

Устойчивость

Теория управления, лекция 2

Сергей Савин

2026

ТОЧКА РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

Пусть \mathbf{x}_0 — такое состояние, что:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = 0 \quad (2)$$

Тогда такое состояние \mathbf{x}_0 называется *точкой равновесия, положением равновесия или критической точкой*.

УСТОЙЧИВОСТЬ

Точка равновесия \mathbf{x}_0 называется *устойчивой* (или *устойчивой по Ляпунову*) тогда и только тогда, когда для любой константы $\varepsilon > 0$ существует константа $\delta > 0$ такая, что:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \longrightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon, \quad t \in [0, \infty) \quad (3)$$

Для устойчивой точки равновесия траектории не покинут шар размера ε , если они стартуют из достаточно малой δ -окрестности. Выберите любое значение ε — всегда найдётся такое δ , что выполняется условие (3).

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Устойчивая по Ляпунову точка равновесия \mathbf{x}_0 называется *асимптотически устойчивой* тогда и только тогда, когда для некоторой константы δ верно:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

Можно думать об этом так: «для любой начальной точки, удалённой от \mathbf{x}_0 не более чем на δ , траектория $\mathbf{x}(t)$ будет асимптотически приближаться к \mathbf{x}_0 ».

Эквивалентно можно сказать: «решения, начинающиеся в δ -шаре вокруг \mathbf{x}_0 , сходятся к \mathbf{x}_0 ».

УСТОЙЧИВОСТЬ vs АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Example

Рассмотрим динамическую систему $\dot{x} = 0$ и решение $x = 7$.

Это решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво (решение, соответствующее начальному условию $x(0) = 7 + \delta$, не расходится, но и не сходится к $x = 7$).

Example

Рассмотрим динамическую систему $\dot{x} = -x$ и решение $x = 0$.

Это решение устойчиво и асимптотически устойчиво (все решения сходятся к $x = 0$).

Example

Рассмотрим динамическую систему $\dot{x} = x$ и решение $x = 0$.

Это решение неустойчиво (все остальные решения расходятся от $x = 0$).

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим следующее линейное ОДУ:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5)$$

Оно называется *линейной стационарной системой (LTI)* - матрицы **A** и **B** не зависят от времени.

Если убрать входное воздействие, получим более простое уравнение:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6)$$

Такая LTI-система является *автономной*, так как её эволюция зависит только от состояния системы.

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Вещественные собственные значения

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x} \quad (7)$$

где $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ — диагональная матрица. Это эквивалентно системе независимых уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = d_1 x_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n = d_n x_n \end{cases} \quad (8)$$

Каждое из этих уравнений имеет точное решение $x_i = C_i e^{d_i t}$. Решение расходится от 0, если $d_i > 0$, не расходится, если $d_i \leq 0$, и сходится к 0, если $d_i < 0$.

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Вещественные собственные значения

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (9)$$

где матрица \mathbf{A} имеет собственное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$,
где \mathbf{D} — диагональная матрица.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} \quad (10)$$

Умножив уравнение на \mathbf{V}^{-1} , получим:

$$\mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}.$$

Определив $\mathbf{z} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$, преобразуем уравнение: $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z}$.

Поскольку элементы \mathbf{D} вещественные, очевидно что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда они *все отрицательны*. Если они неположительны, система устойчива по Ляпунову. А эти элементы являются собственными значениями матрицы \mathbf{A} .

ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Собственные значения верхнетреугольных матриц

Собственные значения верхнетреугольных матриц — это их диагональные элементы.

Примеры верхнетреугольных матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (12)$$

где \mathbf{M} — верхнетреугольная матрица с отрицательными собственными значениями $m_{1,1}, \dots m_{n,n}$.

Последнее уравнение — $\dot{x}_n = m_{n,n}x_n$, и так как $m_{n,n} < 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$.

Уравнение № n-1: $\dot{x}_{n-1} = m_{n-1,n-1}x_{n-1} + m_{n-1,n}x_n$, и так как $m_{n-1,n-1} < 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$, мы можем наблюдать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{n-1}(t) = 0$.

Это можно повторить для всех уравнений, доказывая асимптотическую устойчивость системы.

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Комплексные собственные значения, двумерный случай (1)

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Собственные значения системы: $\alpha \pm i\beta$. Обозначим $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$.

