In [13]:
```python
from IPython.display import Image
```

In [16]:
```python
Image("hyper-2.png")
```

Out[16]:

Гиперболические системы уравнений

Вариант 2

Рассматривается система линейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{b}(x)\,, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \mathbf{u}(x,0) = \begin{pmatrix} \sin \pi x \\ \cos \pi x \\ 1 + \sin \pi x \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Привести систему к характеристическому виде, предложить корректную постановку граничных условий.

Решить численно систему уравнений с использованием двух указанных схем. Для каждой из схем выписать ПДП, определить, диссипативная или дисперсионная ошибка преобладает. Монотонна ли схема? Оценить апостериорно порядок сходимости каждой схемы.

Разностные схемы

Схемы приводятся для модельного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, a = const > 0$ на сетке $x_m = mh, m = 0..M, Mh = 1$; $t^n = n\tau, n = 0..N, N\tau = 1$. При необходимости преобразовать схемы для случая $a = const < 0$.

1) Схема П. Лакса

$$\frac{u_m^{n+1} - 0.5\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right)}{\tau} + a\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

2) Полностью симметричная разностная схема (схема бегущего счета):

$$\frac{1}{2\tau}\left[(u_{m+1}^{n+1} + u_m^{n+1}) - (u_{m+1}^n - u_m^n)\right] + \frac{1}{h}\left[(u_{m+1}^{n+1} + u_{m+1}^n) - (u_m^{n+1} - u_m^n)\right] = 0$$

In [49]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
from sympy import nsimplify

A = np.array([
    [-2, -2, 4],
    [-4, 1, 2],
    [2, 2, 5]]
)

L, T = 1, 1
```

In [62]:
```
A.T
```

Out[62]:
```
array([[-2, -4,  2],
       [-2,  1,  2],
       [ 4,  2,  5]])
```

Для левых собственных векторов верно, что

$$\omega^T A = \lambda \omega^T \Leftrightarrow A^T \omega = \lambda \omega$$

In [50]:
```
lambdas, left_w = np.linalg.eig(A.T)
```

In [51]:
```
left_w = left_w.T
```

In [61]:
```
left_w
```

Out[61]:
```
array([[ 0.81649658,  0.40824829, -0.40824829],
       [ 0.53452248, -0.80178373, -0.26726124],
       [ 0.05842062,  0.35052374,  0.93472998]])
```

In [65]:
```
for lmbd, w in zip(lambdas, left_w):
    w = w / abs(w).min()
    print(f'Собственному значению {round(lmbd)} соответствует левый собственный вектор {np.vectorize(nsimplify)(w)
```

```
Собственному значению -5 соответствует левый собственный вектор [2 1 -1]
Собственному значению 3 соответствует левый собственный вектор [2 -3 -1]
Собственному значению 6 соответствует левый собственный вектор [1 6 16]
```

Получились собственные значения $\lambda \in \{-5, 3, 6\}$ с левыми собственными векторами

$$\omega_{-5} = (2, 1, -1)$$
$$\omega_3 = (2, -3, -1)$$
$$\omega_6 = (1, 6, 16)$$

In [66]:
```
Omega = np.array([
    [2, 1, -1],
    [2, -3, -1],
    [1, 6, 16]]
)
Lambda = np.array([
    [-5, 0, 0],
    [0, 3, 0],
    [0, 0, 6]]
)
```

In [84]:
```
Omega_inverse = np.vectorize(nsimplify)(np.linalg.inv(Omega))
```

In [85]:
```
Omega_inverse
```

Out[85]:
```
array([[7/22, 1/6, 1/33],
       [1/4, -1/4, 0],
       [-5/44, 1/12, 2/33]], dtype=object)
```

In [86]:
```
print(np.linalg.det(Omega))
```

