# Устойчивость

## Теория управления, лекция 2

Сергей Савин

2026

# Точка равновесия

Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{x}_0$ — такое состояние, что:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = 0 \tag{2}$$

Тогда такое состояние $\mathbf{x}_0$ называется *точкой равновесия*, *положением равновесия* или *критической точкой*.

# Устойчивость

Точка равновесия $\mathbf{x}_0$ называется *устойчивой* (или *устойчивой по Ляпунову*) тогда и только тогда, когда для любой константы $\varepsilon > 0$ существует константа $\delta > 0$ такая, что:

$$||\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0|| < \delta \ \longrightarrow \ ||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0|| < \varepsilon, \ t \in [0, \infty) \qquad (3)$$

Для устойчивой точки равновесия траектории не покинут шар размера $\varepsilon$, если они стартуют из достаточно малой $\delta$-окрестности. Выберите любое значение $\varepsilon$ — всегда найдётся такое $\delta$, что выполняется условие (3).

# Асимптотическая устойчивость

Устойчивая по Ляпунову точка равновесия $\mathbf{x}_0$ называется *асимптотически устойчивой* тогда и только тогда, когда для некоторой константы $\delta$ верно:

$$||\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0|| < \delta \;\longrightarrow\; \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

Можно думать об этом так: «для любой начальной точки, удалённой от $\mathbf{x}_0$ не более чем на $\delta$, траектория $\mathbf{x}(t)$ будет асимптотически приближаться к $\mathbf{x}_0$».

Эквивалентно можно сказать: «решения, начинающиеся в $\delta$-шаре вокруг $\mathbf{x}_0$, сходятся к $\mathbf{x}_0$».

# Устойчивость vs Асимптотическая устойчивость

**Example**

Рассмотрим динамическую систему $\dot{x} = 0$ и решение $x = 7$. Это решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво (решение, соответствующее начальному условию $x(0) = 7 + \delta$, не расходится, но и не сходится к $x = 7$).

**Example**

Рассмотрим динамическую систему $\dot{x} = -x$ и решение $x = 0$. Это решение устойчиво и асимптотически устойчиво (все решения сходятся к $x = 0$).

**Example**

Рассмотрим динамическую систему $\dot{x} = x$ и решение $x = 0$. Это решение неустойчиво (все остальные решения расходятся от $x = 0$).

# Линейные системы

Рассмотрим следующее линейное ОДУ:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{5}$$

Оно называется *линейной стационарной системой (LTI)* - матрицы **A** и **B** не зависят от времени.

Если убрать входное воздействие, получим более простое уравнение:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{6}$$

Такая LTI-система является *автономной*, так как её эволюция зависит только от состояния системы.

# Устойчивость автономной LTI

## Вещественные собственные значения

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x} \tag{7}$$

где $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ ..., \ d_n)$ — диагональная матрица. Это эквивалентно системе независимых уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = d_1 x_1 \\ ... \\ \dot{x}_n = d_n x_n \end{cases} \tag{8}$$

Каждое из этих уравнений имеет точное решение $x_i = C_i e^{d_i t}$. Решение расходится от 0, если $d_i > 0$, не расходится, если $d_i \leq 0$, и сходится к 0, если $d_i < 0$.

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9}$$

где матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$, где $\mathbf{D}$ — диагональная матрица.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} \tag{10}$$

Умножив уравнение на $\mathbf{V}^{-1}$, получим:
$\mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$.
Определив $\mathbf{z} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$, преобразуем уравнение: $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z}$.

Поскольку элементы $\mathbf{D}$ вещественные, очевидно что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда они *все отрицательны*. Если они неположительны, система устойчива по Ляпунову. А эти элементы являются собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$.

# Верхнетреугольные матрицы

**Собственные значения верхнетреугольных матриц**

Собственные значения верхнетреугольных матриц — это их диагональные элементы.

Примеры верхнетреугольных матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x} \tag{12}$$

где **M** — верхнетреугольная матрица с отрицательными собственными значениями $m_{1,1}$, ... $m_{n,n}$.

