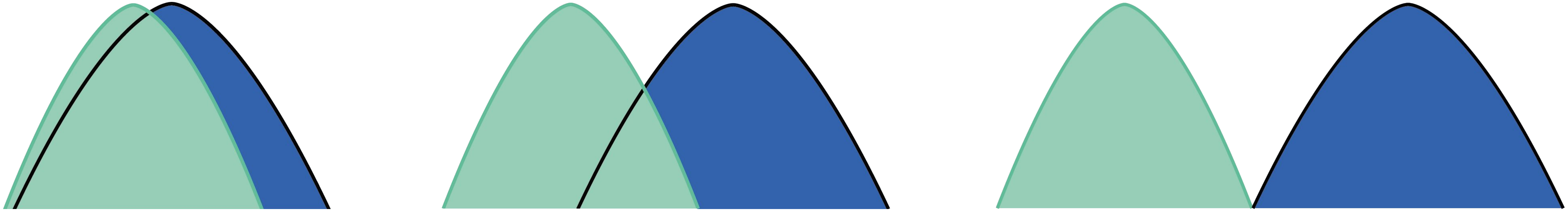
2. Затем определяют и проверяют альтернативную гипотезу **(H_1)**, которая принимается, если нулевая гипотеза неверна. Альтернативная гипотеза больше относится к той теории, которую собираются исследовать. На примере **альтернативная гипотеза (H_1)** заключается в утверждении, что препарат помогает ускорить выздоровление.

Уровень значимости. Важным этапом проверки статистических гипотез является определение уровня **статистической значимости**, т. е. максимально допускаемой исследователем вероятности ошибочного отклонения нулевой гипотезы.

Зачастую за уровень значимости принимается 5%

Логика проверки гипотез





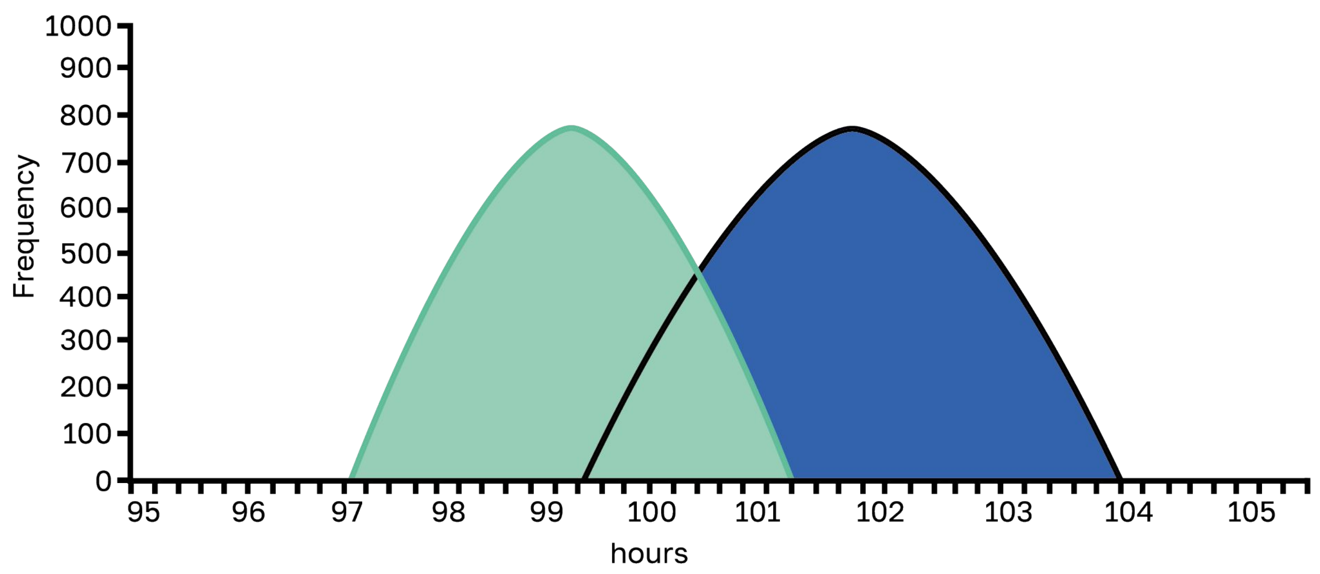
Выборки не отличаются
Эффект случайный

Выборки отличаются
Эффект не случайный

Применение p-value

Значение статистики критерия, полученное из выборки, связывают с уже известным распределением, которому она подчиняется, чтобы получить значение ***p***, площадь обоих «хвостов» (или одного «хвоста» в случае односторонней гипотезы) распределения вероятности.

Большинство компьютерных пакетов обеспечивают автоматическое вычисление двустороннего значения ***p*** (Python).



Определение:

Значение ***p*** — это вероятность получения нашего вычисленного значения или его ещё большего значения, если нулевая гипотеза верна.

Иными словами, ***p*** — это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна.

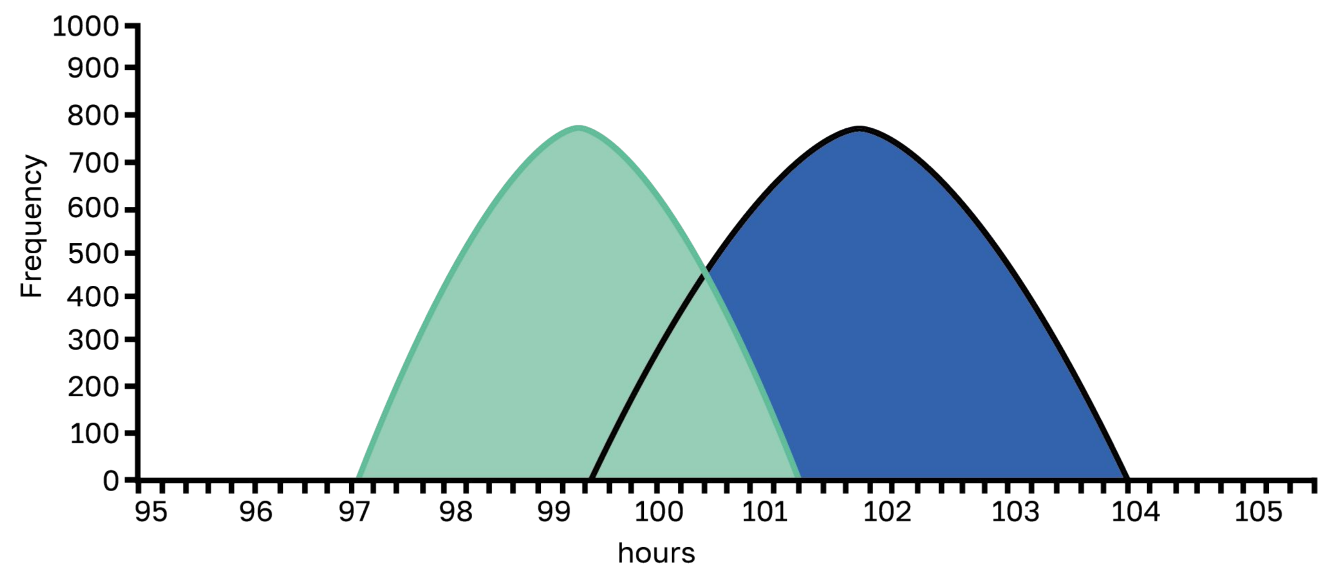
Применение значения P-value

Как по p-value определить, есть ли основания отвергнуть нулевую гипотезу? Тут важно сначала зафиксировать уровень значимости α, а потом уже делать выводы.

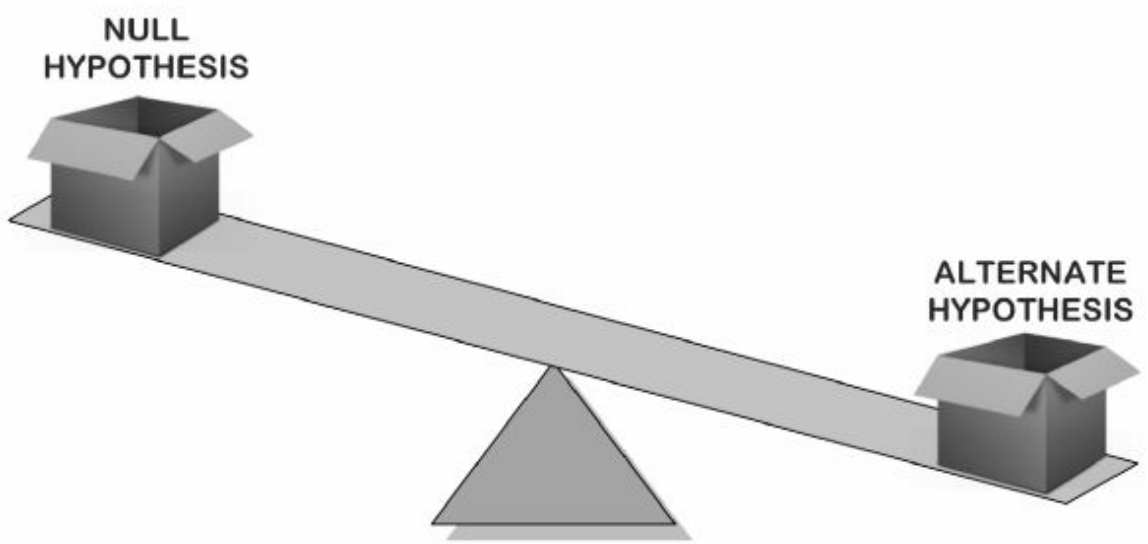
Уровень значимости α — это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна.

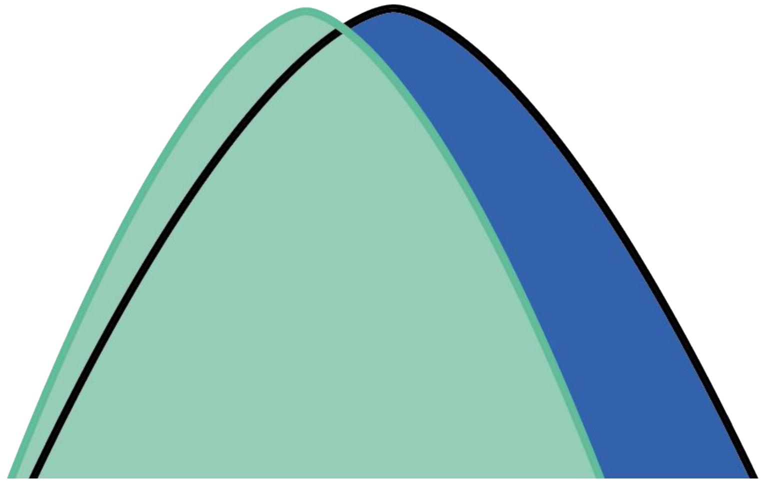
p-value — это минимальный уровень значимости, на котором нулевая гипотеза может быть отвергнута.

Соответственно, если **p-value** меньше нашего фиксированного **уровня значимости α**, на котором мы проверяем гипотезу, то **нулевую гипотезу** следует отвергнуть, если больше — оснований отвергать нулевую гипотезу нет.



