Санкт-Петербургский Политехнический Университет
им. Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра "Прикладная математика"

Отчёт
Лабораторная работа № 5
по дисциплине
"Математическая статистика"

Выполнил студент:
Шарапов Сергей Андреевич
группа: 3630102/70401

Проверил:
к.ф-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020 год

Содержание

1 Список иллюстраций

2 Список таблиц

3 Постановка задачи

Сгенерировать двумерные выборки размерами $20, 60, 100$ для двумерного нормального распределения $N(x, y, 0, 0, 1, 1, \rho)$.

Коэффициент корреляции ρ взять равным $0, 0.5, 0.9$.

Каждая выборка генерируется 1000 раз и для неё вычисляются: среднее значение, среднее значение квадрата и дисперсия коэффициентов корреляции Пирсона, Спирмена и квадрантного коэффициента корреляции. Повторить все вычисления для смеси нормальных распределений:

$$f(x, y) = 0.9N(x, y, 0, 0, 1, 1, 0.9) + 0.1N(x, y, 0, 0, 10, 10, -0.9) \tag{1}$$

Изобразить сгенерированные точки на плоскости и нарисовать эллипс равновероятности.

4 Теория

1. Двумерное нормально распределение:

$$N(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}]) \tag{2}$$

2. Коэффициент корреляции Пирсона:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2\frac{1}{n}\sum(y_i-\bar{y})^2}} \tag{3}$$

3. Квадрантный коэффициент корреляции:

$$r_Q = \frac{(n_1+n_3)-(n_2+n_4)}{n} \tag{4}$$

где n_1, n_2, n_3, n_4 – количества точек с координатами (x_i, y_i), попавшими соответственно в I,II,III и IV квадранты декартовой системы с осями $x' = x - medx, y' = y - medy$ и с центром в точке с координатами$(medx, medy)$

4. Коэффициент корреляции Спирмана:

$$r_S = \frac{\frac{1}{n}\sum(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(u_i-\bar{u})^2\frac{1}{n}\sum(v_i-\bar{v})^2}} \tag{5}$$

где u и v – ранги, соотвествующие значениям переменной X и Y соответственно.

5 Реализация

Работы была выполнена на языке $Python3.8.2$ Для генерации выборок использовался модуль модуль *stats* библиотеки *scipy*. Для построения графиков использовалась библиотека matplotlib.

6 Результаты

Таблица 1: Двумерное нормальное распределение, $n = 20$

$\rho = 0$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	0.009	0.001	0.004
$E(z^2)$	0.05	0.05	0.05
$D(z)$	0.05	0.05	0.05
$\rho = 0.5$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	0.49	0.46	0.32
$E(z^2)$	0.27	0.25	0.15
$D(z)$	0.03	0.03	0.05
$\rho = 0.9$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	0.893	0.865	0.69
$E(z^2)$	0.801	0.754	0.5
$D(z)$	0.003	0.05	0.03

Таблица 2: Двумерное нормальное распределение, $n = 60$

$\rho = 0$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	-0.003	-0.004	-0.0004
$E(z^2)$	0.02	0.2	0.02
$D(z)$	0.02	0.02	0.02
$\rho = 0.5$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	0.497	0.47	0.33
$E(z^2)$	0.257	0.24	0.13
$D(z)$	0.009	0.01	0.02
$\rho = 0.9$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	0.8984	0.883	0.706
$E(z^2)$	0.8078	0.782	0.508
$D(z)$	0.0007	0.001	0.009

Таблица 3: Двумерное нормальное распределение, $n = 100$

$\rho = 0$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	-0.004	-0.004	-0.001
$E(z^2)$	0.01	0.01	0.01
$D(z)$	0.01	0.01	0.01
$\rho = 0.5$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	0.499	0.481	0.329
$E(z^2)$	0.254	0.237	0.118
$D(z)$	0.005	0.006	0.009
$\rho = 0.9$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	0.8981	0.8841	0.708
$E(z^2)$	0.8071	0.7823	0.506
$D(z)$	0.0004	0.0007	0.004

