

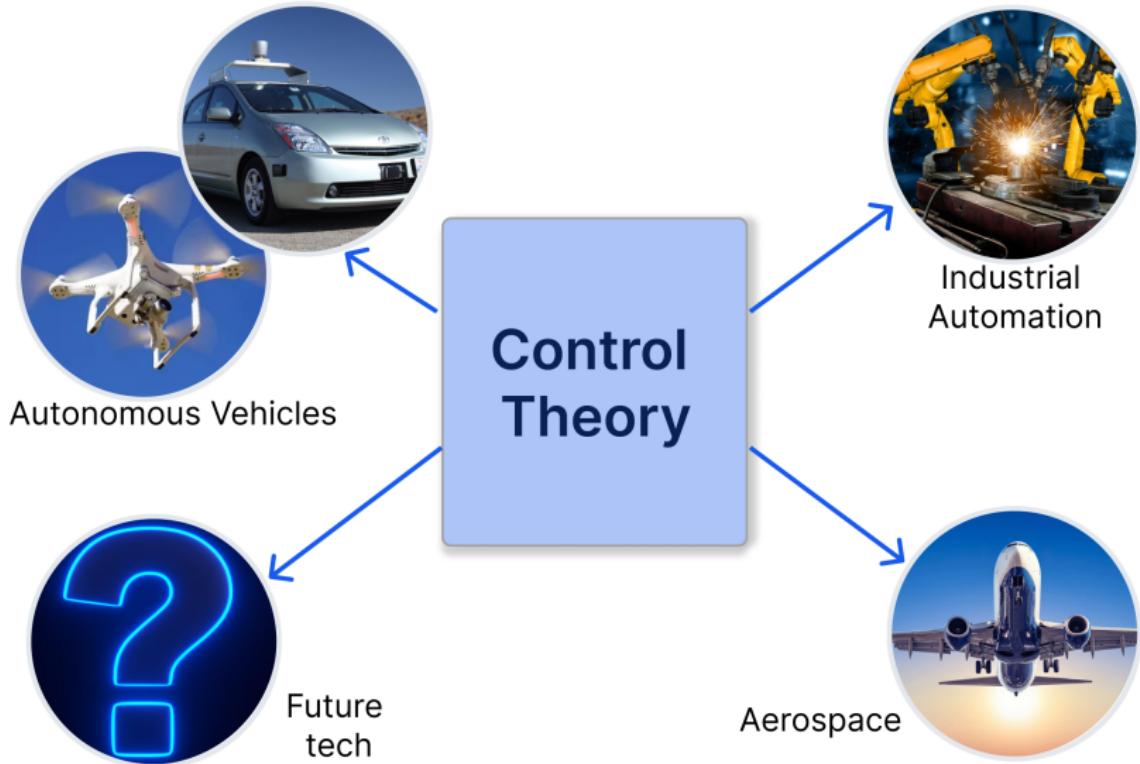
ОДУ и пространство состояний

Теория управления, лекция 1

Сергей Савин

2026

Роль ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ



Роль этого курса

Мы изучим:

- как анализировать объекты, которыми мы можем управлять;
- каких целей можно достичь с помощью управления;
- как осуществлять управление;
- с какими проблемами мы сталкиваемся при работе с управлением и как их решать.

Это вводный курс, цель которого — подготовить базу для всех продвинутых курсов (Управление автономными транспортными средствами, Нелинейное управление и др.) требующих знания ТАУ.

МОДЕЛИ

Многие физические объекты, которыми мы управляем, могут быть описаны с помощью *ОДУ*.

Мы начнем этот курс с изучения того, как записывать ОДУ в форме, непосредственно полезной для целей управления, называемой представлением в *пространстве состояний*.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

Вспомним нормальную форму *обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ — решение уравнения, а t — независимая переменная (обычно — время).

Definition

Мы можем называть ОДУ *динамической системой*, а \mathbf{x} — *состоянием* динамической системы.