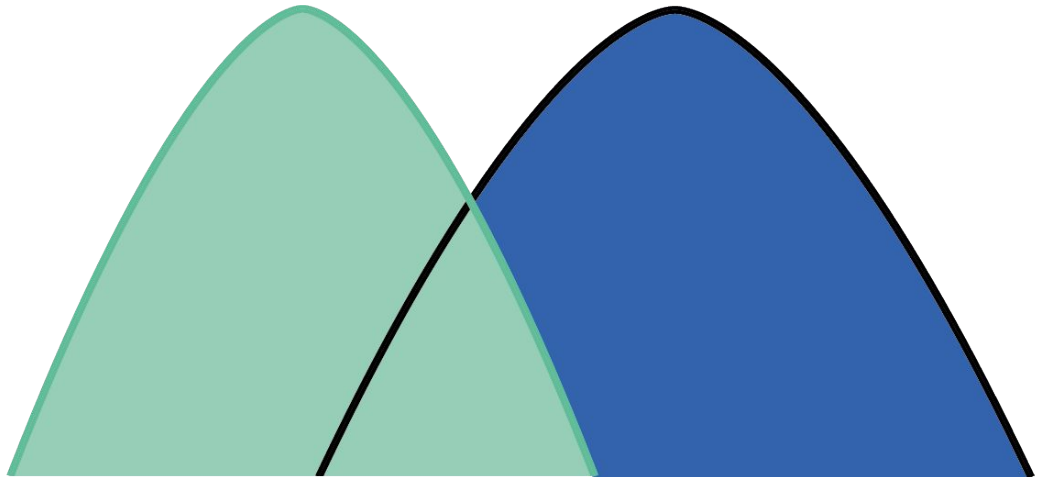
Логика проверки гипотез





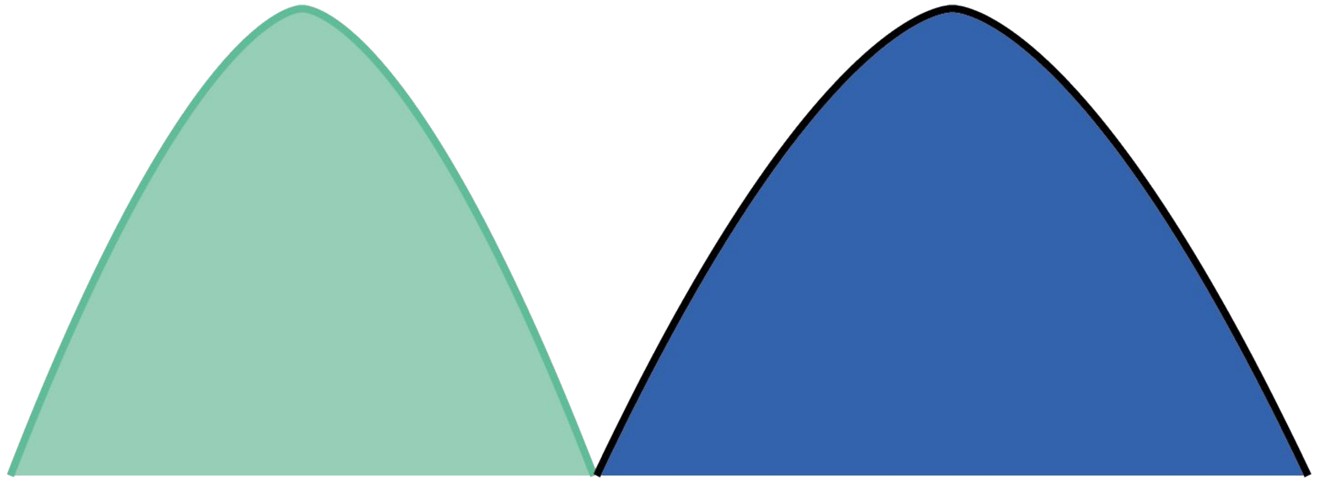
Выборки не отличаются
Эффект случайный

p-value > 0.05



Неоднозначно

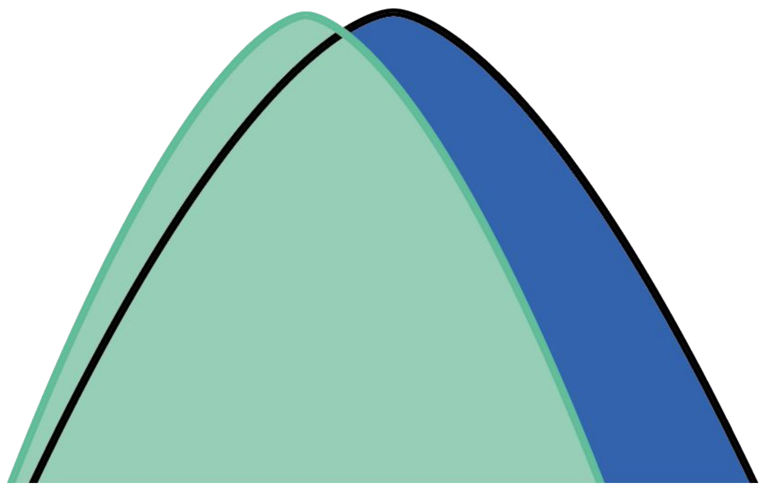
p-value = 0.05



Выборки отличаются
Эффект не случайный

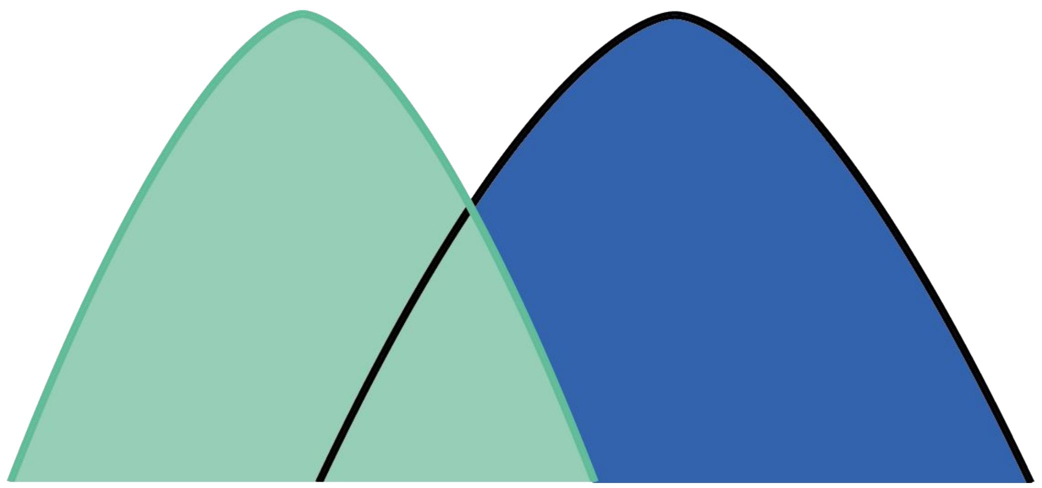
p-value < 0.05

Логика проверки гипотез



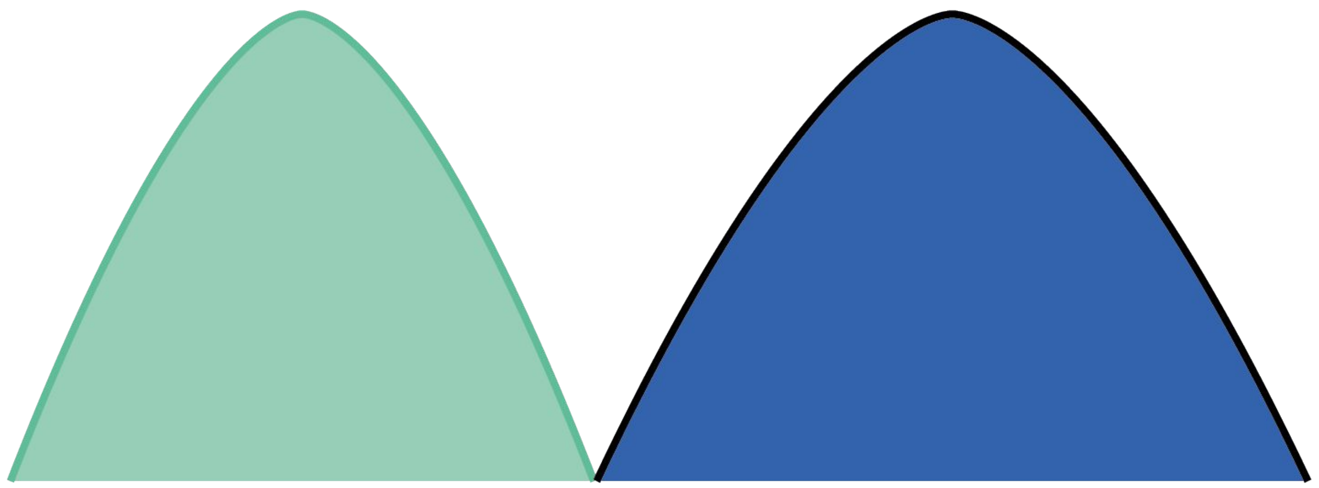
Выборки не отличаются
Эффект случайный

p-value > 0.05



Неоднозначно

p-value = 0.05

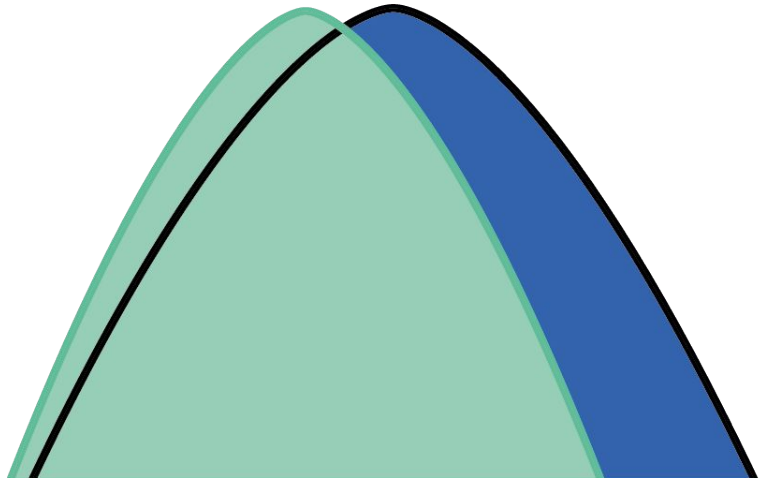


Выборки отличаются
Эффект не случайный

p-value < 0.05

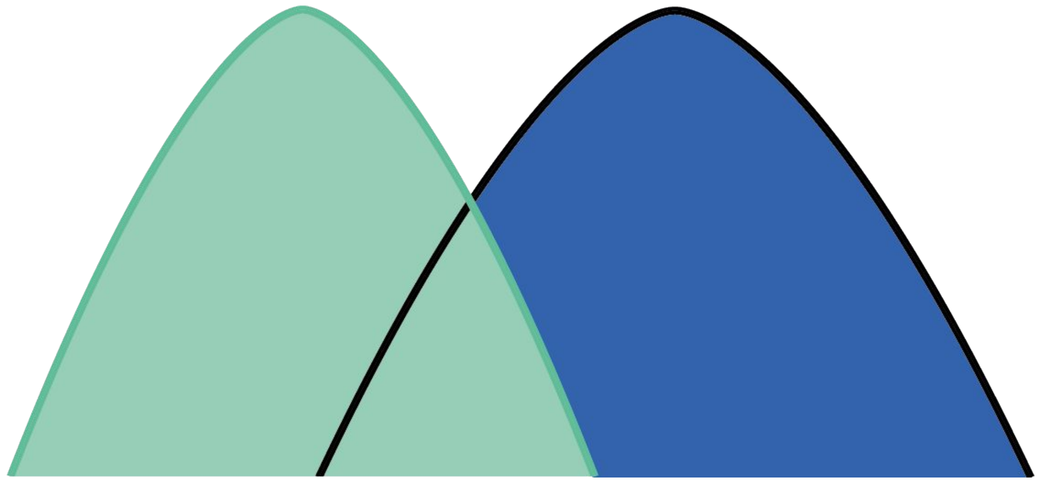
p-value превосходит уровень значимости 5%

Ловушка!