Таблица 4: Смесь нормальных распределений

$n = 20$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	-0.09	-0.09	-0.06
$E(z^2)$	0.05	0.06	0.06
$D(z)$	0.05	0.05	0.05
$n = 60$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	-0.09	-0.004	-0.06
$E(z^2)$	0.03	0.02	0.02
$D(z)$	0.02	0.02	0.02
$n = 100$	Pearson	Spearman	Quad
$E(z)$	-0.094	-0.079	-0.06
$E(z^2)$	0.018	0.016	0.01
$D(z)$	0.009	0.009	0.01

Рис. 1: Графики двумерного нормального распределения и смеси для размера выборки $n = 20$

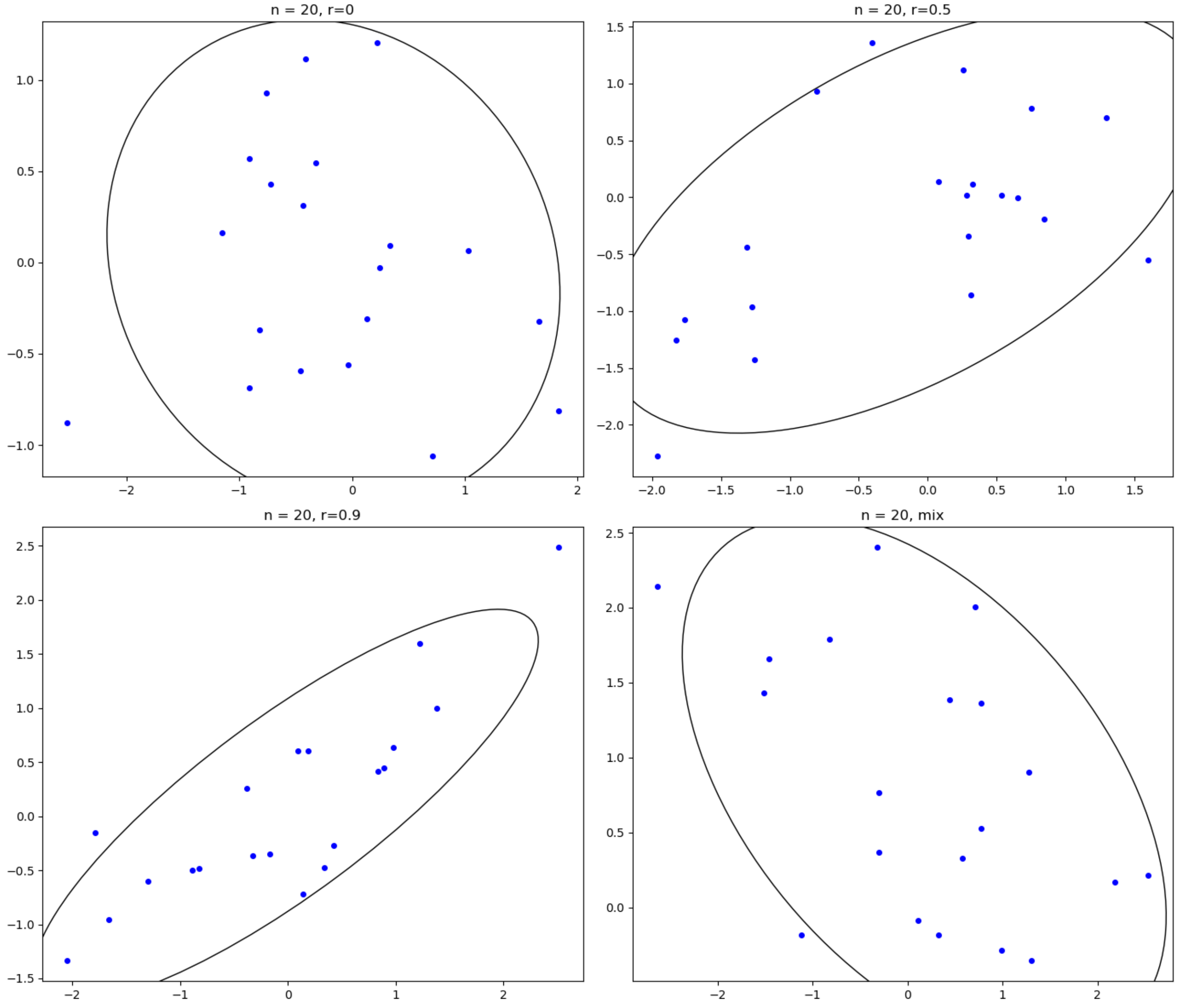


Рис. 2: Графики двумерного нормального распределения и смеси для размера выборки $n = 60$