```
-131.99999999999997
```

In [87]:
```
1 Omega_inverse * np.linalg.det(Omega)
```

Out[87]:
```
array([[-42.0000000000000, -22.0000000000000, -4.00000000000000],
       [-33.0000000000000, 33.0000000000000, 0],
       [15.0000000000000, -11.0000000000000, -8.00000000000000]],
      dtype=object)
```

Перейдем к инвариантам Римана $\mathbf{R}(x,t) = \mathbf{\Omega u}(x,t), \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\mathbf{R}_t + \mathbf{\Lambda R}_x = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R} = (2u_1 + u_2 - u_3, 2u_1 - 3u_2 - u_3, u_1 + 6u_2 + 16u_3)^T$$

Начальные условия при этом принимают вид

$$\mathbf{R}(x,0) = (2\sin\pi x + \cos\pi x - 1 - \sin\pi x, 2\sin\pi x - 3\cos\pi x - 1 - \sin\pi x, \sin\pi x + 6\cos\pi x + 16 + 16\sin\pi x)^T =$$
$$= (\sin\pi x + \cos\pi x - 1, \sin\pi x - 3\cos\pi x - 1, 17\sin\pi x + 6\cos\pi x + 16)^T \equiv \varphi(x)$$

Для каждой компоненты $\mathbf{R}(x,t)$ требуется решить систему

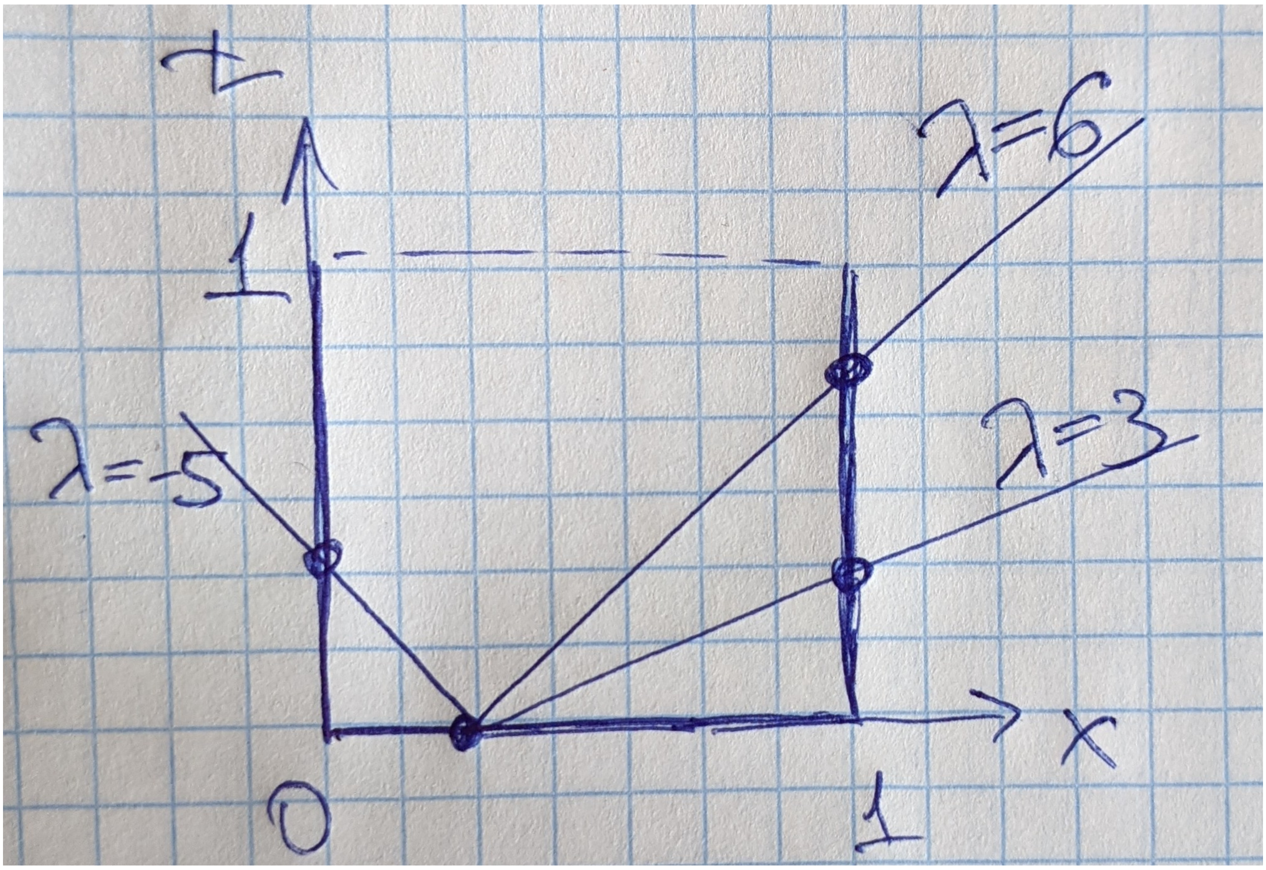
$$(R_i)_t + \lambda_i (R_i)_x = 0$$
$$R_i(x,0) = \varphi_i(x)$$

Введем замену координат $\eta = x + at, \xi = x - at, a \equiv \lambda_i$

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} = \frac{\partial R_i}{\partial \eta}\cdot a + \frac{\partial R_i}{\partial \xi}\cdot(-a)$$
$$\frac{\partial R_i}{\partial x} = \frac{\partial R_i}{\partial \eta} + \frac{\partial R_i}{\partial \xi}$$
$$a\frac{\partial R_i}{\partial \eta} - a\frac{\partial R_i}{\partial \xi} + a\frac{\partial R_i}{\partial \eta} + a\frac{\partial R_i}{\partial \xi} = 0$$
$$\frac{\partial R_i}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow R_i = f(\xi) = f(x - at)$$
$$R_i(x,0) = f(x) = \varphi_i(x) \Rightarrow f = \varphi_i$$
$$\Rightarrow R_i(x,t) = \varphi_i(x - at)$$

In [67]:
```
1 Image('gran_usl.jpg')
```

Out[67]:



Поскольку вдоль характеристики уравнение имеет вид $\mathbf{R}_t = \mathbf{0}$, то вдоль нее значение при $x \in [0,1]$ переносится на все точки вдоль характеристики, в том числе на края $x = 0$ и $x = 1$.

$$R_1(0,t) = \varphi_1(5t) = \sin 5\pi t + \cos 5\pi t - 1$$
$$R_2(1,t) = \varphi_2(-3t) = -\sin(3\pi t) - 3\cos 3\pi t - 1$$
$$R_3(1,t) = \varphi_2(-6t) = -17\sin(6\pi t) + 6\cos 3\pi t + 16$$

В итоге получается, что для решения системы требуется добавить 2 краевых условия на левой границе $x = 0$ и 1 краевое условие на правой границе $x = 1$.

Получились следующие 3 задачи:

$$\begin{array}{lll} (R_1)_t - 5(R_1)_x = 0 & (R_2)_t + 3(R_2)_x = 0 & (R_3)_t + 6(R_1)_x = 0 \\ R_1(x,0) = \sin\pi x + \cos\pi x - 1 & R_2(x,0) = \sin\pi x - 3\cos\pi x - 1 & R_3(x,0) = 17\sin\pi x + 6\cos\pi x + 16 \\ R_1(0,t) = \sin 5\pi t + \cos 5\pi t - 1 & R_2(0,t) = -\sin(3\pi t) - 3\cos 3\pi t - 1 & R_3(0,t) = -17\sin(6\pi t) + 6\cos 3\pi t + 16 \end{array}$$

Исходная задача имеет решение $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{R}$

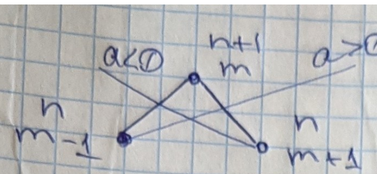
$$u_1 = \frac{42R_1+22R_2+4R_3}{132} \quad u_2 = \frac{33R_1-33R_2}{132} \quad u_1 = \frac{-15R_1+11R_2+8R_3}{132}$$

Схема решения П. Лакса

$$\frac{u_m^{n+1} - 0.5\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right)}{\tau} + a\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

In [89]:
```
1 Image('lax1.jpg')
```

Out[89]:



$$u_m^{n+1} = u_m^n + u_t\tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2} + \dots$$
$$u_{m\pm1}^n = u_m^n \pm u_x h + u_{xx}\frac{h^2}{2} + \dots$$

Уравнение

$$u_t + a u_x = 0.$$

Схема:

$$\cancel{u_m^n} + u_t\tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2} + u_{ttt}\frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\cancel{2u_m^n} + 2u_{xx}\frac{h^2}{2} + \cancel{2u_{xxxx}\frac{h^4}{24}} + O(h^5)\right) +$$