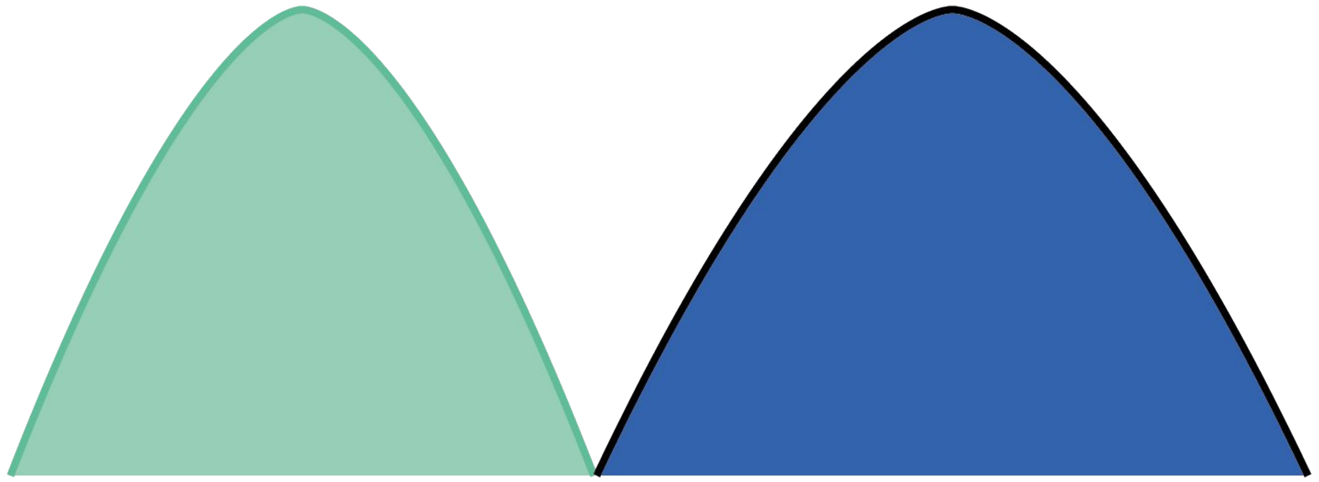
Выборки не отличаются
Эффект случайный

p-value > 0.05



Неоднозначно

p-value = 0.05

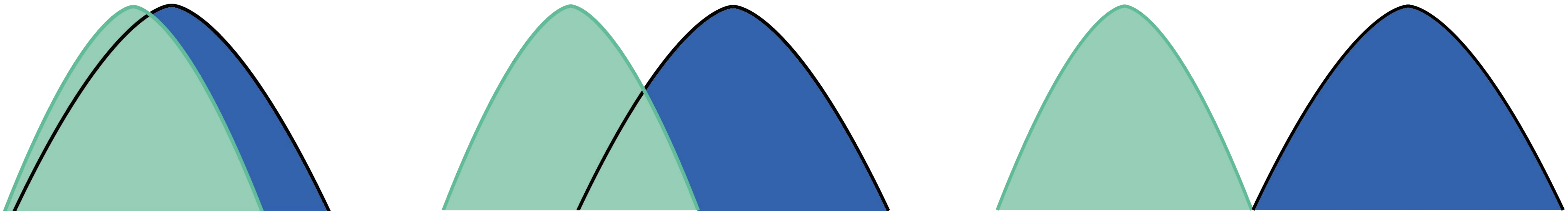


Выборки отличаются
Эффект не случайный

p-value < 0.05

Какому случаю соответствует фраза:
p-value превосходит уровень значимости 5%?

Ловушка!



Выборки не отличаются
Эффект случайный

p-value > 0.05

Неоднозначно

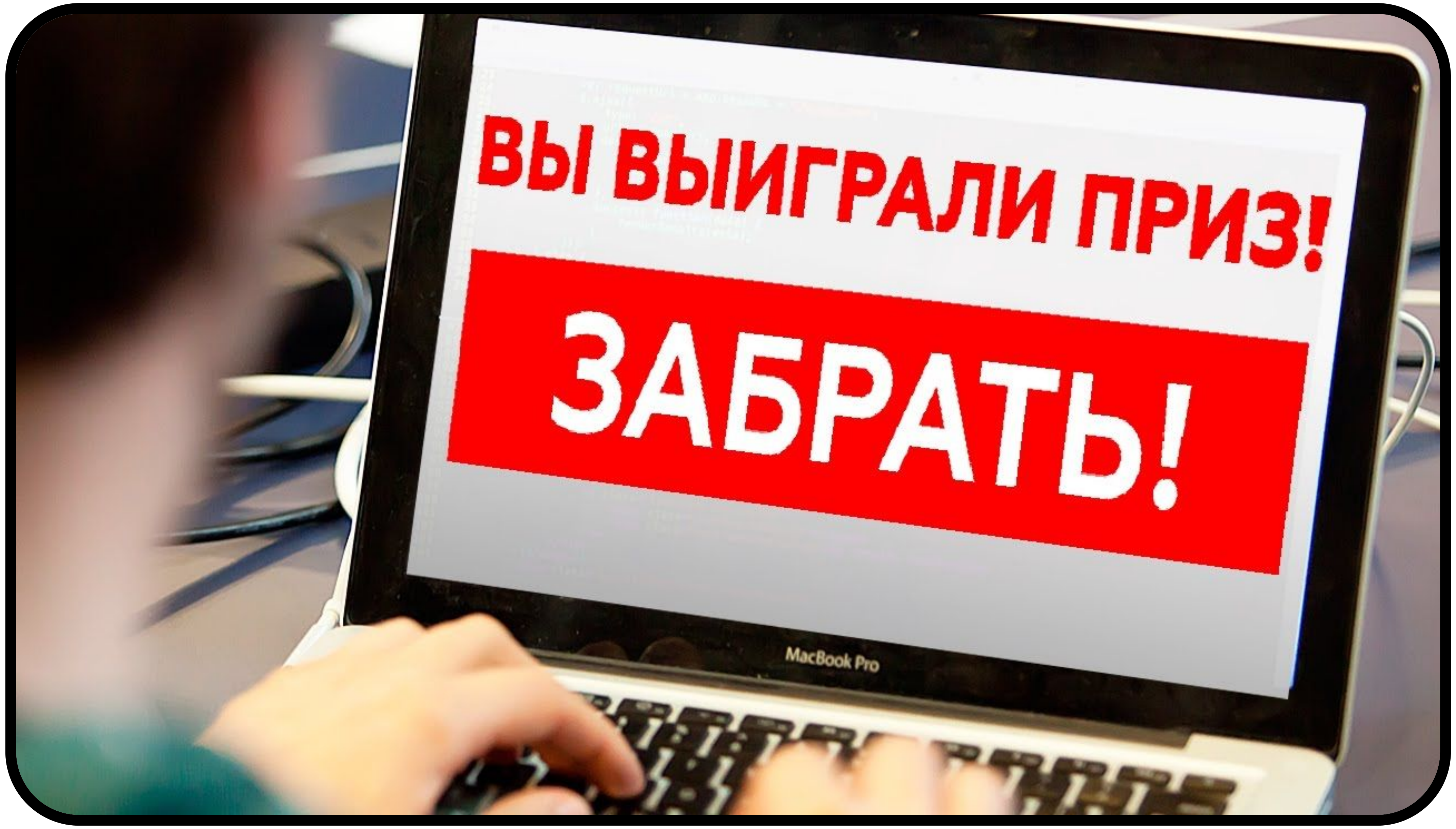
p-value = 0.05

Выборки отличаются
Эффект не случайный

p-value < 0.05

Какому случаю соответствует фраза:
p-value превосходит уровень значимости 5%?

Вы уже давно знаете про p-value!

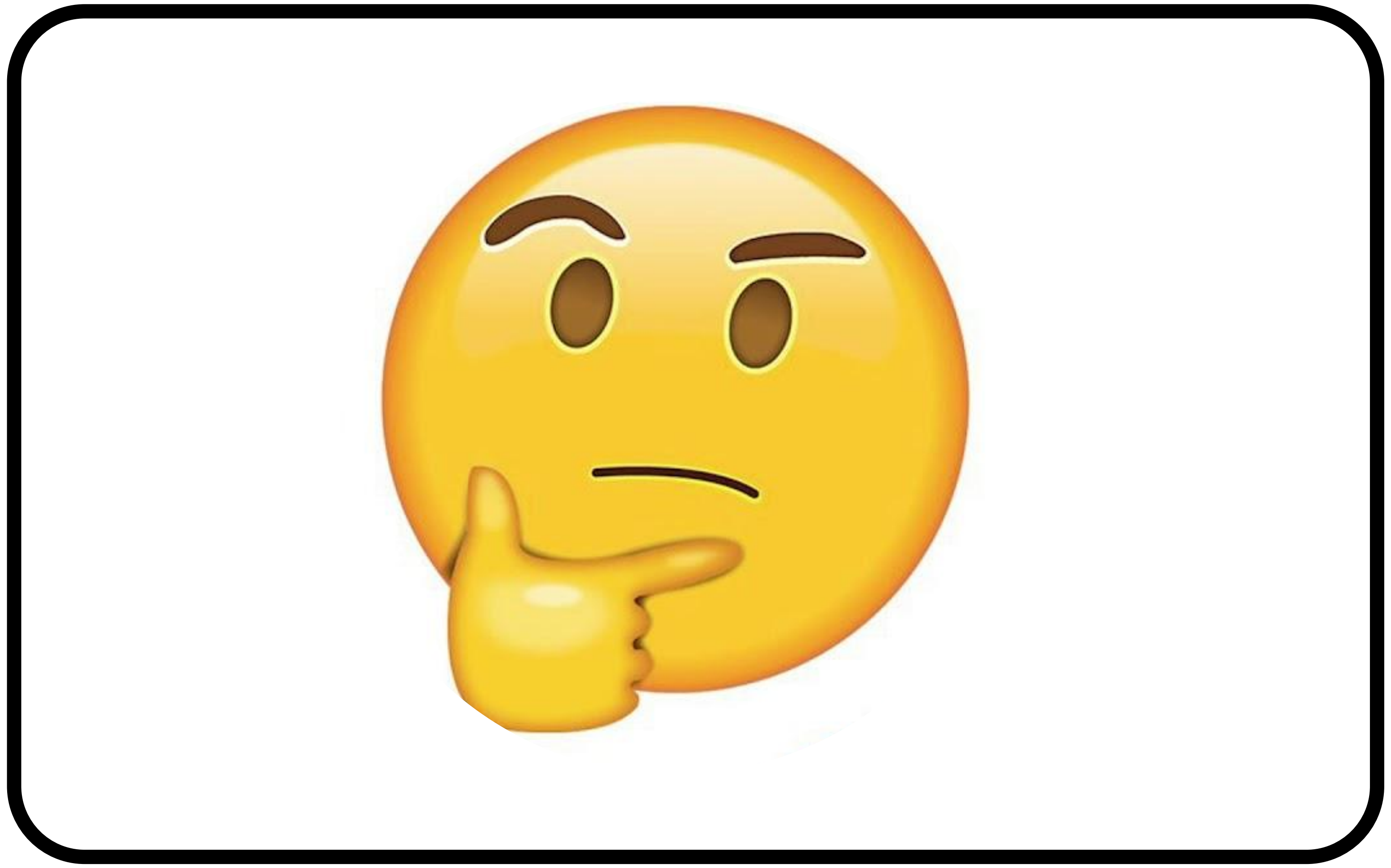


Вы уже давно знаете про p-value!

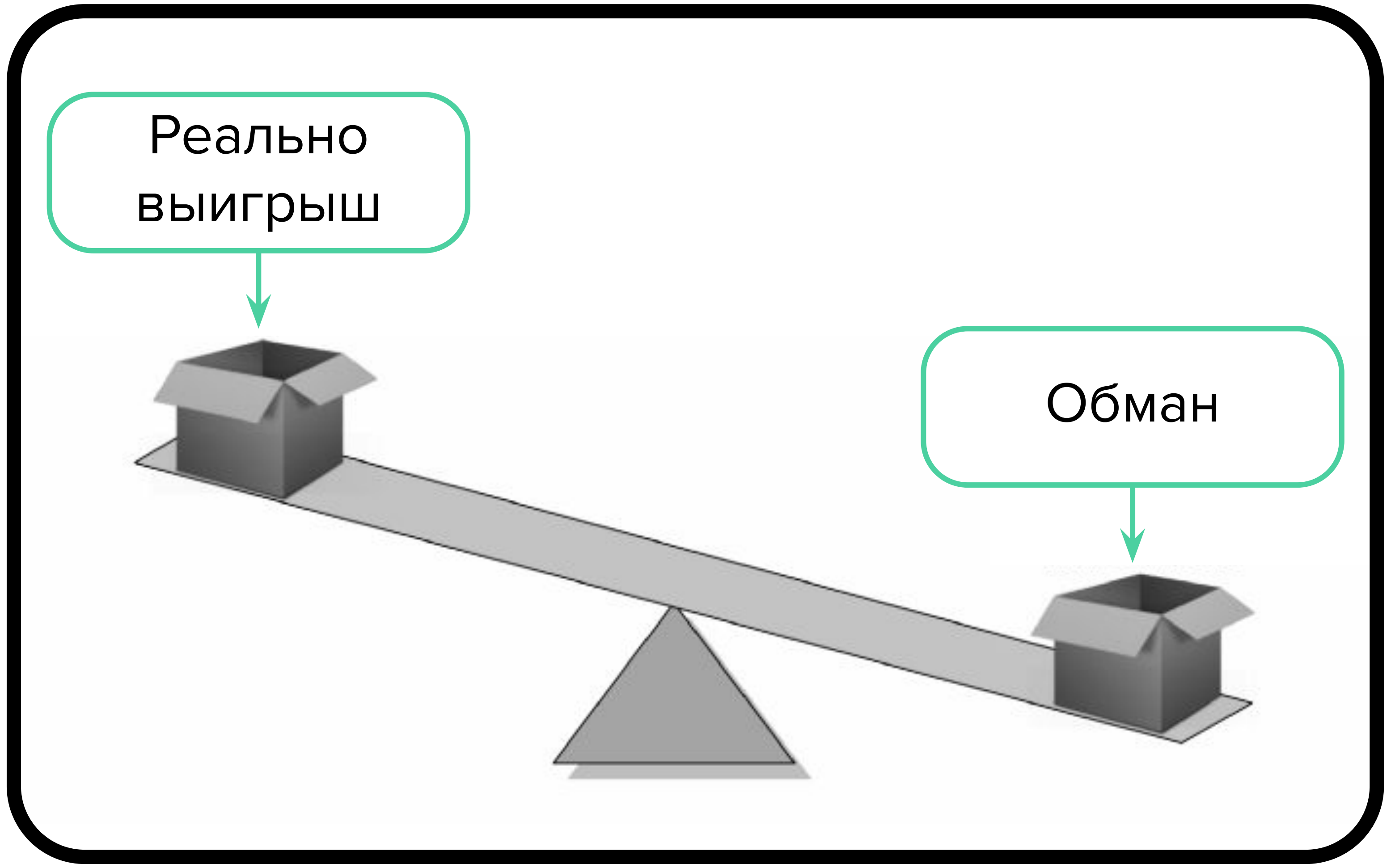
НО!!!

