

# Устойчивость

## Теория управления, лекция 2

Сергей Савин

2026

Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

Пусть  $\mathbf{x}_0$  — такое состояние, что:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = 0 \quad (2)$$

Тогда такое состояние  $\mathbf{x}_0$  называется *точкой равновесия*, *положением равновесия* или *критической точкой*.

Точка равновесия  $\mathbf{x}_0$  называется *устойчивой* (или *устойчивой по Ляпунову*) тогда и только тогда, когда для любой константы  $\varepsilon > 0$  существует константа  $\delta > 0$  такая, что:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \longrightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon, \quad t \in [0, \infty) \quad (3)$$

Для устойчивой точки равновесия траектории не покинут шар размера  $\varepsilon$ , если они стартуют из достаточно малой  $\delta$ -окрестности. Выберите любое значение  $\varepsilon$  — всегда найдётся такое  $\delta$ , что выполняется условие (3).

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Устойчивая по Ляпунову точка равновесия  $\mathbf{x}_0$  называется *асимптотически устойчивой* тогда и только тогда, когда для некоторой константы  $\delta$  верно:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \longrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

Можно думать об этом так: «для любой начальной точки, удалённой от  $\mathbf{x}_0$  не более чем на  $\delta$ , траектория  $\mathbf{x}(t)$  будет асимптотически приближаться к  $\mathbf{x}_0$ ».

Эквивалентно можно сказать: «решения, начинающиеся в  $\delta$ -шаре вокруг  $\mathbf{x}_0$ , сходятся к  $\mathbf{x}_0$ ».

# УСТОЙЧИВОСТЬ VS АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

## Example

Рассмотрим динамическую систему  $\dot{x} = 0$  и решение  $x = 7$ . Это решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво (решение, соответствующее начальному условию  $x(0) = 7 + \delta$ , не расходится, но и не сходится к  $x = 7$ ).

## Example

Рассмотрим динамическую систему  $\dot{x} = -x$  и решение  $x = 0$ . Это решение устойчиво и асимптотически устойчиво (все решения сходятся к  $x = 0$ ).

## Example

Рассмотрим динамическую систему  $\dot{x} = x$  и решение  $x = 0$ . Это решение неустойчиво (все остальные решения расходятся от  $x = 0$ ).

Рассмотрим следующее линейное ОДУ:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5)$$

Оно называется *линейной стационарной системой (LTI)* - матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  не зависят от времени.

Если убрать входное воздействие, получим более простое уравнение:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6)$$

Такая LTI-система является *автономной*, так как её эволюция зависит только от состояния системы.

# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

## Вещественные собственные значения

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x} \quad (7)$$

где  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  — диагональная матрица. Это эквивалентно системе независимых уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = d_1 x_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n = d_n x_n \end{cases} \quad (8)$$

Каждое из этих уравнений имеет точное решение  $x_i = C_i e^{d_i t}$ . Решение расходится от 0, если  $d_i > 0$ , не расходится, если  $d_i \leq 0$ , и сходится к 0, если  $d_i < 0$ .

# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ LTI

## Вещественные собственные значения

Рассмотрим автономную LTI-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (9)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  имеет собственное разложение  $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$ , где  $\mathbf{D}$  — диагональная матрица.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} \quad (10)$$

Умножив уравнение на  $\mathbf{V}^{-1}$ , получим:

$$\mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}.$$

Определив  $\mathbf{z} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$ , преобразуем уравнение:  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z}$ .

Поскольку элементы  $\mathbf{D}$  вещественные, очевидно что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда они *все отрицательны*. Если они неположительны, система устойчива по Ляпунову. А эти элементы являются собственными значениями матрицы  $\mathbf{A}$ .



Собственные значения верхнетреугольных матриц

Собственные значения верхнетреугольных матриц — это их диагональные элементы.

Примеры верхнетреугольных матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

# ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Рассмотрим автономную ЛТИ-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (12)$$

где  $\mathbf{M}$  — верхнетреугольная матрица с отрицательными собственными значениями  $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$ .

Последнее уравнение —  $\dot{x}_n = m_{n,n}x_n$ , и так как  $m_{n,n} < 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$ .

