Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Кафедра общей физики

Лабораторная работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Выполнили:
Ткаченко Сергей,
Кукуджанов Алексей

10 сентября 2019 г.

1 Цель работы

Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно - модулированных гармонических колебаний.

2 Теоретический материал

2.1 Спектральный анализ

Рассмотрим функцию вида:

$$f(t) = A_1 cos(\omega_1 t - \alpha_1) + ... + A_n cos(\omega_n t - \alpha_n)$$

или, что то же самое:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i cos(\omega_i t - \alpha_i)$$

Причем, A_i, ω_i, α_i - постоянные константы. Множество пар (ω_i, A_i), $i \in 1..N$ - называется спектром функции $f(t)$.

2.2 Периодические сигналы

Часто встречаемая задача - разложение сложного сигнала на гармонические колебания различных частот ω. Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется *разложением в ряд Фурье.*

Пусть заданная функция $f(t)$ - периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения сигнала $f(t)$ Её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t) \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n) \tag{2}$$

где $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$. Постоянные a_n и b_n определяются выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t)\, dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t)\, dt \tag{4}$$

причем точку t_1 можно выбрать любую.

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{5}$$

$$\psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \tag{6}$$

3 Работа и измерения

Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

V_0 - амплитуда, τ - длительность, $f_{\text{повт}} = \frac{2\pi}{T}$ - частота повторения.

Согласно формуле 3 находим:

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0\,dt = V_0\frac{\tau}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0\cos(nf_{\text{повт}}t)\,dt \sim \frac{\sin(x)}{x} \tag{7}$$

В силу чётности функции $\forall n \in N\ b_n = 0$. Таким образом, спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов должен выглядеть как график $\frac{\sin(x)}{x}$.

Работа

В работе используются: *анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф*

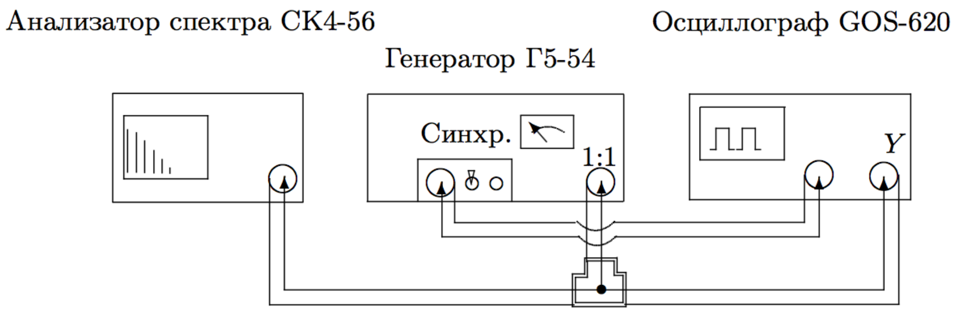

Рис. 1: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Собираем схему согласно 1. Получаем на экране осциллографа последовательность периодических прямоугольных импульсов. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала с параметрами:

$$f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}, \tau = 25 \text{ мкс}, m_x = 5 \text{ кГц}$$

При увеличении частоты повторений $f_{\text{повт}}$ вдвое при неизменном τ, увеличивается расстояние $\delta\nu$. При увеличении τ вдвое при неизменной частоте повторений, уменьшается ширина спектра, в соответствии с соотношением неопределенности: $\Delta\nu\tau \simeq 1$.

Измерения

$$\sigma\Delta\nu = 2.5 \text{ кГц}$$

τ, мкс	25	30	35	40	50	60	70	90	110	130	150	170	200
x, клеток	9	7	6	5	4	3,3	2,9	2,3	1,8	1,5	1,5	1,2	1
$\Delta\nu$, кГц	45	35	30	25	20	16,5	14,5	11,5	9	7,5	7,5	6	5
$1/\tau$, кГц	40,0	33,3	28,6	25,0	20,0	16,7	14,3	11,1	9,1	7,7	6,7	5,9	5,0