Странно, что выигрывают все!

Вы уже давно знаете про p-value!



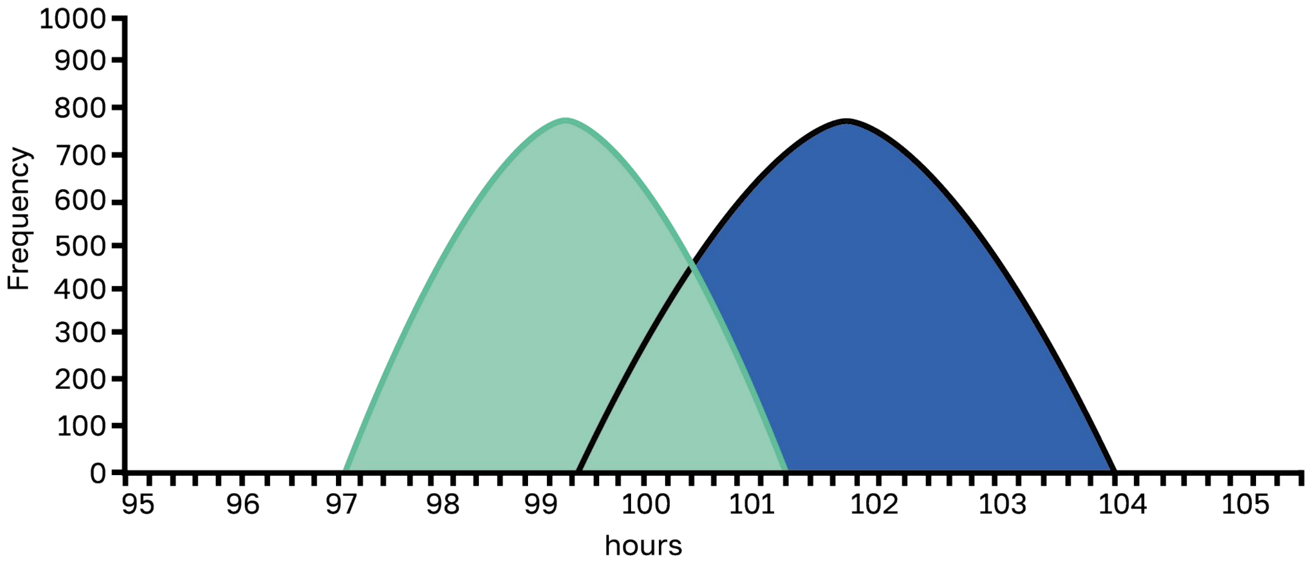
Мы обычно интуитивно отвергаем гипотезу выигрыша, т. к вероятность низкая и так часто это событие происходить не может.



Отвергаем гипотезу выигрыша, т. к вероятность низкая и так часто это событие происходить не может, но на практике выиграли все.

Применение значения p-value

Да кто это такой ваш p-value?



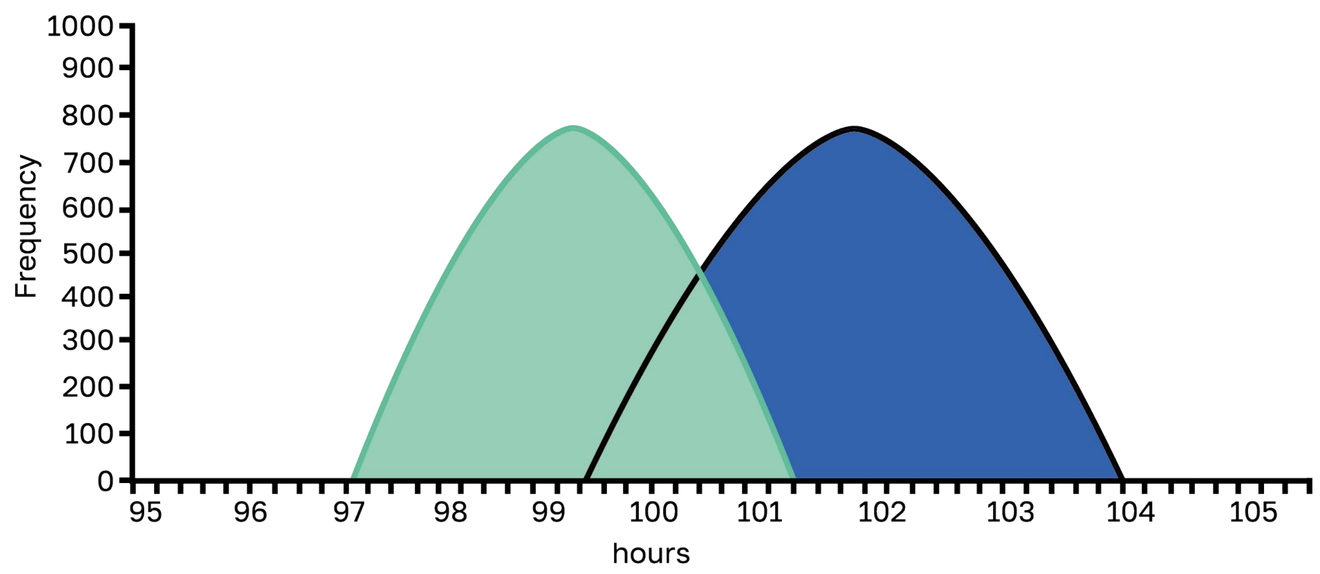
Применение значения p-value

По сути, это вероятность оказаться в критической области — в области редких событий

Значит ли это, что эффект есть?

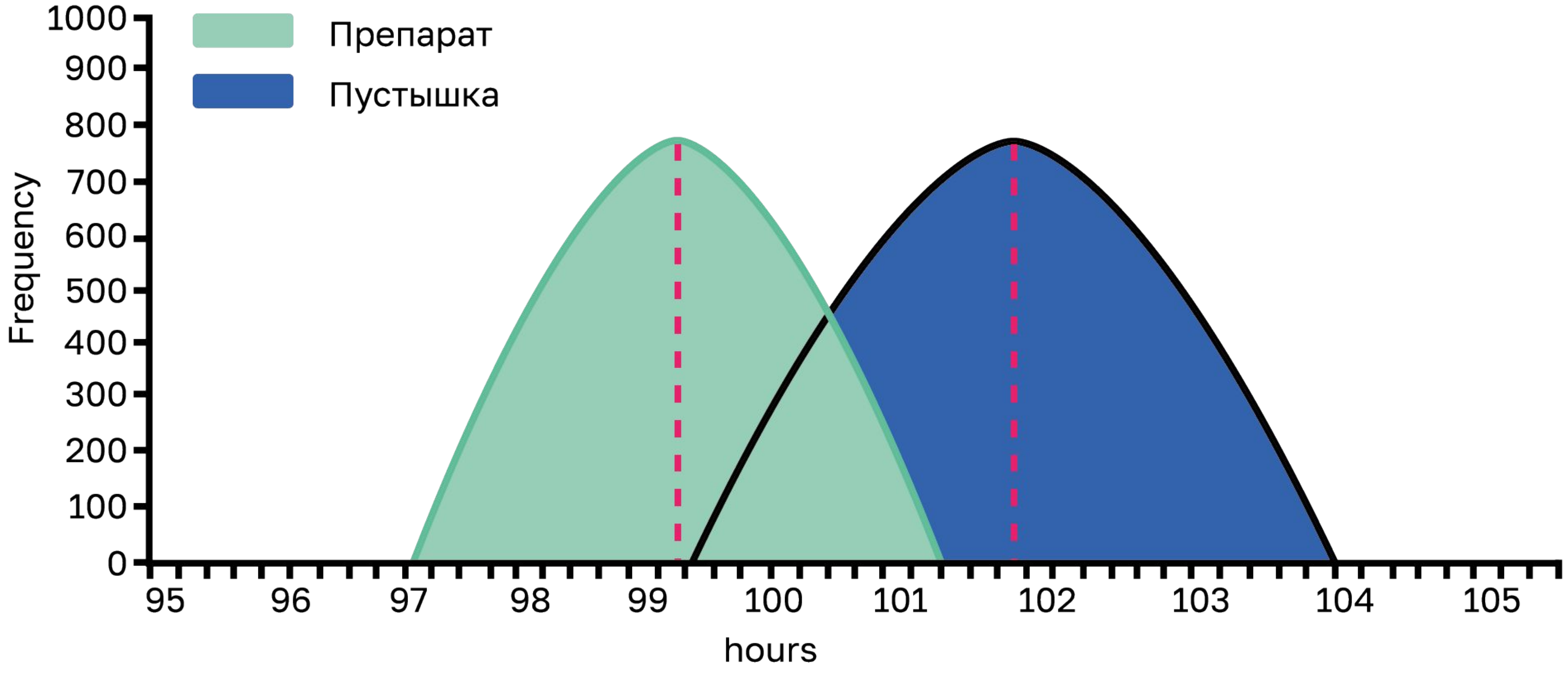
Является ли это вероятностью того, что препарат помогает?

Является ли это вероятностью того, что препарат **НЕ** помогает?



Применение значения p-value

Можно ли по графику сказать, что наше лекарство помогает в лечении, если p-value = 1%?



Низкие значения p — это хорошо. Они указывают на то, что ваши данные не были случайными.

Логика применения значения p-value

Следует решить, сколько аргументов позволят отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной — чем меньше значение *p*, тем сильнее аргументы против нулевой гипотезы.

Традиционно полагают, если $p < 0.05$, то аргументов достаточно, чтобы **отвергнуть нулевую гипотезу**, хотя есть небольшой шанс против этого. Тогда можно сказать, что результаты значимы на 5% уровне.

Если это может привести к серьёзным последствиям, необходимо потребовать более веских аргументов, например, выбрать значение 0,01 или 0,001 — например в случае исследования эффективности лекарств.

Напротив, если $p > 0.05$, то аргументов недостаточно, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу. **Не отвергая нулевую гипотезу**, можно заявить, что результаты не значимы на уровне 5%. Данное заключение не означает, что нулевая гипотеза истинна, просто недостаточно аргументов (возможно, маленький объём выборки), чтобы её отвергнуть.