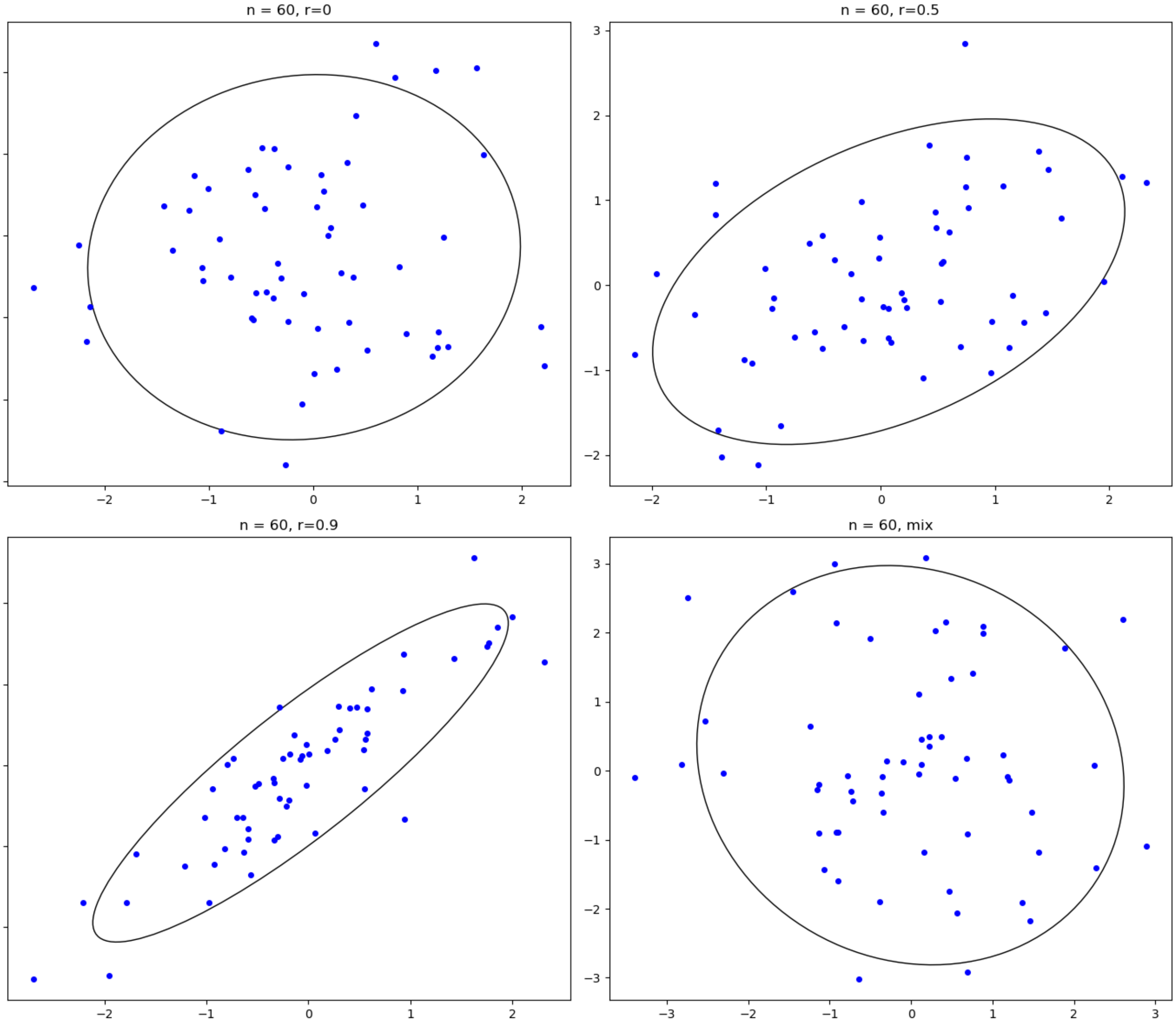


Рис. 3: Графики двумерного нормального распределения и смеси для размера выборки $n = 100$

