Маршрут 19

1. Линейная система. Устойчивость методов.

Задача Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{1}{t}((1-t)v + 4w) = 0; \\ \dot{w} = v; \\ w(0) = 1; \\ v(0) = -4. \end{cases}$$

имеет точное решение — полином Лагерра $1 - 4t + 3t^3 + \frac{1}{24}t^4$. Задача решается на отрезке от 0 до 10. Для методов Эйлера (явного, неявного) и методов Рунге-Кутты порядков 2, 3 и 4 найти апостериорный порядок сходимости.

Использовать аналоги норм C и L2.

2. Нелинейная система уравнений. Маятник П.Л. Капицы — маятник с колеблющимся подвесом - описывается следующей нелинейной неавтономной системой ОДУ

$$\dot{x} = -v,$$

$$\dot{v} = \frac{A\omega^2 \cos(\omega \mathrm{t}) + \mathrm{g}}{l} \sin(x)$$

Здесь l — длина подвеса маятника, A, ω — амплитуда и частота колебаний подвеса.

При переходе к безразмерным переменным запись системы можно упростить:

$$\dot{x} = -v,$$

$$\dot{v} = \left(1 + a\omega^2 \cos(\omega \mathrm{t})\right)\sin(x).$$

Все расчеты выполняются для безразмерной постановки задачи.

Численно решить задачу Коши о колебаниях маятника Капицы в случае разных начальных скоростей маятника в зависимости от частоты колебаний подвеса и амплитуды этих колебаний. Рассмотреть значения амплитуды $a = 0.01, 0.05, 0.1, 0.25,$ а частота колебаний точки подвеса меняется от 0 до 100. Использовать метод трапеций и методы Рунге-Кутты порядка аппроксимации 2, 3, 4.

Сравнить численные результаты с результатами расчетов по Варианту 19а. Объяснить результаты сравнения.

3. Особые точки и особые траектории. Рассматриваются две близкие системы – модель «хищник-жертва» Лотки – Вольтерры и та же модель, но со слабым самоограничением численности жертв. Обе системы записаны в безразмерном виде с конкретными значениями коэффициентов.

$$\dot{x} = 2x - xy,$$
$$\dot{y} = 0.5xy - 0.25y$$

и

$$\dot{x} = 2x - xy - 10^{-3}x^2.$$
$$\dot{y} = 0.5xy - 0.25y$$

Построить численно характерные траектории вблизи особых точек системы, используя явный метод Эйлера и метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. Объяснить полученные в численном счете эффекты.