Таблица 1: Зависимость ширины $\Delta\nu$ спектра от длительности импульса τ

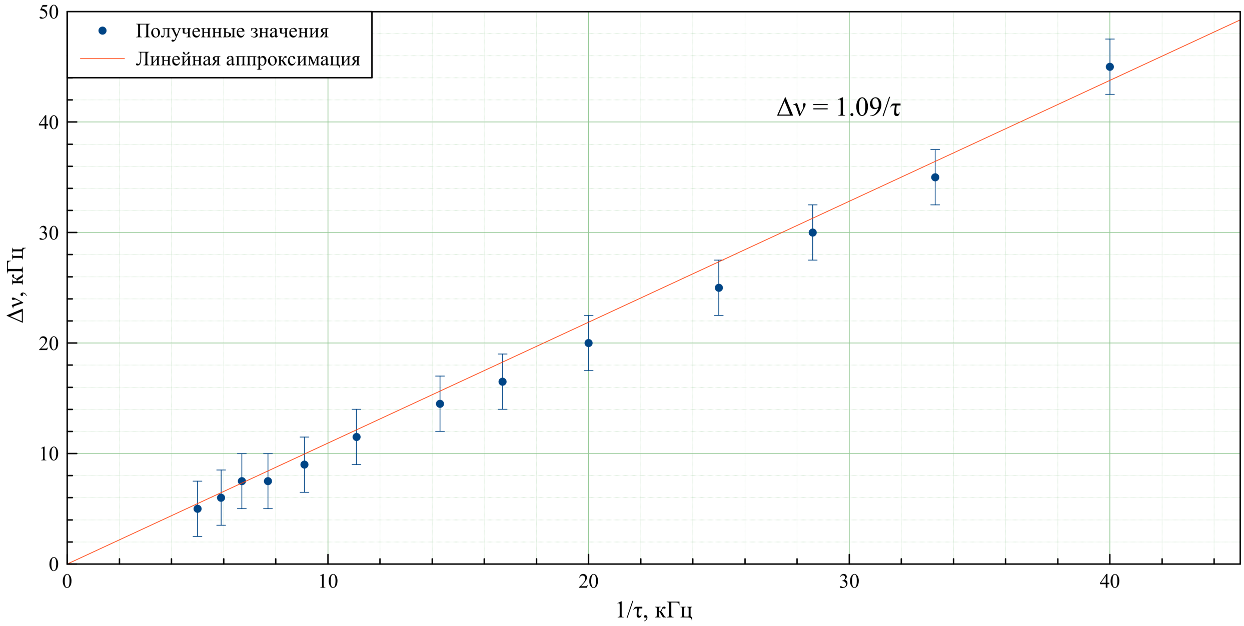

Рис. 2: График зависимости $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность посчитаем методом наименьших квадратов: $k = \langle\Delta\nu\tau\rangle \cdot \langle\tau^2\rangle$, $\sigma_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\langle\Delta\nu^2\rangle \cdot \langle\tau^2\rangle - k^2}$, тогда $\Delta\nu\tau = 1.1 \pm 0.1$

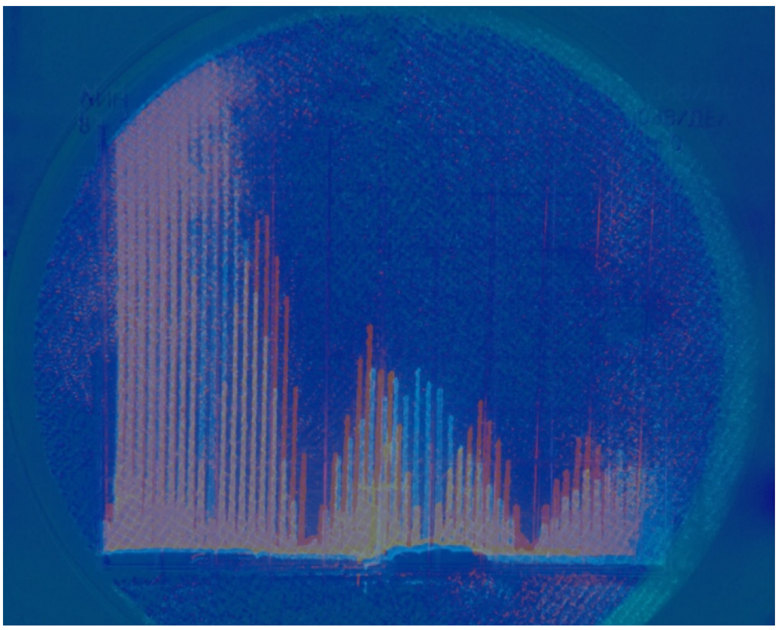

Рис. 3: Наложение спектра колебаний с различными параметрами длительности импульса: красный $\tau = 100$ мкс, синий: $\tau = 50$ мкс

Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Рассмотрим периодическую последовательность *цугов* гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ. Тогда согласно 3:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1)\, dt \tag{8}$$

Работа

В работе используются: *анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф; генератор сигналов Г6-34*