Последнее уравнение — $\dot{x}_n = m_{n,n} x_n$, и так как $m_{n,n} < 0$, то $\lim\limits_{t \to \infty} x_n(t) = 0$.

Уравнение № n-1: $\dot{x}_{n-1} = m_{n-1,n-1} x_{n-1} + m_{n-1,n} x_n$, и так как $m_{n-1,n-1} < 0$ и $\lim\limits_{t \to \infty} x_n(t) = 0$, мы можем наблюдать, что $\lim\limits_{t \to \infty} x_{n-1}(t) = 0$.
Это можно повторить для всех уравнений, доказывая асимптотическую устойчивость системы.

# Устойчивость автономной LTI

## Комплексные собственные значения, двумерный случай (1)

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Собственные значения системы: $\alpha \pm i\beta$. Обозначим $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$.

Начнём с утверждения, что система будет устойчива тогда и только тогда, когда $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} < 0$. Действительно, вектор $\dot{\mathbf{x}}$ всегда можно разложить на две компоненты: $\dot{\mathbf{x}}_{||}$, параллельную $\mathbf{x}$, и $\dot{\mathbf{x}}_\perp$, перпендикулярную $\mathbf{x}$. По определению $\dot{\mathbf{x}}_\perp^\top \mathbf{x} = 0$, и она отвечает за изменение направления $\mathbf{x}$. Величина $\dot{\mathbf{x}}_{||}$ отвечает за изменение длины $\mathbf{x}$; длина будет уменьшаться тогда и только тогда, когда $\dot{\mathbf{x}}_{||}$ направлена противоположно $\mathbf{x}$, что даёт отрицательное значение скалярного произведения $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x}$.

# Устойчивость автономной LTI

Вычислим $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x}$:

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = \alpha(x_1^2 + x_2^2) \tag{16}$$

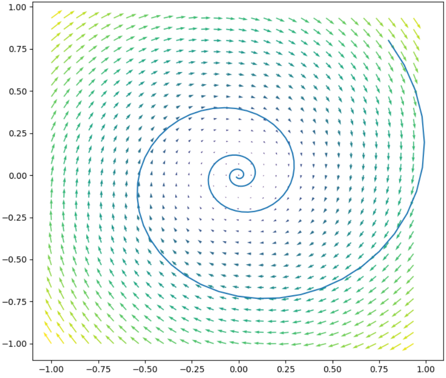
Произведение $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} < 0$ отрицательно тогда и только тогда, когда $\alpha < 0$.

**Definition**

Если *вещественные части собственных значений* системы *строго отрицательны*, система является *асимптотически устойчивой*. Если вещественные части собственных значений системы равны нулю, система является *нейтрально (маргинально) устойчивой*.

## Комплексные собственные значения, двумерный случай (3)

Векторное поле системы $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ показано ниже:



# Устойчивость автономной LTI

## Общий случай (1)

Дана система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{A}$ имеет собственное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1}$, где $\mathbf{C}$ — комплекснозначная диагональная матрица, а $\mathbf{U}$ — комплекснозначная обратимая матрица.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} \tag{17}$$

Умножаем обе стороны на $\mathbf{U}^{-1}$, затем определяем $\mathbf{z} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$, чтобы получить:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z} \tag{18}$$

Это сводится к набору независимых уравнений с комплексными коэффициентами $c_j$:

$$\dot{z}_j = c_j z_j \tag{19}$$

## Общий случай (2)

Раскрывая $c_j = \alpha + i\beta$ и $z_j = u + iv$ (для наглядности опускаем индексы), находим, что уравнение $\dot{z}_j = c_j z_j$ можно разложить как:

$$\dot{u} + i\dot{v} = \dot{z}_j = c_j z_j = (\alpha + i\beta)(u + iv) \tag{20}$$

$$\dot{u} + i\dot{v} = \alpha u + i\beta u + i\alpha v - \beta v \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{22}$$

Как мы видим, уравнение $\dot{z}_j = c_j z_j$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}(c_j) < 0$, и нейтрально устойчиво, если $\alpha = \mathrm{Re}(c_j) = 0$. То же верно для системы $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z}$ и, следовательно, для $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, так как $\mathbf{U}$ обратима.

