Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2

По предмету: «Математическая статистика»

***Тема:* «Интервальные оценки»**

Преподаватели: Волков И. К.,
Власов П. А.,
Студент: Мирзоян С.А.,
Группа: ИУ7-65Б
Вариант: 12

Москва, 2020 г.

Введение

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   a. вычисление точечных оценок $\mu(X_n)$ и $S^2(X_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   b. вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(X_n)$, $\overline{\mu}(X_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

   c. вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(X_n)$, $\overline{\sigma}^2(X_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания DX;

2. вычислить μ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:

   a. на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \mu(x_N)$, также графики функций $y = \mu(x_n)$, $y = \overline{\mu}(x_n)$ и $y = \underline{\mu}(x_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   b. на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(x_N)$, также графики функций $z = S^2(x_n)$, $z = \overline{\sigma}^2(x_n)$ и $z = \underline{\sigma}^2(x_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Теоретическая часть

В данной части рассмотрены формулы для вычисления величин, границ γ-доверительного интервала, а также определение γ-доверительного интервала.

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной

интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\theta(\overrightarrow{X_n})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) \ < \ \theta \ < \ \overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})\ \} \ = \ \gamma. \ (1)$$

1.2 Формулы для вычисления величин

Оценка математического ожидания:

$$\hat{\mu}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \ \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Несмещённая оценка дисперсии:

$$S^2 = \left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

Выборочная дисперсия:

$$\hat{\sigma}^2\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

1.3 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала

Пусть X_n — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

Оценка для математического ожидания при известной дисперсии

$$\underline{\mu}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \overline{X} + \frac{S\left(\overrightarrow{X_n}\right)}{\sqrt{n}} h_\alpha^t(n-1)$$

$$\overline{\mu}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \overline{X} + \frac{S\left(\overrightarrow{X_n}\right)}{\sqrt{n}} h_{1-\alpha}^t(n-1)$$

где $\overline{X_n}$ — оценка математического ожидания, n — объем выборки,

$S(X_n)$ — точечная оценка дисперсии случайной выборки X_n,

$h_\alpha^t(n-1)$ — квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma^2}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{(n-1) * S^2\left(\overrightarrow{X_n}\right)}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$$

$$\overline{\sigma^2}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{(n-1) * S^2\left(\overrightarrow{X_n}\right)}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$$

где n — объем выборки,$S(X_n)$ — точечная оценка дисперсии случайной выборки X_n,

$\chi^2_\alpha(n-1)$ — квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

Листинг

```
function lab2()
    clear all;

    %Мат. ожидание
    function mu = expect(X)
        mu = mean(X); %mean - арифмитичекое среднее элементов массива
    end
    %Дисперсия
    function sSqr = variance(X)
            sSqr = var(X); %var - возвращает дисперсию ээлементов массива
        end
        %Массив мат. ожиданий
        function muArray = expectMas(X, N)
            muArray = [];
            for i = N
                muArray = [muArray, mean(X(1:i))];
            end
        end
        %Массив дисперсий
        function varArray = varianceArray(X, N)
            varArray = [];
            for i = N
                varArray = [varArray, var(X(1:i))];
            end
        end

        X = [11.89,9.60,9.29,10.06,9.50,8.93,9.58,6.81,8.69,9.62,9.01,10.59,10.50,11.53,9.94,8.84,8.91,6.90,9.76,7.09,11.29,11.25,10.84,10.76,7.42,8.49,10.10,8.79,11.87,8.77,9.43,12.41,9.75,8.53,9.72,9.45,7.20,9.23,8.93,9.15,10.19,9.57,11.09,9.97,8.81,10.73,9.57,8.53,9.21,10.08,9.10,11.03,10.10,9.47,9.72,9.60,8.21,7.78,10.21,8.99,9.14,8.60,9.14,10.95,9.33,9.98,9.09,10.35,8.61,9.35,10.04,7.85,9.64,9.99,9.65,10.89,9.08,8.60,7.56,9.27,10.33,10.09,8.51,9.86,9.24,9.63,8.67,8.85,11.57,9.85,9.27,9.69,10.90,8.84,11.10,8.19,9.26,9.93,10.15,8.42,9.36,9.93,9.11,9.07,7.21,8.22,9.08,8.88,8.71,9.93,12.04,10.41,10.80,7.17,9.00,9.46,10.42,10.43,8.38,9.01];
```

```

N = 10:100;
%N = 1:40

gamma = 0.99;
alpha = (1 - gamma)/2;

%Подсчет мат.ожидания и дисперсии
mu = expect(X);
sSqr = variance(X);

muArray = expectMas(X, N);
varArray = varianceArray(X, N);

figure
plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'm');
hold on;
plot(N, muArray, 'g');

%tinv - возвращает обратную кумулятивную функцию распределения
%(icdf) распределения t Студента
Ml = muArray - sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
Mh = muArray + sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);

plot(N, Ml, 'b');
plot(N, Mh, 'r');
grid on;
hold off;

fprintf('μ = %.2f\n', mu);
fprintf('S^2 = %.2f\n\n', sSqr);
fprintf('μ_low = %.2f\n', Ml(end));
fprintf('μ_high = %.2f\n', Mh(end));


figure
plot([N(1), N(end)], [sSqr, sSqr], 'm');
hold on;