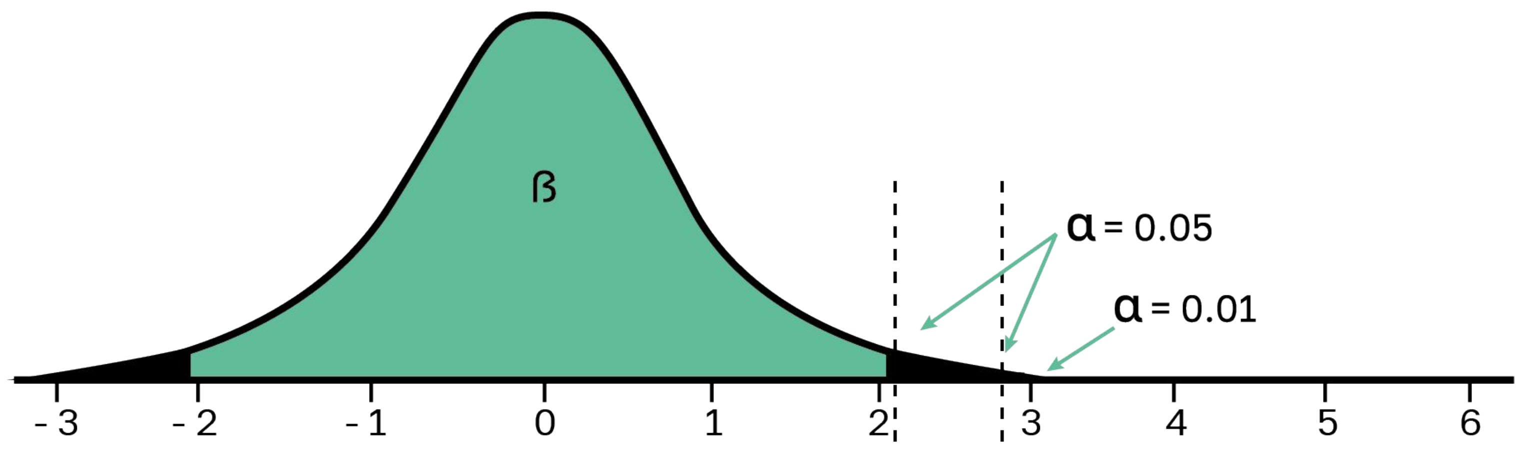
Проверка гипотез против доверительных интервалов

Доверительные интервалы и проверка гипотез тесно связаны. Первоначальная цель проверки гипотезы состоит в том, чтобы принять решение и предоставить точное значение **p**.

ДИ предоставляют интервал вероятных значений для истинного эффекта, поэтому его также можно использовать для принятия решения даже без точных значений **p**.

Например, если бы гипотетическое значение для данного эффекта находилось вне 95% ДИ, можно было бы счесть гипотетическое значение неправдоподобным и отвергнуть.

В этом случае станет известно, что **p** < 0,05, но не станет известно его точное значение.



Проверим себя*

В нашем исследовании p уровень значимости равен 0.02

- Вероятность того, что верна нулевая гипотеза (новый препарат не влияет на скорость выздоровления) также равняется всего лишь 0.02.
- Если бы в исследовании мы получили **p** = 0.5, то верна нулевая гипотеза, и новый препарат не влияет на скорость выздоровления.
- Чем меньше **p** уровень значимости, тем сильнее получаемые различия. Например, если бы **p** уровень значимости в нашем исследовании был бы равен 0.0001, значит новый препарат ещё сильнее бы влиял на скорость выздоровления.
- Статистически значимый результат, всегда означает ценный и осмысленный результат.
- Вероятность случайно получить такие различия равняется 0.02.

*Задача по мотивам задачи из курса Анатолия Карпова

3–5

минут

на размышления

Проверим себя

В нашем исследовании p уровень значимости равен 0.02

- Вероятность того, что верна нулевая гипотеза (новый препарат не влияет на скорость выздоровления) также равняется всего лишь 0.02.
- Если бы в исследовании мы получили **p** = 0.5, то верна нулевая гипотеза, и новый препарат не влияет на скорость выздоровления.
- Чем меньше **p** уровень значимости, тем сильнее получаемые различия. Например, если бы **p** уровень значимости в нашем исследовании был бы равен 0.0001, значит новый препарат ещё сильнее бы влиял на скорость выздоровления.
- Статистически значимый результат, всегда означает ценный и осмысленный результат.
- Вероятность случайно получить такие различия равняется 0.02.

Внимание!
Нет верных!!!

Проверим себя

В нашем исследовании p уровень значимости равен 0.02

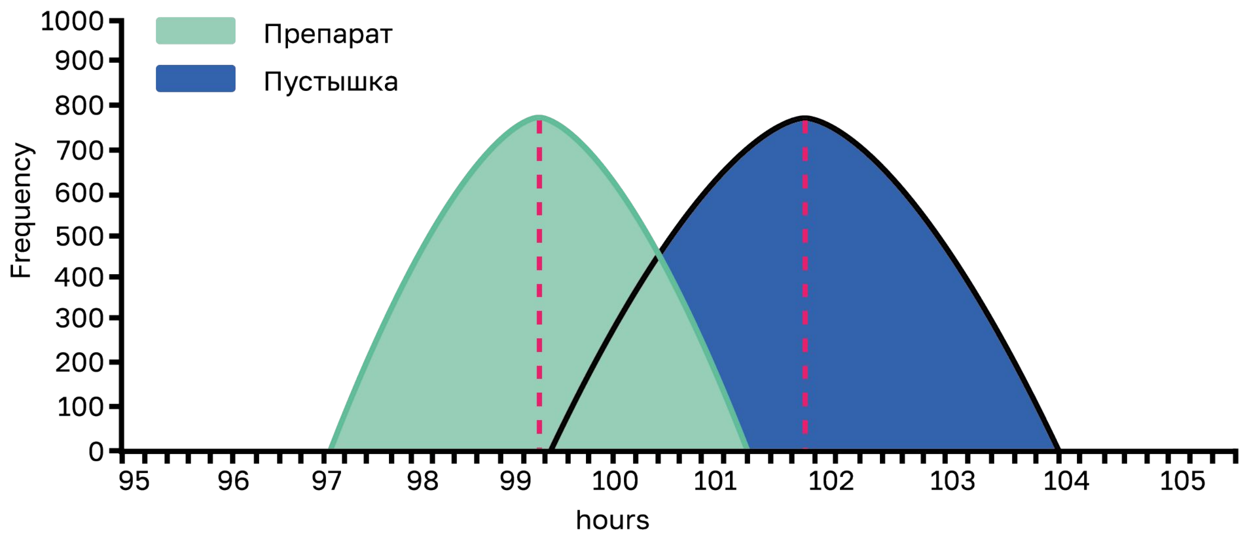
- Вероятность того, что верна нулевая гипотеза (новый препарат не влияет на скорость выздоровления) также равняется всего лишь 0.02. ← Скорее наоборот

- Если бы в исследовании мы получили **p** = 0.5, то верна нулевая гипотеза, и новый препарат не влияет на скорость выздоровления. ← Это значит, что мы не может отвергнуть нулевую гипотезу, но это не значит, что она верна

- Чем меньше **p** уровень значимости, тем сильнее получаемые различия. Например, если бы **p** уровень значимости в нашем исследовании был бы равен 0.0001, значит новый препарат ещё сильнее бы влиял на скорость выздоровления. ← Со скоростью это никак не связано

- Статистически значимый результат, всегда означает ценный и осмысленный результат. ← Отнюдь нет, доказывают разные примеры

- Вероятность случайно получить такие различия равняется 0.02. ← Близко к определению, но всё равно не то



Проверим себя

Использование доверительных интервалов зачастую рассматривают как альтернативный способ проверки гипотез. В нашем случае, если значение 20 (предполагаемое среднее значение в генеральной совокупности) не будет принадлежать 95%-доверительному интервалу, рассчитанному по выборочным данным, у нас будет достаточно оснований отклонить нулевую гипотезу.

Проверьте, согласуются ли результаты двух этих подходов: рассчитайте 95%-доверительный интервал для среднего значения на примере с тестированием нового препарата.

n = 64, sd = 4, M = 18.5, и пусть 95%-й квантиль = 2

Выберите верное утверждение:

- 20 принадлежит доверительному интервалу — отклоняем H1
- 20 не принадлежит доверительному интервалу — отклоняем H1
- 20 принадлежит доверительному интервалу — отклоняем H0
- 20 не принадлежит доверительному интервалу — отклоняем H0

3

**минуты
на размышления**

Проверим себя

Использование доверительных интервалов зачастую рассматривают как альтернативный способ проверки гипотез. В нашем случае, если значение 20 (предполагаемое среднее значение в генеральной совокупности) не будет принадлежать 95%-доверительному интервалу, рассчитанному по выборочным данным, у нас будет достаточно оснований отклонить нулевую гипотезу.

Проверьте, согласуются ли результаты двух этих подходов: рассчитайте 95%-доверительный интервал для среднего значения на примере с тестированием нового препарата.

n = 64, sd = 4, M = 18.5, и пусть 95%-й квантиль = 2

Выберите верное утверждение:

- 20 принадлежит доверительному интервалу — отклоняем H1
- 20 не принадлежит доверительному интервалу — отклоняем H1
- 20 принадлежит доверительному интервалу — отклоняем H0
- **20 не принадлежит доверительному интервалу — отклоняем H0**

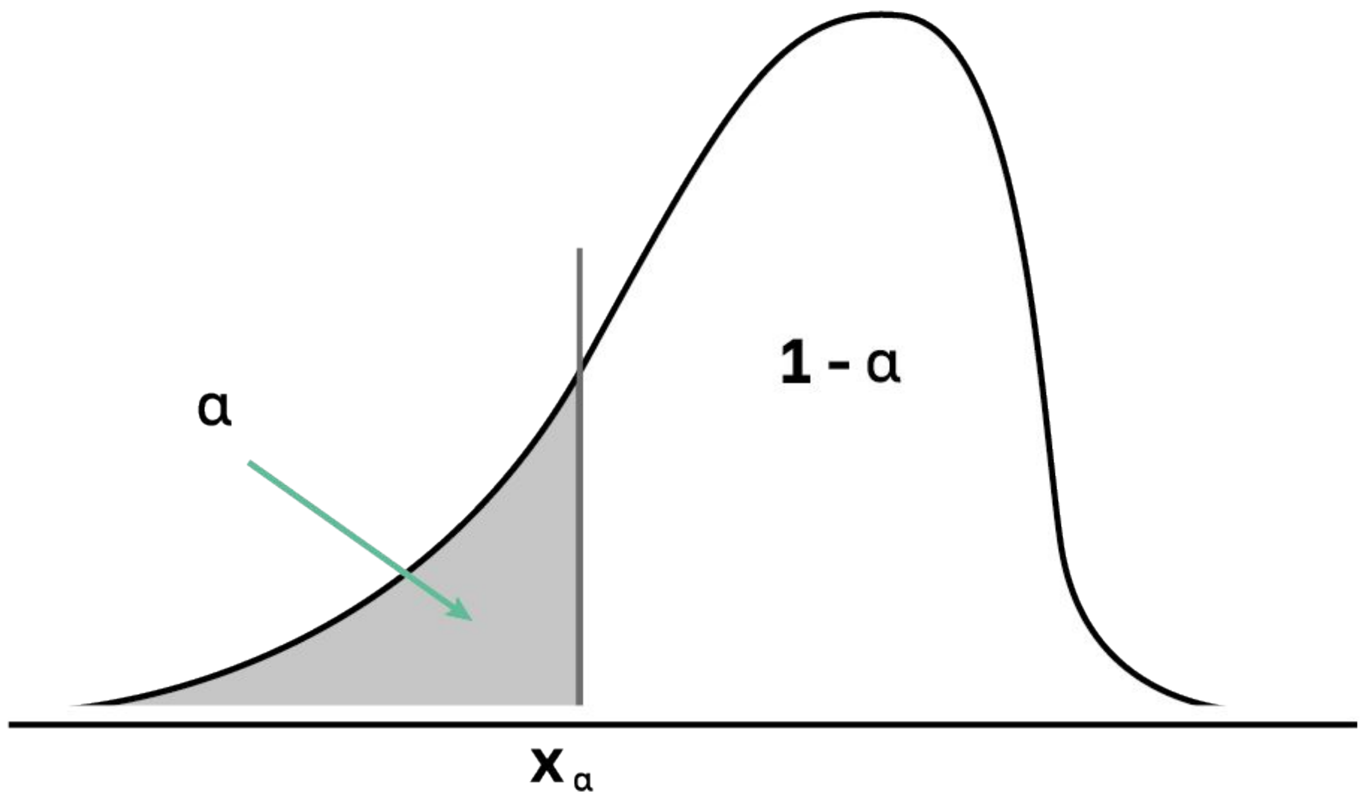
Шаг пройден!