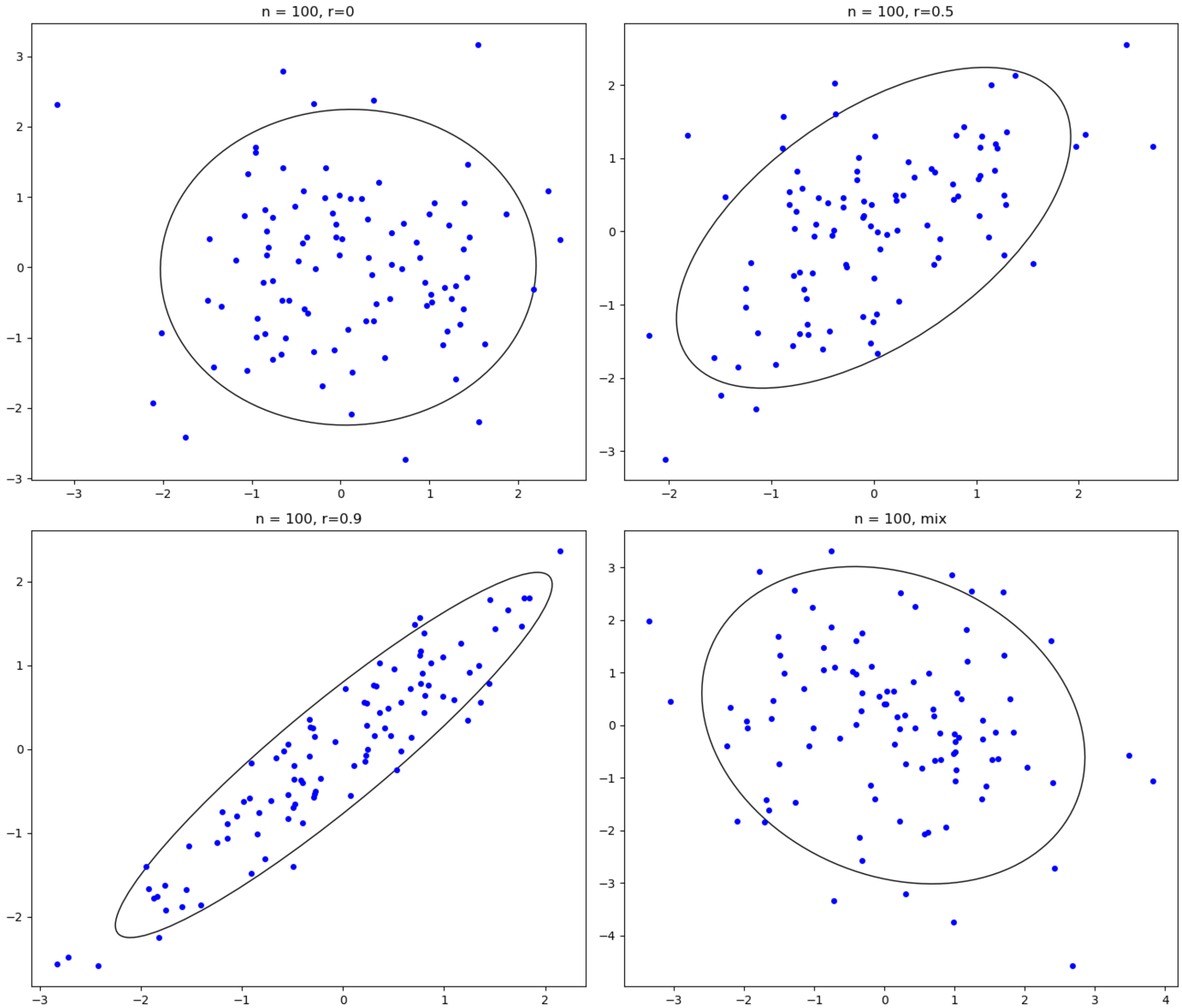


Рис. 4: Графики эллипса рассеивания для двумерного нормального распределения для 2 точек

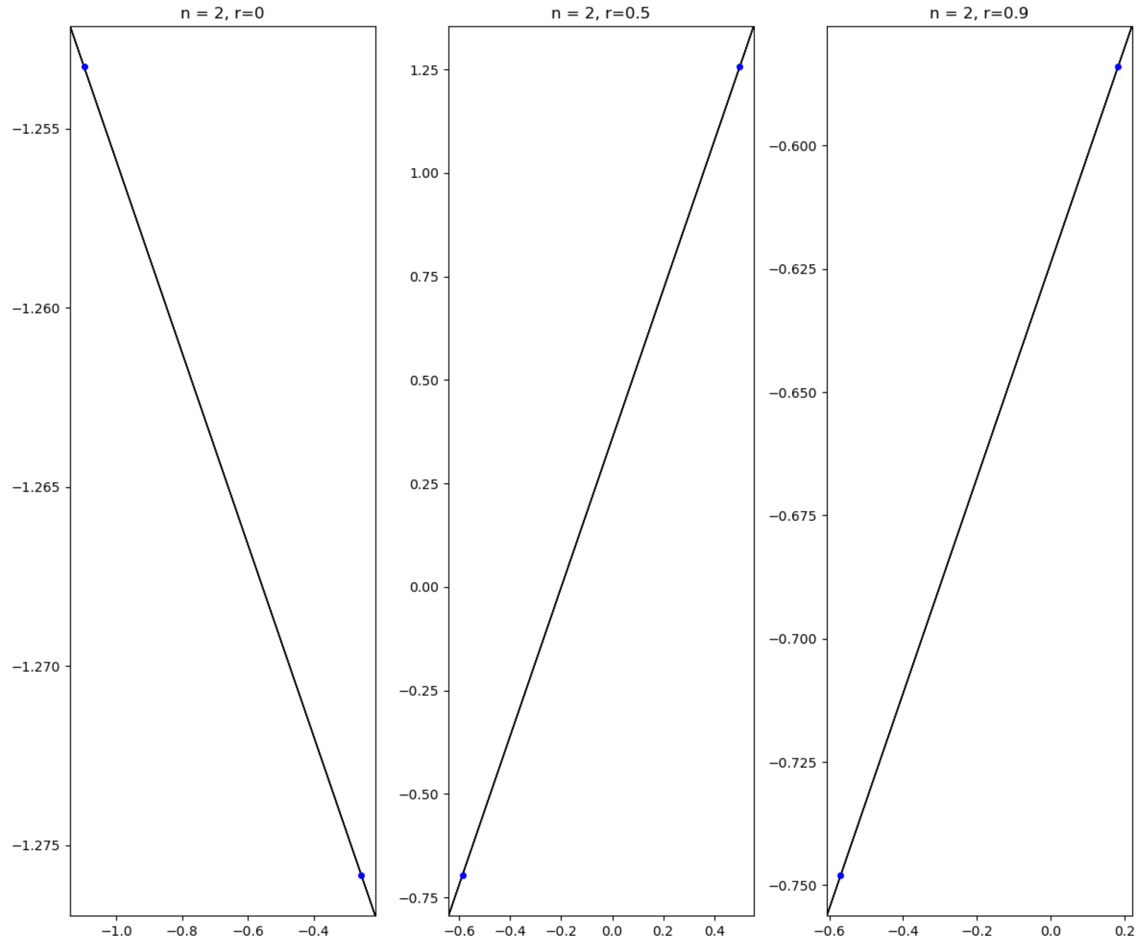
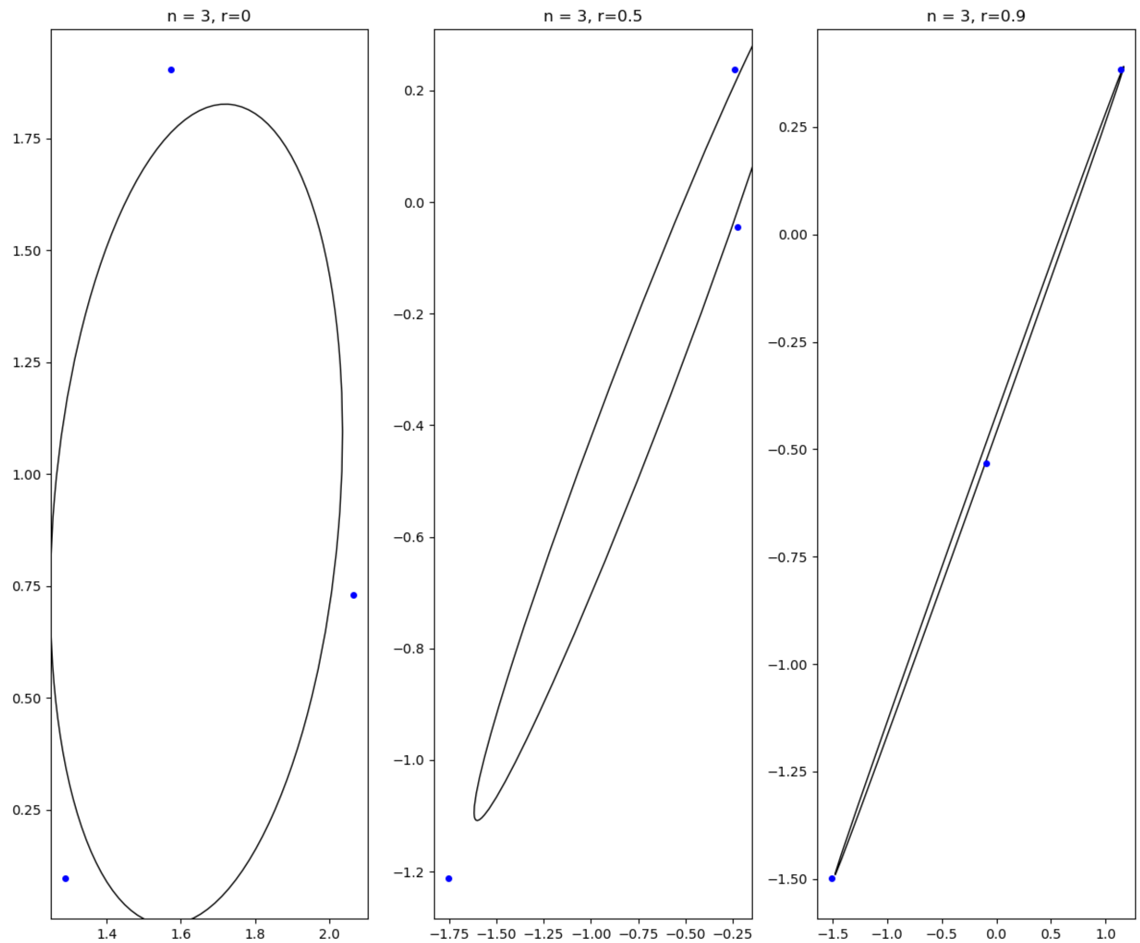


Рис. 5: Графики эллипса рассеивания для двумерного нормального распределения для 3 точек



7 Выводы

По графикам, видно, что, при увеличении объёма выборки, подсчитанные коэффициенты корреляции стремятся к теоретическим.

Ближе всего к теоретическому коэффициенту корреляции находится коэффициент Пирсона.

По графикам также видно, что при уменьшении корреляции эллипс равновероятности стремится к окружности, а при увеличении растягивается, стремясь к прямой.

Из графиков наглядно видно, что для построения эллипса рассеивания необходимое минимальное число событий в выборке – 3 события, так как 2 точки (2 события) вырождаются в прямую линию (для 2 точек мы всегда можем перейти в систему координат, где у одной из компонент вектора (x,y) будет 0 мат. ожидание и 0 дисперсия, то есть переходим в одномерный случай).

8 Литература

Модуль numpy

Модуль matplotlib

Модуль scipy

9 Приложения

Код лабораторной