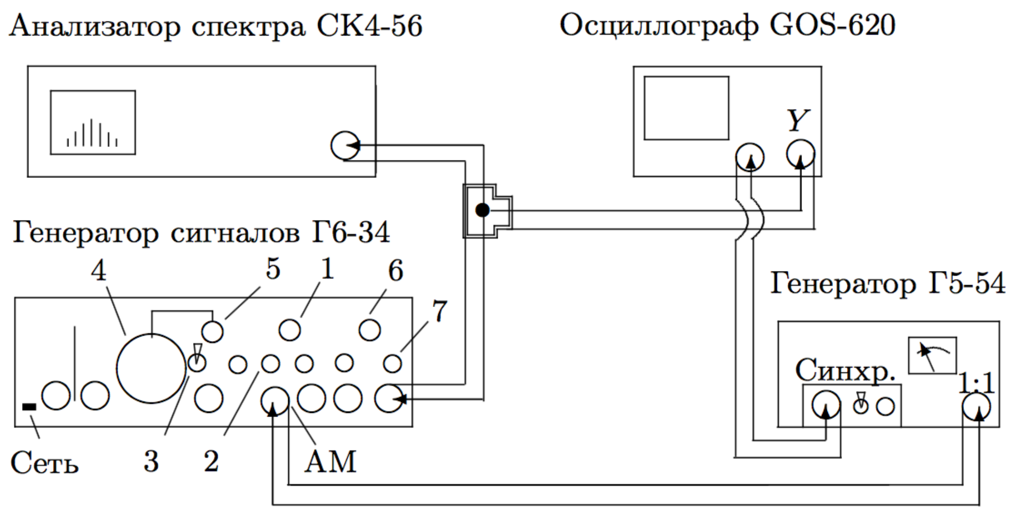

Рис. 4: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

Собираем схему согласно 4. Получаем на экране осциллографа последовательность периодических цугов гармонических колебаний, получаемых модулированием синусоиды прямоугольными импульсами. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала с параметрами:

$$\nu_0 = 25 \text{ кГц}, f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}, \tau = 100 \text{ мкс}, m_x = 5 \text{ кГц}$$

При увеличении τ вдвое при неизменной частоте повторений, вдвое уменьшается ширина спектра, в соответствии с соотношением неопределенности: $\Delta\nu\tau \simeq 1$.

При изменении несущей частоты $\nu_0 = 25, 10$ или 40 кГц при неизменных $f_{\text{повт}} = 10^3$ Гц, $\tau = 100$ мкс, $m_x = 5$ кГц, изменяется сдвиг спектра по оси частот.

$f_{\text{повт}}$, кГц	1	2	3	4	5	6	7	8
x, клеток	3	3	3	3	3	10	10	10
n, штук	16	8	6	4	3	9	7,5	7
$\delta\nu$, кГц	0,94	1,88	2,50	3,75	5,00	5,56	6,67	7,14
$\sigma\delta\nu$	0,12	0,47	0,83	0,94	0,83	0,62	0,89	1,02

Таблица 2: Зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от $f_{\text{повт}}$ при $\tau = 50$мкс