```

```
        %chi2inv - возвращает обратную кумулятивную функцию распределения
        %(icdf) распределения хи-квадрат со степенями свободы nu
        Sl = varArray.*(N - 1)./chi2inv(1 - alpha, N - 1);
        Sh = varArray.*(N - 1)./chi2inv(alpha, N - 1);
        plot(N, varArray, 'g');
        plot(N, Sl, 'b');
        plot(N, Sh, 'r');
        grid on;
        hold off;
        fprintf('sigma^2_low = %.2f\n', Sl(end));
        fprintf('sigma^2_high = %.2f\n', Sh(end));
    end
```

Результат работы программы

$\mu\left(\overrightarrow{X_n}\right) = 9.49$

$S^2 = 1.22$

$\overline{\mu} = 9.81$

$\underline{\mu} = 9.23$

$\overline{\sigma}^2 = 1.78$

$\underline{\sigma}^2 = 0.85$

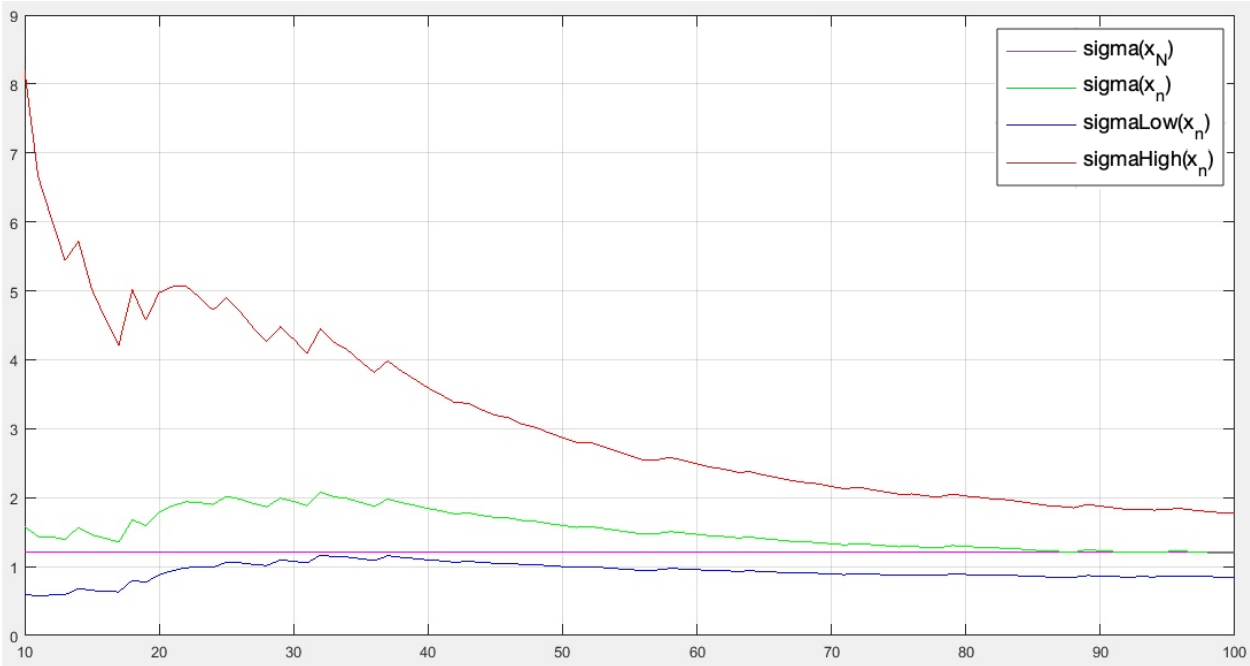

Рис.1 Оценка для дисперсии

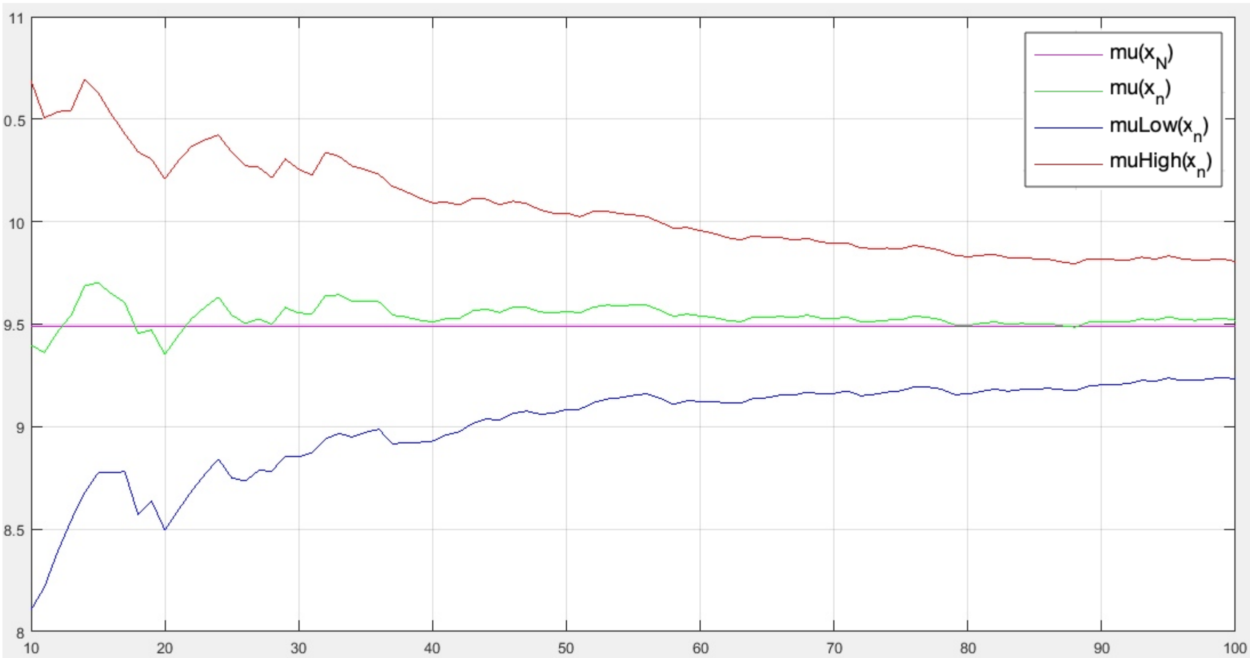

Рис. 2 Оценка для математического ожидания