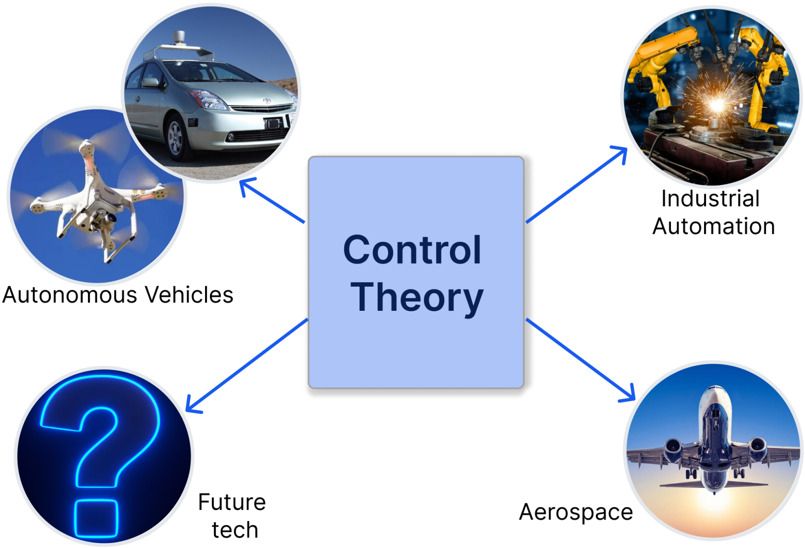
ОДУ и пространство состояний

Теория управления, лекция 1

Сергей Савин

2026

Роль теории управления



Роль этого курса

Мы изучим:

- как анализировать объекты, которыми мы можем управлять;
- каких целей можно достичь с помощью управления;
- как осуществлять управление;
- с какими проблемами мы сталкиваемся при работе с управлением и как их решать.

Это вводный курс, цель которого — подготовить базу для всех продвинутых курсов (Управление автономными транспортными средствами, Нелинейное управление и др.) требующих знания ТАУ.

Модели

Многие физические объекты, которыми мы управляем, могут быть описаны с помощью *ОДУ*.

Мы начнем этот курс с изучения того, как записывать ОДУ в форме, непосредственно полезной для целей управления, называемой представлением в *пространстве состояний*.

Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Вспомним нормальную форму *обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ — решение уравнения, а t — независимая переменная (обычно — время).

Definition

Мы можем называть ОДУ *динамической системой*, а $\mathbf{x}$ — *состоянием* динамической системы.

Example

$$\dot{x} = -2x \tag{2}$$

Состояние

Состояние динамической системы — это минимальный набор переменных, описывающий систему, в том смысле, что зная текущее состояние и все будущие входные воздействия, можно описать будущее поведение системы.

Example

Для системы пружина-демпфер переменными состояния могут быть положение и скорость массы.

Example

Для двойного маятника переменными состояния могут быть углы в сочленениях и их скорости.

ОДУ n-го порядка

Нормальная форма *обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка* имеет вид:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, \dot{y}, y, t) \tag{3}$$

где $y = y(t)$ — решение уравнения. Как и ранее, это *динамическая система*, но в этот раз нам нужно больше переменных для описания состояния этой системы, например, мы можем использовать набор $\{y,\ \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}\}$.

Example (Маятник)

$$\ddot{y} = -0.1\dot{y} - 7\sin(y) \tag{4}$$

Example (Двигатель постоянного тока при постоянном напряжении)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -100\dot{y}_2 - 2y_1 + 10 \\ \ddot{y}_2 = -0.1\dot{y}_2 + 100y_1 \end{cases} \tag{5}$$

Линейные ОДУ 1-го порядка

Система линейных ОДУ первого порядка может быть записана как:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{6}$$

Example

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -20x_1 + 7x_2 \\ \dot{x}_2 = 10x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{7}$$

Example

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 7 \\ 10 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Одно линейное ОДУ n-го порядка часто записывают в форме:

$$a_n y^{(n)} + ... + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0 \tag{9}$$

Example

$$12\,\dddot{y} + 5\dot{y} + 2y = 0 \tag{10}$$

Example

$$5\ddot{y} - \dot{y} + 10y = 0 \tag{11}$$

ОДУ с входным воздействием, часть 1

Иногда удобно записывать ОДУ в форме с *входным воздействием*, например:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u(t) \tag{12}$$

В этом уравнении $u(t)$ — функция времени. Такая форма предлагает нам много возможностей:

- Мы можем использовать $u(t)$ для моделирования *управляющего воздействия* (например, напряжения, момента двигателя), которым мы непосредственно управляем.
- Мы можем использовать $u(t)$ для моделирования внешних сил, действующих на систему.
- Мы можем подставить конкретную функцию вместо $u(t)$, например, синусоиду или ступенчатую функцию, чтобы изучить поведение системы при таком входном воздействии.