Наши цели

- Доверительный интервал
- Уровень значимости
- p-value
- *t*-критерий Стьюдента

Проверка гипотез и критерии

Если наблюдаемое значение критерия (***K***) принадлежит критической области ($K_{кр}$), заштрихованная область на рисунке), гипотезу отвергают, если не принадлежит — не отвергают.



Для краткости можно записать и так:

$| K | > K_{кр}$ — отклоняем H_0

$| K | < K_{кр}$ — не отклоняем H_0

После того как данные будут собраны, значения из выборки подставляют в формулу для вычисления статистики критерия (об этом чуть позже).

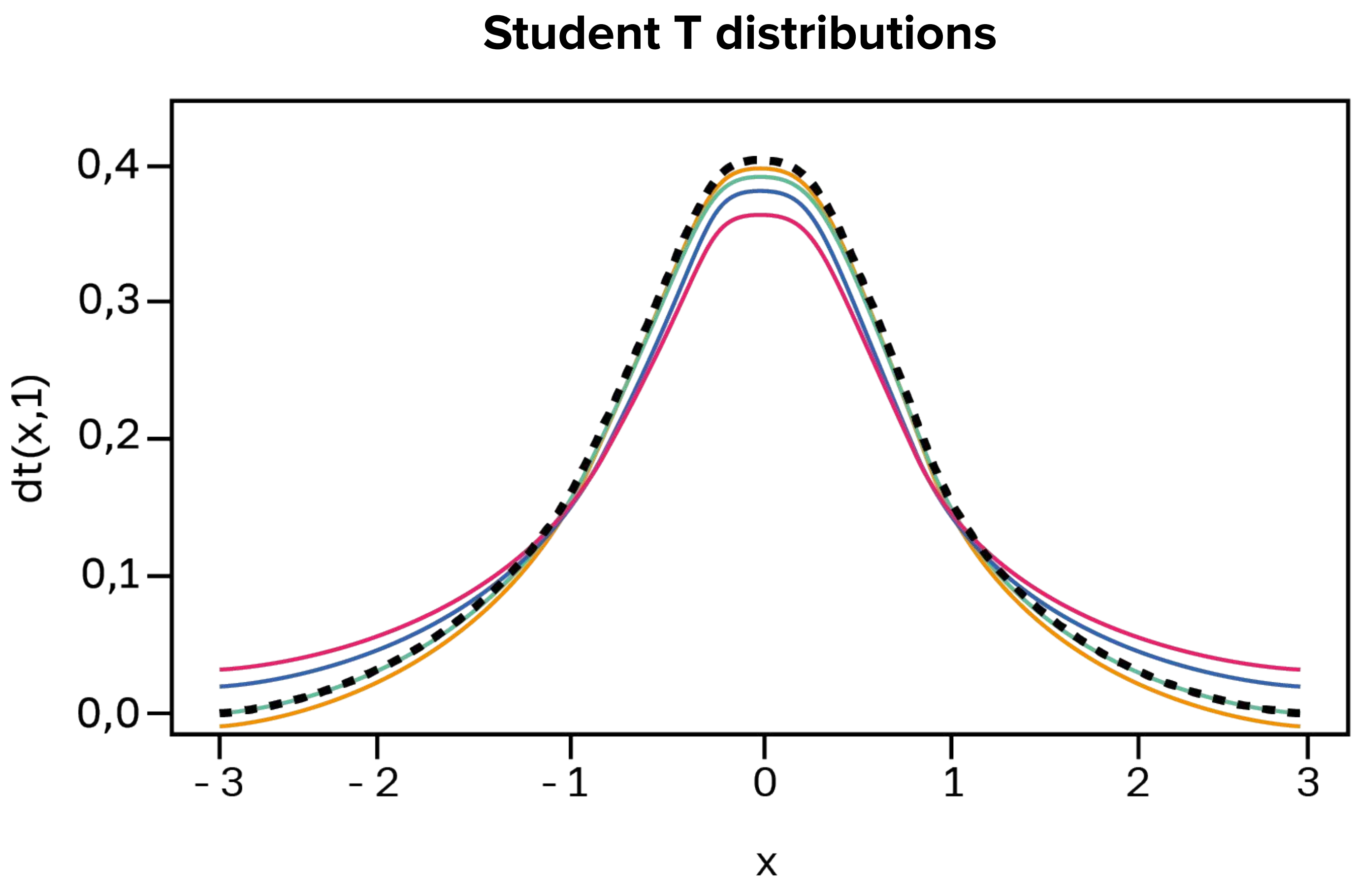
Эта величина количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы.

Критерием **K** называем величину, характеризующую отличие двух выборок.
α — заданный исследователем уровень значимости.

Тесты проверки гипотез

t-тест

С помощью t-теста (также называемого t-критерием Стьюдента) можно сравнить два средних значения. Этот метод анализа также показывает, насколько значительны различия. Другими словами, он позволяет узнать, могли ли эти различия возникнуть случайно.



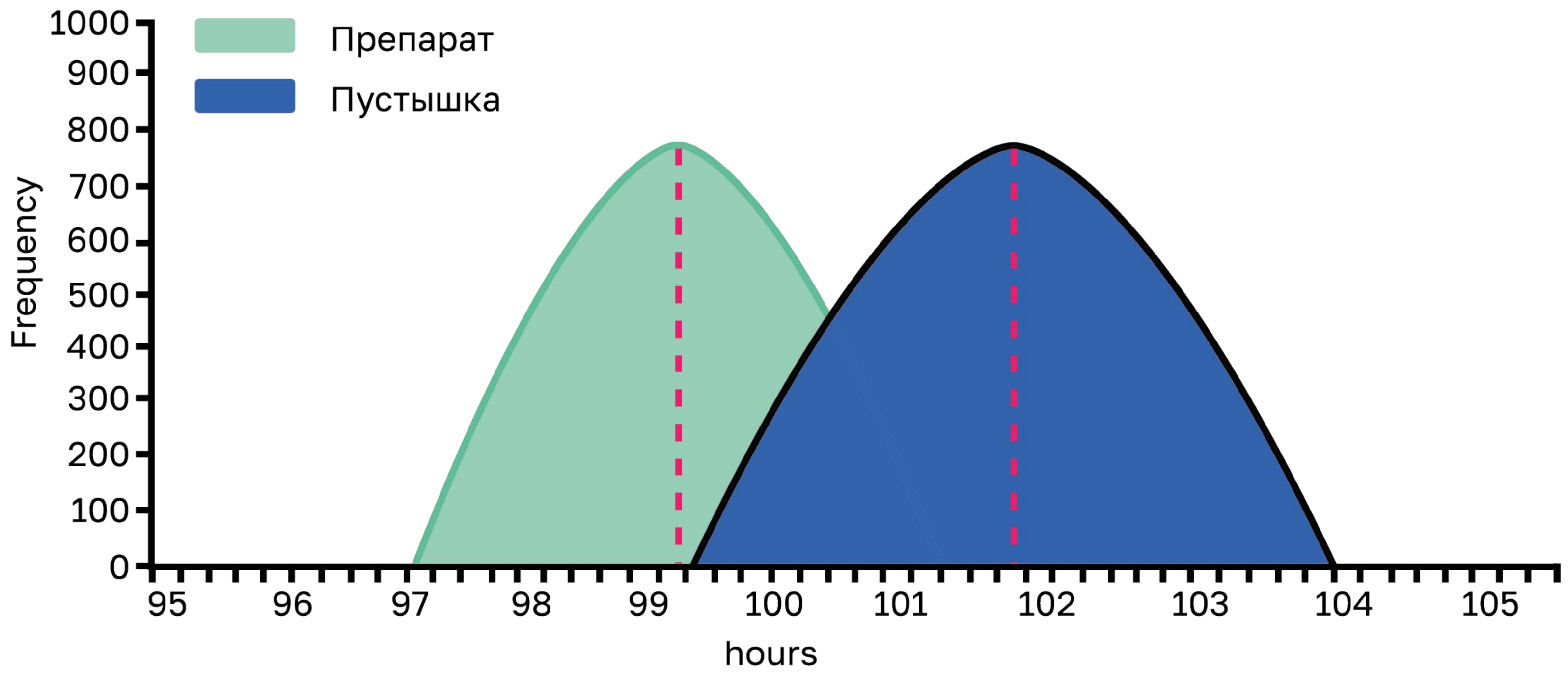
$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Эта величина количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы

Тесты проверки гипотез

t-тест

С помощью t-теста (также называемого t-критерием Стьюдента) можно сравнить два средних значения. Этот метод анализа также показывает, насколько значительны различия. Другими словами, он позволяет узнать, могли ли эти различия возникнуть случайно.



$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Эта величина количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы

Тесты проверки гипотез

t-тест

С помощью t-теста (также называемого t-критерием Стьюдента) можно сравнить два средних значения. Этот метод анализа также показывает, насколько значительны различия. Другими словами, он позволяет узнать, могли ли эти различия возникнуть случайно.

```
from scipy import stats  #Подключаем библиотеку

t, p  = stats.ttest_ind(A, B)  # Получаем t-value и p-value
```

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Эта величина количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы

Тесты проверки гипотез

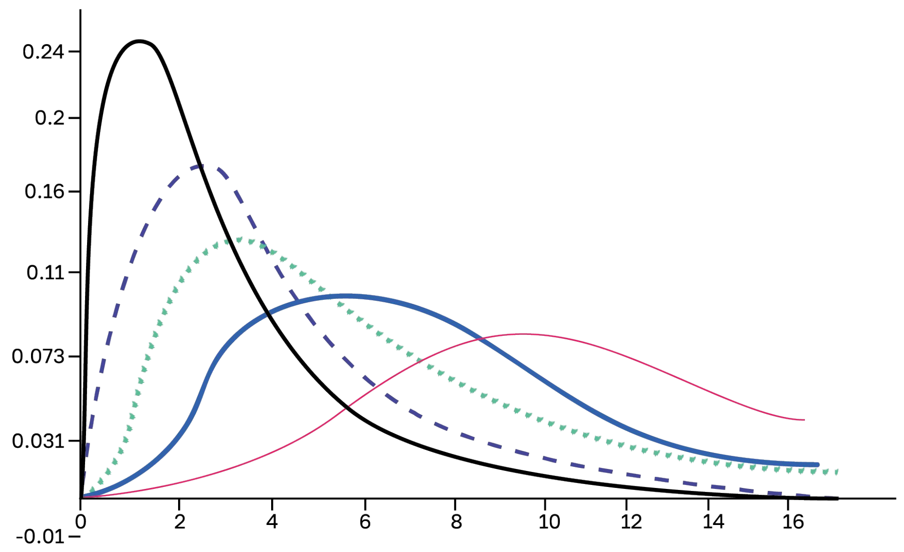
Если мы хотим сравнить распределения категориальных переменных, то обычно строят таблицы сопряжённости и используют критерий **χ^2**.

$$\chi^2 = \sum \frac{(H - O)^2}{O},$$

На самом деле тестов больше, но мы пока остановимся на самых важных.

Если одно из ожидаемых значений меньше 5, то следует использовать тест Фишера:

107	74
93	45



Тесты проверки гипотез

Например, вы хотите проверить нет ли дискриминации
по половому признаку в сфере Data Science.

Вы узнали, что в какой-то компании после серии собеседований
107 мужчин взяли на работу, а отказали 93-м мужчинам.
А среди женщин 74 взяли, а отказали 45-и.

**Относится ли руководство компании
предвзято к мужчинам или к женщинам?**

	М	Ж	
	107	74	+
	93	45	–

$$\chi^2 = \sum \frac{(H - O)^2}{O},$$

Тесты проверки гипотез

Например, вы хотите проверить нет ли дискриминации по половому признаку в сфере Data Science.

Вы узнали, что в какой-то компании после серии собеседований 107 мужчин взяли на работу, а отказали 93-м мужчинам. А среди женщин 74 взяли, а отказали 45-и.

