Рубежный контроль №1
по математической статистике
Мирзоян Сергей Азатович
ИУ7-65Б 14.05.2020 г.
общее количество листов в работе: 2

№1

U – непр. сл. вел. $f_U(u)=\frac{2\lambda^2}{u^3}$, $u\geq\lambda$, где $\lambda>0$, $u\geq\lambda$ неизвестно. Для оценки λ: $\hat{\lambda}(\vec{U})=\frac{2n-1}{2n}\min\limits_{k=\overline{1,n}}\{U_k\}$

а) ~~с~~ несмещенная?

б) эффективная ли по Рао-Крамеру?

Решение:

а) $F_U(u)=\int\limits_{\lambda}^{u}\frac{2\lambda^2}{u^3}du=2\lambda^2\int\limits_{\lambda}^{u}\frac{du}{u^3}=2\lambda^2\left(-\frac{1}{2u^2}+\frac{1}{2\lambda^2}\right)=$

$=1-\frac{\lambda^2}{\cancel{2}u^2}$

$Y=\min U$

~~$f_Y(y)=2\lambda^{2n}$~~

$F_Y(y)=1-\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-1+\frac{\lambda^2}{2y^2}\right)=1-\frac{\lambda^{2n}}{2y^{2n}}$

$f_Y(y)=\cancel{\frac{(2n)\lambda^{2n}}{2x}}\ \frac{2n\lambda^{2n}}{2y^{2n+1}}=\frac{n\lambda^{2n}}{y^{2n+1}}$

$M[Y]=\int\limits_{\lambda}^{+\infty}y\frac{n\lambda^{2n}}{y^{2n+1}}dy=n\lambda^{2n}\int\limits_{\lambda}^{+\infty}\frac{1}{y^{2n}}dy=-\frac{n\lambda^{2n}}{y^{2n+1}(2n+1)}\neq\lambda\Rightarrow$

$\Rightarrow$ смещенная.

б) $e(\hat{\lambda})=\frac{1}{I(\lambda)D[\hat{\lambda}]}=1$

$I(\lambda)=M\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\ln\frac{2\lambda^2}{u^3}\right)\right]^2\right\}=M\left\{\left[-\frac{3}{\lambda}\right]^2\right\}=\frac{9}{\lambda^2}$

$D[\hat{\lambda}]=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\min\{U_k\}\right)^2=\frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\sum\limits_{k=1}^{n}(\min\{U_k\})^2=\frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\cdot n\cdot(\min\{U_k\}^2)=$

$=\left(\frac{2n-1}{2n}\min\{U_k\}\right)^2$ ~~$-(M\hat{\lambda}(\vec{U}))^2$~~ $=\left(\frac{2n-1}{2n}\min\{U_k\}\right)^2-\left(\frac{2n-1}{2n}\min\{U_k\}\right)^2=0$

$D\hat{\lambda}(\vec{U})=M\hat{\lambda}^2(\vec{U})$

Ответ: а) смещенная, б) –

№2

$X \sim N(m, \sigma^2)$, m и σ^2 – неизвестны.

$\gamma = 0{,}99$, $n = 11$, $\bar{x} = 4{,}32$, $S^2(\vec{X}) = 2.25$

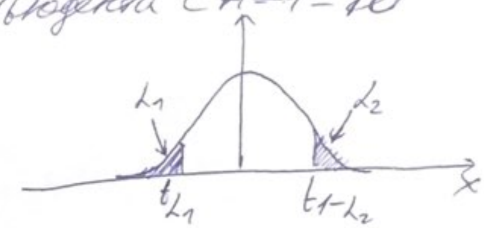
Построить доверительный интервал для m.

Решение:

$\gamma = P\{t_{\alpha_1} < T(\vec{X}, m) < t_{1-\alpha_2}\}$, где $t_{\alpha_1}, t_{1-\alpha_2}$ – квантили соотв. уровней распр-я Стьюдента с $n-1=10$

Центральная статистика:

$\frac{m-\bar{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1)$



$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$$

$$\gamma = P\left\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m-\bar{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

$$\gamma = P\left\{\bar{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t < m < \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

$$\underline{m} = \bar{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{\frac{\gamma+1}{2}}$$

$$\overline{m} = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{\frac{\gamma+1}{2}}$$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}99}{2} = 0{,}995$$

$$t_{0{,}995} = t_{0{,}005} = 3.1693$$

$$\frac{S(\vec{X}_n) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2.25} \cdot 3{,}1693}{\sqrt{11}} \approx 1{,}4305$$

$$\underline{m} = 4{,}32 - 1{,}43 = 2{,}89$$

$$\overline{m} = 5{,}75$$

Ответ: $\underline{m} = 2{,}89$, $\overline{m} = 5{,}75$