Начнём с утверждения, что система будет устойчива тогда и только тогда, когда $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} < 0$. Действительно, вектор $\dot{\mathbf{x}}$ всегда можно разложить на две компоненты: $\dot{\mathbf{x}}_{||}$, параллельную \mathbf{x} , и $\dot{\mathbf{x}}_\perp$, перпендикулярную \mathbf{x} . По определению $\dot{\mathbf{x}}_\perp^\top \mathbf{x} = 0$, и она отвечает за изменение направления \mathbf{x} . Величина $\dot{\mathbf{x}}_{||}$ отвечает за изменение длины \mathbf{x} ; длина будет уменьшаться тогда и только тогда, когда $\dot{\mathbf{x}}_{||}$ направлена противоположно \mathbf{x} , что даёт отрицательное значение скалярного произведения $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x}$.

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Вычислим $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x}$:

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = \alpha(x_1^2 + x_2^2) \quad (16)$$

Произведение $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} < 0$ отрицательно тогда и только тогда, когда $\alpha < 0$.

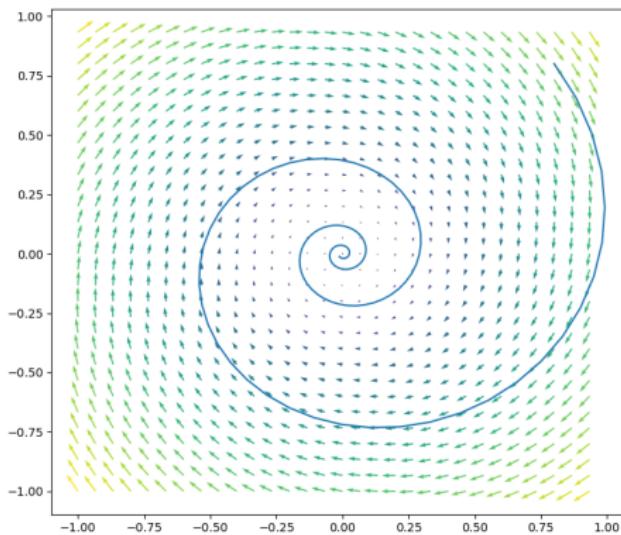
Definition

Если вещественные части собственных значений системы строго отрицательны, система является асимптотически устойчивой. Если вещественные части собственных значений системы равны нулю, система является нейтрально (маргинально) устойчивой.

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Комплексные собственные значения, двумерный случай (3)

Векторное поле системы $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ показано ниже:



УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Общий случай (1)

Дана система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где \mathbf{A} имеет собственное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1}$, где \mathbf{C} — комплекснозначная диагональная матрица, а \mathbf{U} — комплекснозначная обратимая матрица.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} \quad (17)$$

Умножаем обе стороны на \mathbf{U}^{-1} , затем определяем $\mathbf{z} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$, чтобы получить:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z} \quad (18)$$

Это сводится к набору независимых уравнений с комплексными коэффициентами c_j :

$$\dot{z}_j = c_j z_j \quad (19)$$

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Общий случай (2)

Раскрывая $c_j = \alpha + i\beta$ и $z_j = u + iv$ (для наглядности опускаем индексы), находим, что уравнение $\dot{z}_j = c_j z_j$ можно разложить как:

$$\dot{u} + i\dot{v} = \dot{z}_j = c_j z_j = (\alpha + i\beta)(u + iv) \quad (20)$$

$$\dot{u} + i\dot{v} = \alpha u + i\beta u + i\alpha v - \beta v \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (22)$$

Как мы видим, уравнение $\dot{z}_j = c_j z_j$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(c_j) < 0$, и нейтрально устойчиво, если $\alpha = \operatorname{Re}(c_j) = 0$. То же верно для системы $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z}$ и, следовательно, для $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, так как \mathbf{U} обратима.

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Условие

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (23)$$

Definition

Ур. (23) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы \mathbf{A} отрицательны. Такая матрица \mathbf{A} называется матрицей Гурвица.

Definition

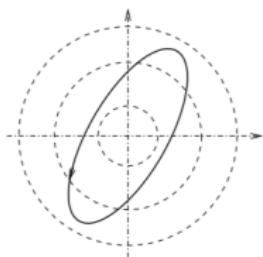
Ур. (23) устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы \mathbf{A} неположительны, при условии, что \mathbf{A} диагонализируема над \mathbb{C}^n .