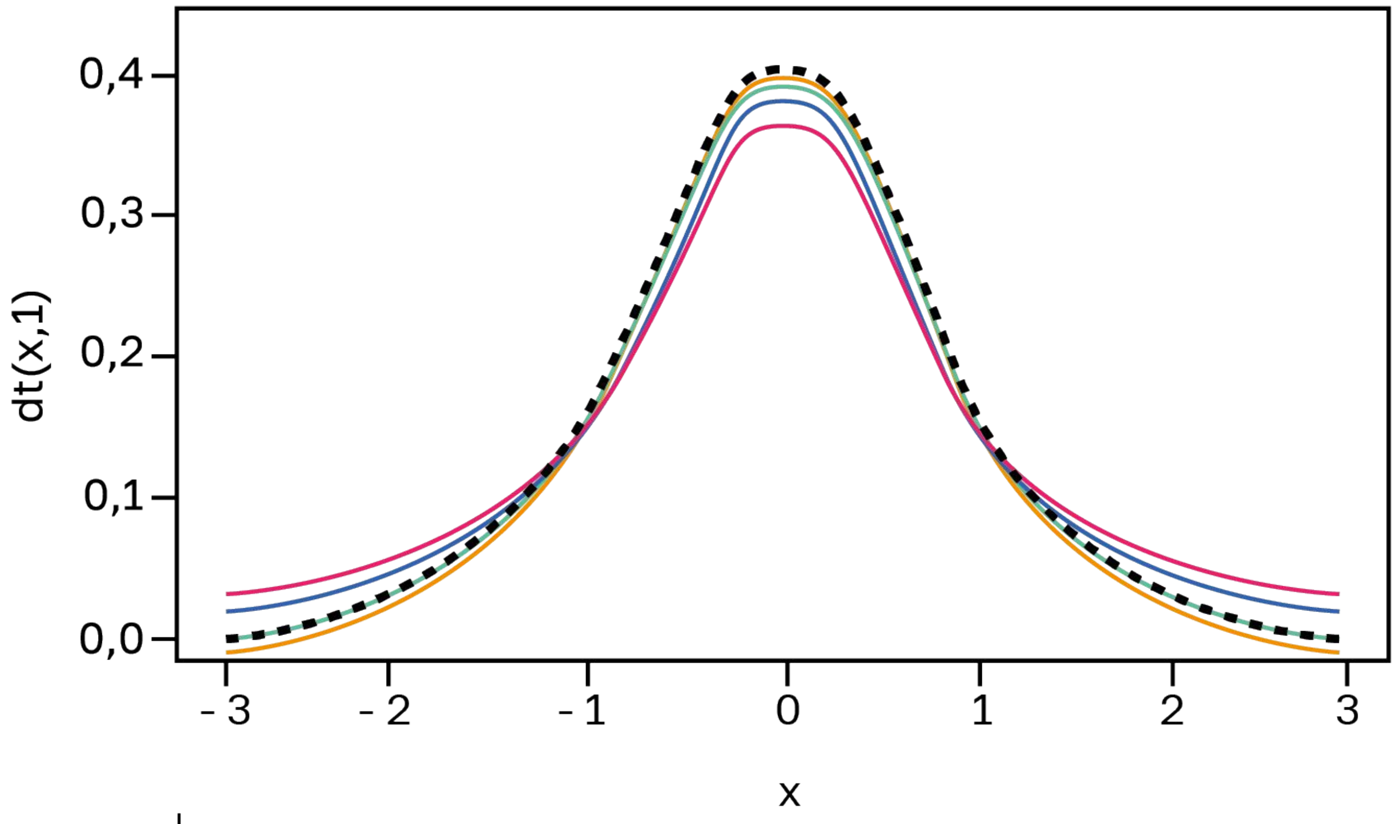
Относится ли руководство компании предвзято к мужчинам или к женщинам?