Example

$$\dot{x} = -2x \quad (2)$$

СОСТОЯНИЕ

Состояние динамической системы — это минимальный набор переменных, описывающий систему, в том смысле, что зная текущее состояние и все будущие входные воздействия, можно описать будущее поведение системы.

Example

Для системы пружина-демпфер переменными состояния могут быть положение и скорость массы.

Example

Для двойного маятника переменными состояния могут быть углы в сочленениях и их скорости.

ОДУ n-ГО ПОРЯДКА

Нормальная форма *обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка* имеет вид:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, \dot{y}, y, t) \quad (3)$$

где $y = y(t)$ — решение уравнения. Как и ранее, это *динамическая система*, но в этот раз нам нужно больше переменных для описания состояния этой системы, например, мы можем использовать набор $\{y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}\}$.

Example (Маятник)

$$\ddot{y} = -0.1\dot{y} - 7 \sin(y) \quad (4)$$

Example (Двигатель постоянного тока при постоянном напряжении)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -100\dot{y}_2 - 2y_1 + 10 \\ \ddot{y}_2 = -0.1\dot{y}_2 + 100y_1 \end{cases} \quad (5)$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ 1-ГО ПОРЯДКА

Система линейных ОДУ первого порядка может быть записана как:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6)$$

Example

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -20x_1 + 7x_2 \\ \dot{x}_2 = 10x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad (7)$$

Example

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 7 \\ 10 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ N-ГО ПОРЯДКА

Одно линейное ОДУ n-го порядка часто записывают в форме:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0 \quad (9)$$

Example

$$12 \ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = 0 \quad (10)$$

Example

$$5\ddot{y} - \dot{y} + 10y = 0 \quad (11)$$

ОДУ С ВХОДНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ, ЧАСТЬ 1

Иногда удобно записывать ОДУ в форме с *входным воздействием*, например:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u(t) \quad (12)$$

В этом уравнении $u(t)$ — функция времени. Такая форма предлагает нам много возможностей:

- Мы можем использовать $u(t)$ для моделирования *управляющего воздействия* (например, напряжения, момента двигателя), которым мы непосредственно управляем.
- Мы можем использовать $u(t)$ для моделирования внешних сил, действующих на систему.
- Мы можем подставить конкретную функцию вместо $u(t)$, например, синусоиду или ступенчатую функцию, чтобы изучить поведение системы при таком входном воздействии.

ОДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ВХОДНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Некоторые примеры линейных ОДУ с одним входным воздействием:

Example

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -20y_1 + 7y_2 + u \\ \dot{y}_2 = 10y_1 - y_2 \end{cases} \quad (13)$$

Example

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 7 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (14)$$

ОДУ И ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ

Общая форма линейного ОДУ n-го порядка с входным воздействием может быть представлена следующим образом:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u(t) \quad (15)$$

Представление в пространстве состояний линейной системы с входным воздействием имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (16)$$

Обратите внимание, что в (15) u — скаляр, тогда как в (16) \mathbf{u} может быть как скаляром, так и вектором.

УРАВНЕНИЯ С ВЫХОДОМ

Уравнения также могут иметь выход. Что означает "выход"— зависит от конкретного случая применения; это не математический вопрос, а вопрос интерпретации. Например, выход может означать:

- То, что мы измеряем (положение и ориентацию квадрокоптера, угловую скорость ротора двигателя и т.д.).
- То, что нас интересует и/или что мы хотим контролировать (высоту квадрокоптера, скорость автомобиля и т.д.)
- и другое.

Мы часто обозначаем выход как y , и он зависит от состояния системы: $y = g(\mathbf{x})$

УРАВНЕНИЯ С ВЫХОДОМ

Представление в пространстве состояний линейной системы с входным воздействием и выходом имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (17)$$

Если $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ (т.е. если они являются скалярами), и вы хотите представить систему с выходом в виде одного ОДУ, обычно рассматривают выход как переменную ОДУ:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u(t) \quad (18)$$

Если \mathbf{u} и \mathbf{y} являются скалярами, система называется *одновходовой-одновыходной (SISO)*, если они являются векторами — *многовходовой-многовыходной (MIMO)*.

