Управление

Теория управления, лекция 3

Сергей Савин

Spring 2026

Изменение устойчивости

Рассмотрим две LTI (Линейные Стационарные Системы):

$$\dot{x} = 2x \tag{1}$$

$$\dot{x} = 2x + u \tag{2}$$

Первая система автономна и неустойчива. Вторая — неавтономна, и мы не можем узнать как она себя ведет, пока мы не узнаем чему равно u. Если мы выберем $u = 0$, динамика будет неустойчивой. Но мы также можем выбрать u таким образом, чтобы результирующая динамика стала устойчивой, например $u = -3x$:

$$\dot{x} = 2x + u = 2x - 3x = -x \tag{3}$$

Таким образом, мы можем использовать *управляющее воздействие* u, чтобы изменить устойчивость системы!

Стабилизирующее управление

Definition

Задача нахождения закона управления $\mathbf{u}$, который делает определённое решение $\mathbf{x}^*$ динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ устойчивым, называется *задачей стабилизирующего управления.*

Это верно как для линейных, так и для нелинейных систем. Но для линейных систем мы можем получить гораздо больше деталей о решении этой задачи, если ограничим выбор закона управления.

Рассмотрим LTI:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4}$$

и выберем *управление как линейную функцию состояния* x:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{5}$$

Матрицу $\mathbf{K}$ мы называем *коэффициентом усиления (gain)*. При таком управлении система примет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{6}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \tag{7}$$

Заметим, что (7) — это автономная система. Мы называем её *замкнутой системой*.

Линейное управление

Мы можем проанализировать устойчивость системы $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$:

Условие устойчивости для замкнутой LTI

Действительные части собственных значений матрицы $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ должны быть отрицательными для асимптотической устойчивости, или неположительными* для устойчивости по Ляпунову.

Матрица Гурвица

Если матрица $\mathbf{M}$ имеет собственные значения со строго отрицательными действительными частями, она называется матрицей Гурвица. Мы будем обозначать это как $\mathbf{M} \in \mathcal{H}$.

Таким образом, поиск управления сводится к выбору такого $\mathbf{K}$, чтобы $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ была матрицей Гурвица.

Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x} = ax + bu \tag{8}$$

мы можем выбрать следующий линейный закон управления: $u = -kx$. Замкнутая система для этого примера имеет вид:

$$\dot{x} = (a - bk)x \tag{9}$$

Решение для замкнутой системы:

$$x(t) = x_0 e^{(a-bk)t} \tag{10}$$

Пока выполняется $a - bk < 0$, решение сходится к нулю. Поскольку мы можем выбирать k, мы можем подобрать его так, чтобы $a - bk = q$, где q — отрицательное число. Тогда мы выбираем $k = \frac{a-q}{b}$, получая устойчивую систему с собственным значением $q < 0$.

Многомерный случай

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{11}$$

С законом управления:

$$u = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Замкнутая система имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - bk_1 & a_{12} - bk_2 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Собственные значения замкнутой системы — это $a_{11} - bk_1$ и a_{22}. Второе собственное значение не может быть изменено выбором коэффициентов управления. Если $a_{22} < 0$, нам достаточно выбрать k_1 так, чтобы $a_{11} - bk_1 = q$, где q — отрицательное: $k_1 = \frac{a_{11} - q}{b}$.

Пружина-масса-демпфер, 1

Рассмотрим систему пружина-масса-демпфер:

$$\ddot{y} + \mu\dot{y} + cy = 0 \tag{14}$$

Уравнение может быть переписано в форме пространства состояний с заменой переменных $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Собственные значения матрицы 2x2 легко вычислить, используя её определитель det и след tr:

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr} \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2 - 4\mathrm{det}}}{2} \tag{16}$$

Здесь $\mathrm{det} = c$ и $\mathrm{tr} = -\mu$:

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4c}}{2} \tag{17}$$

Пружина-масса-демпфер, 2

Проанализируем собственные значения λ для случая если $\mu > 0$ и $c > 0$:

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4c}}{2}$$

Возможны только два сценария:

1. $\mu^2 - 4c \geq 0$, в этом случае $\sqrt{\mu^2 - 4c} \leq \mu$, собственные значения вещественные и отрицательные.
2. $\mu^2 - 4c < 0$, в этом случае $\sqrt{\mu^2 - 4c}$ — чисто мнимое число, собственные значения комплексные с отрицательными вещественными частями.

Если $\mu > 0$ и $c = 0$, то $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = 0$, следовательно, система нейтрально (маргинально) устойчива.
Если $\mu = 0$ и $c > 0$, то $\lambda = \pm i\sqrt{c}$, следовательно, система нейтрально (маргинально) устойчива.

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4c}}{2}$$

Если $c < 0$, то $\sqrt{\mu^2 - 4c} \geq \mu$, и собственные значения вещественные, причём одно из них положительное, система неустойчива (вне зависимости от знака μ).