$$+ \frac{a\tau}{2h}\left(2u_x h + 2u_{xxx}\frac{h^3}{6}\right) =$$

$$= \cancel{u_t}\tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2} + u_{ttt}\frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4) - u_{xx}\frac{h^2}{2} +$$
$$+ a\tau\cdot\left(\cancel{u_x} + u_{xxx}\frac{h^2}{6}\right) + O(h^3) = 0$$

$$u_t + a u_x = -u_{tt}\cdot\frac{\tau}{2} + u_{xx}\cdot\frac{h^2}{2\tau} \quad \text{ПДП}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt} + a u_{xt} = 0 \\ u_{tx} + a u_{xx} = 0 \end{array}\right\} \to u_{tt} + a^2 u_{xx} = 0.$$

$$u_t + a u_x = u_{xx}\left(\frac{a^2\tau}{2} + \frac{h^2}{2\tau}\right) = \delta_1\cdot h\cdot u_{xx}$$

$\Rightarrow$ аппроксимация только при $\frac{h^2}{\tau} \xrightarrow[h,\tau\to 0]{} 0$

$$\delta_1 = \frac{h}{2\tau} + \frac{a}{2}\cdot\frac{a\tau}{h} \geq 0.$$

$\Rightarrow$ диссипативная ошибка

In [90]:
```
1 Image('lax2.jpg')
```

Out[90]:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

$$\frac{\lambda - \frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})}{\tau} + a\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2h} = 0.$$

$$\lambda - \cos\varphi + \frac{a\tau}{h}\cdot i\sin m\varphi = 0.$$

$$\lambda = \cos\varphi + i\sigma\sin m\varphi$$

$$|\lambda| = \cos^2\varphi + \sigma^2\sin^2\varphi = 1 + (\sigma^2-1)\sin^2\varphi < 1$$

$\forall\varphi$ $|\lambda| < 1$ при $\sigma^2 - 1 < 0$

$\sigma < 1$

$a < 0$: $$0 = \frac{u_m^{n+1} - 0{,}5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a\,\frac{u_{m-1}^n - u_{m+1}^n}{2h}$$

аппрокс. такая же.

уст-ть такая же, т.к σ^2 не изм.

Монотонность:

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) + \frac{a\tau}{2h}\cdot(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)$$

$$= \frac{1}{2}\left[u_{m+1}^n(1+\sigma) + u_{m-1}^n(1-\sigma)\right]$$

при $\sigma \le 1$ коэф. ≥ 0 => уст.