Мы всегда можем выразить SISO-систему в любой из форм — ОДУ или пространство состояний.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДУ В ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим уравнение $\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y + a_0u = u$.

Выполним подстановку: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$. Получим:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \tag{19}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \tag{20}$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\dot{y}} = u - a_2\ddot{y} - a_1\dot{y} - a_0y = u - a_2x_3 - a_1x_2 - a_0x_1 \tag{21}$$

Что можно непосредственно записать в форме пространства состояний:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \tag{22}$$

УПРАВЛЯЕМАЯ КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА

В общем случае следующая форма (результат преобразования ОДУ в пространство состояний) называется управляемой канонической формой:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \quad (23)$$

ЛИТЕРАТУРА

- K. Ogata Modern Control Engineering (Chapter 2.4)
- Nise, N.S. Control systems engineering. John Wiley & Sons.
(Chapter 3 Modeling in Time Domain)
- Dorf & Bishop, Modern Control Systems (Chapter 3.3
State differential equation)
- 2.14 Analysis and Design of Feedback Control Systems:
 - ▶ State-Space Representation of LTI Systems
 - ▶ Time-Domain Solution of LTI State Equations
- Linear Physical Systems Analysis:
 - ▶ State Space Representations of Linear Physical Systems
lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepSS.html
 - ▶ Transformation: Differential Equation to State Space
lpsa.swarthmore.edu/.../DE2SS.html

Lecture slides are available via Github:

github.com/SergeiSa/Control-Theory-2026



STATE SPACE TO ODE

Check out the code implementation.



ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование из пространства состояний в ОДУ

Мы можем далее обобщить ОДУ до следующей формы:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = h_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + h_0 u \quad (24)$$

Мы можем представить любую¹ систему SISO в пространстве состояний в такой форме.

Сначала дифференцируем $y = \mathbf{Cx}$ n раз:

$$\dot{y} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{CAx} + \mathbf{Bu} \quad (25)$$

$$\ddot{y} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}} + \mathbf{CBu} = \mathbf{CA}^2\mathbf{x} + \mathbf{CABu} + \mathbf{CBu} \quad (26)$$

$$\dots \quad (27)$$

$$y^{(n)} = \mathbf{CA}^n\mathbf{x} + \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{Bu} + \dots + \mathbf{CBu}^{(n-1)} \quad (28)$$

¹ система должна быть наблюдаемой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование из пространства состояний в ОДУ

Далее записываем характеристическое уравнение матрицы \mathbf{A} :

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (29)$$

$$p(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \quad (30)$$

Согласно теореме Кэли-Гамильтона, $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Следовательно:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \mathbf{I}\alpha_0 = \mathbf{0} \quad (31)$$

Таким образом, мы можем выразить \mathbf{A}^n как функцию младших степеней:

$$\mathbf{A}^n = -\alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - \mathbf{I}\alpha_0 \quad (32)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование из пространства состояний в ОДУ

Ранее мы нашли член $\mathbf{CA}^n \mathbf{x}$ в выражении для $y^{(n)}$ — единственный член, содержащий переменную состояния \mathbf{x} . Раскроем его, используя теорему Кэли-Гамильтона:

$$\mathbf{CA}^n \mathbf{x} = -\alpha_{n-1} \mathbf{CA}^{n-1} \mathbf{x} - \dots - \alpha_0 \mathbf{Cx} \quad (33)$$

Но $\mathbf{Cx} = y, \dots, \mathbf{CAx} = \dot{y} - \mathbf{CBu}$, и т.д. Подставляя это в выражение для $y^{(n)}$, находим ОДУ только через входно-выходные переменные (переменные состояния были исключены):

$$y^{(n)} = m_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + m_0 y + p_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + p_0 u \quad (34)$$