Уравнение № n-1:  $\dot{x}_{n-1} = m_{n-1,n-1}x_{n-1} + m_{n-1,n}x_n$ , и так как  $m_{n-1,n-1} < 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$ , мы можем наблюдать, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{n-1}(t) = 0$ .

Это можно повторить для всех уравнений, доказывая асимптотическую устойчивость системы.

# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ ЛТИ

## Комплексные собственные значения, двумерный случай (1)

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Собственные значения системы:  $\alpha \pm i\beta$ . Обозначим  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$ .

Начнём с утверждения, что система будет устойчива тогда и только тогда, когда  $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} < 0$ . Действительно, вектор  $\dot{\mathbf{x}}$  всегда можно разложить на две компоненты:  $\dot{\mathbf{x}}_{||}$ , параллельную  $\mathbf{x}$ , и  $\dot{\mathbf{x}}_{\perp}$ , перпендикулярную  $\mathbf{x}$ . По определению  $\dot{\mathbf{x}}_{\perp}^\top \mathbf{x} = 0$ , и она отвечает за изменение направления  $\mathbf{x}$ . Величина  $\dot{\mathbf{x}}_{||}$  отвечает за изменение длины  $\mathbf{x}$ ; длина будет уменьшаться тогда и только тогда, когда  $\dot{\mathbf{x}}_{||}$  направлена противоположно  $\mathbf{x}$ , что даёт отрицательное значение скалярного произведения  $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x}$ .

# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ ЛТИ

Вычислим  $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x}$ :

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} = \alpha(x_1^2 + x_2^2) \quad (16)$$

Произведение  $\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{x} < 0$  отрицательно тогда и только тогда, когда  $\alpha < 0$ .

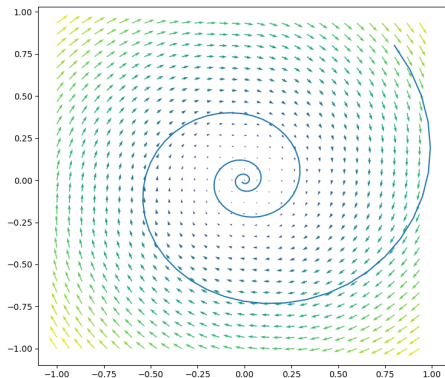
## Definition

Если вещественные части собственных значений системы строго отрицательны, система является асимптотически устойчивой. Если вещественные части собственных значений системы равны нулю, система является нейтрально (маргинально) устойчивой.

# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ ЛТИ

## Комплексные собственные значения, двумерный случай (3)

Векторное поле системы  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  показано ниже:



# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ ЛТИ

## Общий случай (1)

Дана система  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , где  $\mathbf{A}$  имеет собственное разложение  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1}$ , где  $\mathbf{C}$  — комплекснозначная диагональная матрица, а  $\mathbf{U}$  — комплекснозначная обратимая матрица.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} \quad (17)$$

Умножаем обе стороны на  $\mathbf{U}^{-1}$ , затем определяем  $\mathbf{z} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$ , чтобы получить:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z} \quad (18)$$

Это сводится к набору независимых уравнений с комплексными коэффициентами  $c_j$ :

$$\dot{z}_j = c_j z_j \quad (19)$$

# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ ЛТИ

## Общий случай (2)

Раскрывая  $c_j = \alpha + i\beta$  и  $z_j = u + iv$  (для наглядности опускаем индексы), находим, что уравнение  $\dot{z}_j = c_j z_j$  можно разложить как:

$$\dot{u} + i\dot{v} = \dot{z}_j = c_j z_j = (\alpha + i\beta)(u + iv) \quad (20)$$

$$\dot{u} + i\dot{v} = \alpha u + i\beta u + i\alpha v - \beta v \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (22)$$

Как мы видим, уравнение  $\dot{z}_j = c_j z_j$  асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда  $\operatorname{Re}(c_j) < 0$ , и нейтрально устойчиво, если  $\alpha = \operatorname{Re}(c_j) = 0$ . То же верно для системы  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z}$  и, следовательно, для  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , так как  $\mathbf{U}$  обратима.

# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ ЛТИ

## Условие

Рассмотрим автономную ЛТИ-систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (23)$$

### Definition

Ур. (23) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$  отрицательны. Такая матрица  $\mathbf{A}$  называется матрицей Гурвица.

### Definition

Ур. (23) устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$  неположительны, при условии, что  $\mathbf{A}$  диагонализируема над  $\mathbb{C}^n$ .

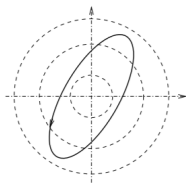
Подробнее в приложении



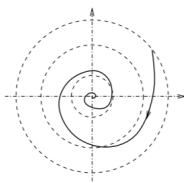
# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ ЛТИ

## Иллюстрация

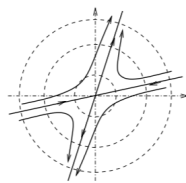
Вот иллюстрация *фазовых портретов* двумерных ЛТИ-систем с различными типами устойчивости:



Lyapunov Stability



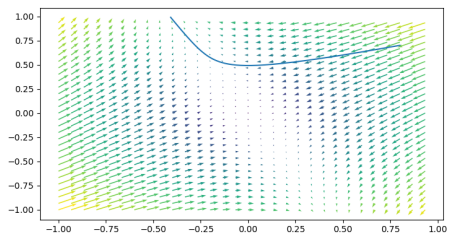
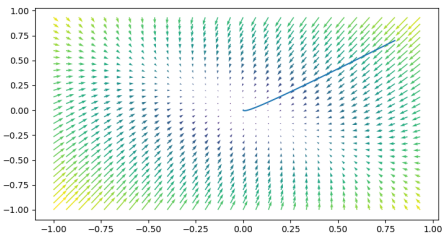
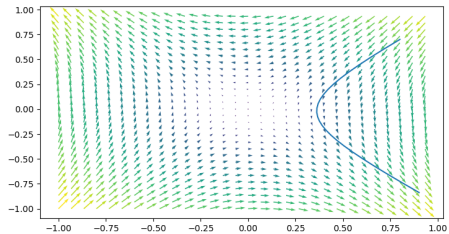
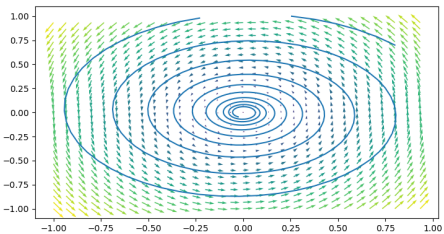
Asymptotic Stability



Instability

Рис. 1: Фазовые портреты для различных типов устойчивости

Источник: [staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/spc/Lec13.pdf](http://staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/spc/Lec13.pdf)



- Control Systems Design, by Julio H. Braslavsky  
[staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/spc/Lec13.pdf](http://staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/spc/Lec13.pdf)
- Stability and Eigenvalues, Steve Brunton  
[youtu.be/h7nJ6ZL4Lf0](https://youtu.be/h7nJ6ZL4Lf0)
- MAE509 (LMIs in Control): Lecture 4, part A - Stability and Eigenvalues [youtu.be/8zYOJbpIT38](https://youtu.be/8zYOJbpIT38)

Lecture slides are available via Github:

[github.com/SergeiSa/Control-Theory-2026](https://github.com/SergeiSa/Control-Theory-2026)



# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Жордановы клетки и устойчивость

До сих пор мы рассматривали системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , где матрицы диагонализированы над  $\mathbb{C}^n$ . Мы не рассматривали матрицы с нетривиальными жордановыми клетками.

Рассмотрим контрпример — матрицу  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  с двумя нулевыми собственными значениями, представляющую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Решение этой системы:  $x_1(t) = x_2(0)t$  и  $x_2(t) = x_2(0)$  — решение расходится, даже несмотря на нулевые собственные значения.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Жордановы клетки и устойчивость

Мы можем уточнить критерий нейтральной (по Ляпунову) устойчивости:

### Definition

Ур. (23) устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$  неположительны, и ни одно из собственных значений с нулевой вещественной частью не связано с нетривиальной жордановой клеткой.