ОДУ первого порядка с входным воздействием

Некоторые примеры линейных ОДУ с одним входным воздействием:

Example

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -20y_1 + 7y_2 + u \\ \dot{y}_2 = 10y_1 - y_2 \end{cases} \tag{13}$$

Example

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 7 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{14}$$

ОДУ и пространство состояний

Общая форма линейного ОДУ n-го порядка с входным воздействием может быть представлена следующим образом:

$$a_n y^{(n)} + ... + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u(t) \tag{15}$$

Представление в пространстве состояний линейной системы с входным воздействием имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{16}$$

Обратите внимание, что в (15) u — скаляр, тогда как в (16) $\mathbf{u}$ может быть как скаляром, так и вектором.

Уравнения с выходом

Уравнения также могут иметь выход. Что означает "выход"— зависит от конкретного случая применения; это не математический вопрос, а вопрос интерпретации. Например, выход может означать:

- То, что мы измеряем (положение и ориентацию квадрокоптера, угловую скорость ротора двигателя и т.д.).
- То, что нас интересует и/или что мы хотим контролировать (высоту квадрокоптера, скорость автомобиля и т.д.)
- и другое.

Мы часто обозначаем выход как y, и он зависит от состояния системы: $y = g(\mathbf{x})$

Уравнения с выходом

Представление в пространстве состояний линейной системы с входным воздействием и выходом имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \tag{17}$$

Если $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ (т.е. если они являются скалярами), и вы хотите представить систему с выходом в виде одного ОДУ, обычно рассматривают выход как переменную ОДУ:

$$a_n y^{(n)} + ... + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u(t) \tag{18}$$

Если **u** и **y** являются скалярами, система называется *одновходовой-одновыходной (SISO)*, если они являются векторами — *многовходовой-многовыходной (MIMO)*.

Мы всегда можем выразить SISO-систему в любой из форм — ОДУ или пространство состояний.

Преобразование ОДУ в пространство состояний

Рассмотрим уравнение $\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$.

Выполним подстановку: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$. Получим:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \tag{19}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \tag{20}$$

$$\dot{x}_3 = \dddot{y} = u - a_2\ddot{y} - a_1\dot{y} - a_0 y = u - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 \tag{21}$$

Что можно непосредственно записать в форме пространства состояний:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \tag{22}$$

В общем случае следующая форма (результат преобразования ОДУ в пространство состояний) называется управляемой канонической формой:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y & = \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \tag{23}$$

Литература

- K. Ogata Modern Control Engineering (Chapter 2.4)
- Nise, N.S. Control systems engineering. John Wiley & Sons. (Chapter 3 Modeling in Time Domain)
- Dorf & Bishop, Modern Control Systems (Chapter 3.3 State differential equation)
- 2.14 Analysis and Design of Feedback Control Systems:
  - State-Space Representation of LTI Systems
  - Time-Domain Solution of LTI State Equations
- Linear Physical Systems Analysis:
  - State Space Representations of Linear Physical Systems lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepSS.html
  - Transformation: Differential Equation to State Space lpsa.swarthmore.edu/.../DE2SS.html

Lecture slides are available via Github:

github.com/SergeiSa/Control-Theory-2026

State Space to ODE

Check out the code implementation.

Мы можем далее обобщить ОДУ до следующей формы:

$$a_n y^{(n)} + ... + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = h_{n-1} u^{(n-1)} + ... + h_0 u \tag{24}$$

Мы можем представить любую[1]систему SISO в пространстве состояний в такой форме.

Сначала дифференцируем $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$ n раз:

$$\dot{y} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{B}u \tag{25}$$

$$\ddot{y} = \mathbf{C}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{u} = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}u + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{u} \tag{26}$$

$$... \tag{27}$$

$$y^{(n)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^n\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}u + ... + \mathbf{C}\mathbf{B}u^{(n-1)} \tag{28}$$

[1]система должна быть наблюдаемой.

Далее записываем характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{29}$$

$$p(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + ... + \alpha_0 = 0 \tag{30}$$

Согласно теореме Кэли-Гамильтона, $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Следовательно:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + ... + \mathbf{I}\alpha_0 = \mathbf{0} \tag{31}$$

Таким образом, мы можем выразить $\mathbf{A}^n$ как функцию младших степеней:

$$\mathbf{A}^n = -\alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - ... - \mathbf{I}\alpha_0 \tag{32}$$

Ранее мы нашли член $\mathbf{CA}^n\mathbf{x}$ в выражении для $y^{(n)}$ — единственный член, содержащий переменную состояния $\mathbf{x}$. Раскроем его, используя теорему Кэли-Гамильтона:

$$\mathbf{CA}^n\mathbf{x} = -\alpha_{n-1}\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x} - ... - \alpha_0\mathbf{Cx} \tag{33}$$

Но $\mathbf{Cx} = y$, ... , $\mathbf{CAx} = \dot{y} - \mathbf{CB}u$, и т.д. Подставляя это в выражение для $y^{(n)}$, находим ОДУ только через входно-выходные переменные (переменные состояния были исключены):

$$y^{(n)} = m_{n-1}y^{(n-1)} + ... + m_0 y + p_{n-1}u^{(n-1)} + ... + p_0 u \tag{34}$$