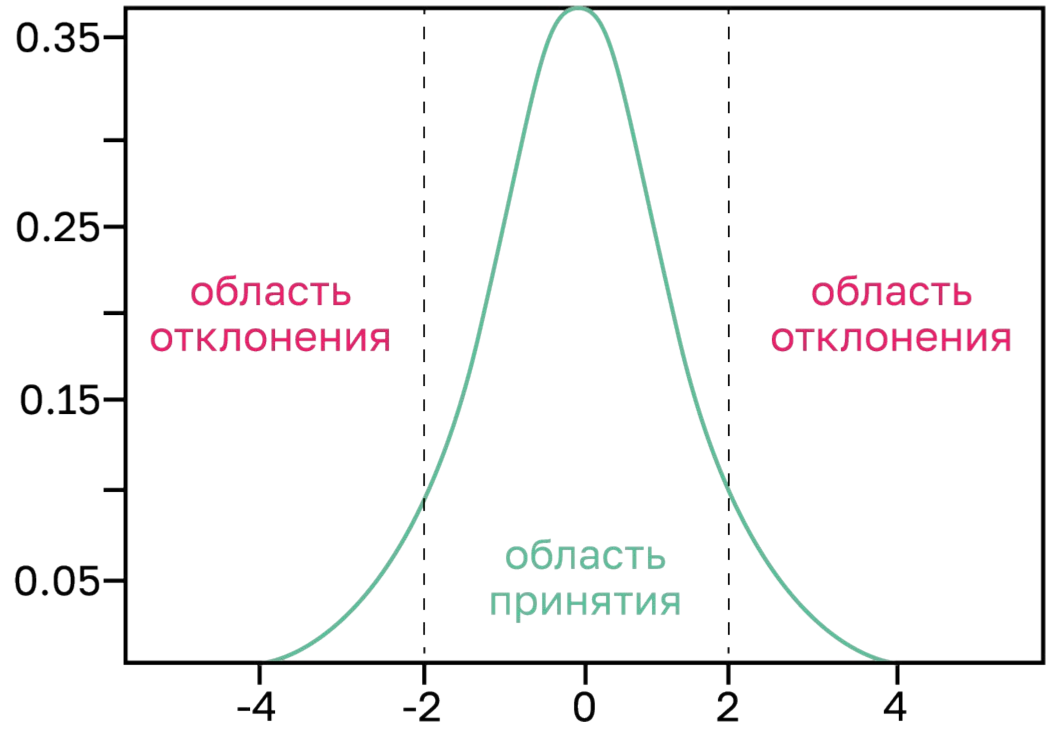
p-value = 0.10

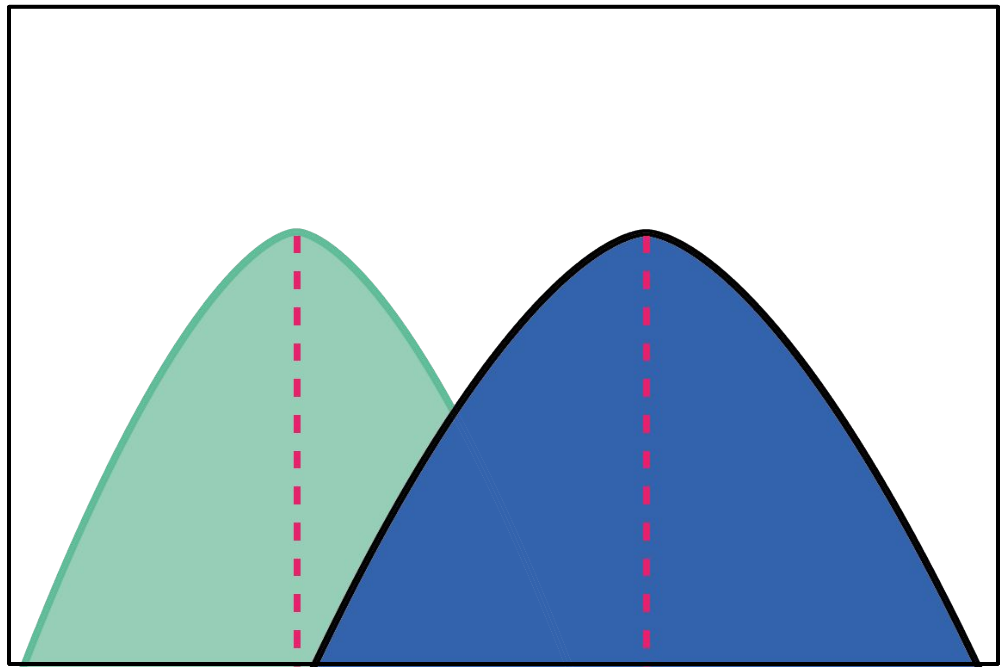
М	Ж	
107	74	+
93	45	–

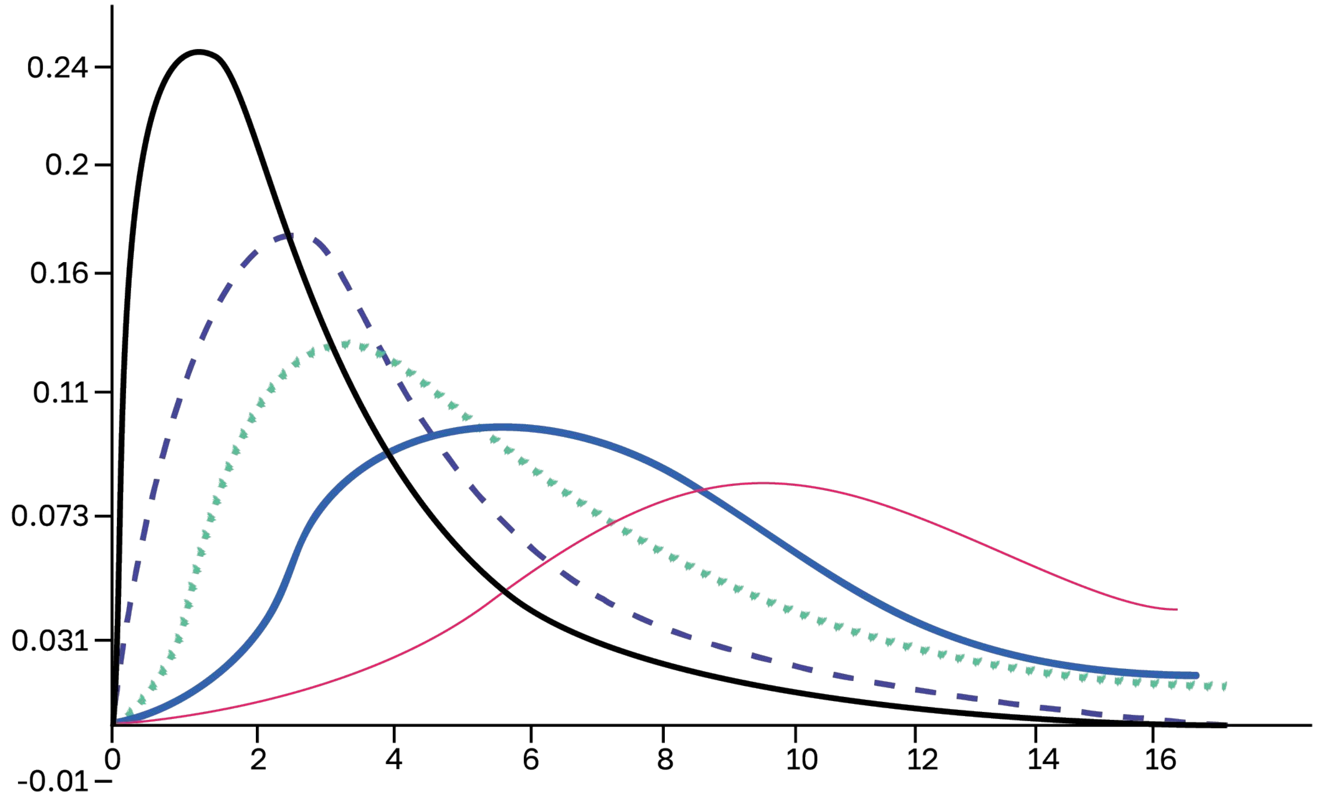
$$\chi^2 = \sum \frac{(H - O)^2}{O},$$

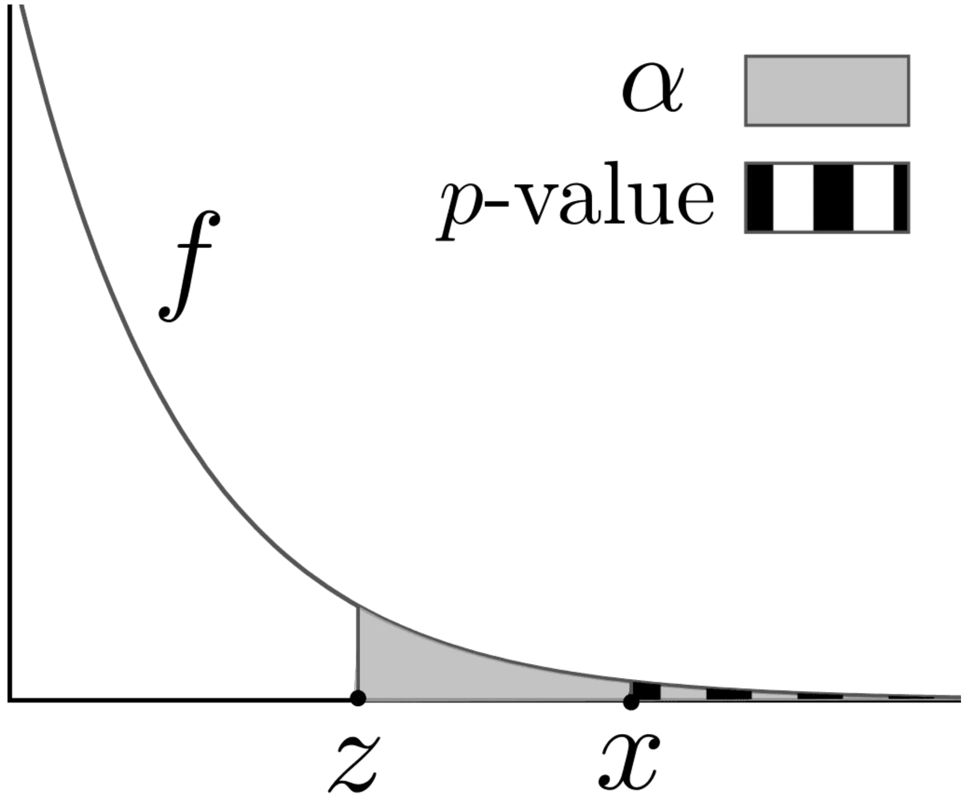
Тесты проверки гипотез





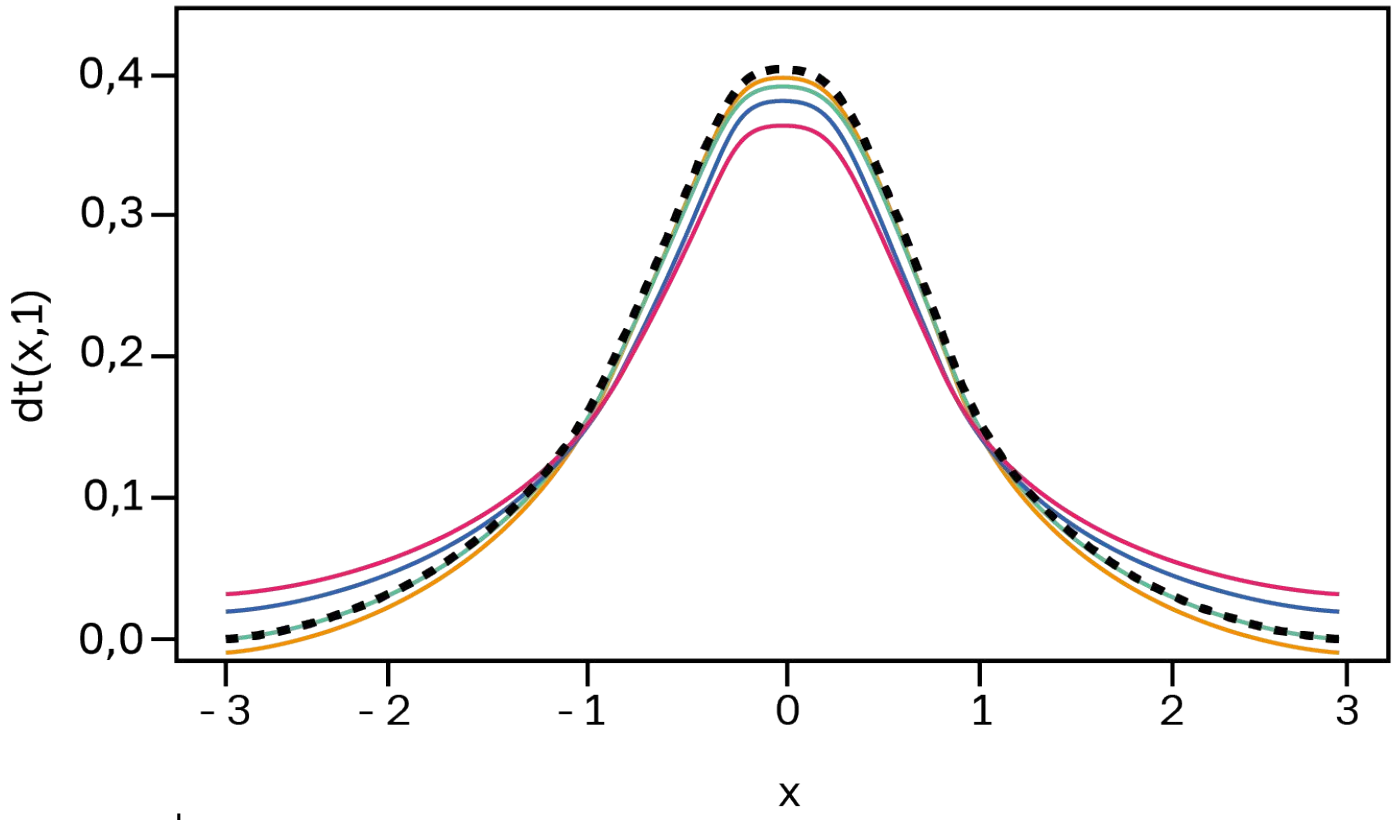


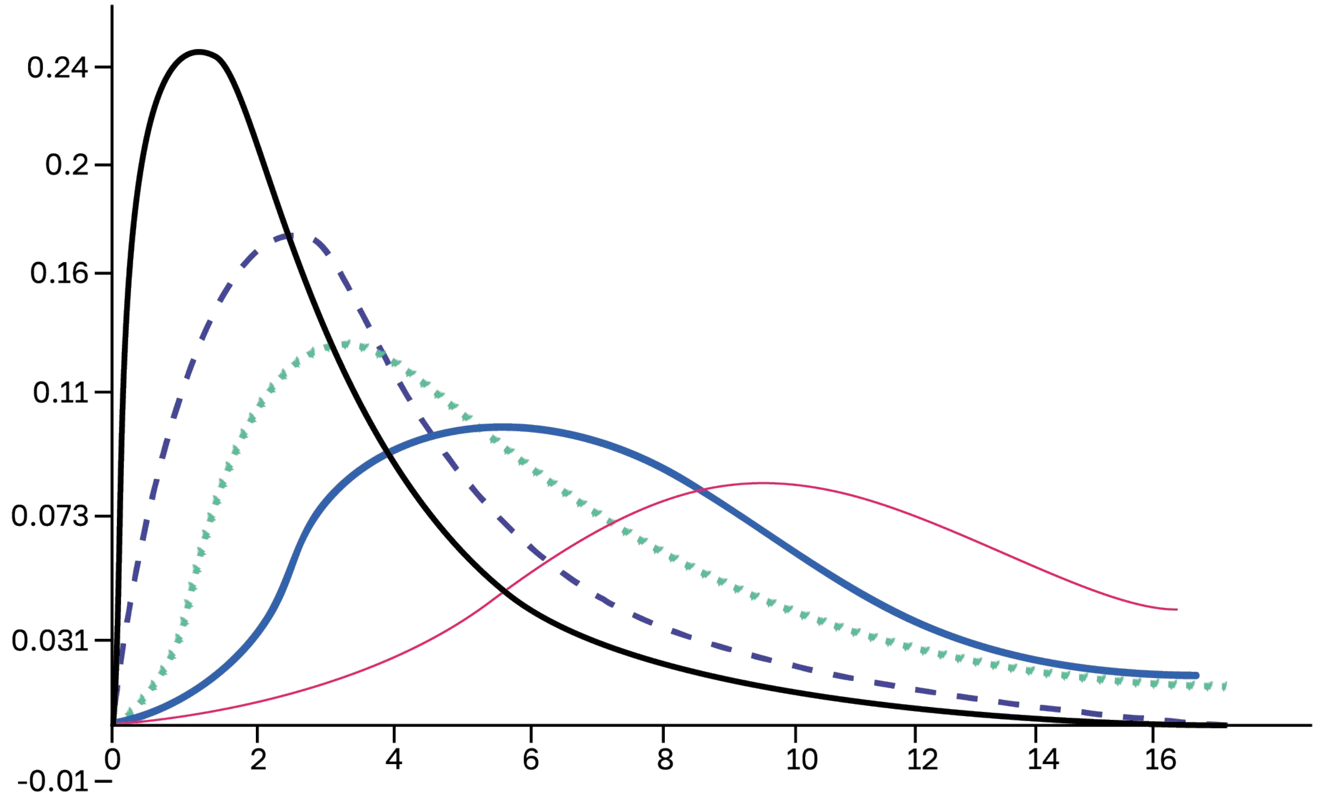


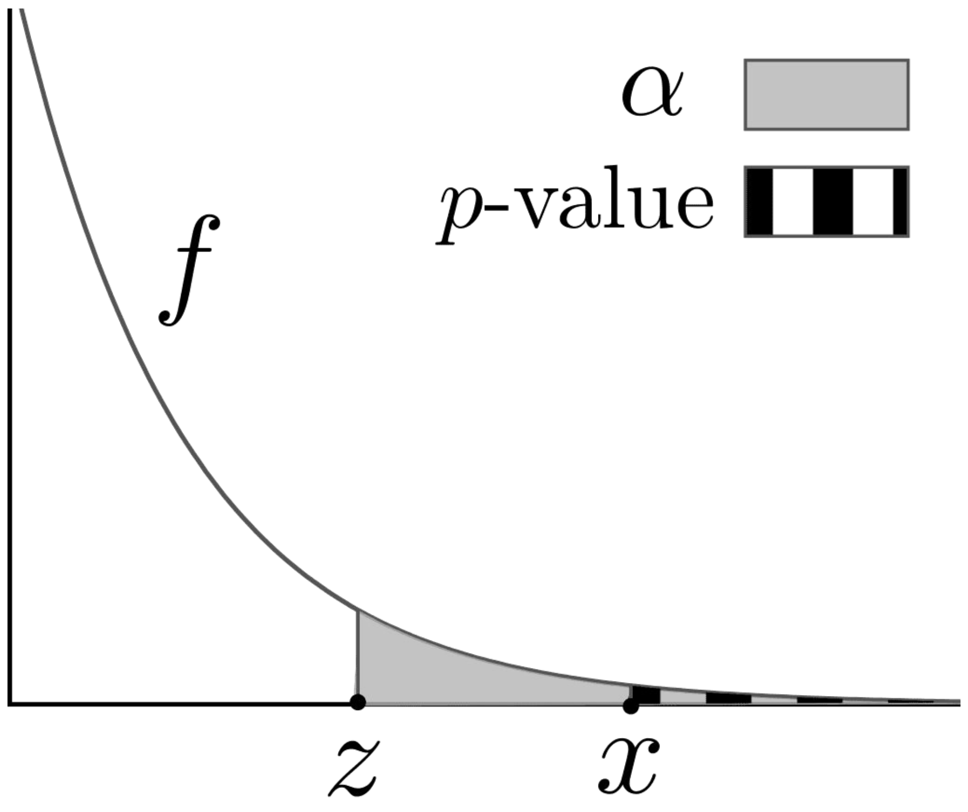


Для каждой величины статистики есть своё эквивалентное значение для критической области

Тесты проверки гипотез







Для каждой величины статистики есть своё эквивалентное значение для критической области

Шаг пройден!

Наши цели

- Доверительный интервал
- Уровень значимости
- p-value
- *t*-критерий Стьюдента

А как же Python?
Время практики!

Что почитать?

- Статистика и котики (Владимир Савельев)
- Доверительные интервалы: допущение о неточности оценок [(http://www.williamspublishing.com/PDF/978-5-8459-1367-8/part.pdf)](http://www.williamspublishing.com/PDF/978-5-8459-1367-8/part.pdf)
- Наглядная математическая статистика (Михаил Лагутин)

Домашнее задание

Описание заданий находится в Jupyter NoteBook.

Доверительные интервалы

Спасибо
за внимание!

@Aleron75infskin

@Aleron

Александр Миленькин
Биоинформатик в Insilico Medicine