для $a < 0$ аналогично, $(\sigma \to -\sigma)$.

In [91]:
```
from matplotlib import gridspec
from matplotlib import axes
```

In [94]:
```
def plot_nev(x, t, u, s, a, R0):
    print("K =", abs(a*tau/h))
    x_, t_ = np.meshgrid(x, t)
    fig = plt.figure(figsize = (24, 6))
    gs2 = gridspec.GridSpec(3, 3)
    ax = fig.add_subplot(gs2[:, :1], projection='3d')
    ax.plot_wireframe(x_,t_, u)
    ax.set_xlabel("x")
    ax.set_ylabel("t")
    ax.set_zlabel(s)
    ax.set_title(s)
    ax.plot_surface(x_, t_, R_th(x_, t_, a, R0), color = "green", alpha = 0.5)
    ax1 = fig.add_subplot(gs2[:2, -2])
    ax1.plot(t, [max(abs(u[n]-R_th(x, n*tau, a, R0))) for n in range(len(t))])
    ax1.set_xlabel("t")
    ax1.set_ylabel("max$_x$|"+s+"-Rth|")
    ax1.set_title("Невязка по x")
    ax2= fig.add_subplot(gs2[:2, -1])
    ax2.plot(x, [max(abs(u[:, m]-R_th(h*m, t, a, R0))) for m in range(len(x))])
    ax2.set_xlabel("x")
    ax2.set_ylabel("max$_t$|"+s+"-Rth|")
    ax2.set_title("Невязка по t")
    plt.show()
```

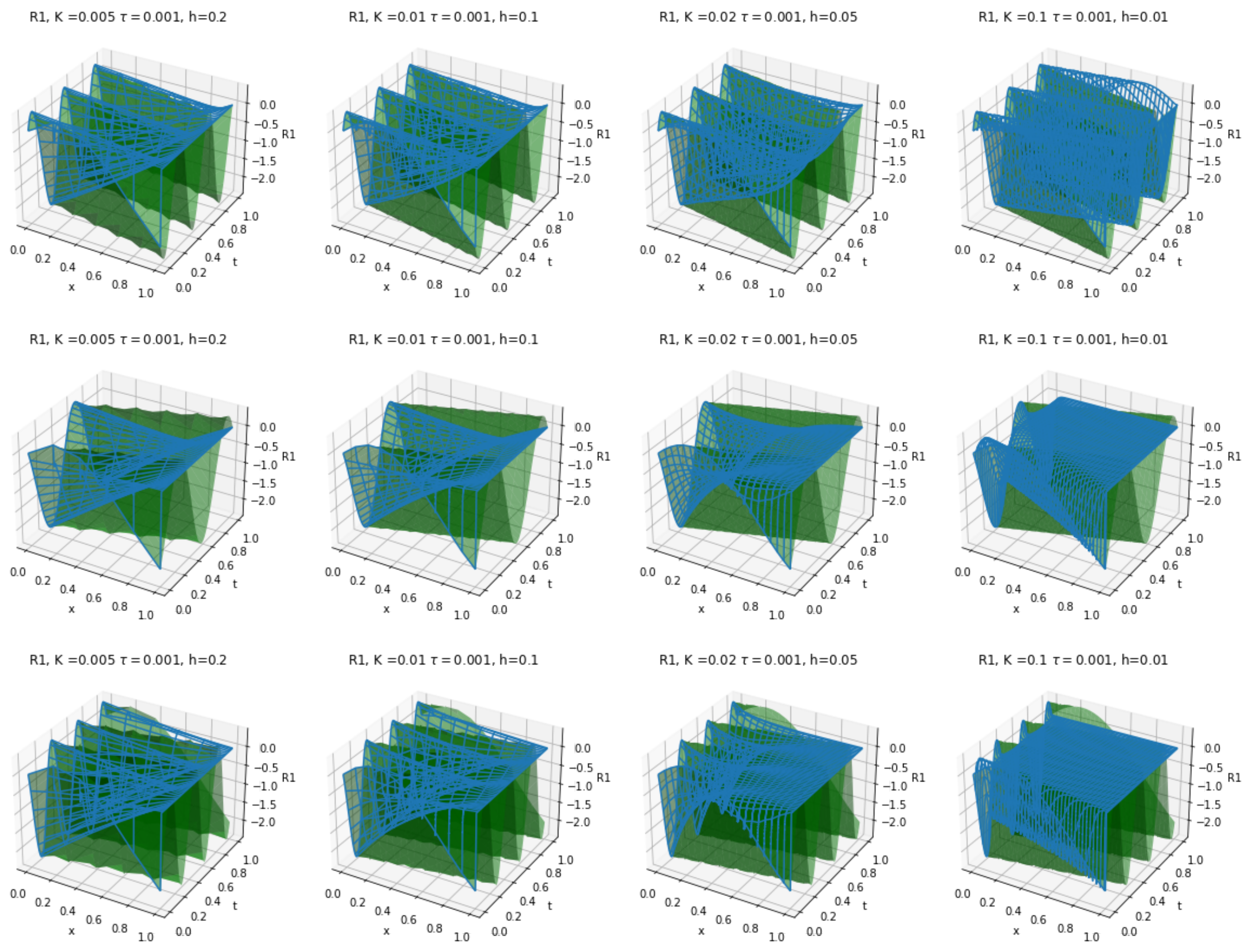
In [100]:
```
#функция численного решения по схеме КИР
def Lax(a, R0, h, tau):
    sigma = a*tau/h
    M, N=int(L/h)+1, int(T/tau)+1
    R = np.zeros((N, M))
    R[0, :] = np.array([R0(x) for x in np.arange(0, L+h, h)]).copy()
    R[:, 0] = np.array([R0(-a*n*tau) for n in range(N)]).copy()
    for n in range(0, N-1):
        for m in range(1, M-1):
            R[n+1, m] = 0.5*(R[n, m+1]*(1+sigma) + R[n, m-1]*(1-sigma))
    return R
```

In [96]:
```
#начальные условия инвариантов Римана
R01 = lambda x: np.sin(np.pi*x)+np.cos(np.pi*x)-1
R02 = lambda x: np.sin(np.pi*x)-3*np.cos(np.pi*x)-1
R03 = lambda x: 17*np.sin(np.pi*x)+6*np.cos(np.pi*x)+16
```

In [102]:
```
def R_th(x, t, a, R0):
    return R0(x-a*t)
```

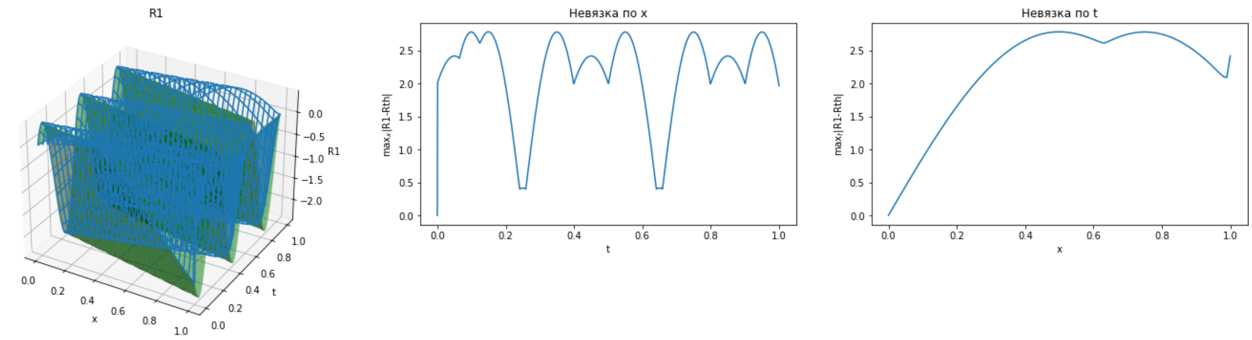
In [117]:

```
for lmbd in lambdas:
    fig = plt.figure(figsize = (20, 6))
#     plt.title(f'$\lambda$ = {lmbd}')
    tau = 0.001
    h = [0.2, 0.1, 0.05, 0.01]
    for i in range(4):
        ax = fig.add_subplot(1, 4, i+1, projection='3d')
        R1 = Lax(lmbd, R01, h[i], tau)
        x = np.arange(0, L+h[i], h[i])
        t = np.arange(0, T+tau, tau)
        x_, t_ = np.meshgrid(x, t)
        ax.plot_surface(x_, t_, R_th(x_, t_, lmbd, R01), color = "green", alpha = 0.5)
        ax.plot_wireframe(x_,t_, R1)
        ax.set_xlabel("x")
        ax.set_ylabel("t")
        ax.set_zlabel("R1")
        ax.set_title("R1, K ="+str(round(tau/h[i], 3))+" $\\tau=$"+str(tau)+", h="+str(h[i]))
```

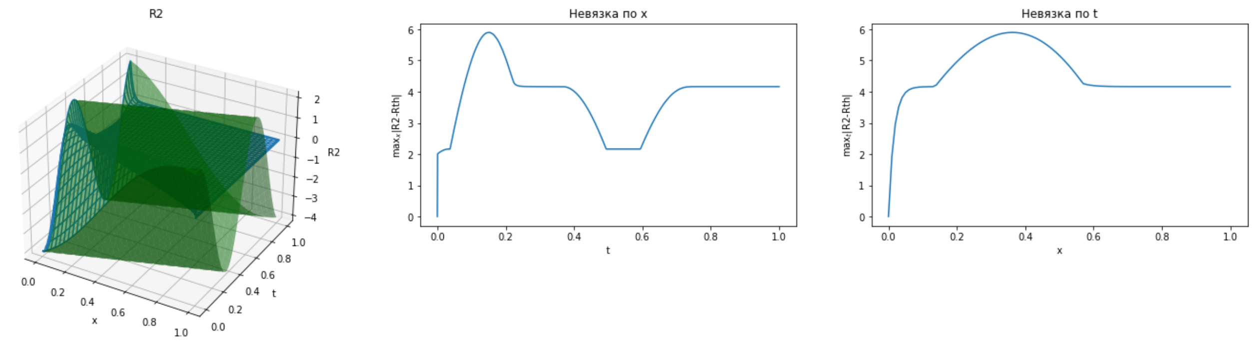


In [120]:
```
h, tau = 0.01, 0.001
x = np.arange(0, L+h, h)
t = np.arange(0, T+tau, tau)
for i, (lmbd, R0) in enumerate(zip(lambdas, [R01, R02, R03])):
    R_lax = Lax(lmbd, R0, h, tau)
    plot_nev(x, t, R_lax, f"R{i+1}", lmbd, R0)
```