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{23}$$

**Definition**

Ур. (23) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ отрицательны. Такая матрица $\mathbf{A}$ называется матрицей Гурвица.

**Definition**

Ур. (23) устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ неположительны, при условии, что $\mathbf{A}$ диагонализируема над $\mathbb{C}^n$.

Подробнее в приложении

Вот иллюстрация *фазовых портретов* двумерных LTI-систем с различными типами устойчивости:

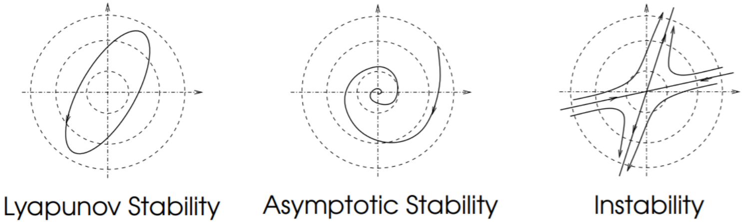
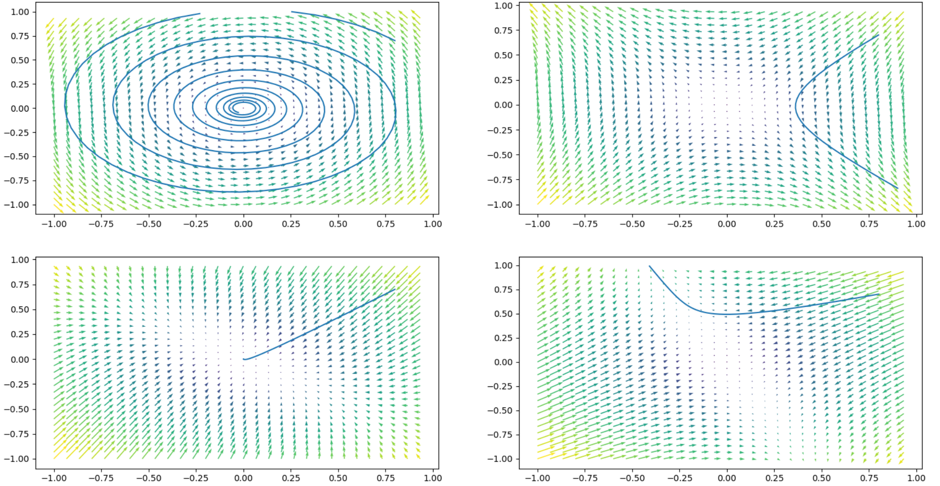



Рис. 1: Фазовые портреты для различных типов устойчивости

Источник: staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/spc/Lec13.pdf


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00

# Литература

- Control Systems Design, by Julio H. Braslavsky staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/spc/Lec13.pdf
- Stability and Eigenvalues, Steve Brunton youtu.be/h7nJ6ZL4Lf0
- MAE509 (LMIs in Control): Lecture 4, part A - Stability and Eigenvalues youtu.be/8zYOJbpiT38

Lecture slides are available via Github:

github.com/SergeiSa/Control-Theory-2026

## Жордановы клетки и устойчивость

До сих пор мы рассматривали системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где матрицы диагонализируемы над $\mathbb{C}^n$. Мы не рассматривали матрицы с нетривиальными жордановыми клетками.

Рассмотрим контрпример — матрицу $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ с двумя нулевыми собственными значениями, представляющую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Решение этой системы: $x_1(t) = x_2(0)t$ и $x_2(t) = x_2(0)$ — решение расходится, даже несмотря на нулевые собственные значения.

Мы можем уточнить критерий нейтральной (по Ляпунову) устойчивости:

**Definition**

Ур. (23) устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ неположительны, и ни одно из собственных значений с нулевой вещественной частью не связано с нетривиальной жордановой клеткой.