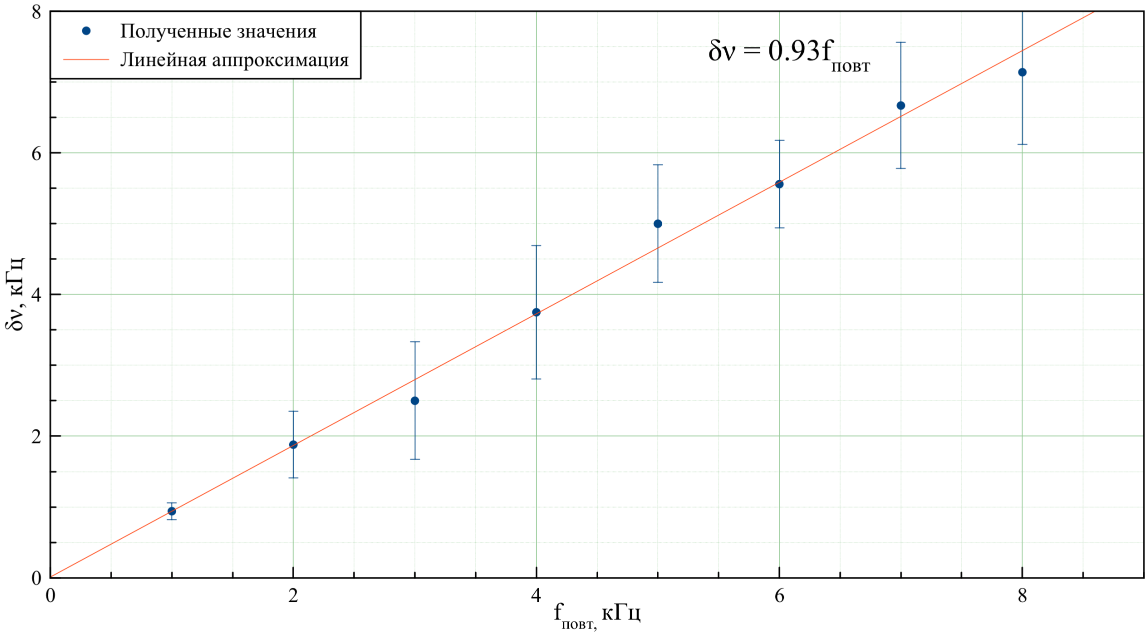

Рис. 5: График зависимости $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность посчитаем методом наименьших квадратов: $k = \dfrac{\langle \delta\nu f_{\text{повт}} \rangle}{\langle f^2_{\text{повт}} \rangle}$, $\sigma_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{\langle \delta\nu^2 \rangle}{\langle f^2_{\text{повт}} \rangle} - k^2}$, тогда $\Delta\nu\tau = 0.93 \pm 0.17$

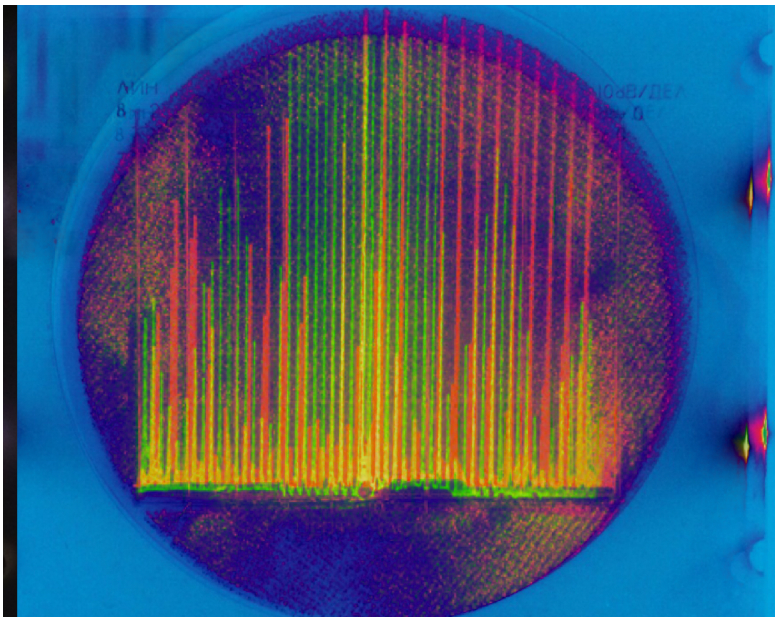

Рис. 6: Наложение спектра колебаний с различными частотами повторения: синий: $f_{\text{повт}} =$ 1кГц, красный: $f_{\text{повт}} =$ 2кГц

Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых, в свою очередь, меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0[1 + m\cos(\Omega t)]\cos(\omega_0 t) \tag{9}$$

Коэффициент m - глубина модуляции и по определению:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \tag{10}$$

Работа

В работе используются: *анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф; генератор сигналов Г6-34*

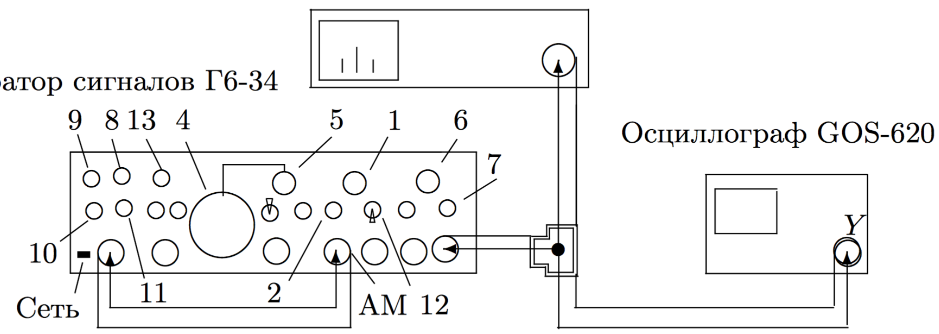

Рис. 7: Схема для исследования спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Собираем схему согласно 7. Получаем на экране осциллографа гармонический сигнал, модулированный по амплитуде. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала.

Чтобы измерить глубину модуляции, измерим A_{max}, A_{min} и подставим в формулу 10. Построим график отношения $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ в зависимости от m.