```
K = 0.5000000000000006
```




```
K = 0.29999999999999977
```




```
K = 0.5999999999999999
```

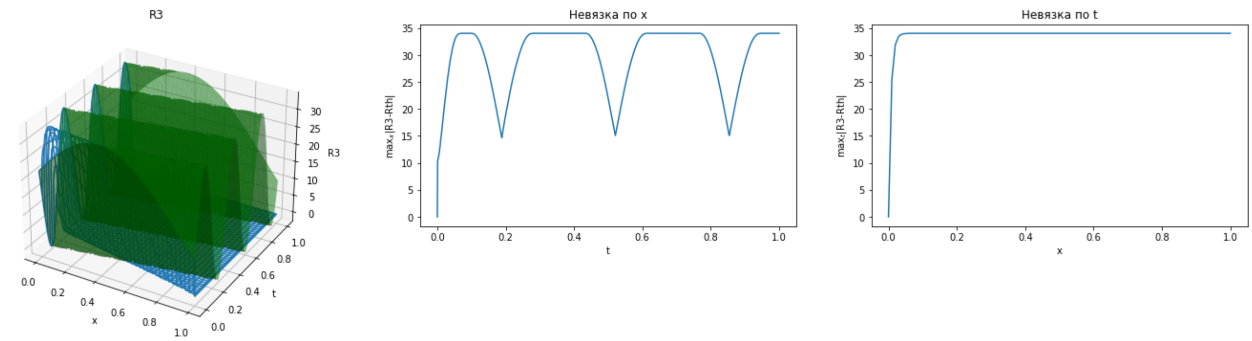
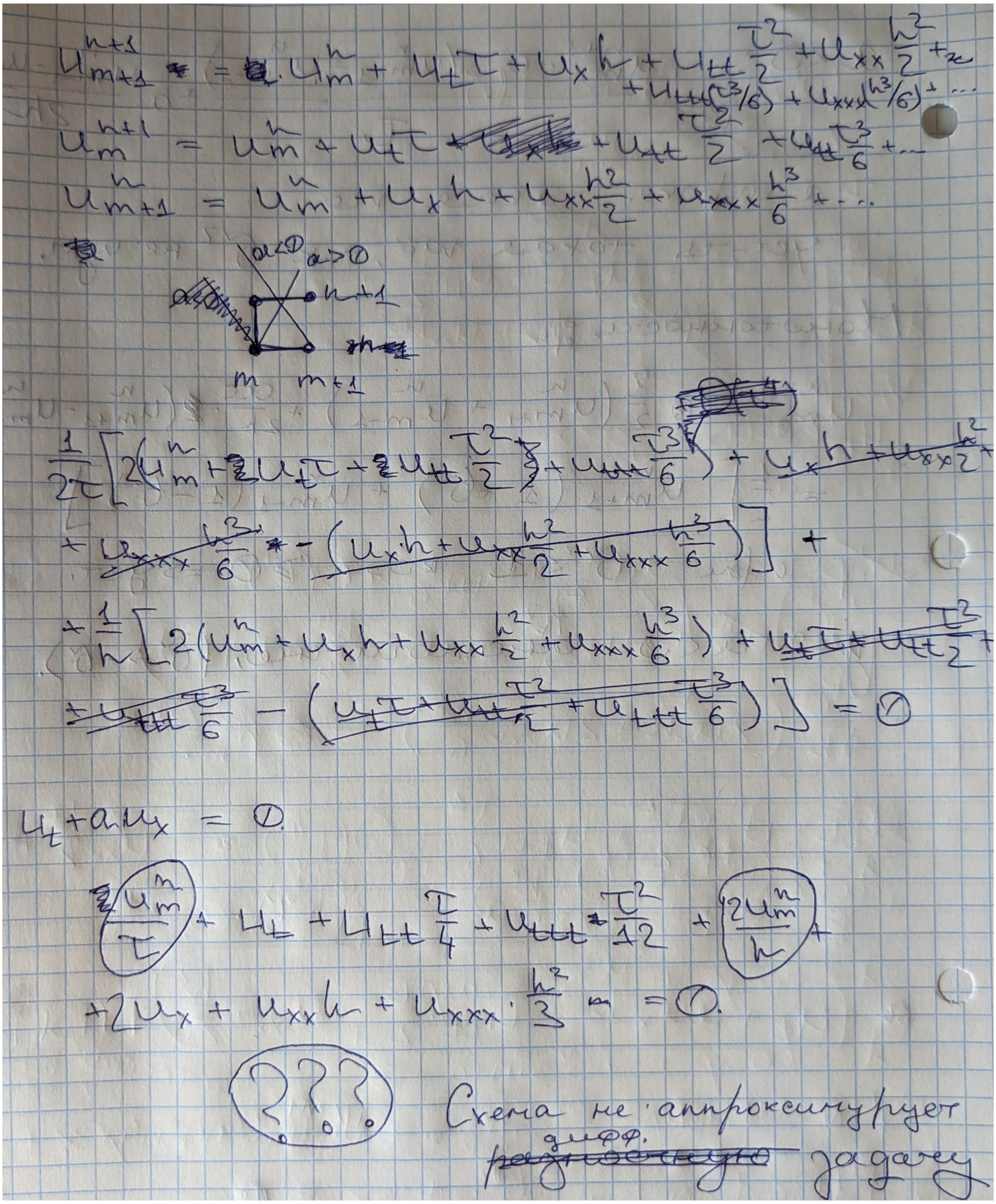


Схема бегущего счета

$$\frac{1}{2\tau}\left[\left(u_{m+1}^{n+1}+u_m^{n+1}\right)-\left(u_{m+1}^n-u_m^n\right)\right]+\frac{1}{h}\left[\left(u_{m+1}^{n+1}+u_{m+1}^n\right)-\left(u_m^{n+1}-u_m^n\right)\right]=0$$

In [121]:
```
1 Image('runcount.jpg')
```

Out[121]:



$$u_{m+1}^{n+1} = u_m^n + u_t \tau + u_x h + u_{tt}\frac{\tau^2}{2} + u_{xx}\frac{h^2}{2} + u_{ttt}(\tau^3/6) + u_{xxx}(h^3/6) + \dots$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n + u_t \tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2} + u_{ttt}\frac{\tau^3}{6} + \dots$$

$$u_{m+1}^{n} = u_m^n + u_x h + u_{xx}\frac{h^2}{2} + u_{xxx}\frac{h^3}{6} + \dots$$

$$\frac{1}{2\tau}\left[2\left(u_m^n + u_t\tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2}\right) + u_{ttt}\frac{\tau^3}{6}\right) + \cancel{u_x h + u_{xx}\frac{h^2}{2}} + \cancel{u_{xxx}\frac{h^3}{6}} - \cancel{\left(u_x h + u_{xx}\frac{h^2}{2} + u_{xxx}\frac{h^3}{6}\right)}\Big] +$$

$$+\frac{1}{h}\left[2\left(u_m^n + u_x h + u_{xx}\frac{h^2}{2} + u_{xxx}\frac{h^3}{6}\right) + \cancel{u_t\tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2}} + \cancel{u_{ttt}\frac{\tau^3}{6}} - \cancel{\left(u_t\tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2} + u_{ttt}\frac{\tau^3}{6}\right)}\right] = 0$$

$$u_t + a u_x = 0.$$

$$\frac{u_m^n}{\tau} + u_t + u_{tt}\frac{\tau}{4} + u_{ttt}\frac{\tau^2}{12} + \frac{2u_m^n}{h} +$$
$$+2u_x + u_{xx}h + u_{xxx}\frac{h^2}{3} = 0.$$

???

Схема не аппроксимирует дифф. ~~разностную~~ задачу