Подробнее в приложении

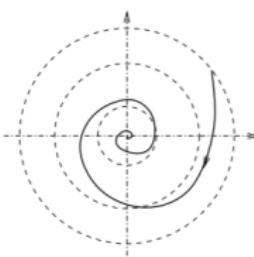
УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

Иллюстрация

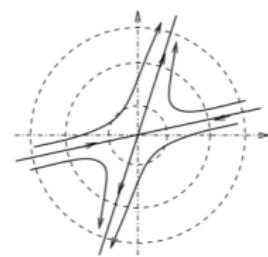
Вот иллюстрация *фазовых портретов* двумерных LTI-систем с различными типами устойчивости:



Lyapunov Stability



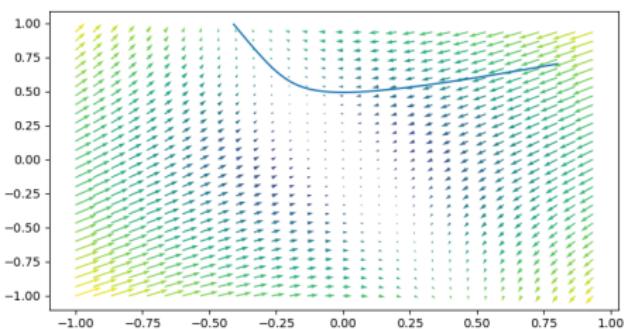
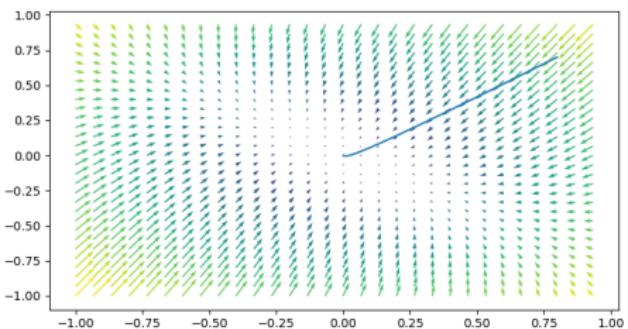
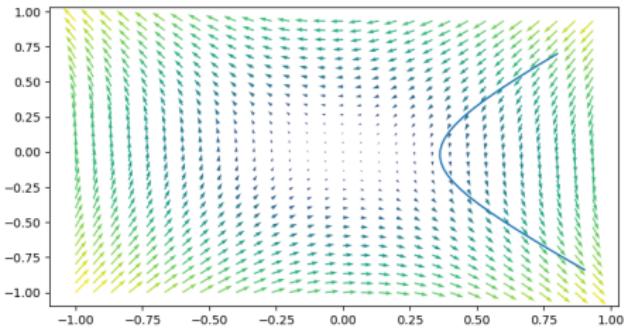
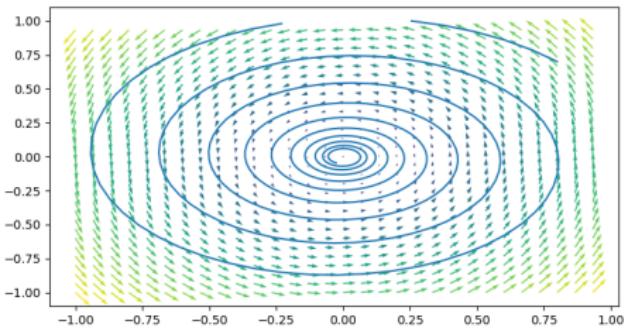
Asymptotic Stability



Instability

Рис. 1: Фазовые портреты для различных типов устойчивости

Источник: staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/spc/Lec13.pdf



- Control Systems Design, by Julio H. Braslavsky
staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/spc/Lec13.pdf
- Stability and Eigenvalues, Steve Brunton
youtu.be/h7nJ6ZL4Lf0
- MAE509 (LMIs in Control): Lecture 4, part A - Stability and Eigenvalues youtu.be/8zYOJbpiT38

Lecture slides are available via Github:

github.com/SergeiSa/Control-Theory-2026



ПРИЛОЖЕНИЕ А

Жордановы клетки и устойчивость

До сих пор мы рассматривали системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где матрицы диагонализируемы над \mathbb{C}^n . Мы не рассматривали матрицы с нетривиальными жордановыми клетками.

Рассмотрим контрпример — матрицу $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ с двумя нулевыми собственными значениями, представляющую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Решение этой системы: $x_1(t) = x_2(0)t$ и $x_2(t) = x_2(0)$ — решение расходится, даже несмотря на нулевые собственные значения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Жордановы клетки и устойчивость

Мы можем уточнить критерий нейтральной (по Ляпунову) устойчивости:

Definition

Ур. (23) устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы \mathbf{A} неположительны, и ни одно из собственных значений с нулевой вещественной частью не связано с нетривиальной жордановой клеткой.