Если $\mu < 0$ и $c \geq 0$, то снова возможны только два сценария:

1. $\mu^2 - 4c \geq 0$, в этом случае $\sqrt{\mu^2 - 4c} \leq \mu$, собственные значения вещественные и положительные.
2. $\mu^2 - 4c < 0$, в этом случае $\sqrt{\mu^2 - 4c}$ — чисто мнимое число, собственные значения комплексные с положительными вещественными частями.

Definition

Система $\ddot{y} + \mu\dot{y} + cy = 0$ устойчива тогда и только тогда, когда $\mu \geq 0$ и $c \geq 0$.

ПД-регулятор, 1

Рассмотрим систему пружина-масса-демпфер:

$$\ddot{y} + \mu \dot{y} + c y = u \tag{18}$$

Мы можем предложить обратную связь в виде:

$$u = -k_d \dot{y} - k_p y \tag{19}$$

Это называется *пропорционально-дифференциальным регулятором*, часто сокращаемым как *ПД-регулятор*; k_d — дифференциальный коэффициент, а k_p — пропорциональный коэффициент. Замкнутая система имеет вид:

$$\ddot{y} + (\mu + k_d)\dot{y} + (c + k_p)y = 0 \tag{20}$$

Собственные значения:

$$\lambda = \frac{-(\mu + k_d) \pm d}{2} \tag{21}$$

$$d = \sqrt{(\mu + k_d)^2 - 4(c + k_p)} \tag{22}$$

ПД-регулятор, 2

Дано $c = 40$ и $\mu = 8$. Предположим, что мы хотим, чтобы замкнутая система имела собственные значения $\lambda_1 = -4$ и $\lambda_2 = -20$.

$$16 = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{-(\mu + k_d) + d}{2} - \frac{-(\mu + k_d) - d}{2} = d \tag{23}$$

Отсюда следует:

$$-4 = \lambda_1 = \frac{-(\mu + k_d) + 16}{2} \tag{24}$$

$$-(\mu + k_d) + 16 = -8 \tag{25}$$

$$k_d = 16 \tag{26}$$

Также мы можем записать:

$$d = \sqrt{(\mu + k_d)^2 - 4(c + k_p)} \tag{27}$$

$$16^2 = 24^2 - 4(40 + k_p) \tag{28}$$

$$k_p = 320/4 - 40 = 40 \tag{29}$$

Размещение полюсов (Pole-placement)

Метод поиска коэффициентов управления таким образом, чтобы замкнутая система имела желаемые собственные значения, называется *размещением полюсов*.

Существуют программы, которые находят такие коэффициенты управления согласно желаемым полюсам (собственным значениям) автоматически.

В MATLAB есть функция `K = place(A,B,p)`, где `p` — желаемые собственные значения матрицы `(A-B*K)`.

Слежение за траекторией, 1

Пусть функция $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t)$ и управление $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(t)$ являются решением системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, то есть:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^* \tag{30}$$

Мы называем $\mathbf{x}^*(t)$ *задающим воздействием (reference)* или *опорным сигналом*, а $\mathbf{u}^*(t)$ — *компенсирующим управлением (feed-forward control)*.

Мы можем попытаться найти закон управления, который стабилизирует эту опорную траекторию. Начнём с нахождения разности между $\dot{\mathbf{x}}^*$ и $\dot{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\mathbf{x}}^* - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \tag{31}$$

Введём новые переменные: $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}$:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{v} \tag{32}$$

Слежение за траекторией, 2

Мы называем $\mathbf{e}$ *ошибкой управления*, а уравнение $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{v}$ — *динамикой ошибки*.

Таким образом, мы вернулись к знакомой задаче: найти закон управления $\mathbf{v} = -\mathbf{K}\mathbf{e}$, который делает замкнутую систему устойчивой:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{e} \tag{33}$$

В исходных переменных закон управления принимает вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + \mathbf{u}^* \tag{34}$$

Если для заданного опорного сигнала $\mathbf{x}^*$ существует компенсирующее управление $\mathbf{u}^*$, удовлетворяющее $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^*$, то мы можем легко найти такое $\mathbf{u}^*$ с помощью псевдообратной матрицы:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{B}^+(\dot{\mathbf{x}}^* - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) \tag{35}$$

Если желаемая траектория постоянна $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}_d$ (мы пытаемся переместить систему в новую позицию в пространстве состояний), то компенсирующее управление принимает вид:

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{B}^+\mathbf{A}\mathbf{x}_d \tag{36}$$

Новое входное воздействие

Рассмотрим систему $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ и закон управления $\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}) + \mathbf{u}^*(t)$. Мы можем найти выражение для результирующей системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) \tag{37}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) \tag{38}$$

В предположении, что $\mathbf{u}^*(t) = 0$, получаем упрощённую систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}^*(t) \tag{39}$$

Здесь видно, что $\mathbf{x}^*(t)$ действует как новый вход системы. Мы можем проанализировать реакцию этой системы на входное воздействие.

Литература

- Nise, N.S. Control systems engineering. John Wiley & Sons. (4.5 The General Second-Order System)
- Dynamic Simulation in Python

Lecture slides are available via Github:

github.com/SergeiSa/Control-Theory-2026