Рассчитаем теоретический коэффициент наклона, воспользовавшись формулой:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega t). \tag{11}$$

$$a_{\text{осн}} = A_0,\ a_{\text{бок}} = \frac{A_0 m}{2} \Rightarrow k_{\text{теор}} == 0.5$$

Таблица 3: Зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от глубины модуляции m

$2A_{min}$, мм	$2A_{max}$, мм	m	$a_{\text{бок}}$, мм	$a_{\text{осн}}$, мм	$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	$\sigma_{a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}}$
0,80	6,50	0,78	2,20	6,20	0,35	0,02
2,70	4,40	0,24	0,60	6,70	0,09	0,01
1,60	5,70	0,56	1,90	6,30	0,30	0,02
1,20	6,20	0,68	2,40	6,50	0,37	0,02
0,80	6,60	0,78	2,50	6,40	0,39	0,02
0,40	7,00	0,89	3,00	6,50	0,46	0,02
0,20	7,20	0,95	3,10	6,40	0,48	0,02
2,20	5,00	0,39	1,20	6,40	0,19	0,02

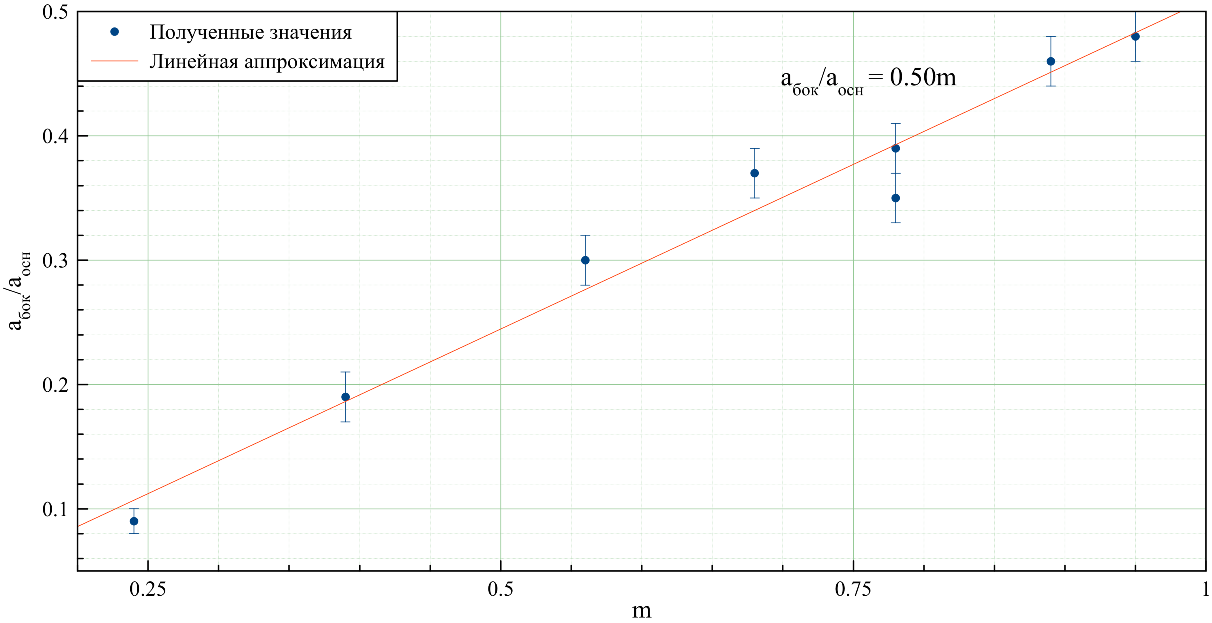

Рис. 8: График зависимости $\dfrac{a_{бок}}{a_{осн}}(m)$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность посчитаем методом наименьших квадратов: $k = \dfrac{\left\langle \frac{a_{бок} m}{a_{осн}} \right\rangle}{\langle m^2 \rangle}$, $\sigma_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\dfrac{\left\langle \left(\frac{a_{бок}}{a_{осн}} \right)^2 \right\rangle}{\langle m^2 \rangle} - k^2}$, тогда $\dfrac{a_{бок}}{a_{осн} m} = 0.5 \pm 0.01$

4 Вывод

Экспериментально было проверено соотношение неопределенности в первых двух экспериментах. Точность достаточно высокая, полученные значения соответствуют ожиданиям. Основной вклад в погрешность вносит отсутствие мелких делений на анализаторе спектра.

В третьем эксперименте было проверена зависимость отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции.